

Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр
Российской академии наук»

ТРУДЫ

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 7, 2020

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Петрозаводск
2020

Главный редактор
А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; О. Н. БАХМЕТ (зам. главного редактора), член-корр. РАН, д. б. н.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; И. В. ДРОБЫШЕВ, доктор биологии (Швеция – Канада); Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; Х. ЙООСТЕН, доктор биологии, проф. (Германия); А. М. КРЫШЕНЬ, д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; О. Л. КУЗНЕЦОВ, д. б. н.; Н. В. ЛУКИНА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; О. ОВАСКАЙНЕН, доктор математики, проф. (Финляндия); О. Н. ПУГАЧЕВ, академик РАН, д. б. н.; С. А. СУББОТИН, доктор биологии (США); Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; Т. Э. ХАНГ, доктор географии (Эстония); П. ХЁЛЬТТЯ, доктор геологии, проф. (Финляндия); К. ШАЕВСКИЙ, доктор математики, проф. (Польша); В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Редакционная коллегия серии
«Математическое моделирование и информационные технологии»

В. А. ВАТУТИН, д. ф.-м. н., проф.; Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент;
В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент.

Издается с января 2009 г.

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Тел. (8142)762018; факс (8142)769600
E-mail: trudy@krc.karelia.ru

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences

TRANSACTIONS

**of the KARELIAN RESEARCH CENTRE
of the RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES**

No. 7, 2020

**MATHEMATICAL MODELING
AND INFORMATION TECHNOLOGIES**

Petrozavodsk
2020

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; O. N. BAKHMET (Deputy Editor-in-Chief), RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); I. V. DROBYSHEV, PhD (Biol.) (Sweden – Canada); N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; T. E. HANG, PhD (Geog.) (Estonia); P. HÖLTTÄ, PhD (Geol.), Prof. (Finland); E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; H. JOOSTEN, Dr. (Biol.), Prof. (Germany); A. M. KRYSHEN', DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; O. L. KUZNETSOV, DSc (Biol.); N. V. LUKINA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; O. OVASKAINEN, PhD (Math.), Prof. (Finland); O. N. PUGACHYOV, RAS Academician, DSc (Biol.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; S. A. SUBBOTIN, PhD (Biol.) (USA); D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); K. SZAJEWSKI, PhD (Math.), Prof. (Poland); A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Editorial Board of the “Mathematical Modeling and Information Technologies” Series

A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.; V. A. VATUTIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.

Published since January 2009

Monthly

Editorial Office address: 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
Tel. (8142)762018; fax (8142)769600
E-mail: trudy@krc.karelia.ru
Full-text electronic version: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

УДК 550.385:616 + 614.88

МАГНИТНЫЕ БУРИ И КАРТИНА ВЫЗОВОВ СКОРОЙ ПОМОЩИ В ПЕТРОЗАВОДСКЕ

Б. З. Белашев, Н. В. Крутских, А. А. Герасимова

*Институт геологии КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Используются геофизические и геохимические данные, а также обезличенный каталог вызовов скорой помощи за период 2015–2017 гг. для изучения заболеваемости населения в Петрозаводске, расположенном в субарктической зоне со сложными климатическими и погодно-геомагнитными условиями. Временные, пространственные и другие распределения экстренных вызовов скорой медицинской помощи способны отразить влияние разных факторов на заболеваемость населения. Подтверждено влияние геомагнитной активности на количество вызовов скорой помощи по поводу инфаркта миокарда и стенокардии, снижение числа вызовов в выходные и праздничные дни по кардиозаболеваниям. Распределение числа вызовов скорой помощи по распространенным заболеваниям в жилых районах не коррелирует с загрязнением городских почв. Полученные результаты отражают структуру заболеваемости городского населения и не противоречат известным экологическим моделям.

Ключевые слова: геомагнитная активность; заболевания; вызовы скорой помощи; распределения; спектр; диагноз.

B. Z. Belashev, N. V. Krutskikh, A. A. Gerasimova. MAGNETIC STORMS AND PATTERN OF EMERGENCY AMBULANCE CALLS IN PETROZAVODSK

We use geophysical and geochemical data and an impersonalized catalogue of ambulance calls for the period 2015–2017 to study the morbidity of the population in Petrozavodsk, which is located in a sub-Arctic region with challenging climatic, weather and geomagnetic conditions. Temporal, spatial and other emergency call distributions, reflecting the effects of a variety of factors on morbidity, have been investigated. The effect of geomagnetic activity on the number of ambulance calls with myocardial infarction and stenocardia diagnoses and a reduction in the number of calls on weekends and holidays were corroborated. Soil pollution patterns in the city did not correlate with the distribution of the number of ambulance calls associated with common diseases in residential areas. The results reflect the structure of the morbidity of the urban population, and do not contradict the known environmental models.

Keywords: geomagnetic activity; diseases; emergency calls; distributions; spectrum; diagnosis.

ВВЕДЕНИЕ

В исследованиях процессов среды обитания и реакции на них человека приоритетными считают задачи изучения факторов, влияющих на здоровье людей. Особенно акту-

альной проблема оказывается для сердечно-сосудистых заболеваний — основной причины смертности в развитых странах. Итогом обобщения результатов по регионам с разным положением, климатом, особенностями среды

могли бы стать модели заболеваемости населения.

Известны эффекты, оказываемые электромагнитными полями транспорта, линий электропередачи, вышек связи, силовых электроустановок на физическое и психическое состояние людей [11]. Для геомагнитных вариаций эффективность воздействия на человека пока не считается подтвержденной. Внимание, уделяемое этой проблеме после работ А. Л. Чижевского [15, 16], связано с противоречивостью результатов исследований.

Пристальный интерес вызывают магнитные бури – мощные и длительные возмущения геомагнитного поля, по времени коррелирующие с солнечными вспышками. Причиной магнитных бурь считают корпускулярное излучение, сопровождающее вспышки, возмущающее магнитосферу, ионосферу, вызывающее полярные сияния, появление поверхностных зарядов, токов, сбой электроники, навигационных систем, деградацию солнечных батарей спутников, наводки в линиях электропередачи, трубопроводах, кабелях, трансформаторах, оказывающее радиационное воздействие на космонавтов и пассажиров авиарейсов [25]. На большинство населения магнитные бури не действуют. Исключение составляют люди с повышенной чувствительностью, находящиеся в экстремальных ситуациях, страдающие сердечной недостаточностью и нервными расстройствами [33].

Магнитное поле способно воздействовать на кроветворную, нервную, пищеварительную системы организма через вязкость крови, скорость распространения сигналов, устойчивость микроорганизмов [2, 3, 10, 30]. Циклические компоненты поля синхронизируют биологические ритмы, спорадические возмущения нарушают их. В части работ корреляционные связи заболеваемости и магнитных бурь не подтверждаются [14].

В ряде исследований для анализа действия факторов среды на заболеваемость населения используют каталоги вызовов бригад скорой медицинской помощи, содержащие сведения о месте, времени вызова, данных пациента, диагнозе заболевания [14, 24, 37–39]. Среди таких исследований отметим работы [14, 34, 36], демонстрирующие характерные методические приемы. Монография [14] использует базу вызовов по Москве за длительный период, рассматривает большой объем медицинских показателей и разнообразные заболевания. В статье [36], посвященной влиянию погодных факторов на ишемическую болезнь сердца в г. Каунасе (Литва) со сравнительно неболь-

шим числом жителей, высказано мнение о связи погоды и геомагнитной активности. Изучение действия геомагнитной обстановки на ишемическую болезнь сердца, инфаркт миокарда, инсульт проведено на примере населения Москвы в [34] с помощью обобщенной линейной модели, для которой входными параметрами являются температура, давление, геомагнитная активность и другие.

Заболеваемость населения принято сопоставлять с загрязненностью территории. Риск кардиозаболеваний в последние десятилетия связывают с аэрополлютантами [20, 23, 31].

Актуально изучить заболеваемость населения в арктических и субарктических районах со сложными климатом, погодными и геомагнитными условиями [29].

Цель настоящего исследования — построить и проанализировать распределение вызовов скорой помощи в Петрозаводске, получить профили по группам заболеваний, оценить влияние факторов окружающей среды на заболевания человека.

Город Петрозаводск (61°47'05"N, 34°20'48"E) расположен на берегу Онежского озера. Для него характерными являются переменная погода, повышенная влажность, обильные осадки, сильный ветер и колебания атмосферного давления. Близость к высоким широтам приводит к повышенной геомагнитной активности, пульсациям геомагнитного поля, высоким ионосферным токам и расширению зоны полярных сияний. Изучение заболеваемости населения Карелии обычно базируется на публикациях Госкомстата. В местной медицинской статистике преобладают респираторные, сердечно-сосудистые и онкологические заболевания [12].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Исследование основано на данных, полученных Петрозаводской геофизической обсерваторией, Лабораторией рентгеновской астрономии Физического института РАН, имперсонизированном каталоге вызовов скорой помощи петрозаводской Больницы скорой медицинской помощи за период 1.01.2015–19.12.2017 и результатах геохимического опробования городских почв [8]. Находящаяся в Ботаническом саду, лесном массиве на окраине города, геофизическая обсерватория подвержена слабому техногенному воздействию. Проведению здесь геофизических и метеорологических наблюдений способствуют наличие охраны, электричества, канала передачи данных [17].

Горизонтальные и вертикальную составляющие магнитного поля Земли регистрируют

геофизическим комплексом GI MTS-1 с частотой 50 Гц. По результатам измерений формируют 5- и 10-минутные базы данных.

Отклонения магнитного поля Земли от нормы за 3-часовой период описывают планетарным индексом Кр в диапазоне от 0 до 9. Значения от 5 до 9 соответствуют магнитным бурям [28]. В реальном времени индекс Кр отображается на сайтах [22, 26].

Каталог вызовов скорой помощи представляет собой таблицу, строки которой соответствуют вызовам, а столбцы – их атрибутам: населенный пункт, адрес, возраст, пол пациента, дата и время вызова, диагноз заболевания по классификации МКБ-10. Общее число вызовов за указанный период составило 352 641. В анализе использованы подтвержденные вызовы с диагнозом заболевания, поставленным медицинским работником в составе бригады скорой помощи.

Распределения N вызовов для k событий строили, подсчитывая число $f_k(x)$ в диапазоне изменения переменной x по формуле:

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) + \delta_k(x),$$

$k = 1, \dots, N$; $f_0(x) = 0$; $\delta_k(x) = 1$, если $h < x < h + \Delta h$, и $\delta_k(x) = 0$, если $x < h$ или $x > h + \Delta h$, k – номер вызова, h и Δh – отсчет и шаг гистограммы соответственно.

Метод наложенных эпох использован для построения распределения числа вызовов скорой помощи относительно дня с заданным индексом Кр.

При обработке распределений в системе «MATLAB» [21] применяли функции спектрального анализа, аппроксимации данных, кластеризации. При работе с картографическим материалом задействован пакет «QGIS» [27].

РЕЗУЛЬТАТЫ

Профиль группы сердечно-сосудистых заболеваний

Распределение вызовов бригад скорой помощи по основным диагнозам сердечно-сосудистых заболеваний по годам приведено в табл. 1. Более половины вызовов приходится на эссенциальную гипертензию, стенокардию – около 10 %, хроническую ишемическую болезнь сердца – 9–13 %, инсульт – примерно 8 %.

Таблица 1. Число вызовов скорой помощи в Петрозаводске по основным заболеваниям кардиопрофиля за период 01.01.2015–19.12.2017

Table 1. The number of emergency calls in Petrozavodsk associated with main cardiological diseases during the period 01.01.2015–19.12.2017

Заболевание Disease	Код МКБ ICD Code	2015 (%)	2016 (%)	2017 (%)
Эссенциальная (первичная) гипертензия Essential hypertension	I10	13013 (52.8)	12475 (51.6)	12530 (50.5)
Вторичная гипертензия Secondary hypertension	I15	12 (0.05)	10 (0.04)	13 (0.05)
Стенокардия Stenocardia	I20	2554 (10.4)	2183 (9.0)	2102 (8.5)
Острый инфаркт миокарда Acute myocardial infarction	I21	452 (1.8)	480 (2.0)	498 (2.0)
Повторный инфаркт миокарда Repeated myocardial infarction	I22	35 (0.14)	28 (0.12)	30 (0.12)
Хроническая ишемическая болезнь сердца Chronic ischemic heart disease	I25	3210 (13.0)	2266 (9.4)	2098 (8.5)
Острый миокардит Acute myocarditis	I40	31 (0.13)	21 (0.09)	17 (0.07)
Кардиомиопатия Cardiomyopathy	I42	77 (0.31)	74 (0.31)	67 (0.27)
Внезапная остановка сердца Sudden cardiac arrest	I46	17 (0.07)	12 (0.05)	18 (0.07)
Инсульт Stroke	I64	1905 (7.7)	1933 (8.0)	1950 (7.9)
Все заболевания группы All diseases of the group	I00-99	24628 (100)	24182 (100)	24796 (100)

Временные распределения числа вызовов скорой помощи

Рис. 1 показывает изменение Z-компоненты магнитного поля в Петрозаводске с 18 по 25 октября 2015 г. (а) и распределения числа вызовов скорой помощи в октябре 2015 г. по поводу сердечно-сосудистых заболеваний (б–е). Красным цветом отмечены вызовы в дни магнитных бурь. Наименьшее значение Z-компоненты поля (а) отвечает магнитной буре 18.10. Временные зависимости средних суточных значений Кр-индекса (а) и числа вызовов скорой помощи к пациентам с диагнозом инфаркт миокарда (в), их спектры (б, г), рассчитанные по остаткам после вычитания трендов, показаны на рис. 2. Тренды представлены регрессионными зависимостями распределений вызовов скорой помощи полиномами десятой (а) и нулевой (в) степеней. Расчет спектров методом максимальной энтропии [18] проведен с шириной окна 40. Дисперсии отклонений от трендов (а, в) равны 0.44 и 1.27 соответственно. Распределение хи-квадрат с двумя степенями свободы и вероятностью 0.95 делает значимые пики спектров с амплитудами более 0.12 (б) и 0.34 (г) [1]. Тренд (а) отражает сезонную изменчивость. В спектре вариаций Кр-индекса (б) основными являются 28.4-суточный цикл, близкий к 27-дневному периоду вращения Солнца, двухнедельный (14.2 суток) и недельный (6.7 суток) циклы. Для инфаркта миокарда (в) сезонные факторы не проявлены. В спектре (г) преобладают недельный, 25.6-, 15- и 3-суточные циклы. Для других сердечно-сосудистых заболеваний сезонные факторы влияют на частоту вызовов по гипертензии, стенокардии, ишемической болезни сердца. Близкий к периоду геомагнитной активности цикл 25.6 суток выражен в спектрах гипертензии, слабее – в спектрах стенокардии и инсульта, отсутствует в спектре ишемической болезни сердца. В большинстве спектров есть пики, близкие к недельным, полунедельным, 3-, 4- и 6-суточным периодам.

Суточная динамика числа вызовов скорой помощи. Эффект выходного дня

Рис. 3 демонстрирует суточную динамику числа вызовов скорой помощи для пациентов с диагнозом инфаркт миокарда (а) в рабочие, выходные и праздничные дни (б), распределение пациентов с диагнозом инфаркт миокарда по возрасту (в), аналогичные (б) распределения вызовов скорой помощи для пациентов с диагнозами эссенциальная гипертензия (г), стенокардия (д), ишемическая болезнь сердца (е) и инсульт (ж). Вызовы к пациентам

мужчинам (816) преобладают над вызовами к пациентам-женщинам (569) (а, в). Проверка тестом Стьюдента показала, что оба распределения, приведенные к числу «мужских» вызовов с вероятностью 0.95, имеют одинаковые средние значения. В рабочие дни максимальные числа вызовов скорой помощи приходятся на 10–11, 14–15, 19–20 часов. Наиболее подверженными инфаркту миокарда оказываются пациенты возрастов 55, 63, 76–83 лет. Гистограммы (б, г–ж) распределения вызовов скорой медицинской помощи в выходные и праздничные дни (346 дней), приведенные к 738 рабочим дням, демонстрируют снижение числа вызовов скорой помощи по поводу заболеваний сердечно-сосудистой системы в три и более раз.

Влияние геомагнитной активности на число вызовов скорой помощи

Коэффициент корреляции временных значений индекса геомагнитной активности Кр (рис. 2, а) и числа вызовов скорой медицинской помощи с диагнозом инфаркт миокарда (рис. 2, в) равен 0.04. Его проверка на значимость с $p < 0.05$ подтверждает вывод [14] об отсутствии корреляционной связи между указанными величинами.

При изучении характера связи геомагнитной активности и заболеваемости применен кластерный анализ. Алгоритмом «k-средних» посуточных значений Кр-индекса выявлено пять кластеров (рис. 4, а). Для каждого кластера и кардиозаболевания получены распределения числа вызовов скорой помощи от временного сдвига относительно дня события с использованием метода наложенных эпох. Распределения (б, в) для инфаркта миокарда и стенокардии, приведенные к числу событий 321 самого большого кластера, демонстрируют рост числа вызовов в дни, близкие к магнитным бурям.

Пространственные распределения вызовов скорой помощи

Пространственные распределения числа вызовов скорой помощи построены для группы сердечно-сосудистых заболеваний, шизофрении, эпилепсии, вегетососудистой дистонии, новообразований, бронхиальной астмы и других социально значимых заболеваний. Чтобы оценить влияние загрязненности почв на заболеваемость населения, распределения вызовов скорой помощи для 52 жилых зон Петрозаводска сравнивали с данными геохимического опробования почв [8]. Для оценки загрязненности почв использован показатель экологической опасности (ПЭО), выра-

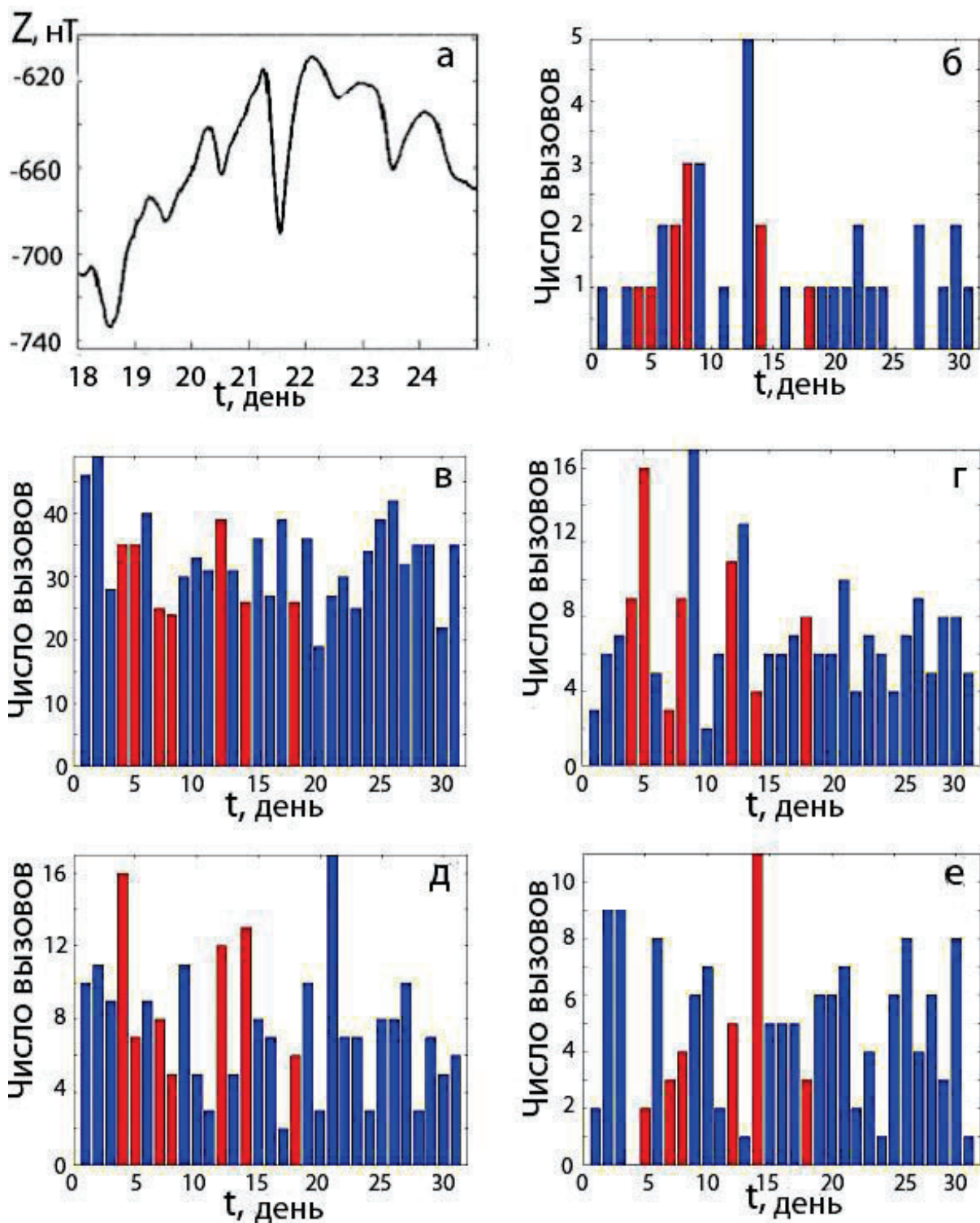


Рис. 1. Изменение Z-компоненты магнитного поля с 18.10 по 25.10.2015 г. (а) и динамика вызовов скорой помощи в октябре 2015 г. для пациентов с диагнозами инфаркт миокарда (б), эссенциальная гипертензия (в), стенокардия (г), хроническая ишемическая болезнь сердца (д) и инсульт (е). ■ – дни с $K_p > 4$, ■ – дни с $K_p < 5$. Наименьшее значение Z-компоненты поля (а) отвечает магнитной буре 18.10

Fig. 1. Variations in Z-component of a magnetic field from 18.10 to 25.10.2015 (a) and emergency ambulance call dynamics in October 2015 for patients with: myocardial infarction (б), essential hypertension (в), stenocardia (г), chronic ischemic heart disease (д) and stroke (е). ■ – the days with $K_p > 4$, ■ – the days with $K_p < 5$. The smallest value of Z-constituent of the field (a) is consistent with the magnetic storm on October 18

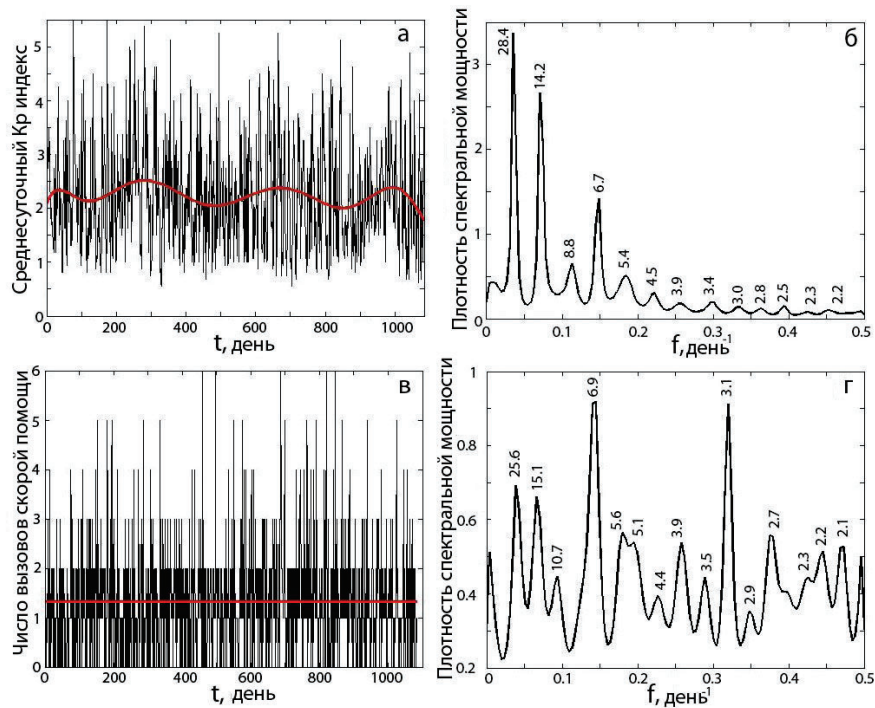


Рис. 2. Временные зависимости дневных значений Кр-индекса (а) и числа вызовов скорой помощи для пациентов с диагнозом инфаркт миокарда (в), их тренды (-) и спектры (б и г) соответственно
 Fig. 2. Time dependences of daily Kp-index values (a) and the number of emergency ambulance calls for patients with myocardial infarction (в) and their trends (-) and spectra (б, г), respectively

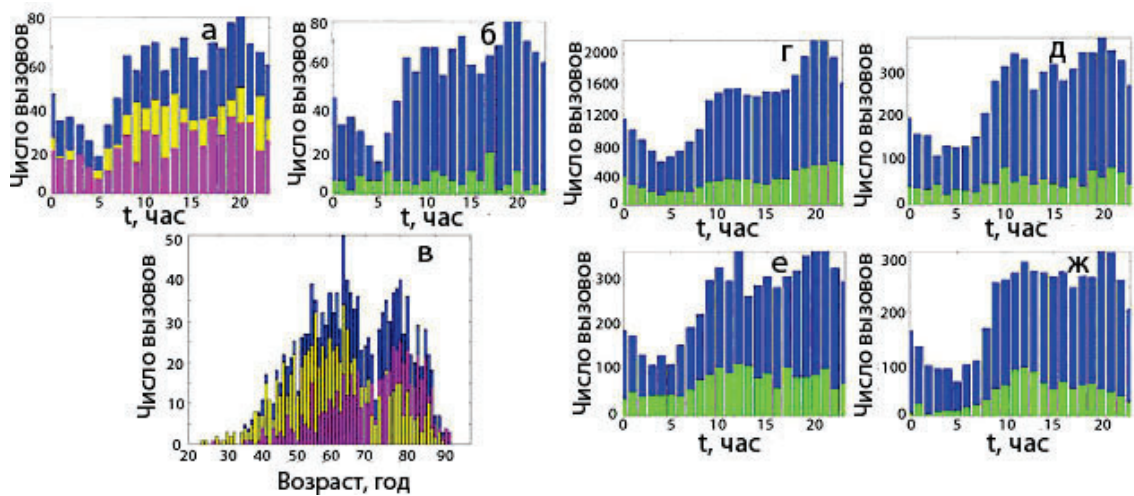


Рис. 3. Распределение суточной динамики вызовов скорой помощи по поводу инфаркта миокарда (а), распределение динамики вызовов скорой помощи для пациентов с этим диагнозом в рабочие, выходные и праздничные дни (б), возрастное распределение пациентов с инфарктом миокарда (в) и распределения динамики вызовов скорой помощи, аналогичные (б) для пациентов с диагнозами эссенциальная гипертония (г), стенокардия (д), ишемическая болезнь сердца (е) и инсульт (ж). В гистограммах (а, в) ■ – все вызовы, ■ – мужские и ■ – женские вызовы. В гистограммах (б, г–ж) ■ – вызовы в рабочие дни, ■ – вызовы в выходные и праздничные дни

Fig. 3. Distribution showing daily emergency ambulance call dynamics for patients with myocardial infarction (а), dynamics distribution of calls with this diagnosis on working days, at weekends and on holidays (б), age distribution of patients with myocardial infarction (в), call dynamics distribution similar to (б), for patients with essential hypertension (г), stenocardia (д), ischemic heart disease (е) and stroke (ж). In charts (а, в) ■ – all calls, ■ – male and ■ – female calls. In charts (б, г–ж) ■ – the calls on working days, ■ – the calls on weekends and on holidays

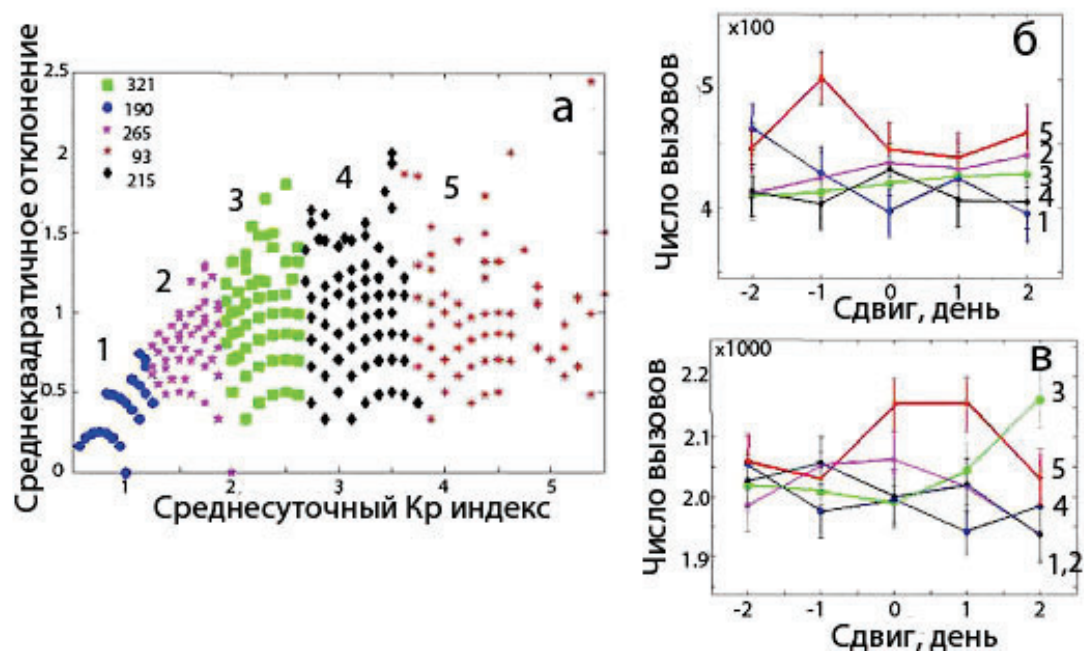


Рис. 4. Кластерный анализ посуточных значений Кр-индекса (а) и распределения числа вызовов скорой медицинской помощи относительно сдвига от дня элемента кластера для заболеваний инфаркт миокарда (б) и стенокардия (в)

Fig. 4. Cluster analysis of daily Kp-index values (a) and the distribution of the number of ambulance calls relative to a shift from the cluster element day for patients with myocardial infarction (б) and stenocardia (в)

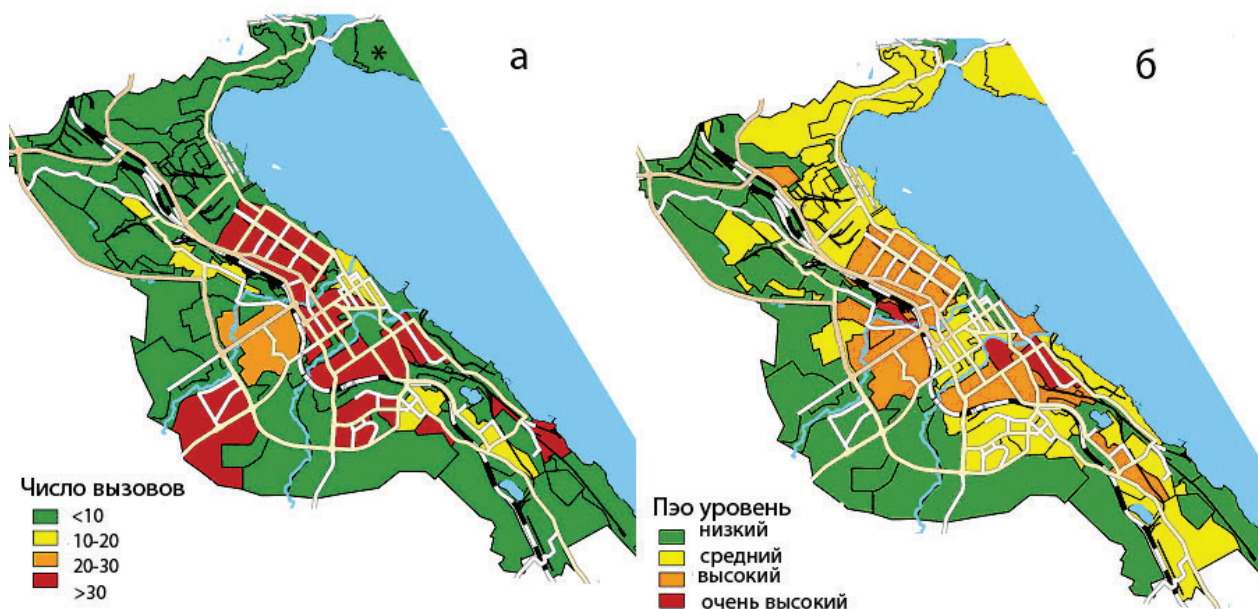


Рис. 5. Распределение вызовов бригад скорой медицинской помощи к пациентам с диагнозом бронхиальная астма по территории Петрозаводска (а) и распределение показателя экологической опасности – характеристики загрязнения почв (б). Звездочкой отмечено положение геофизической обсерватории «Петрозаводск»

Fig. 5. Distribution of emergency ambulance calls for patients with brochial asthma in Petrozavodsk (а) and environmental hazard index distribution (б). The asterisk marks the position of the Petrozavodsk geophysical observatory

женный суммой средневзвешенных значений коэффициентов концентраций загрязняющих элементов As, Pb, Zn, Cd, Co, Cu, V, W. На рис. 5 приведены карты Петрозаводска, отражающие распределения числа вызовов скорой помощи к пациентам с диагнозом бронхиальная астма (а) и показателя экологической опасности (б). Коэффициенты корреляции пространственных распределений вызовов скорой помощи с диагнозами отмеченных заболеваний и показателя экологической опасности по этим зонам представлены в табл. 2.

ОБСУЖДЕНИЕ

Согласно профилю кардиозаболеваний (табл. 1) число вызовов скорой помощи по приведенным заболеваниям по годам изучаемого периода находится на одном уровне. Небольшое снижение числа вызовов наблюдается для стенокардии, ишемической болезни сердца. Максимумы числа вызовов скорой помощи к пациентам с диагнозами данной группы заболеваний (рис. 1, б–е) не обязательно приходятся на дни магнитных бурь. Циклы, близкие к 3 и 6 суткам (рис. 2), можно связать с активностью гормонов щитовидной железы, близкие к 4 суткам – глюкокортикоидных гормонов, катализирующих процессы метаболизма [4]. Циркадным циклам приписывают универсальный характер или считают их проявлением нежелания людей в выходные дни попадать в больницу [14]. При инфаркте миокарда последний фактор не действует, помощь требуется безотлагательно, а в спектре временной зависимости вызовов недельный пик присутствует (рис. 2, г). Для инфаркта миокарда характерны гендерные различия пациентов при вызовах скорой помощи (рис. 3, а, с), наличие максимумов и минимумов в распределении вызовов по возрасту [32]. Малое число вызовов скорой помощи больными 72–75, 85 лет отражает убыль населения, спад рождаемости во время Великой Отечественной войны и голода тридцатых годов.

Эффект выходного дня (рис. 3, б, г–ж) можно интерпретировать на основе свойств гормона стресса – кортизола [35]. При нормальной концентрации в крови гормон регулирует минеральный и водный обмен, расщепляет жиры, препятствует выработке холестерина, синтезирует инсулин и гликоген. При стрессе его выброс в кровь вызывает ее приток к сердцу, мышцам, заставляя мгновенно реагировать на опасность, провоцируя заболевания. Отдых от производственной деятельности снижает уровень кортизола и число

вызовов скорой помощи по поводу сердечно-сосудистых заболеваний в выходные дни.

Пики в распределениях суточной динамики вызовов скорой помощи можно объяснить загазованностью воздуха выхлопами автотранспорта в часы пик (9–10, 13–14, 18–19 часов) и околочасовой задержкой развития заболевания и обращения в службу скорой помощи. В пределах небольшого города нерегулярное в выходные и праздничные дни движение автотранспорта становится интенсивным в часы пик рабочих дней. Работающие на малых оборотах двигателя стоящих в «пробках» автомобилей в максимальном количестве выбрасывают в атмосферу угарный газ, окислы азота, свинца, бензапирен, другие вредные вещества и пыль.

Альтернативное объяснение эффекта выходного дня дает работа [5], в которой недельная цикличность трактуется как следствие воздействия на магнитосферу и литосферу индустриальной активности, подавляющей регулярные Pc магнитные вариации и снижающей сейсмическую активность в рабочие дни. Пики суточной динамики вызовов скорой помощи отражают рост потребления электроэнергии в определенные часы рабочих дней. Механизмом переноса электромагнитных воздействий на человека может быть изменение кластерной структуры и свойств воды [13]. Такими механизмами также считаются резонансы Шумана, вариации геомагнитного поля Pc1, имеющие биотропные частоты [7, 19], влияние геомагнитных возмущений на колебания атмосферы и связанные с этим изменения температуры и давления [9].

Данные рис. 4 свидетельствуют о нелинейности связи между временными изменениями Kp-индекса и числа вызовов скорой помощи по поводу сердечно-сосудистых заболеваний. Для нелинейной связи коэффициент корреляции не является подходящей характеристикой. К сильным возмущениям магнитного поля, доля которых невелика, чувствительны отдельные заболевания. С этих позиций осторожно, по-видимому, следует применять линейные модели заболеваемости с геомагнитной активностью на входе. Полученный результат и факты о влиянии магнитных полей на скорость седиментации эритроцитов и тромбообразование [6] указывают на адаптацию организма человека к распространенным вариациям геомагнитного поля.

Анализ пространственных распределений числа вызовов скорой помощи для группы сердечно-сосудистых заболеваний по районам города показал, что максимальное число вы-

Таблица 2. Матрица коэффициентов корреляции вызовов скорой медицинской помощи для пациентов с некоторыми заболеваниями и показателя экологической опасности (ПЭО)

Table 2. Correlation coefficients matrix of emergency calls for patients with certain diseases and environmental hazard indicator (ЕНІ)

	I10	I21	I20	I25	I64	F10	F20	G90	G40	J	J45	C	ПЭО ЕНІ
I10	1												
I21	0.94	1											
I20	0.98	0.96	1										
I25	0.99	0.94	0.99	1									
I64	0.96	0.96	0.99	0.98	1								
F10	0.54	0.61	0.53	0.55	0.62	1							
F20	0.62	0.62	0.67	0.63	0.67	0.44	1						
G90	0.99	0.93	0.98	0.98	0.97	0.54	0.64	1					
G40	0.97	0.94	0.99	0.97	0.97	0.59	0.67	0.98	1				
J	0.98	0.92	0.97	0.98	0.97	0.55	0.62	0.98	0.96	1			
J45	0.94	0.85	0.90	0.92	0.89	0.49	0.64	0.94	0.92	0.92	1		
C	0.95	0.90	0.93	0.96	0.94	0.61	0.55	0.94	0.93	0.95	0.88	1	
ПЭО ЕНІ	0.24	0.21	0.25	0.24	0.23	0.10	0.16	0.26	0.26	0.22	0.26	0.23	1

зовов по поводу эссенциальной гипертензии (более 10 вызовов на 100 человек) приходится на районы неблагоустроенной застройки с преимущественно пожилым населением. Вызовы по стенокардии преобладают на окраинах в старых районах города. Число вызовов с диагнозом инфаркт миокарда повышено для территорий, прилегающих к действующим заводам, что может отражать качество воздушной среды. Ишемическая болезнь сердца распространена (более 20 вызовов на 1000 человек) в центральных районах города, микрорайонах, где велика доля проживающих молодых людей. Проверка коэффициентов корреляции (табл. 2) с $p < 0.05$ для 52 жилых зон Петрозаводска показала, что они меньше порогового значения 0.27. Загрязненность почв металлами не влияет на число вызовов скорой помощи по рассматриваемым диагнозам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционные способы обработки данных применены для получения разнообразных распределений вызовов скорой помощи и оценки влияния на них факторов окружающей среды. Распределение вызовов скорой помощи по отдельным диагнозам складывается в общую динамическую картину заболеваемости городского населения. Тренды временных распределений вызовов отражают влияние сезонных факторов на частоту вызовов скорой помощи, а спектры остатков оказываются информативными в отношении цикличности заболе-

ваний. Распределение вызовов скорой помощи по возрасту и полу пациентов характеризует демографию населения, чувствительность к заболеваниям различных групп. Пространственное распределение вызовов скорой помощи показывает связь между заболеваемостью и условиями жизни населения. Снижение числа обращений в выходные дни пациентов с заболеваниями сердца может быть связано со снижением уровня гормона стресса кортизола в крови, меньшим влиянием деятельности человека на литосферу и магнитосферу. Пики распределения вызовов скорой помощи в суточной динамике рабочих дней могли отражать влияние выхлопов автотранспорта на болезни сердца, рост потребления электроэнергии в определенные часы. Отсутствие корреляции геомагнитной активности с количеством вызовов скорой помощи для пациентов с заболеваниями сердца может определяться нелинейной связью между ними, а также адаптацией организма человека к общим возмущениям магнитного поля Земли и малой долей геомагнитных вариаций с высоким дневным индексом Кр. Отсутствие корреляции между количеством вызовов скорой помощи из жилых зон для пациентов с распространенными заболеваниями и распределением показателя экологической опасности свидетельствует о низком уровне загрязнения тяжелыми металлами городских почв. Полученные результаты согласуются с выводами известных экологических моделей.

Авторы выражают благодарность главному врачу БСМП г. Петрозаводска А. И. Хейфецу за полезные обсуждения.

Исследование выполнено в рамках государственного задания КарНЦ РАН (Институт геологии КарНЦ РАН, тема № АААА-А18-118020690231-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишератин К. Н., Карманов Ф. И. Практические методы оценки спектральных параметров. Обнинск: ИАТЕ, 2008. 60 с.
2. Войчук С. И., Подгорский В. С., Громозова Е. Н. Влияние радиочастотного электромагнитного излучения на физиологические особенности *Saccharomyces cerevisiae* УКМ У-517 // Микробиологический журнал. 2004. Т. 66, № 3. С. 51–57.
3. Гурфинкель Ю. И., Любимов В. В., Ораевский В. Н., Парфенова Л. М., Юрьев А. С. Влияние геомагнитных возмущений на капиллярный кровоток больных ишемической болезнью сердца // Биофизика. 1995. Т. 40, № 4. С. 793–799.
4. Диатроптов М. Е., Станкевич А. А., Диатроптова М. А., Джамилова Д. Ш., Диатроптов Е. В. Общие закономерности инфраредиадных (многосуточных) биоритмов у млекопитающих и птиц // Система «Планета-Земля». М.: Ленанд, 2018. С. 162–201.
5. Зотов О. Д., Гульями А. В. Проблемы синхронизма электромагнитных и сейсмических событий в динамической системе магнитосфера–техносфера–литосфера // Солнечно-земная физика. 2010. Вып. 16. С. 19–25.
6. Кизилова Н. Н. Агрегация и оседание тромбоцитов в магнитном поле // Биофизика. 1993. Т. 5, № 2. С. 34–36.
7. Клейменова Н. Г., Козырева О. В. Магнитные бури и инфаркты: всегда ли бури опасны? // Геофизические процессы и биосфера. 2008. Т. 7, № 3. С. 5–24.
8. Крутских Н. В., Косинова И. И. Методика оценки трансформации природной среды по результатам эколого-геохимических исследований на примере г. Петрозаводска // Вестник ВГУ. Сер. Геология. 2014. № 3. С. 95–97.
9. Михайлова Г. А., Смирнов С. Э. Эффекты геомагнитных возмущений в приземной атмосфере и возможный биофизический механизм их влияния на сердечно-сосудистую систему человека // Геофизические процессы и биосфера. 2010. Т. 9, № 3. С. 66–80.
10. Пикин Д. А., Гурфинкель Ю. И., Ораевский В. Н. Влияние геомагнитных возмущений на свертывающую систему крови у больных ишемической болезнью сердца и возможности медикаментозной терапии // Биофизика. 1998. Т. 43, № 4. С. 617–622.
11. Птицына Н. Г., Виллорези Дж., Копытенко Ю. А., Тясто М. И. Магнитные поля электротранспорта и экология человека. СПб.: Нестор-История, 2010. 122 с.
12. Товкач М. Н. Заболеваемость населения и условия ее снижения: региональный аспект (на примере Карелии) // Вестник РГГУ. 2008. № 2. С. 264–274.
13. Цетлин В. В., Файнштейн Г. С. О влиянии космофизических, геофизических и радиационных факторов на электрофизические и биологические свойства воды // Метафизика. 2012. № 2(4). С. 81–99.
14. Черешнев В. А., Гамбурицев А. Г., Сигаичев А. В., Верхотурова Л. Ф., Горбатенко Е. В., Гамбурицева Н. Г. Внешние воздействия. Стрессы. Заболеваемость. М.: Наука. 2016. 168 с.
15. Чижевский А. Физические факторы исторического процесса. Калуга: 1-я Гостиполитогр., 1924. 70 с.
16. Чижевский А. Л. Земное эхо солнечных бурь. М.: Мысль, 1973. 352 с.
17. Шаров Н. В. Геофизическая обсерватория «Петрозаводск» // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 1. С. 169–171.
18. Burg J. P. Maximum entropy spectral analysis: Proceed. 37th Meeting, Society of Exploration Geophysics, Oklahoma City, 1967.
19. Cherry N. J. Schumann resonances, a plausible biophysical mechanism for the human health effects of solar-geomagnetic activity // Nat. Hazards. 2002. Vol. 26, no. 3. P. 279–331. doi: 10.1023/A:1015 637127504
20. Goldberg M. S., Giannetti N., Burnett R. T., Mayo N. E., Valois M. F., Brophy J. M. A panel study in congestive heart failure to estimate the short-term effects from personal factors and environmental conditions on oxygen saturation and pulse rate // J. Occup. Environ. Med. 2008. Vol. 65. P. 659–666. doi: 10.1136/oem.2007.034934
21. Gupta A. Numerical methods using MATLAB. New York: Apress, 2014.
22. Helmholtz center Potsdam GFZ German Research Centre for Geosciences, Official Website. URL: <https://www.gfz-potsdam.de/en/kp-index> (дата обращения: 12.03.2020).
23. Hori A., Hashizume M., Tsuda Y., Tsukahara T., Nomiyama T. Effects of weather variability and air pollutants on emergency admissions for cardiovascular and cerebrovascular diseases // Int. J. Environ. Res. Public Health. 2012. Vol. 22, no. 5. P. 416–430. doi: 10.1080/09603123.2011.650155

24. Jones S. S., Thomas A., Evans R. S., Welch S. J., Haug P. J., Snow G. L. Forecasting daily patient volumes in the emergency department // *Acad. Emerg. Med.* 2008. Vol. 15, no. 2. P. 159–170.
25. Kavanagh A., Denton M. High-speed solar-wind streams and geospace interactions // *Astronomy and Geophysics*. 2007. Vol. 48. P. 6.24–6.26. doi: 10.1111/j.1468-4004.2007.48624.x
26. Laboratory of X-ray Solar Astronomy FIAN, Official Website. URL: http://tesis.lebedev.ru/en/magnetic_storms.html (дата обращения: 12.02.2020).
27. Lessons and advices on Qgis // Qgis. 2016. Official Website. URL: <http://www.qgistutorials.com/ru> (дата обращения: 25.03.2020).
28. Menvielle M., Berthelie A. The K-derived planetary indices: description and availability // *Review of Geophysics*. 1991. Vol. 29. P. 415–432. doi: 10.1029/91RG00994
29. Otsuka K., Cornelissen G., Weydahl A., Holmeslet B., Hansen T. L., Shinagawa M., Kubo Y., Nishimura Y., Omori K., Yano S., Halberg F. Geomagnetic disturbance associated with decrease in heart rate variability in a subarctic area // *Biomed. Pharmacother.* 2001. Vol. 55, no. 1. P. 51–56. doi: 10.1016/S0753-3322(01)90005-8
30. Palmer S., Rycroft M., Cermack M. Solar and geomagnetic activity, extremely low frequency magnetic and electric fields and human health at the Earth's surface // *Surveys in Geophysics*. 2006. Vol. 27. P. 557–595. doi: 10.1007/s10712-006-9010-7
31. Peters A., Frohlich M., Doring A., Immervoll T., Wichmann H. E., Hutchinson W. L., Pepys M. B., Koenig W. Particulate air pollution is associated with an acute phase response in men (MONICA–Augsburg Study) // *Eur. Heart J.* 2001. Vol. 22. P. 1198–1204.
32. Pilote L., Dasgupta K., Guru V., Humphries K., McGrath J. J., Norris C. M., Rabi D., Tremblay J., Alamian A., Barnett T., Cox J., Ghali W. A., Grace Sh., Hamet P., Ho T., Kirkland S., Lambert M., Libersan D., O'Loughlin J., Paradis G., Petrovich M., Tagalakis V. A comprehensive view of sex-specific issues related to cardiovascular disease // *Can. Med. Ass. J.* 2007. Vol. 176, no. 6. P. S1–S44. doi: 10.1503/cmaj.051455
33. Pressinger M. A. Mental processes and disorders: a neurobehavioral perspective in human biometeorology // *Experientia*. 1987. Vol. 43. P. 39–48.
34. Shaposhnikov D., Revich B., Gurfinkel Yu., Naumova E. The influence of meteorological and geomagnetic factors on acute myocardial infarction and drain stroke in Moscow, Russia // *Int. J. Biometeorol.* 2014. Vol. 58, no. 6. P. 799–808. doi: 10.1007/s00484-013-0660-0
35. Taves M. D., Gomez-Sanchez C. E., Soma K. K. Extra-adrenal glucocorticoids and mineralocorticoids: evidence for local synthesis, regulation and function // *Am. J. Physiol. Endocrinol. Metab.* 2011. Vol. 301, no. 1. P. 11–24. doi: 10.1152/ajpendo.00100.2011
36. Vencloviene J., Babarskiene R., Dobožinskas P., Siurkaite V. Effects of weather conditions on emergency ambulance calls for acute coronary syndromes // *Int. J. Biometeorol.* 2014. Vol. 59, no. 8. P. 1083–1093. doi: 10.1007/s00484-014-0921-6
37. Wang X. Y., Barnett A. G., Hu W., Tong S. Temperature variation and emergency hospital admissions for stroke in Brisbane, Australia, 1996–2005 // *Int. J. Biometeorol.* 2009. Vol. 53. P. 535–541. doi: 10.1007/s00484-009-0241-4
38. Wichmann J., Ketzel M., Ellermann T., Loft S. Apparent temperature and acute myocardial infarction hospital admissions in Copenhagen, Denmark: a case-crossover study // *Environ. Health.* 2012. P. 11–19. doi: 10.1186/1476-069X-11-19
39. Wolf K., Schneider A., Breitner S., Von Klot S., Meisinger C., Cyrys J., Hymer H., Wichmann H.-E., Peters A., Cooperative Health Research in the Region of Augsburg Study Group. Air temperature and the occurrence of myocardial infarction in Augsburg, Germany // *Circulation.* 2009. Vol. 120, no. 9. P. 735–742.

Поступила в редакцию 07.04.2020

REFERENCES

1. Visheratin K. N., Karmanov F. I. Prakticheskie metody otsenki spektral'nykh parametrov [Practical methods for assessing spectral parameters]. Obninsk: IATE, 2008. 60 p.
2. Voichuk S. I., Podgorskii B. C., Gromozova E. N. Vliyanie radiochastotnogo

elektromagnitnogo izlucheniya na fiziologicheskie osobennosti *Saccharomyces cerevisiae* UKM Y-517 [Effect of radio-frequency electromagnetic radiation on physiological features of *Saccharomyces cerevisiae* strain UCM Y-517]. *Mikrobiol. zhurn.* [Microbiol. J.]. 2004. Vol. 66, no. 3. P. 51–57.

3. Gurfinkel' Yu. I., Lyubimov V. V., Oraevskii V. N., Parfenova L. M., Yur'ev A. S. Vliyanie geomagnitnykh vozmushchenii na kapillyarnyi krovotok bol'nykh ishemicheskoi bolezni serdtsa [Effect of geomagnetic disturbances on the capillary blood flow in patients with ischemic heart disease]. *Biofizika* [Biophysics]. 1995. Vol. 40, no. 4. P. 793–799.
4. Diatropov M. E., Stankevich A. A., Diatropova M. A., Dzhililova D. Sh., Diatropov E. V. Obshchie zakonomernosti infradiannykh (mnogosutochnykh) bioritmov u mlekopitayushchikh i ptits [General patterns of infradian (multi-day) biorhythms in mammals and birds]. *Sistema «Planeta-Zemlya»* [Planet Earth System]. Moscow: Lenand, 2018. P. 162–201.
5. Zotov O. D., Gul'emi A. V. Problemy sinkhronizma elektromagnitnykh i seismicheskikh sobytii v dinamicheskoi sisteme magnitosferatekhnosfera-litosfera [Problems of synchronism of electromagnetic and seismic events in the magnetosphere-technosphere-lithosphere dynamic system]. *Solnechno-zemnaya fizika* [Solar-Terrestrial Physics]. 2010. Iss. 16. P. 19–25.
6. Kizilova N. N. Agregatsiya i osedanie trombocitov v magnitnom pole [Platelet aggregation and sedimentation in a magnetic field]. *Biofizika* [Biophysics]. 1993. Vol. 5, no. 2. P. 34–36.
7. Kleimenova N. G., Kozyreva O. V. Magnitnye buri i infarkty: vsegda li buri opasny? [Magnetic storms and heart attacks: are storms always dangerous?]. *Geofizicheskie protsessy i biosfera* [Geophysical Processes and Biosphere]. 2008. Vol. 7, no. 3. P. 5–24.
8. Krutskikh N. V., Kosinova I. I. Metodika otsenki transformatsii prirodnoi sredy po rezul'tatam ekologo-geokhimicheskikh issledovaniy na primere g. Petrozavodsk [Methodology for assessing the transformation of the environment according to the results of ecological and geochemical studies on the example of the city of Petrozavodsk]. *Vestnik VGU. Ser. Geol.* [Proceed. Voronezh St. Univ. Ser.: Geol.]. 2014. No. 3. P. 95–97.
9. Mikhailova G. A., Smirnov S. E. Effekty geomagnitnykh vozmushchenii v prizemnoi atmosfere i vozmozhnyi biofizicheskii mekhanizm ikh vliyaniya na serdechno-sosudistuyu sistemu cheloveka [Impact of geomagnetic disturbances in the surface atmosphere and the possible biophysical mechanism of their influence on the human cardiovascular system]. *Geofizicheskie protsessy i biosfera* [Geophysical Processes and Biosphere]. 2010. Vol. 9, no. 3. P. 66–80.
10. Pikin D. A., Gurfinkel' Yu. I., Oraevskii V. N. Vliyanie geomagnitnykh vozmushchenii na svertyvayushchuyu sistemu krovi u bol'nykh ishemicheskoi bolezni serdtsa i vozmozhnosti medikamentoznoi terapii [The effect of geomagnetic disturbances on the blood coagulation system in patients with coronary heart disease and the possibility of drug therapy]. *Biofizika* [Biophysics]. 1998. Vol. 43, no. 4. P. 617–622.
11. Ptitsyna N. G., Villorezi Dzh., Kopytenko Yu. A., Tyasto M. I. Magnitnye polya elektrotransporta i ekologiya cheloveka [Magnetic fields of electric vehicles and human ecology]. St. Petersburg: Nestor-Istoriya, 2010. 122 p.
12. Tovkach M. N. Zabolevaemost' naseleniya i usloviya ee snizheniya: regional'nyi aspekt (na primere Karelii) [The sickness rate of the population and the conditions for its decrease: a regional aspect (the case of Karelia)]. *Vestnik RGGU* [Proceed. Russ. St. Univ. Humanities]. 2008. No. 2. P. 264–274.
13. Tsetlin V. V., Fainshtein G. S. O vliyaniy kosmofizicheskikh, geofizicheskikh i radiatsionnykh faktorov na elektrofizicheskie i biologicheskie svoystva vody [On the impact of cosmophysical, geophysical, and radiation factors on the electrophysical and biological properties of water]. *Metafizika* [Metaphysics]. 2012. No. 2(4). P. 81–99.
14. Chereshev V. A., Gamburtsev A. G., Sigachev A. V., Verkhoturova L. F., Gorbatenko E. V., Gamburtseva N. G. Vneshnie vozdeistviya. Stressy. Zabolevaemost' [External impact. Stress. Sickness rate]. Moscow: Nauka, 2016. 168 p.
15. Chizhevskii A. Fizicheskie faktory istoricheskogo protsessa [Physical factors of the historical process]. Kaluga: 1-ya Gostipolitogr., 1924. 70 p.
16. Chizhevskii A. L. Zemnoe ekho solnechnykh bur' [Terrestrial echoes of solar storms]. Moscow: Mysl', 1973. 352 p.
17. Sharov N. V. Geofizicheskaya observatoriya «Petrozavodsk» [Petrozavodsk geophysical observatory]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 1. P. 169–171.
18. Burg J. P. Maximum entropy spectral analysis: Proceed. 37th Meeting, Society of Exploration Geophysics, Oklahoma City, 1967.
19. Cherry N. J. Schumann resonances, a plausible biophysical mechanism for the human health effects of solar-geomagnetic activity. *Nat. Hazards*. 2002. Vol. 26, no. 3. P. 279–331. doi: 10.1023/A:1015 637127504
20. Goldberg M. S., Giannetti N., Burnett R. T., Mayo N. E., Valois M. F., Brophy J. M. A panel study in congestive heart failure to estimate the short-term effects from personal factors and environmental conditions on oxygen saturation

- and pulse rate. *J. Occup. Environ. Med.* 2008. Vol. 65. P. 659–666. doi: 10.1136/oem.2007.034934
21. Gupta A. Numerical methods using MATLAB. New York: Apress, 2014.
 22. Helmholtz center Potsdam GFZ German Research Centre for Geosciences, Official Website. URL: <https://www.gfz-potsdam.de/en/kp-index> (дата обращения: 12.03.2020).
 23. Hori A., Hashizume M., Tsuda Y., Tsukahara T., Nomiya T. Effects of weather variability and air pollutants on emergency admissions for cardiovascular and cerebrovascular diseases. *Int. J. Environ. Res. Public Health.* 2012. Vol. 22, no. 5. P. 416–430. doi: 10.1080/09603123.2011.650155
 24. Jones S. S., Thomas A., Evans R. S., Welch S. J., Haug P. J., Snow G. L. Forecasting daily patient volumes in the emergency department. *Acad. Emerg. Med.* 2008. Vol. 15, no. 2. P. 159–170.
 25. Kavanagh A., Denton M. High-speed solar-wind streams and geospace interactions. *Astronomy and Geophysics.* 2007. Vol. 48. P. 6.24–6.26. doi: 10.1111/j.1468-4004.2007.48624.x
 26. Laboratory of X-ray Solar Astronomy FIAN, Official Website. URL: http://tesis.lebedev.ru/en/magnetic_storms.html (accessed: 12.02.2020).
 27. Lessons and advices on Qgis. Qgis. 2016. Official Website. URL: <http://www.qgistutorials.com/ru> (accessed: 25.03.2020).
 28. Menvielle M., Berthelier A. The K-derived planetary indices: description and availability. *Review of Geophysics.* 1991. Vol. 29. P. 415–432. doi: 10.1029/91RG00994
 29. Otsuka K., Cornelissen G., Weydahl A., Holmeslet B., Hansen T. L., Shinagawa M., Kubo Y., Nishimura Y., Omori K., Yano S., Halberg F. Geomagnetic disturbance associated with decrease in heart rate variability in a subarctic area. *Biomed. Pharmacother.* 2001. Vol. 55, no. 1. P. 51–56. doi: 10.1016/S0753-3322(01)90005-8
 30. Palmer S., Rycroft M., Cermack M. Solar and geomagnetic activity, extremely low frequency magnetic and electric fields and human health at the Earth's surface. *Surveys in Geophysics.* 2006. Vol. 27. P. 557–595. doi: 10.1007/s10712-006-9010-7
 31. Peters A., Frohlich M., Doring A., Immervoll T., Wichmann H. E., Hutchinson W. L., Pepys M. B., Koenig W. Particulate air pollution is associated with an acute phase response in men (MONICA–Augsburg Study). *Eur. Heart J.* 2001. Vol. 22. P. 1198–1204.
 32. Pilote L., Dasgupta K., Guru V., Humphries K., McGrath J. J., Norris C. M., Rabi D., Tremblay J., Alamian A., Barnett T., Cox J., Ghali W. A., Grace Sh., Hamet P., Ho T., Kirkland S., Lambert M., Libersan D., O'Loughlin J., Paradis G., Petrovich M., Tagalakis V. A comprehensive view of sex-specific issues related to cardiovascular disease. *Can. Med. Ass. J.* 2007. Vol. 176, no. 6. P. S1–S44. doi: 10.1503/cmaj.051455
 33. Pressinger M. A. Mental processes and disorders: a neurobehavioral perspective in human biometeorology. *Experientia.* 1987. Vol. 43. P. 39–48.
 34. Shaposhnikov D., Revich B., Gurfinkel Yu., Naumova E. The influence of meteorological and geomagnetic factors on acute myocardial infarction and drain stroke in Moscow, Russia. *Int. J. Biometeorol.* 2014. Vol. 58, no. 6. P. 799–808. doi: 10.1007/s00484-013-0660-0
 35. Taves M. D., Gomez-Sanchez C. E., Soma K. K. Extra-adrenal glucocorticoids and mineralocorticoids: evidence for local synthesis, regulation and function. *Am. J. Physiol. Endocrinol. Metab.* 2011. Vol. 301, no. 1. P. 11–24. doi: 10.1152/ajpendo.00100.2011
 36. Vencloviene J., Babarskiene R., Doboziuskas P., Siurkaite V. Effects of weather conditions on emergency ambulance calls for acute coronary syndromes. *Int. J. Biometeorol.* 2014. Vol. 59, no. 8. P. 1083–1093. doi: 10.1007/s00484-014-0921-6
 37. Wang X. Y., Barnett A. G., Hu W., Tong S. Temperature variation and emergency hospital admissions for stroke in Brisbane, Australia, 1996–2005. *Int. J. Biometeorol.* 2009. Vol. 53. P. 535–541. doi: 10.1007/s00484-009-0241-4
 38. Wichmann J., Ketzler M., Ellermann T., Loft S. Apparent temperature and acute myocardial infarction hospital admissions in Copenhagen, Denmark: a case-crossover study. *Environ. Health.* 2012. P. 11–19. doi: 10.1186/1476-069X-11-19
 39. Wolf K., Schneider A., Breitner S., Von Klot S., Meisinger C., Cyrus J., Hymer H., Wichmann H-E., Peters A., Cooperative Health Research in the Region of Augsburg Study Group. Air temperature and the occurrence of myocardial infarction in Augsburg, Germany. *Circulation.* 2009. Vol. 120, no. 9. P. 735–742.

Received April 07, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Белашев Борис Залманович
ведущий научный сотрудник, д. т. н.
Институт геологии КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: belashev@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 782753

Крутских Наталья Владимировна
старший научный сотрудник, к. г. н.
Институт геологии КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: natkrut@gmail.com
тел.: (8142) 782753

Герасимова Анна Александровна
геофизик
эл. почта: 79116679520@yandex.ru
тел.: +79116679520

CONTRIBUTORS:

Belashev, Boris
Institute of Geology, Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: belashev@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 782753

Krutskikh, Natalia
Institute of Geology, Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: natkrut@gmail.com
tel.: (8142) 782753

Gerasimova, Anna
e-mail: 79116679520@yandex.ru
tel.: +79116679520

УДК 550.8:621.396.6

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ОБРАБОТКА ГЕОРАДАРНЫХ ДАННЫХ

Б. З. Белашев, М. Ю. Нилов

*Институт геологии КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Для обработки георадарных данных применен В-алгоритм. В трассах радарограмм алгоритм выявляет сопоставляемые с границами областей неоднородности, сдвиги «режимов» и строит их распределение. Реализация алгоритма в системе «MATLAB» упрощает, ускоряет вычисления, приближает получаемые оценки к оптимальным решениям. Протестированный на радарограммах модельной среды и зимнего озера алгоритм продемонстрировал чувствительность к сдвигам «режимов», способность автоматически обрабатывать данные.

Ключевые слова: георадар; граница; неоднородность; трасса; алгоритм; сдвиг «режима».

B. Z. Belashev, M. Yu. Nilov. GEORADAR DATA PROCESSING BY AN AUTOMATIC ALGORITHM

B-algorithm was applied to process GPR data. The algorithm detects heterogeneities correlated with region boundaries and “regime” shifts in GPR data paths, and plots their distribution. Implementation of the algorithm in the MATLAB system simplifies and accelerates the calculations, bringing the estimates closer to the optimum solutions. The algorithm, tested in application to radargrams from a model medium and a winter lake, proved to be sensitive to “regime” shifts and capable of processing data automatically.

Key words: ground-penetrating radar; boundary; heterogeneity; path; algorithm; “regime” shift.

ВВЕДЕНИЕ

Одно из направлений развития автоматизированных систем малоглубинной геофизики связывают с созданием алгоритмов, упрощающих обработку и интерпретацию данных [3]. В полной мере это относится к георадиолокационному методу изучения подповерхностных сред. Простой, удобный, производительный в проведении съемок, на стадии обработки данных он теряет оперативность из-за привлечения интерпретатора. В связи с этим акту-

альным представляется поиск алгоритмов автоматизированной обработки данных хотя бы для некоторых типичных применений метода.

Одной из распространенных задач в практике инженерно-изыскательских и геолого-геофизических работ является выделение границ тел или областей неоднородности среды. Необходимые сведения содержат волновые формы радарограмм. Анализируя их картину, интерпретатор ищет оси синфазности отраженных от границ слоев импульсов, по которым рассчитывает время пробега зондиру-

ющего импульса от источника до границы и обратно до приемника сигнала. Трудности в получении оценок связаны с диффузным характером контакта слоев, неопределенностью параметров, зашумленностью сигналов, наложением импульсов, визуальным способом обработки данных [10, 15].

В статье рассматривается применение для обработки трасс радарограмм В-алгоритма, автоматически выделяющего сдвиги «режимов» во временных рядах данных [11]. Основу применения составляет соответствие сдвигов «режимов» трасс границам областей неоднородности среды. При анализе результатов применения алгоритма сфокусируемся на определении моментов сдвигов трасс радарограмм, не касаясь распознавания выделяемых неоднородностей, оценивания их электрофизических параметров, представляющих самостоятельную проблему [7].

Чтобы приспособить реализованный в системе «MATLAB» В-алгоритм [1] к специфике задачи, была проведена его модификация [2].

Действие алгоритма продемонстрировано на модельных данных и фрагментах георадарного разреза озера Мустаярви (Суоярвский район Республики Карелия, Российская Федерация), полученного профилированием в зимний период с поверхности льда.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

При съемке разреза озера Мустаярви использован георадар «Око-2» с центральной частотой 400 МГц и разрешающей способностью 0.15 м для свободного пространства. Аналогичный георадар применен при физическом моделировании искусственной среды Л. Л. Федоровой и К. О. Соколовым [9]. Оцифрованная по графику программой Digitizer [13] и линейно интерполированная трасса этой работы использована в качестве примера обработки данных в настоящей статье.

Георадар «Око» – промышленный геофизический прибор, предназначенный для наземной, подводной и надземной съемок. Мобильные и компактные георадары «Око» имеют линейку сменных антенных блоков, работающих в диапазоне от 35 до 2000 МГц, позволяющих проводить неразрушающие обследования окружающей среды с высокой степенью детальности на глубину до нескольких десятков метров. Датчики движения георадара, подключенные к навигатору GPS, обеспечивают точную привязку к местности. Для помехоустойчивости измерений в приборе реализована оптическая развязка между сигнальными и информационными цепями. Дополни-

тельная система питания позволяет автономно использовать устройство в полевых условиях. Профессиональное программное обеспечение прибора содержит базовые опции для обработки георадарного сигнала и визуализации результатов.

Аналогами В-алгоритма являются алгоритмы пакета «Георадар-эксперт» [4]. Алгоритм BSEF выполняет анализ поля обратного рассеяния, представляет срезу разрезом атрибутов электрофизических характеристик. Регулируя контраст представления, алгоритм позволяет апостериорно менять вертикальное разрешение и глубину исследования. Алгоритм V-detector выделяет границы слоев среды, используя технологию распознавания образов Канни [12]. Технология использует процедуры сглаживания сигнала, поиска максимальных градиентов, подавления помех, двойной пороговой фильтрации, трассировки области неоднозначности. V-detector сочетает высокую скорость обработки данных с точностью позиционирования границ. Инструментом анализа сигнала на разных масштабах, выявления моментов резких изменений, областей наложения импульсов являются вейвлеты – функции, локализованные по частоте и по времени [5]. Для энергетического представления сигналов в форме огибающей удобно применять преобразование Гильберта [8]. Разнообразие методов, функций, масштабов, большое число параметров, визуальная интерпретация результатов усложняют процессы обработки, управления и настройки георадарных систем.

Более прост в использовании R-алгоритм, выделяющий «режимы» в рядах климатологических данных [16]. Опираясь на небольшое количество параметров, этот алгоритм оценивает составляющую шума, в скользящем окне рассчитывает среднее значение выборки сигнала, сравнивает его с предыдущим значением и принимает решение о сдвиге «режима». Распространению алгоритма способствует его свободная реализация в системе Visual Basic [17]. Стремление избежать ложных срабатываний понижает чувствительность алгоритма к сдвигам «режимов». Выделяемые им граничные «режимы» часто бывают недостаточно поддержаны данными.

Простой математический аппарат и малое число параметров имеет В-алгоритм. Алгоритм последовательно формирует модель «режимов» трассы на этапах кластеризации, сравнения и оптимизации. Представленную временным рядом трассу $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_M\}$ алгоритм разбивает на

участки $\bigcup_{i=1}^k A_i = X, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, определяет сдвиг «режима», сравнивая средние значения сигнала в соседних участках, ищет минимум суммы дисперсий отклонений по участкам

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \sum_{X \subset A_i} (X_i - C_i)^2$$

путем варьирования их длин. n_i – число членов ряда на участке A_i , C_i – их среднее значение.

Реализация алгоритма в системе компьютерной математики «MATLAB» позволяет использовать ее функции, упростить, ускорить расчеты, приблизить получаемые решения к оптимальным, в наглядной форме представить результаты. Для автоматического выполнения функций «MATLAB» требуется предварительное задание параметров. Параметр r команды «горной» кластеризации «subclust» задают числом в интервале $[0.1, 0.5]$. Параметр p представляет уровень доверия в команде «ttest2» теста Стьюдента, сравнивающей средние значения сигнала на соседних участках трассы. По умолчанию, его значение принимают равным 0.05. Натуральный параметр b , со знаками $+$ и $-$ добавляемый к длинам участков, определяет диапазон изменения длин в команде «patternsearch» – быстро сходящейся разновидности генетического алгоритма. Повторение В-алгоритма с числом итераций n способствует достижению наименьшей суммарной дисперсии отклонений по участкам. Дополнительные процедуры алгоритма выполняют перебор трасс радарограммы, построение картины сдвигов «режимов» в виде бинарной матрицы, в которой границе отвечает 1, а ее отсутствию – 0.

Сравнение алгоритмов В- и R- на примерах показало, что В-алгоритм уверенно выделяет стабильные «режимы» процессов, имеет высокую чувствительность к их сдвигам, различает сдвиги и тренды «режимов» [11].

РЕЗУЛЬТАТЫ

Пример 1. Пример поясняет соответствие сдвигов «режимов» и областей неоднородности на модельной среде, состоящей из последовательно расположенных по глубине слоев почвы, мерзлого песка и бетона (рис. 1, а) [9]. При обработке радарограммы вейвлетами из-за затухания импульсов в электропроводящем слое мерзлого песка отражения от нижней границы бетонного слоя не были обнаружены. К одной из трасс [9], график которой (рис. 1, б)

был оцифрован и затем линейно интерполирован, применяли В- и R-алгоритмы (рис. 1, в, г соответственно).

Картина сдвигов «режимов» R-алгоритма не соответствует модели. Добиться соответствия не помогает изменение параметров в широком диапазоне. При уменьшении длины окна алгоритм выделяет интенсивные импульсы, при ее увеличении описывает трассу одним «режимом». Причина несогласия, по видимому, связана с низкой чувствительностью алгоритма к сдвигам «режимов».

В-алгоритм выделил сдвиги «режимов» на всех границах модельной среды, в том числе на нижней границе бетонного слоя, представляя сдвиг режима одним отсчетом трассы. По сравнению с другими сдвигами последний сдвиг «режима» определен менее точно. Несмотря на то что причиной этого может быть затухание сигнала, пример тем не менее демонстрирует возможность работы с затухающими сигналами.

Пример 2. Контроль мощности и структуры ледовых покровов применяют при движении судов во льдах, использовании ледовых переправ, строительных работах в условиях вечной мерзлоты [6]. Перспективно обследовать обширные ледовые территории георадаром, размещенным на летательном аппарате, а при обработке данных использовать алгоритмы, распознающие виды льда, водные, воздушные линзы, трещины [14]. Выбор ледовых покровов в качестве объектов георадарных исследований удобен из-за высокого качества сигнала, малого числа распознаваемых образов, простоты проверки результатов бурением.

В-алгоритм применен для обработки фрагмента I георадарного разреза покрытого льдом озера Мустаярви (рис. 2). На рис. 3 приведены результаты обработки первой трассы фрагмента I В-алгоритмом при разных значениях параметра r и структура «режимов» ледового покрова фрагмента. Рис. 3, г позволяет представить структуру как состоящую из слоев рыхлого поверхностного льда, консолидированного льда и нижней менее упорядоченной водно-ледяной смеси.

Пример 3. На рис. 4, а показан близкий к берегу фрагмент II георадарного разреза (рис. 2), на рис. 4, б, в – результаты его обработки технологией Канни и гильберт-преобразованием, реализованными в «MATLAB» командами «edge» и «hilbert». Схема «режимов» фрагмента, выделенных В-алгоритмом, представлена на рис. 4, г.

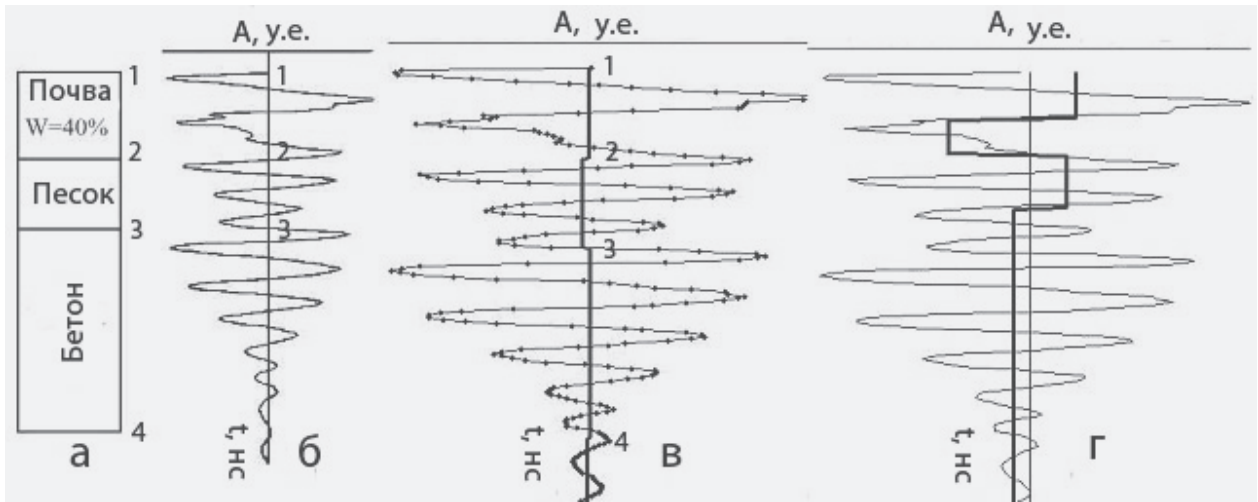


Рис. 1. Модельная среда [9] (а), график трассы радарограммы [9], результаты обработки оцифрованного и интерполированного графика (б) В-алгоритмом ($r = 0.36$, $p = 0.05$, $b = 4$, $n = 10$) (в) и R-алгоритмом ($l = 15$, $p = 0.05$, $k = 1$) (г)

Fig. 1. A model medium [9] (а), a plot of a georadar data path [9], the results of the processing of the plot (б) digitized and interpolated by B-algorithm ($r = 0.36$, $p = 0.05$, $b = 4$, $n = 10$) (в) and R-algorithm ($l = 15$, $p = 0.05$, $k = 1$) (г)

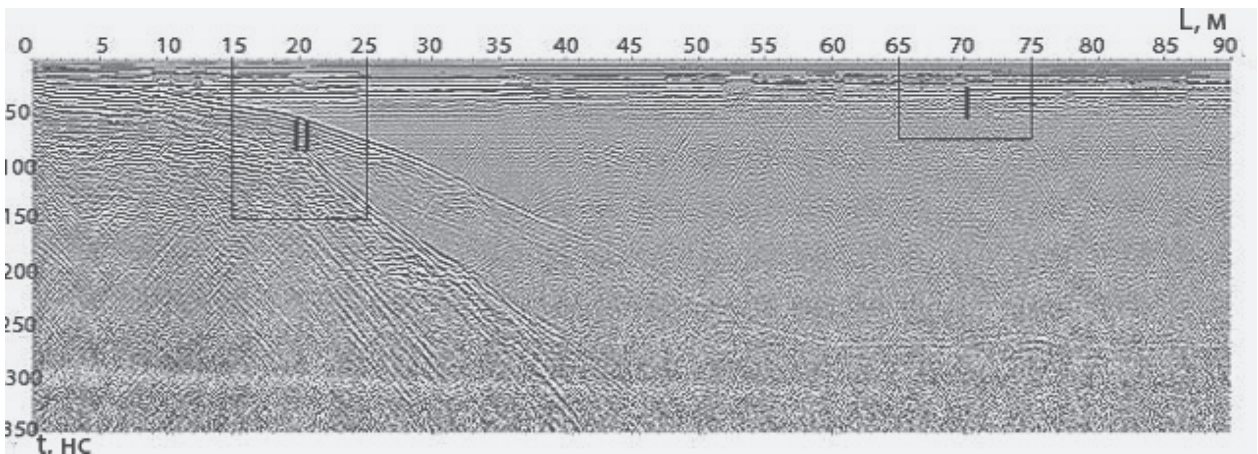


Рис. 2. Часть георадарного разреза озера Мустаярви, выделенные фрагменты I и II
Fig. 2. Part of the georadar section of Lake Mustajarvi. Fragments I and II are emphasized

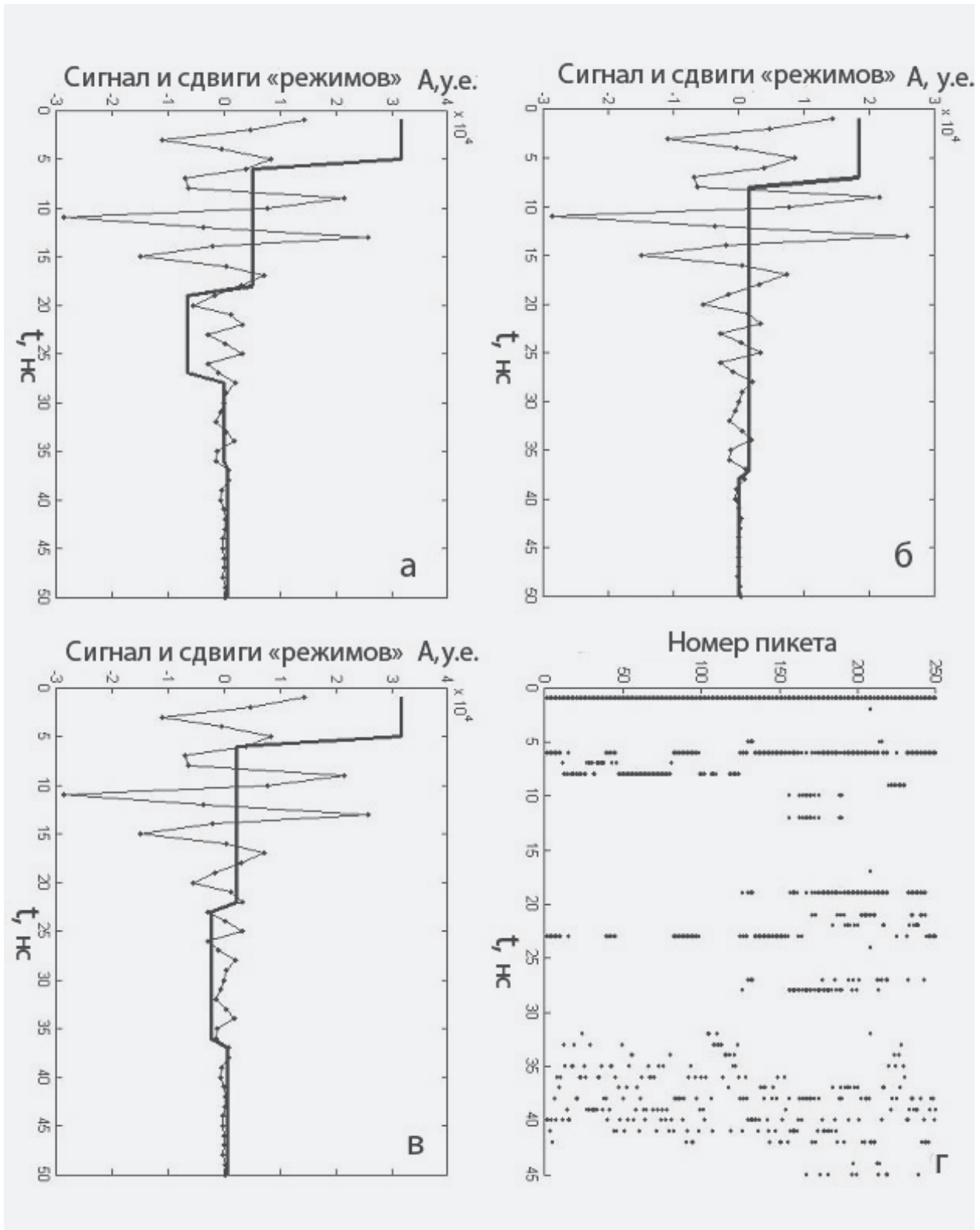


Рис. 3. Трасса первого пикета фрагмента I и ее десятикратно увеличенная картина «режимов» В-алгоритма при $b = 4$, $n = 10$ и $r = 0.24, 0.36, 0.3$ соответственно (а, б, в); г – структура сдвигов «режимов» ледяного покрова для параметров $b = 4$, $n = 10$, $r = 0.3$

Fig. 3. The path of the first picket of fragment I and its ten-fold image of the “regime” of B-algorithm at $b = 4$, $n = 10$ and $r = 0.24, 0.36, 0.3$, respectively (а, б, в); г – shift structure of ice cover “regimes” for parameters $b = 4$, $n = 10$, $r = 0.3$

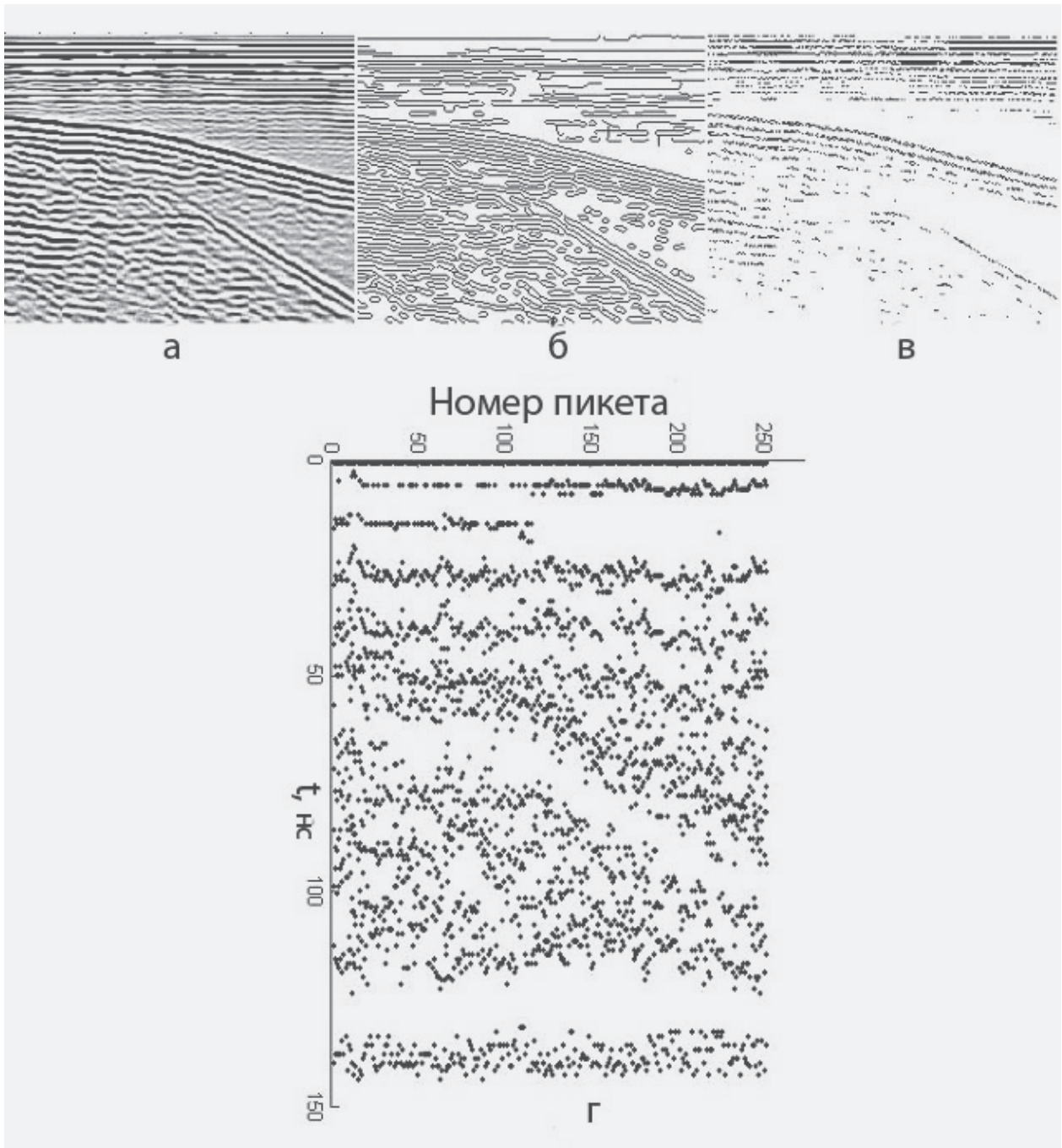


Рис. 4. Фрагмент II георадарного разреза оз. Мустаярви (а) и результаты его обработки с использованием технологии Канни (б) и гильберт-преобразования (в), картина его сдвигов «режимов», полученная В-алгоритмом с параметрами $r = 0.1$, $b = 4$, $n = 15$ (г)

Fig. 4. Fragment II of the georadar section of Lake Mustajarvi (a) and the results of its processing by Canny's technology (б) and Hilbert transform (в), an image of its "regime" shift provided by B-algorithm with the following parameters $r = 0.1$, $b = 4$, $n = 15$ (г)

Технологией Канни удалось выделить слои ледового покрова, неоднородности в толще воды, залегание пород дна водоема. Гильберт-преобразование позволило оценить мощность ледового покрова, положение неоднородностей водной толщи и коренных пород. В-алгоритм также выявил слои льда, особенности водной толщи, пологое опускание коренных пород ложа водоема. Хотя детальное сравнение результатов алгоритмов затруднительно, в общих чертах картина сдвигов «режимов» В-алгоритма верно отражает положения основных неоднородностей исследуемой среды.

С глубиной положения сдвигов «режимов» в выделяемых В-алгоритмом слоях размываются. Это может быть связано с затуханием импульсов, как и определяться выбором параметров алгоритма. Для более полного отображения сдвигов «режима» на длинной трассе значение параметра r следует выбирать малым, соответствующим по возможности меньшей длине участка на этапе кластеризации алгоритма. При заданных значениях параметра b это может уменьшить точность определения моментов сдвигов «режимов». Проблему можно пытаться решить, применяя апостериорную регулировку усиления по трассе, анализ огибающей трассы, сравнение дисперсий на ее участках.

Другая особенность, проявившаяся при обработке длинных трасс, связана с большими затратами времени. Традиционный способ их сокращения – отказ от последовательной обработки, модификация алгоритма путем распараллеливания вычислений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделяемые В-алгоритмом сдвиги «режимов» трасс соответствуют границам областей неоднородности исследуемых сред. Представление «режимами» сжимает данные, упрощает их обработку, выявляет особенности волновых форм, замаскированные обилием деталей.

Используя функции системы реализация алгоритма в «MATLAB» ускоряет расчеты и позволяет наглядно представить результаты обработки.

Проверка В-алгоритма на примерах подтвердила возможность его применения к некоторым задачам георадарных исследований, отразила преимущества алгоритма, связанные с его чувствительностью к сдвигам «режимов», способностью работать с затухающими сигналами, автоматически обрабатывать данные. В то же время проведенное исследование выявило проблемы, требующие дальнейшего изучения.

Совершенствование В-алгоритма при обработке георадарных данных возможно в направлениях апостериорной регулировки амплитуды сигнала и распараллеливания вычислений по трассам радарограмм.

Исследование выполнено в рамках государственного задания КарНЦ РАН (Институт геологии КарНЦ РАН, тема № АААА-А18-118020690231-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белашев Б. З.* Выделение «режимов» во временных рядах данных. Свидетельство РФ о гос. регистрации программы ЭВМ № 2019615005, 4 марта 2019 г.
2. *Белашев Б. З.* Выделение неоднородностей в георадарных данных. Свидетельство РФ о гос. регистрации программы ЭВМ № 2019618055, 26 июня 2019 г.
3. *Владов М. Л., Старовойтов А. В.* Введение в георадиолокацию. Учеб. пособие. М.: МГУ, 2004. 153 с.
4. *Денисов Р. Р., Капустин В. В.* Обработка георадарных данных в автоматическом режиме // Геофизика. 2010. № 4. С. 76–80. URL: <http://www.georadar-expert.ru> (дата обращения: 23.03.2020).
5. *Дьяконов В. П.* Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон-П, 2010. 400 с.
6. *Кулижников А. М.* Георадиолокационные обследования ледовых переправ // Инженерные изыскания. 2016. № 8. С. 22–29.
7. *Морозов А. В., Кругликов А. А., Кислица К. Ю., Шаповалов В. Л., Явна В. А.* Количественная обработка георадиолокационных данных // Вестник РГУПС. 2011. № 3. С. 96–105.
8. *Степанов А. В.* Обработка сейсмических данных: Учеб.-метод. пособие к курсам повышения квалификации «Петрофизика и геофизика в нефтяной геологии». Казань: Казанский ун-т, 2013. 24 с.
9. *Федорова Л. Л., Соколов К. О.* Георадиолокация массива горных пород россыпных месторождений криолитозоны, перекрытого электропроводящим слоем // Горный информ.-аналит. бюл. 2011. № 8. С. 310–316.
10. *Arcone S. A., Lawson D. E., Delaney A. J., Strasser J. C., Strasser J. D.* Ground-penetrating radar reflection profiling of groundwater and bedrock in an area of discontinuous permafrost // Geophysics. 1998. Vol. 63, no. 5. P. 1573–1585.
11. *Belashev B. Z.* Process “regime” shift recognition algorithm // Int. J. Computer Sci. Inf. Security. 2019. Vol. 17, no. 9. P. 20–28.

12. *Canny* edge detection URL: www.cvmt.dk/education/teaching/f09/VGIS8/AIP (дата обращения: 21.02.2020).

13. *Engauge* Digitizer URL: <http://digitizer.sourceforge.net/> (дата обращения: 21.02.2020).

14. *Lalumiere L., Prinsenber S.* Integration of a helicopter-based ground penetrating radar (GPR) with a laser, video and GPS System // *Proceed. 19th Int. Offshore and Polar Engineering Conf.* Osaka, Japan, 2009. P. 658–665.

15. *Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J.* The Rock Physics Handbook. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

16. *Rodionov S.* Use of prewhitening in climate shift regime detection // *Geophys. Res. Letters.* 2006. Vol. 33. L12707.

17. *Visual Basic* URL: <https://yandex.ru/yandsearch?text=Shift%20detection%20xla&lr=18&clid=21866> (дата обращения: 16.01.2020).

Поступила в редакцию 07.04.2020

REFERENCES

1. *Belashev B. Z.* Vyделение «rezhimov» vo vremennykh ryadakh dannykh. Svidetel'stvo RF o gos. registratsii programmy EVM № 2019615005, 4 marta 2019 g. [Detecting the 'regimes' in time-series data. Certificate of state registration of the computer program No. 2019615005 dated March 4, 2019].

2. *Belashev B. Z.* Vyделение neodnorodnostei v georadarnykh dannykh. Svidetel'stvo RF o gos. registratsii programmy EVM № 2019618055, 26 iyunya 2019 g. [Detecting the heterogeneity of georadar data. Certificate of state registration of the computer program No. 2019618055 dated June 26, 2019].

3. *Vladov M. L., Starovoitov A. V.* Vvedenie v georadiolokatsiyu. Ucheb. posobie [Introduction to georadiolocation: A study guide]. Moscow: MGU, 2004. 153 p.

4. *Denisov R. R., Kapustin V. V.* Obrabotka georadarnykh dannykh v avtomaticheskom rezhime [Processing GPR data in automatic mode]. *Geofizika* [Geophysics]. 2010. No. 4. P. 76–80. URL: <http://www.georadar-expert.ru> (accessed: 23.03.2020).

5. *D'yakonov V. P.* Veivlety. Ot teorii k praktike [Wavelets. From theory to practice]. Moscow: Solon-P, 2010. 400 p.

6. *Kulizhnikov A. M.* Georadiolokatsionnye obsledovaniya ledovykh pereprav [GPR surveys of ice crossings]. *Inzhenernye izyskaniya* [Engineering Survey]. 2016. No. 8. P. 22–29.

7. *Morozov A. V., Kruglikov A. A., Kislitsa K. Yu., Shapovalov V. L., Yavna V. A.* Kolichestvennaya obrabotka georadiolokatsionnykh dannykh [Quantitative processing of georadar data]. *Vestnik RGUPS* [Vestnik RGUPS]. 2011. No. 3. P. 96–105.

8. *Stepanov A. V.* Obrabotka seismicheskikh dannykh: Ucheb.-metod. posobie k kursam povysheniya kvalifikatsii «Petrofizika i geofizika v neftyanoi geologii» [Processing of seismic data:

A study guide for continuing education courses *Petrophysics and geophysics in petroleum geology*]. Kazan': Kazanskii un-t, 2013. 24 p.

9. *Fedorova L. L., Sokolov K. O.* Georadiolokatsiya massiva gornyx porod rossypnykh mestorozhdenii kriolitozony, perekrytogo elektroprovodyashchim sloem [Georadiolocation of the rock mass of alluvial deposits of cryolithozone covered by an electrically conductive layer]. *Gornyi inform.-analit. byul.* [Mining Inf. Analytical Bull.]. 2011. No. 8. P. 310–316.

10. *Arcone S. A., Lawson D. E., Delaney A. J., Strasser J. C., Strasser J. D.* Ground-penetrating radar reflection profiling of groundwater and bedrock in an area of discontinuous permafrost. *Geophysics.* 1998. Vol. 63, no. 5. P. 1573–1585.

11. *Belashev B. Z.* Process "regime" shift recognition algorithm. *Int. J. Computer Sci. Inf. Security.* 2019. Vol. 17, no. 9. P. 20–28.

12. *Canny* edge detection URL: www.cvmt.dk/education/teaching/f09/VGIS8/AIP (accessed: 21.02.2020).

13. *Engauge* Digitizer URL: <http://digitizer.sourceforge.net/> (accessed: 21.02.2020).

14. *Lalumiere L., Prinsenber S.* Integration of a helicopter-based ground penetrating radar (GPR) with a laser, video and GPS System. *Proceed. 19th Int. Offshore and Polar Engineering Conf.* Osaka, Japan, 2009. P. 658–665.

15. *Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J.* The Rock Physics Handbook. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

16. *Rodionov S.* Use of prewhitening in climate shift regime detection. *Geophys. Res. Letters.* 2006. Vol. 33. L12707.

17. *Visual Basic* URL: <https://yandex.ru/yandsearch?text=Shift%20detection%20xla&lr=18&clid=21866> (accessed: 16.01.2020).

Received April 07, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Белашев Борис Залманович
ведущий научный сотрудник, д. т. н.
Институт геологии КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: belashev@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 782753

Нилов Михаил Юрьевич
научный сотрудник
Институт геологии КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: mnilov@rambler.ru
тел.: (8142) 782753

CONTRIBUTORS:

Belashev, Boris
Institute of Geology, Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: belashev@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 782753

Nilov, Michail
Institute of Geology, Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: mnilov@rambler.ru
tel.: (8142) 782753

УДК 519.837

ВЛИЯНИЕ УПРАВЛЕНИЯ НА ДИНАМИКУ МНЕНИЙ УЧАСТНИКОВ КОЛЛЕКТИВА

Ю. А. Дорофеева

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия;
Петрозаводский государственный университет, Россия*

В работе исследуется задача управления мнениями участников коллектива методами динамического программирования. Управление заключается в приведении всех мнений членов коллектива к наперед заданной величине. Процесс формирования мнений участников зависит от влияния их друг на друга. Это влияние заключается в выражении своего мнения, которое все участники взвешивают и впоследствии формируют новое мнение. Структура коллектива представлена в виде полного неориентированного графа с тремя вершинами. Результаты численного моделирования иллюстрируют влияние выбранных факторов (управление, влияние членов коллектива друг на друга, а также наличие связей) на динамику мнений.

Ключевые слова: динамика мнений; среднее значение; оптимальное управление; функция Беллмана.

Yu. A. Dorofeeva. MANAGEMENT EFFECTS ON THE DYNAMICS OF OPINIONS IN A TEAM

This paper explores the problem of manipulating the opinions of team members using dynamic programming methods. The mission of the management is to steer all the opinions of the team members towards a certain pre-defined value. The opinions of participants are shaped by their influence on each other. A member expresses one's opinion, the others analyze it, and then form a new opinion taking into account the opinions of others. The structure of the team is portrayed as a complete undirected graph with three vertices. The results of numerical modeling illustrate the influence of the selected factors (management, influence of team members on each other, as well as existing connections) on opinion dynamics.

Keywords: opinion dynamics; mean; optimal management; Bellman function.

ВВЕДЕНИЕ

Эволюция моделей динамики мнений в различных социальных сообществах напрямую связана с главным вопросом достижения консенсуса, а также условиями его существования. Одной из первых моделей была модель Де Гроота [7], в которой автор предложил достаточно простой закон изменения мнений в

коллективе путем взвешивания своего мнения и мнений остальных участников. В этом случае консенсус достижим в случае существования предельной матрицы влияния. Достижение консенсуса рассматривается в модели Хессельманна – Крауза [8], где мнения меняются за счет «усреднения». Особенностью этой динамики является то, что участники обмениваются мнениями не со всем коллективом, а

только с теми, кто входит в их «круг интересов». Достижение консенсуса в коллективе с центрами влияния описаны в работах [5, 6]. Важными в этой области можно также назвать модели Фридкина – Джонсена. В данном случае консенсус достигается аналогично закону Де Гроота. Стоит упомянуть модели Деффаунта [8], Снайда [7, 8] и др. Однако во всех отмеченных выше моделях не рассматривается вопрос об управлении мнениями членов коллектива. На данный момент есть исследования, посвященные игровым динамикам мнений. Так, в работах [4, 9, 10] рассматривается модель Де Гроота в конфликтных условиях. В работе [3] исследуется проблема игры согласованного влияния на мнения участников социальной сети в качестве кооперативной линейно-квадратичной игры в дискретном времени [2]. В этой модели некоторые члены выражают свое мнение агентам сети согласованно с целью приблизить их среднее мнение к желаемому. В данном контексте это является управлением мнением других участников. Однако в такой постановке не учитывается структура связей между агентами и участниками сети, так как моделирование проводится для графа решетки. В настоящей работе предложено исследование, посвященное динамике мнений с учетом системы взаимодействия всех членов коллектива.

Постановка задачи

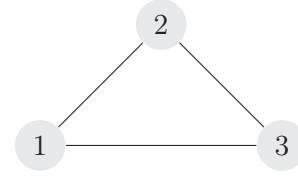
Исследуется динамика мнений в коллективе в течение бесконечного периода времени. Коллектив представим в виде пары (V, g) , где V – конечное множество вершин (участников коллектива), а g – множество направленных ребер, отражающих структуру взаимодействия внутри этого сообщества. Один из участников управляет мнением остальных участников. Используя общепринятую терминологию, члены коллектива, которые подвержены влиянию, называются «агентами». Участник, управляющий мнением агентов, – это «игрок».

В общем виде динамика мнений всех членов выглядит следующим образом:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + a_i \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t)}{n} \right) - x_i(t) \right),$$

где a_i – это коэффициент, индивидуальный для каждого члена коллектива, $a_i \in R^+$.

Рассмотрим коллектив, в котором взаимодействуют три участника. Представим его в виде планарного графа.



Динамика мнений для такой конфигурации описывается с помощью линейной разностной системы:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + a_1 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{x_i(t)}{3} - x_1(t) \right) \\ x_2(t+1) = x_2(t) + a_2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{x_i(t)}{3} - x_2(t) \right) + u(t). \\ x_3(t+1) = x_3(t) + a_3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{x_i(t)}{3} - x_3(t) \right) \end{cases}$$

Начальные условия $x_i(0) = x_i^0$, $i = 1, 2, 3$. В процессе обмена мнениями целью второго участника-игрока является управление мнениями двух других агентов, т. е. ограничение их мнений и «приведение» их к заданной величине $a \in R^+$. Решение задачи сводится к минимизации функционала:

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - a)^2 + cu_t^2 \right),$$

где $\delta \in (0; 1]$ – коэффициент дисконтирования, c – цена управления.

Для решения используем метод динамического программирования [1]. Уравнение Беллмана в данном случае имеет вид:

$$V(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

$$= \min_u \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - a)^2 + cu_t^2 + \delta V(x'_1, x'_2, x'_3) \right),$$

где

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + a_1 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{3} - x_1 \right) \\ x'_2 = x_2 + a_2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{3} - x_2 \right) + u. \\ x'_3 = x_3 + a_3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{3} - x_3 \right) \end{cases} \tag{2}$$

Оптимальное управление будем искать в классе линейных функций

$$u(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_0, \tag{3}$$

а функцию Беллмана – в классе квадратичных функций

$$V(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 k_i x_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij} x_i x_j + k_0, \tag{4}$$

где $k_{ij} = k_{ji}$, $i \neq j$. Найдем минимум по u правой части (1) из уравнения:

$$\left(\sum_{i=1}^3 (x_i - a)^2 + cu_t^2 + \delta V(x'_1, x'_2, x'_3) \right)'_u = 0$$

или

$$2cu + \delta \frac{\partial V}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial u} = 0.$$

Отсюда

$$2cu + \delta(k_2 + 2k_{12}x'_1 + 2k_{22}x'_2 + 2k_{23}x'_3) = 0. \quad (5)$$

Подставив (2) в (5), найдем выражение для управления в линейной форме (3), где

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{\delta((3-2a_1)k_{12}+a_2k_{22}+a_3k_{23})}{3(k_{22}\delta+c)} \\ c_2 = -\frac{\delta(a_1k_{12}+(3-2a_2)k_{22}+a_3k_{23})}{3(k_{22}\delta+c)} \\ c_3 = -\frac{\delta(a_1k_{12}+a_2k_{22}+(3-2a_3)k_{23})}{3(k_{22}\delta+c)} \\ c_0 = -\frac{\delta k_2}{2(k_{22}\delta+c)} \end{cases}. \quad (6)$$

Наконец, подставив (6) в уравнение (1), вычислим коэффициенты в функции Беллмана (7).

$$\begin{cases} k_{11} = \frac{36(k_{22}\delta+c)^2+c\delta^2(4a_1k_{12}-2a_2k_{22}-2a_3k_{23}-6k_{12})^2}{36(k_{22}\delta+c)^2(1-\delta)} \\ k_{22} = \frac{36(k_{22}\delta+c)^2+c\delta^2(4a_2k_{22}-2a_1k_{12}-2a_3k_{23}-6k_{22})^2}{36(k_{22}\delta+c)^2(1-\delta)} \\ k_{33} = \frac{36(k_{22}\delta+c)^2+c\delta^2(4a_3k_{23}-2a_1k_{12}-2a_2k_{22}-6k_{23})^2}{36(k_{22}\delta+c)^2(1-\delta)} \\ k_{12} = \frac{c\delta^2(-2a_1k_{12}+4a_2k_{22}-2a_3k_{23}-6k_{22})(4a_1k_{12}-2a_2k_{22}-2a_3k_{23}-6k_{12})}{18(k_{22}\delta+c)^2(1-2\delta)} \\ k_{13} = \frac{c\delta^2(-2a_1k_{12}+4a_3k_{23}-2a_2k_{22}-6k_{23})(4a_1k_{12}-2a_2k_{22}-2a_3k_{23}-6k_{12})}{18(k_{22}\delta+c)^2(1-2\delta)} \\ k_{23} = \frac{c\delta^2(-2a_1k_{12}+4a_3k_{23}-2a_2k_{22}-6k_{23})(4a_1k_{12}-2a_2k_{22}-2a_3k_{23}-6k_{23})}{18(k_{22}\delta+c)^2(1-2\delta)} \\ k_1 = \frac{-12a(k_{22}\delta+c)^2-c\delta^2k_2(4a_1k_{12}-2a_2k_{22}-2a_3k_{23}-6k_{12})}{6(k_{22}\delta+c)^2} \\ k_2 = \frac{-12a(k_{22}\delta+c)^2-c\delta^2k_2(4a_2k_{22}-2a_1k_{12}-2a_3k_{23}-6k_{22})}{6(k_{22}\delta+c)^2} \\ k_3 = \frac{-12a(k_{22}\delta+c)^2-c\delta^2k_2(4a_3k_{23}-2a_1k_{12}-2a_2k_{22}-6k_{23})}{6(k_{22}\delta+c)^2} \\ k_0 = \frac{12a^2(k_{22}\delta+c)^2+c\delta^2k_2^2}{4(k_{22}\delta+c)^2(1-\delta)} \end{cases}. \quad (7)$$

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

С помощью программы Wolfram Mathematica были получены численные результаты, которые позволяют проанализировать и оценить изменения величины управления, а также его связь с остальными параметрами модели. Поскольку влияние игрока на агентов одинаково и система симметрична, предполагаем, что начальные данные первого и третьего агентов равны, а также равны их коэффициенты $a_1 = a_3$. Рассмотрим два примера.

Пример 1.

Начальные данные $x_1^0 = x_3^0 = 0.4$, $x_2^0 = 0.3$, $a_1 = a_3 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $\delta = 0.9$, $c = 0.1$, $a = 1$.

В результате решения системы (7) были получены несколько наборов решений. Для одного из них, $k_0 = -10$, $k_1 = 10$, $k_2 = -0.1$, $k_3 = 10$, $k_{11} = -2$, $k_{12} = 0.1$, $k_{13} = -3$, $k_{22} = -0.1$, $k_{23} = 0.1$, $k_{33} = -2$, определим управление $u(x_1, x_2, x_3)$ с помощью коэффициентов (6), а также функцию Беллмана $V(x_1, x_2, x_3)$.

$$u(x_1, x_2, x_3) = -0.9x_1 - 0.2x_2 - 0.9x_3 + 2. \quad (8)$$

Определим вид функции Беллмана по формуле (4) в классе квадратических функций.

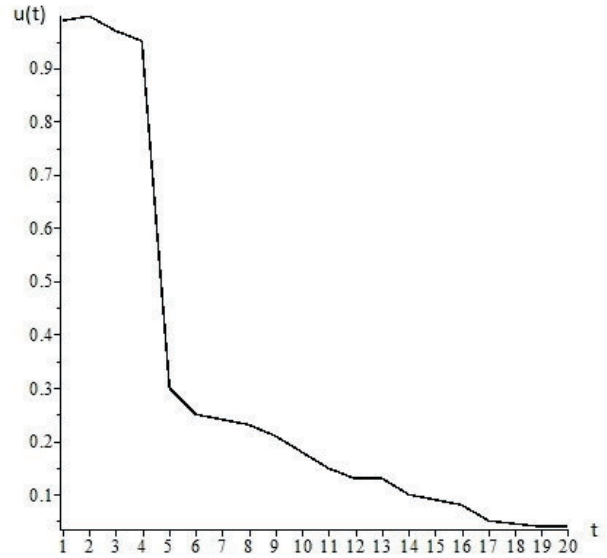


Рис. 1. Динамика изменения функции управления в коллективе с одним игроком и двумя агентами для $\delta = 0.9$, $c = 0.1$

Fig. 1. The dynamics of changes in the management function in a team with one player and two agents for $\delta = 0.9$, $c = 0.1$

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, x_3) = & -2x_1^2 - 0.1x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_3 \\ & + 0.2x_2x_3 + 0.2x_1x_2 + 10x_1 - 0.1x_2 + 10x_3 - 10. \end{aligned} \quad (9)$$

Таблица 1. Изменение мнения агентов, игрока и функции управления во времени к примеру 1
 Table 1. Change of opinion of agents, player and management functions over time for example 1

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$	$t = 9$	$t = 10$
$\mathbf{x}_1(t)$	0.4	0.4	0.66	0.78	0.81	0.88	0.91	0.93	0.94	0.96	0.99
$\mathbf{x}_2(t)$	0.3	1.4	1.45	1.37	1.28	1.23	1.21	1.19	1.16	1.02	1.01
$\mathbf{x}_3(t)$	0.4	0.4	0.66	0.78	0.81	0.88	0.91	0.93	0.94	0.96	0.99
$\mathbf{u}(t)$	0.99	0.97	0.45	0.22	0.15	0.13	0.12	0.10	0.08	0.08	0.02
$\mathbf{V}(t)$	-3.6	-3.7	-1.1	-0.38	-0.21	0.01	0.11	0.13	0.15	0.22	0.29

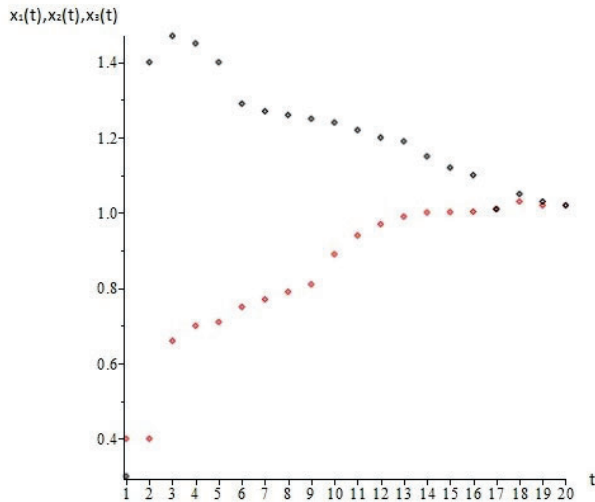


Рис. 2. Динамика мнений игрока и агентов во времени для $\delta = 0.9$, $c = 0.1$ (● – агенты $x_1(t)$, $x_3(t)$; ● – игрок $x_2(t)$)
 Fig. 2. The dynamics of the opinions of the player and agents over time for $\delta = 0.9$, $c = 0.1$ (● – agents $x_1(t)$, $x_3(t)$; ● – player $x_2(t)$)

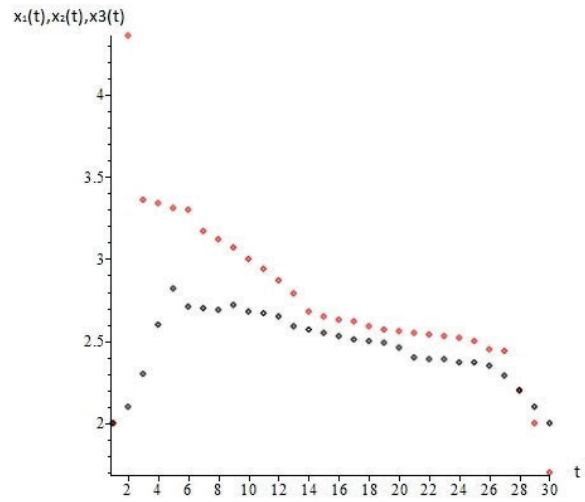


Рис. 3. Динамика мнений игрока и агентов во времени для $\delta = 0.8$, $c = 0.4$ (● – агенты $x_1(t)$, $x_3(t)$; ● – игрок $x_2(t)$)
 Fig. 3. The dynamics of the opinions of the player and agents over time for $\delta = 0.8$, $c = 0.4$ (● – agents $x_1(t)$, $x_3(t)$; ● – player $x_2(t)$)

Таблица 2. Изменение мнения агентов, игрока и функции управления во времени к примеру 2
 Table 2. Change of opinion of agents, player and management functions over time for example 2

	$t=0$	$t=2$	$t=4$	$t=6$	$t=8$	$t=10$	$t=12$	$t=14$	$t=16$	$t=18$	$t=20$	$t=22$	$t=24$
$\mathbf{x}_1(t)$	2	2.03	2.3	2.6	2.82	2.71	2.69	2.65	2.59	2.49	2.46	2.42	2.33
$\mathbf{x}_2(t)$	2	4.31	3.34	3.31	3.34	3.32	3.12	3.05	2.94	2.82	2.68	2.53	2.51
$\mathbf{x}_3(t)$	2	2.03	2.3	2.6	2.82	2.71	2.69	2.65	2.59	2.49	2.46	2.42	2.33
$\mathbf{u}(t)$	0.17	0.81	0.42	0.31	0.29	0.275	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.17	0.15
$\mathbf{V}(t)$	-3.81	-6.74	-21.3	-25.6	-24.3	-22.4	-19.2	-14.7	-10.3	-9.4	-8.7	-5.6	-1.2

Для данных начальных условий $x_1(0) = x_3(0) = 0.4$, $x_2(0) = 0.3$ оптимальная траектория для управления (8) имеет вид, представленный на рис. 1, а численные значения управления (8) и функции Беллмана (9) приведены в табл. 1. На рис. 2 представлена динамика мнений агента и игроков.

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод о том, что сходимость мнений агентов к наперед заданному значению происходит за относительно небольшое количество итераций. Это связано с тем, что для данной динамики характерна достаточно «низ-

кая» цена. Начальные мнения всех участников лежат в интервале $(0, 1)$. Функция управления носит убывающий характер.

Пример 2. Начальные данные $\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}_2^0 = \mathbf{x}_3^0 = 2$, $\delta = 0.8$, $c = 0.4$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 = 0.6$, $\mathbf{a} = 1$.

Аналогичным образом, как и в первом случае, строится таблица зависимости мнения агентов и игрока, а также графики.

На рис. 3 представлен график изменения мнений участников коллектива во времени, а на рис. 4 – график изменения функции управления по времени.

В результате решения системы (7) получены несколько наборов решений. Для одного из них, $k_0 = -20, k_1 = 20, k_2 = -0.7, k_3 = 20, k_{11} = -5, k_{12} = 0.4, k_{13} = -6, k_{22} = -0.5, k_{23} = 0.5, k_{33} = -5$, определим управление $u(x_1, x_2, x_3)$ с помощью коэффициентов (9), а также функцию Беллмана $V(x_1, x_2, x_3)$.

$$u(x_1, x_2, x_3) = -0.13x_1 + 0.26x_2 - 0.13x_3 + 0.16. \quad (10)$$

Определим вид функции Беллмана по формуле (4) в классе квадратических функций.

$$V(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 0.5x_2^2 - 5x_3^2 - 6x_1x_3 + 0.5x_2x_3 + 0.4x_1x_2 + 20x_1 - 0.7x_2 + 20x_3 - 20. \quad (11)$$

Для данных начальных условий $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.6$ оптимальная траектория для управления (8) имеет вид, представленный на рис. 4, а численные значения управления (10) и функции Беллмана (11) приведены в табл. 2.

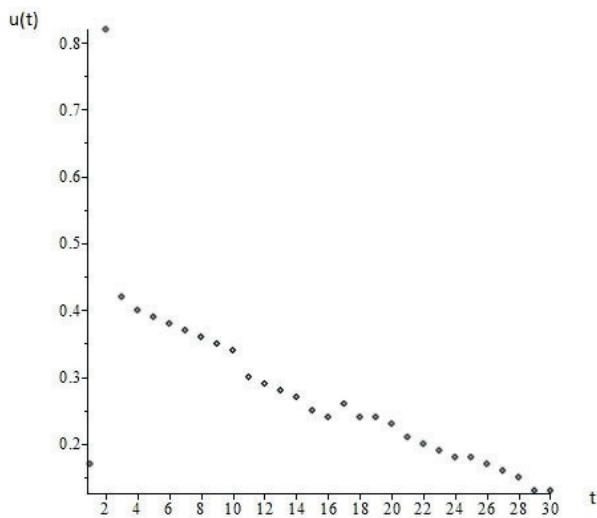


Рис. 4. Динамика изменений функции управления в коллективе с одним игроком и двумя агентами для $\delta = 0.8, c = 0.4$

Fig. 4. Dynamics of changes in the management function in a team with one player and two agents for $\delta = 0.8, c = 0.4$

Сравнивая результаты примеров 1 и 2, можно сделать вывод о том, что сходимость мнений агентов и игрока к наперед заданной величине во втором случае происходит за большее количество итераций.

«Замедление» можно объяснить тем, что в четыре раза вырос такой параметр, как цена, $c = 0.4$, в первом случае $c = 0.1$, а также изменились индивидуальные коэффициенты a_i .

Кроме того, в примере 1 разница между начальными мнениями агентов и заданным отличается на меньшую величину, чем в примере 2. В первом случае $a - x_1(0) = a - x_3(0) = 0.2$, а во втором $a - x_1(0) = a - x_3(0) = 1$, т. е. итераций во втором сценарии потребуется больше, чем в первом. Функция управления имеет убывающий вид, как и в предыдущем случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача динамики мнений участников, в которой структура взаимодействия представлена в виде полного графа с тремя вершинами. Мнением одного из агентов управляет некий игрок, который минимизирует разницу между мнениями других участников и заданной величиной. В данной постановке задача решается с применением функции Беллмана.

Важно, что именно функция управления влияет на «сведение» мнений участников к желаемому значению, а значит, и на всю динамику в целом, делая ее определенной, «предсказуемой». Численное значение функции управления уменьшается по мере того, как близки мнения агентов к заданному.

В качестве иллюстрации выбраны примеры с разными начальными мнениями всех членов коллектива, а также значениями коэффициента дисконтирования, индивидуальных коэффициентов и цены игры. Именно эти показатели влияют на скорость сходимости. Важным выводом является следующее:

- чем выше цена, которую платит игрок, тем медленнее процесс сходимости;
- процесс зависит от начальных мнений всех участников: чем меньше разница между ними, тем быстрее сходимость.

Важно отметить, что данная постановка является не игровой, а носит оптимизационный характер. Однако это исследование дает широкую перспективу для дальнейшего изучения конфликтных сценариев в случае, когда игроков более одного и появляется конкуренция.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов Г. А.* Введение в теорию управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 256 с.
2. *Мазалов В. В.* Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2016. 448 с.
3. *Рогов М. А., Седаков А. А.* Согласованное влияние на мнения участников социальной сети // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10, вып. 4. С. 30–58.

4. Barabanov I. N., Korgin N. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Dynamics models of informational control in social networks // *Autom. Remote Control*. 2010. Vol. 71, iss. 11. P. 2417–2426. doi: 10.1134/S0005117910110135

5. Bauso D., Tembini H., Basar T. Opinion dynamics in social networks through mean field games // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2016. Vol. 54, no. 6. P. 3225–3257. doi: 10.1137/140985676

6. Bure V. M., Parilina E. M., Sedakov A. A. Consensus in a social network with two principals // *Autom. Remote Control*. 2017. Vol. 78, iss. 8. P. 1489–1499. doi: 10.1134/S0005117917080094

7. Degroot M. H. Reaching a consensus // *J. Amer. Stat. Assoc.* 1974. No. 69: 345. P. 118–121. doi: 10.1080/01621459.1974.10480137

8. Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics driven by various ways of averaging // *Comp. Econ.* 2005. Vol. 25, no. 4. P. 381–405. doi: 10.1007/s10614-005-6296-3

9. Mazalov V. V., Parilina E. M. The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics // *Mathematics*. 2020. No. 8(3), 355. P. 1–16. doi: 10.3390/math8030355

10. Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes // *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2019. Vol. 15, iss. 1. P. 118–125. doi: 10.21638/11702/spbu10.2019.109

Поступила в редакцию 04.05.2020

REFERENCES

1. Leonov G. A. *Vvedenie v teoriyu upravleniya* [Theory of control]. St. Petersburg: St. Petersburg Univ., 2004. 256 p.

2. Mazalov V. V. *Matematicheskaya teoriya igr i prilozhenia* [Mathematical game theory and applications]. St. Petersburg: Lan', 2016. 448 p.

3. Rogov M. A., Sedakov A. A. Soglasovannoe vliyanie na mnenia uchastnikov sotsialnoi seti [Coordinated influence on the beliefs of social network members]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozhenia* [Math. Game Theory Appl.]. 2018. Vol. 10, iss. 4. P. 30–58.

4. Barabanov I. N., Korgin N. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Dynamics models of informational control in social networks. *Autom. Remote Control*. 2010. Vol. 71, iss. 11. P. 2417–2426. doi: 10.1134/S0005117910110135

5. Bauso D., Tembini H., Basar T. Opinion dynamics in social networks through mean field games. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2016. Vol. 54, no. 6. P. 3225–3257. doi: 10.1137/140985676

6. Bure V. M., Parilina E. M., Sedakov A. A. Consensus in a social network with two principals. *Autom. Remote Control*. 2017. Vol. 78, iss. 8. P. 1489–1499. doi: 10.1134/S0005117917080094

7. Degroot M. H. Reaching a consensus. *J. Amer. Stat. Assoc.* 1974. No. 69: 345. P. 118–121. doi: 10.1080/01621459.1974.10480137

8. Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics driven by various ways of averaging. *Comp. Econ.* 2005. Vol. 25, no. 4. P. 381–405. doi: 10.1007/s10614-005-6296-3

9. Mazalov V. V., Parilina E. M. The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics. *Mathematics*. 2020. No. 8(3), 355. P. 1–16. doi: 10.3390/math8030355

10. Sedakov A. A., Zhen M. Opinion dynamics game in a social network with two influence nodes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2019. Vol. 15, iss. 1. P. 118–125. doi: 10.21638/11702/spbu10.2019.109

Received May 04, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Дорофеева Юлия Александровна

аспирант

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910

старший преподаватель

Петрозаводский государственный университет, ИМИТ
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,
Россия, 185910

эл. почта: julana2008@yandex.ru

тел.: +79114197708

CONTRIBUTOR:

Dorofeeva, Julia

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia

Petrozavodsk State University, IMIT

33 Lenin Ave., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia

e-mail: julana2008@yandex.ru

tel.: +79114197708

УДК 517.954:630*161

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА CO_2 В ЛЕСНЫХ ПЕСЧАНЫХ ПОЧВАХ

Ю. В. Заика¹, О. Н. Бахмет²

¹ *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

² *Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

В контексте анализа влияния антропогенных факторов на изменения глобальных биосферных процессов исследования круговорота углерода в масштабе «атмосфера–растения–почва» соответствующие математические модели представляют значительный интерес. Помимо оценки глобального баланса потоков углерода отмечается необходимость более пристального внимания к математическому описанию газовой фазы почв на локальном уровне, учитывая многообразие почв и условий их жизненного цикла. В частности, именно на основе локальных экспериментальных данных делаются выводы о преимущественной эмиссии или доминирующем стоке углерода на тех или иных территориях, о влиянии мелиорации почв, таяния вечной мерзлоты и т. д. В работе предложена математическая модель продуцирования и переноса углекислого газа в суточном диапазоне времени в лесных почвах, характерных для Восточной Фенноскандии. Модель ориентирована на сравнительный количественный анализ диффузионной и конвективной составляющих с целью оценки динамики дыхания почвы и изменений направлений стока. Предпринята попытка ограничиться минимальным количеством необходимых параметров краевой задачи, требующих оценки по экспериментальным данным.

Ключевые слова: краевые задачи в пористой среде; диффузия и конвекция; перенос CO_2 в песчаных почвах.

Yu. V. Zaika, O. N. Bakhmet. BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CO_2 TRANSPORT IN SANDY FOREST SOILS

In the context of human-induced changes in global biospheric processes, research on carbon cycling at the ‘atmosphere – plants – soil’ scale and the corresponding mathematical models are of substantial interest. In addition to the global analysis of the balance of carbon fluxes, specialists in soil science argue that closer attention should be given to the mathematical description of the gaseous phase of soils at the ‘local level’, taking into account the diversity of soils and their ‘life cycle’ conditions. Thus, it is the local experimental data that are the basis for conclusions about an area being mainly a source or a sink of carbon, about the effects of soil reclamation, permafrost thawing, etc. A mathematical model is suggested here for daily carbon dioxide production and transport in forest soils typical of Eastern Fennoscandia. The model performs a comparative quantitative analysis of the diffusion and convection components to estimate changes in soil respiration and transfer directions. An attempt is made to minimize the number of boundary value problem parameters to be estimated using experimental data.

Keywords: boundary value problems in a porous medium; diffusion and convection; CO_2 transport in sandy soils.

ВВЕДЕНИЕ

Комплексные модели круговорота углерода в масштабе «атмосфера–растения–почва», обстоятельный обзор литературы, тенденции развития математического моделирования в этой области представлены в [9, 14, 15, 18]. Более пристальное внимание к физически обоснованному математическому описанию газовой фазы почв уделено в [13, 17, 18, 20]. Именно на основе локальных экспериментальных данных о дыхании почв делаются выводы о преимущественной эмиссии или доминирующем стоке углерода на тех или иных территориях, о влиянии мелиорации почв, таяния вечной мерзлоты и т. д. Проблема междисциплинарная. Результаты численного моделирования – лишь один из аргументов при обсуждении дискуссионных вопросов и проблем, возникающих, в частности, при анализе баланса потоков углекислого газа и метана в различных почвенных и болотных экосистемах. Вести речь о какой-либо универсальной математической модели переноса углекислого газа в почвенном горизонте преждевременно. Модель должна «подстраиваться» под конкретную задачу, описывать влияние лишь лимитирующих факторов с учетом имеющихся возможностей и точности измерений тех или иных потоков, концентраций, характеристик (гранулометрический состав, физико-химические параметры и т. д.). Трудно рассчитывать на корректную оценку десятков априори неизвестных параметров в детализированных моделях по измерениям «внешних» потоков CO_2 из почвы, дискретным показаниям температуры, влажности и т. п. Здесь следует иметь в виду и следующее обстоятельство. Коэффициенты (например, диффузии), как известно, не измеряются, а вычисляются по измерениям в рамках конкретной модели (как правило, очень упрощенной). Использовать эти значения в других (более детализированных) моделях нужно с осторожностью, ориентируясь в лучшем случае на порядок величины. Один и тот же (формально по названию) коэффициент, но в разных моделях (например, при различных краевых условиях) примет различные значения, даже если обрабатывается одна и та же «экспериментальная кривая». Поэтому, используя литературные данные, следует, помимо уточнения экспериментальных условий, обращать внимание на методику *вычисления* значения того или иного «табличного» коэффициента. И если не решать глобальные задачи (требующие усилий

больших научных коллективов, длительного времени, дорогостоящих экспериментальных и вычислительных ресурсов), то трудно придумать конкретную прикладную задачу, в которой (условно) при 10-процентной погрешности измерений требуется выделить десять процессов, вносящих сопоставимый друг с другом 10-процентный вклад «в общий поток».

Исходя из этих общих соображений рассмотрим следующую задачу моделирования. Для определенности представим себе обычный погожий летний день в конце июля в обычном сосновом лесу Восточной Фенноскандии. Обычная песчаная почва, покрытая обычной лесной подстилкой. Рассмотрим вопрос о количественном сопоставлении диффузионной и конвективной составляющих переноса углекислого газа (исторически «постулируется» преимущественный характер молекулярной диффузии). В научной литературе анализируются и другие возможные механизмы переноса [13, гл. V], вплоть до «экзотических» (кнудсеновская диффузия, диффузия по поверхности твердой фазы, тепловое скольжение и т. п.). Конечно, эти процессы участвуют, их список можно продолжить, вопрос лишь в их сопоставимости (и где взять значения соответствующих коэффициентов?). В частности, вряд ли тепловое скольжение может играть заметную роль, поскольку оно становится заметным лишь в сильно разреженных газах [12, с. 357]. Это возможно в микропорах, но они слабо связаны и вряд ли представляют «конкурирующий» канал переноса. Впрочем, не будем столь категоричны, поскольку принятая модель основана на интегральных, усредненных характеристиках без детализации многообразия механизмов переноса.

В целом, исходя из поставленной задачи (она еще будет уточняться), будем придерживаться следующего подхода. Постулаты неравновесной термодинамики (уравнения Онзагера) предписывают «перекрестный» учет градиентов концентраций, температуры, давления, влажности . . . , что для наших целей приведет к неоправданному усложнению многопараметрической модели. Будем моделировать динамику газовой фазы (характеристики которой трудно измерить с высокой точностью). А температуру и влажность будем учитывать их влиянием на «эффективные газовые параметры» переноса, ориентируясь на экспериментальные данные и их физически осмысленную аппроксимацию (не выписывая уравнения теплопроводности и влагопереноса).

В общих математических терминах рассуждаем следующим образом. Рассмотрим функционал $J[t, z, c(t, \cdot)]$, значение которого в момент времени t на глубине z определяется распределением концентрации $c(t, \cdot)$ в окрестности текущей точки z . В линейном приближении локально это распределение характеризуется первыми двумя слагаемыми формулы Тейлора: значениями $c(t, z)$ и $\partial_z c(t, z)$. Классическая молекулярная диффузия реагирует на градиент, а конвективное движение углекислого газа (гравитационное, в растворенной форме в почвенной влаге, в результате испарения влаги и т. п.) по величине определяется скоростью среды и значением концентрации. Различные процессы переноса газа в почве достаточно подробно описаны в книге [13, гл. V], а в справочнике [6, с. 437] только для изотермических условий выделены десять основных возможных механизмов переноса. Не задаваясь необозримой задачей явного учета такого многообразия процессов (а конкретную практическую задачу, для которой это необходимо, трудно сформулировать), будем в линейном приближении классифицировать эти процессы по их вкладу преимущественно в коэффициенты при концентрации или при ее градиенте. При этом «накапливается» эффективная скорость конвекции и эффективный коэффициент диффузии. Чтобы не загромождать обозначения индексом $_{\text{eff}}$, далее подразумеваем, что упоминаемые коэффициент диффузии и скорость конвективного переноса носят интегральный, усредненный, эффективный, аккумулярующий характер. Численному анализу и сравнению подлежат «типы переноса» (включая их локальное направление по глубине почвенного слоя), а не многочисленные «составляющие», имеющие каждый конкретный физический или биохимический смысл и механизм реализации. В частности, нас будет интересовать, какая часть продуцируемого в почве углекислого газа (в основном благодаря дыханию корней, химическим процессам разложения органических веществ и жизнедеятельности микроорганизмов) достигает поверхности (с которой эмиссия CO_2 регистрируется достаточно надежно), а какая часть депонируется глубинными слоями почвы (в частности, уносится грунтовыми водами).

При изложении модели в форме краевой задачи будем последовательно анализировать выделенные лимитирующие процессы. Англоязычная версия описания модели представлена в [21]. Авторы ссылались в основном лишь на доступные русскоязычные монографии, не ставя перед собой цель обзора.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Температура

Начнем с «самого простого» — учета влияния суточных колебаний температуры корнеобитаемого слоя почвы. Кавычки означают, что мы воспользуемся простейшей аппроксимацией температуры $T(t, z)$ по времени t и глубине z , не привлекая сложный математический аппарат теплофизики почв [16]. Летний период в сосновом лесу Восточной Финляндии характеризуется небольшой суточной амплитудой температуры. Что касается почвы, то следует учесть значительный демпфирующий эффект лесной подстилки. На фоне физико-химических процессов продуцирования CO_2 , которые обычно характеризуются экспоненциальной зависимостью от температуры (по закону Аррениуса), коэффициенты диффузии и конвекции слабо (степенным образом с удовлетворительной точностью) зависят от T . Но мы учтем и такую зависимость из соображений сбалансированности модели и исходя из возможности малых колебаний инициировать резонансные явления. Мы не нацелены на предельные упрощения, которые бы позволили надеяться на аналитические выкладки. Для численного анализа указанное уточнение учесть несложно.

Будем ориентироваться на качественный характер динамики температуры почвы, представленный на рис. 1 (см. также [20, с. 15, 16]).

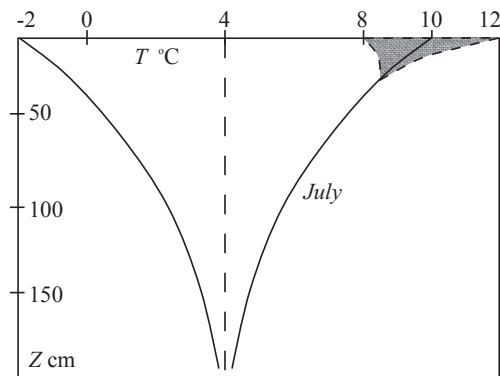


Рис. 1. Сезонный ход температуры
Fig. 1. Seasonal temperature variations

Воспользуемся решением классической «задачи о температуре земли» [2, §14], точнее, выражениями для температурных волн [12, §55]:

$$\alpha_y \equiv \sqrt{\omega_y [2\chi_y]^{-1}}, \quad T_y(t, z) = T_\infty + \Delta T_y \exp\{-\alpha_y z\} \cos\{\omega_y t - \alpha_y z\}.$$

Вместо функции \cos можно взять \sin в зависимости от предпочтительного выбора начала отсчета времени (уточним позже). Пока ограничимся среднегодовыми колебаниями (индекс y означает «year»). Значение T_∞ соответствует установившейся температуре на глубине 3–4 метра (например, $T_\infty = 4^\circ\text{C}$). Период колебаний $\tau_y = 2\pi/\omega_y$ равен году, ω_y — соответствующая частота. Для численных расчетов по уравнению диффузии в относительно небольшом диапазоне времени удобно принять $[t] = \text{s}$. Для ориентировки по порядку величин [2, с. 101]: период $\tau_y \approx 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 3.15 \times 10^7 \text{s}$, коэффициент температуропроводности $\chi_y \approx 2 \times 10^{-3} \text{cm}^2/\text{s}$. Тепловая волна распространяется с задержкой по фазе, что отражено в формуле. Поверхность равной фазы $\omega_y t - \alpha_y z = \text{const}$ движется вглубь почвы со скоростью $v = dz/dt = \sqrt{2\omega_y \chi_y}$. При $z = 0$ получаем колебание температуры приповерхностного слоя почвы: $T_y^0(t) = T_\infty + \Delta T_y \cos\{\omega_y t\}$. Если для примера фиксировать амплитуду $\Delta T_y = 6^\circ\text{C}$, то $T_y^0(t) \in [-2, 10]$ и на глубине 3–4 метра колебания практически затухают. Формально $\max T_y^0$ достигается при $t = 0$, т. е. здесь за начало отсчета времени примем условно границу июль-август. Поскольку нас далее будет интересовать суточный ход температуры, то, пренебрегая малой величиной $\omega_y t$ ($\omega_y \approx 2 \times 10^{-7}$), зафиксируем «базовое распределение ($J = \text{July}$)»

$$T_J(z) = T_\infty + \Delta T_y \exp\{-\alpha_y z\} \cos\{-\alpha_y z\}.$$

Отметим также, что для указанного значения температуропроводности χ_y (по порядку величины) $\alpha_y \approx 10^{-2}$ и колебательный характер экспоненциально затухающей функции $T_J(z)$ будет слабо заметен.

Аналогичным образом примем аппроксимацию в дневном диапазоне:

$$\alpha_d \equiv \sqrt{\omega_d [2\chi_d]^{-1}}, \quad T_d(t, z) = T_J(z) - \Delta T_d \exp\{-\alpha_d z\} \cos\{\omega_d t - \alpha_d z\}. \quad (1)$$

При этом $\omega_d \gg \omega_y$ (примерно в 365 раз) и $\alpha_d \gg \alpha_y$ (примерно в 19 раз). Дневная амплитуда колебаний ΔT_d невелика (например, $\Delta T_d = 2$) за счет демпфирующего влияния лесной подстилки. Для указанных значений имеем $T_d^0(t) \in [8, 12]^\circ\text{C}$. Минимум приповерхностной ($z = 0$) температуры достигается при $t = 0$, так что в формуле (1) за начало отсчета времени принимаем начало нагрева почвы после ночного охлаждения, условно 6 часов утра. Для краткости говорим о начале светового дня (подразумевая уровень освещения пе-

рехода «охлаждение–нагрев»). Колебания затрагивают, по существу, лишь примерно полуметровый корнеобитаемый подповерхностный слой, где и происходит в основном активное дыхание почвы и продуцирование CO_2 в результате физико-химических процессов разложения органических веществ и жизнедеятельности микроорганизмов.

Отметим теперь следующие обстоятельства. Даже в безоблачные сутки колебания приповерхностной температуры лишь грубо опишутся синусоидой. Среднегодовая амплитуда ΔT_y тоже весьма условна, а измеренная ΔT_d будет существенно варьироваться даже в пределах нескольких квадратных метров под лесной подстилкой. Значения температуропроводностей $\chi_{y,d}$ существенно различны, хотя речь «об одной и той же почве». За сезон можно говорить о некотором усредненном прогреве или охлаждении почвы, а в течение суток колебания температуры приземного слоя воздуха приведут лишь к изменениям температуры некоторого объема почвы «в окрестности каналов порового пространства». Не говоря уже о том, что усредненные (эффективные) значения $\chi_{y,d}$ не отражают изменения теплопроводности почвы по мере изменения ее структуры и состава с глубиной. Таким образом, формулу (1) будем воспринимать как физически осмысленный вариант аппроксимации (стандартным методом наименьших квадратов) экспериментальных данных по температуре варьированием в разумных пределах параметров T_∞ , $\Delta T_{y,d}$, $\chi_{y,d}$.

Требования к высокой точности аппроксимации нет, поскольку формула будет использоваться лишь в степенных (невысокой степени) зависимостях коэффициентов от температуры (на фоне экспоненциального всплеска продуцирования CO_2 в корнеобитаемом слое при благоприятных условиях по температуре и влажности). Вместе с тем анализ значений варьируемых параметров позволяет проводить условный сравнительный анализ почв даже в пределах небольшой территории.

Концентрация CO_2

Нас будут интересовать концентрации углекислого газа в почвенном воздухе и в почвенной влаге (в растворенном состоянии). Сопряжение с атмосферным воздухом осуществляется в основном вдоль поровых каналов достаточно большого диаметра (микропоры в значительной степени изолированы и не составляют в целом сопоставимого канала переноса газовой фазы почвы). Поэтому за основу дальнейших рассмотрений примем равенство давлений атмосферного воздуха и газовой фа-

зы почвы в слое активного продуцирования CO_2 . Незначительные колебания атмосферного давления в течение суток не учитываем.

При изучении явлений переноса в газах (в частности, диффузионных процессов в смеси газов) общепотребительны следующие обозначения [12, гл. VII]: n — полная концентрация (общее число молекул газа в единице объема газа, $[n] = 1/cm^3$, можно использовать и mol/cm^3 , mol/m^3); если n_1 относится к какому-либо газу в смеси, то $c_1 = n_1/n$ — относительная концентрация «первого газа» (которым для нас далее будет CO_2). Для отличия массовую концентрацию будем обозначать заглавной буквой C , $[C] = mg/cm^3$, g/m^3 . Подчеркнем, что при изучении газовой фазы почвы [13] имеется в виду масса изучаемого газа в единице объема почвенного воздуха. Газ, растворенный в почвенной влаге и адсорбированный на свободной поверхности твердой фазы, учитывается отдельно. Состав атмосферы в объемных %: 78 (азот), 20.9 (кислород), ..., 0.035 (CO_2), ... (в массовых %: 75.51, 23.14, ..., 0.05, ...). В почвенном воздухе ситуация кардинально меняется [20, с. 34]. Уже на глубине 10–20 см концентрация CO_2 может возрасти по порядку. В [13, с. 29] и [17, с. 298] указан «предельный» диапазон: 0.035–20 %.

Перейдем к растворимости углекислого газа в жидкой фазе. Учтем, что почвенная влага обладает своеобразной спецификой [8, с. 25], вода (по классификации А. Ф. Лебедева) может принимать следующие формы: 1) водяной пар, 2) гигроскопическая вода, 3) пленочная вода, 4) гравитационная вода, 5) вода в твердом состоянии, 6) кристаллическая вода и 7) химически связанная вода. Локально растворенному углекислому газу не приходится «диффундировать в толщу воды». «Рабочий диапазон» газовой концентрации находится на уровне процентов. Процесс растворения является быстрым в масштабе характерного времени лимитирующей молекулярной диффузии в газовой фазе. По этим причинам примем в линейном приближении модели в целом пропорциональную зависимость $C_w = \gamma(T)C_g$, где C_w — массовая концентрация CO_2 , растворенного в единице объема жидкости, $C_g \equiv C$. Здесь $\gamma(T)$ также следует воспринимать как эффективный коэффициент и только в среднем (по порядку величины) можно ориентироваться на «табличную» растворимость.

В монографии [13] ставится проблема учета адсорбированного углекислого газа на свободной поверхности твердой фазы. Одним из возможных механизмов переноса является поверхностная диффузия. В количественном от-

ношении поверхностная концентрация (особенно если удельная поверхность велика) существенна и регистрируется при проведении экспериментов дегазации образцов почвы. Но нас интересует динамика переноса, а не общая концентрация. Воспринимаем количество адсорбированного газа как слабоподвижный фон (но который, несомненно, следует учесть при оценке общего содержания углекислого газа в почве). В порядке аналогии это согласуется с известным мнением [1, с. 512] (правда, по поводу совсем другого газа): «Правильнее, по всей вероятности, считать, что часть водорода прочно удерживается дефектами решетки и поэтому не должна учитываться при определении концентрации, градиент которой входит в уравнение закона Фика, т. е. часть водорода является полуинертной примесью. Закон Фика применим только к оставшейся части».

Введем теперь в рассмотрение два необходимых параметра: $\varepsilon(t, z)$ — порозность аэрации (объемная доля газа в почве), $\theta(t, z)$ — объемная доля влаги. Тогда $1 - (\varepsilon + \theta) \equiv \zeta(t, z)$ — объемная доля твердого вещества почвы. Теоретически $\varepsilon \in (0, 1)$, но близкие к предельным значения не согласуются с понятием почвы, будем рассматривать более узкий реальный диапазон. Начиная с относительно небольшой глубины в пределах метра величина ζ (а значит, и доля порового пространства $\varepsilon + \theta$) стабилизируется.

Итак, далее нас будет интересовать основная подвижная часть углекислого газа с общей концентрацией

$$\begin{aligned} C_m(t, z) &= C_g(t, z)\varepsilon(t, z) + C_w(t, z)\theta(t, z) \\ &= C(t, z)[\varepsilon + \gamma(T)\theta] \quad (C \equiv C_g). \end{aligned}$$

Это массовое количество CO_2 в газовой фазе и растворе (суммарно в поровом пространстве), отнесенное к единице объема почвы.

Диффузия и конвекция

Будем считать, что атмосферное давление стабильно в течение суток. Давление почвенного воздуха находится в квазиравновесном соответствии с приповерхностным атмосферным. При этом учитываем лишь основной канал переноса по системе связанных макропор. Микропоры и микрокапилляры, в которых могут проявляться эффекты теплового скольжения, кнудсеновская диффузия, считаем второстепенным каналом. Поскольку молекулы N_2 , O_2 сравнимы по массе и размерам, молекула CO_2 тяжелее (но не на порядок) и концентрация углекислого газа находится на уровне нескольких %, то можно воспользоваться теорией диффузии в бинарной смеси газов.

Сначала для простоты представим себе «почву» как набор вертикальных полых цилиндров (каналов) с диаметрами, значительно превышающими длину свободного пробега молекул газа. Порозность аэрации учтем после предварительных рассмотрений.

Обозначим через n_1 концентрацию (плотность) молекул «первого газа» (CO_2) с относительно малой концентрацией по сравнению со «вторым газом» ($N_2 + O_2$). Соответственно, n_2 — число молекул $N_2 + O_2$ в единице объема (для определенности cm^3), $n = n_1 + n_2$ — общая концентрация (плотность) частиц почвенного воздуха. Другими незначительными газовыми составляющими пренебрегаем. Отметим при этом, что в обычных условиях в почве соблюдается примерное равенство (в объемных процентах) [17, с. 298]: $O_2 + CO_2 \approx 21\%$.

В указанном приближении плотность диффузионного потока частиц запишется в форме [12, с. 344], [3, с. 117]:

$$J_1 = -Dn \frac{\partial c_1}{\partial z}, \quad c_1 = \frac{n_1}{n},$$

где c_1 — относительная концентрация (CO_2). Величина n не обязательно постоянна, она может меняться в пространстве под действием какой-либо причины (например, силового поля или градиента температуры, так что термодиффузия косвенно учитывается). Но уравнение идеального газа считаем справедливым: $p = nkT$. Здесь и далее $[T] = K$. Преобразуем производную частного:

$$\begin{aligned} J_1 &= -D \frac{\partial n_1}{\partial z} + Dn_1 n^{-1} \frac{\partial n}{\partial z} \\ &= -D \frac{\partial n_1}{\partial z} + v_1 n_1, \quad v_1 \equiv D[\ln n]'. \end{aligned} \quad (2)$$

В обычных условиях общая концентрация стабильна, можно изменением функции $\ln n$ пренебречь ($v_1 \approx 0$ в (2)) и пользоваться выражением $J_1 \approx -D \partial_z n_1$. При этом [4, с. 357] (см. также [3, 5]) коэффициент диффузии D растет с увеличением температуры пропорционально $T^{3/2}$ (и обратно пропорционален давлению p). В принятых единицах измерений $[J_1] = 1/(cm^2s)$, $[D] = cm^2/s$, $[v_1] = cm/s$, т. е. слагаемое $v_1 n_1$ имеет формальный смысл конвективного потока со скоростью среды v_1 . Если скорость течения газа u ненулевая, то в выражение для потока добавляется слагаемое (молярный перенос), учитывающее течение газа как целого [3, с. 117]:

$$\begin{aligned} J_2 &= -Dn \frac{\partial c_1}{\partial z} + nc_1 u \\ &= -D \frac{\partial n_1}{\partial z} + v_2 n_1, \quad v_2 \equiv v_1 + u. \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание трудности подробного описания большого числа механизмов переноса, будем их классифицировать по формальному признаку вклада в одно из слагаемых в выражение, обобщающее (3). Локально ситуация определяется не значением концентрации в точке, а распределением в ее окрестности. В линейном приближении $n_1(t, \cdot)$ задается двумя числами $n_1(t, z)$ и $\partial_z n_1(t, z)$. В (3) выделено стандартное по форме слагаемое для молекулярной диффузии, определяемое градиентом, и конвективное слагаемое, зависящее от концентрации. Движение паров воды, гравитационное стекание более тяжелого газа, облегченный канал переноса вдоль корней, ветровые условия у поверхности, ... — все это приведет к накоплению вместо v_2 некоторого обобщенного коэффициента «скорости среды». Таким образом, далее нас будет интересовать сопоставимость вклада двух механизмов переноса без детализации составляющих.

Если домножить выражение для потока на массу молекулы CO_2 , то, в силу линейности по n_1 , приходим к массовому потоку (ориентируемся на размерность $mg/(cm^2s)$). Выделив «базовую» температурную зависимость и нормальные условия $p_0 = 760 \text{ Torr}$, $T_0 = 273 \text{ K}$, запишем следующее выражение (пока без учета порозности аэрации):

$$J^\circ = -D_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[\frac{T}{T_0} \right]^{3/2} \frac{\partial C}{\partial z} + v_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[\frac{T}{T_0} \right]^{1/2} C,$$

$\bar{p} = p_{\text{air}}$, $C = C_g$, $[C] = mg/cm^3$, $[T] = K$. В течение расчетного периода атмосферное давление считаем постоянным ($p_{\text{air}} = \text{const}$). Это давление считаем общим для смеси газов в рассматриваемой толще почвы, имея в виду основные макроканалы переноса CO_2 .

Корневая по температуре зависимость выделена с учетом средней скорости теплового движения молекул. В рамках кинетической теории идеальных газов степень можно уточнить в сторону возрастания ($1.5 \rightarrow 1.75$). Для реальных газов рекомендуется [7, с. 261] округление, так что примем

$$\begin{aligned} J^\circ &= -D(\bar{p}, T) \frac{\partial C}{\partial z} + v(\bar{p}, T) C, \quad (4) \\ D(\bar{p}, T) &\equiv D_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[\frac{T}{T_0} \right]^2, \quad v(\bar{p}, T) \equiv v_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \frac{T}{T_0}. \end{aligned}$$

Колебания атмосферного давления и температуры в почве (с учетом демпфирования лесной подстилкой) относительно малы и степенными зависимостями невысокой степени обычно пренебрегают на фоне экспоненциальных,

характерных для химических реакций. Вместе с тем такое уточнение разумно с точки зрения целостности модели «концентрация–температура–влажность». Величины D_0 , v_0 будем уже считать не зависящими от \bar{p} , T .

Как указано в [7, с. 267], «в большинстве случаев, за исключением смесей, содержащих водород, термодиффузией можно пренебречь». Тогда, если необходимо отразить реакцию потока на градиент температуры, в (4) следует добавить соответствующее слагаемое ($D(\bar{p}, T) = D$, $v(\bar{p}, T) = v$):

$$\begin{aligned} J^\circ &= -D \frac{\partial C}{\partial z} - D \frac{C}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + v C & (5) \\ &= -D \partial_z C + VC, \\ V &= V(\bar{p}, T, \partial_z T) \equiv v - DT^{-1} \partial_z T. \end{aligned}$$

Здесь следует иметь в виду, что, пренебрегая в добавочном слагаемом собственно механизмом термодиффузии, мы «не теряем» градиент температуры. Солидаризируемся со следующим обоснованным мнением [7, с. 266]. «Мы считаем, что при неизотермической диффузии ... разделения молекулярного потока вещества на поток концентрационной диффузии и термодиффузионный поток делать не следует, а необходимо пользоваться обычным выражением для диффузии, только в качестве движущей силы диффузии считать не концентрацию, а парциальное давление. В этом случае под явлением термодиффузии понимается относительный молекулярный перенос в неоднородных газах (или газовых смесях), вызванный наличием температурного градиента». Появление второго слагаемого в (5) определяется уравнением идеального газа:

$$\begin{aligned} D_g \partial_z p_1 &= D_g \partial_z (n_1 k T) = D_g k T \partial_z n_1 \\ &+ D_g k n_1 \partial_z T \Rightarrow D = D_g k T. \end{aligned}$$

В модели температура $T = T_d(t, z)$ представлена композицией элементарных функций (1), так что градиент $\partial_z T(t, z)$ задается явной формулой. Нас будет интересовать каждое слагаемое в формуле (5) как характеристика определенного механизма переноса: молекулярного (диффузионного) и конвективного (в обобщенном смысле). Формально можно величину V считать «обобщенной скоростью» движения (молярного переноса). По направлению переноса тепла диффундирует и водяной пар, который может «увлекать» с собой значительное количество углекислого газа. Так что смена знака градиента $\partial_z T(t, z)$ по времени и глубине существенно влияет на общий процесс переноса. Это особенно важно при анали-

зе суточных колебаний температуры и влажности. Кроме того, более тяжелые молекулы CO_2 (из учитываемых газов) диффундируют по направлению потока тепла. Таким образом, учет зависимости V от градиента $\partial_z T$ представляется необходимым элементом модели.

Пористость аэрации

В [20, с. 42] приводится два варианта выбора коэффициента диффузии: “effective” D_B (при градиенте общей концентрации $C_m = C_g \varepsilon + C_w \theta$) и “apparent” D_s (при градиенте концентрации углекислого газа $C = C_g$ в газовой фазе). Адсорбированный твердой фазой почвы CO_2 считаем «инертным фоном» и не учитываем в динамике в качестве канала переноса. При контакте с влагой он переходит в раствор и косвенно учитывается посредством концентрации C_w . Иначе следует рассматривать более сложный вариант $C_m = C_g \varepsilon + C_w \theta + C_s \zeta$.

Зависимость $D_s(\varepsilon)$ имеет некоторые особенности [20, с. 39]: сначала наблюдается медленный рост (плато), а затем резкий взлет. В [13, 17] отмечается, что обычно используют степенную зависимость. Постараемся избежать формальных аппроксимаций полиномами. Воспользуемся физической аналогией.

В среднем плоское сечение единичной площади, перпендикулярное вертикальной оси z , имеет ту же долю «газового окна» ε . В противном случае, используя разбиение на тонкие объемные слои (и составляя интегральную сумму), получили бы отличную от ε объемную долю. Поэтому в конструируемой «интегральной» модели не будем делать различия между поверхностной пористостью и объемной, обозначая эти величины одинаково: ε , θ .

На самом деле не только сама порозность важна, но и так называемая извилистость порового пространства [20, с. 52]. Рост извилистости (обозначим ее через δ), естественно, уменьшает поток газа. С учетом этого модельную плотность потока запишем в форме $J = J^\circ \varepsilon / \delta$. Параметры ε и δ не являются независимыми. По мере роста среднего размера пор начиная с некоторого момента они лавинообразно соединяются, относительно быстро уменьшается извилистость. По аналогии с активационным характером химических реакций вместо степенной рассмотрим экспоненциальную зависимость (похожую на аррениусовскую): $\exp\{-a/\varepsilon\}$, $a > 0$. Добавим нормирующий множитель $\exp\{a\}$, чтобы фактор учета порозности аэрации (включая в обобщенном смысле и извилистость поровых каналов) $\varepsilon/\delta(\varepsilon) \equiv f_\varepsilon = \exp\{a\} \exp\{-a/\varepsilon\} = \exp\{-a/\sigma\}$ принимал единичное значение при формальной подстановке $\varepsilon = 1$. Параметр модели $\sigma \equiv$

$\varepsilon/(1 - \varepsilon) = \varepsilon/(\theta + \zeta)$ играет роль аналога температуры при активации химических реакций. Разумеется, асимптотика $\varepsilon \rightarrow 1$ соответствует вырождению понятия почвы, так что принятую аппроксимацию следует рассматривать лишь в реальном диапазоне ε .

Параметр a приобретает «активационный» смысл (и можно сравнивать почвы по этому параметру). Обеспечен начальный «период накопления» и взлет с ожидаемым из физических соображений замедлением монотонной S -образной кривой насыщения (при $a < 1$ имеется точка перегиба). Характерный вид f_ε в зависимости от $a > 0$ представлен на рис. 2.

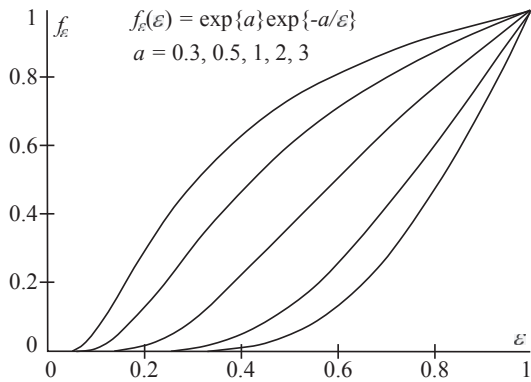


Рис. 2. Фактор порозности аэрации
Fig. 2. Aeration porosity factor

Если использовать такой множитель при корректировке «идеального» потока (5), то параметры D_0 и v_0 приобретают смысл предельных — в приповерхностном воздушном пространстве при нормальных условиях $(\{p_0, T_0\})$. Это дает возможность ориентироваться по порядку величины на коэффициент диффузии CO_2 в атмосфере. Итак, окончательно примем следующее выражение для плотности потока:

$$J(t, z) = f_\varepsilon(\varepsilon) [-D \partial_z C + VC(t, z)], \quad (6)$$

$$D = D(\bar{p}, T), \quad V = V(\bar{p}, T, \partial_z T),$$

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{a}{\sigma}\right\}, \quad \sigma(\varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\theta + \zeta}.$$

Здесь уже считаем D_0 и «усредненную конвективную скорость среды» v_0 варьируемыми в разумных пределах параметрами. В первом приближении полагаем $v_0 = \bar{v} = \text{const}$ для светового дня и ночи, причем знак \bar{v} не уточняем и выбираем его отдельно ($\bar{v} = \bar{v}_{d,n}$).

Замечание. Предполагаем, что в течение рассматриваемых летних суток не происходит дождей и резкой смены установившейся

погоды, распределение влаги по глубине стабильно. Имеет место лишь относительно медленное изменение профиля $\theta(t, z)$ (уточнение см. далее). Днем происходит некоторое иссушение верхних слоев почвы, в том числе и за счет корневой системы растений. Ночью профиль влаги частично восстанавливается из-за восходящего потока и конденсации паров воды. Незначительный перенос углекислого газа парами воды формально учитывается интегральным конвективным слагаемым в (6) с учетом преобразования $C_w = \gamma(T)C_g$. Заметные «гидродинамические» потоки почвенной влаги вглубь отсутствуют, так что таким механизмом переноса растворенного CO_2 в (6) в явной форме пренебрегаем.

Продуктивность CO_2

В уравнении материального баланса выделим две составляющие — транспортное слагаемое и продуктивность верхнего корнеобитаемого слоя почвы:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = \mathcal{F}_{tr} + \mathcal{F}_{pr}, \quad \mathcal{F}_{tr} = -\frac{\partial J}{\partial z}, \quad (7)$$

$$C_m = C_g \varepsilon + C_w \theta, \quad C \equiv C_g.$$

Характерный вид второго слагаемого (продуктивности) $Pr = \mathcal{F}_{pr}$ представлен на рис. 3 (где $[Pr] = \text{mg}/\text{m}^2 \cdot \text{cm} \cdot \text{h}$ как на Fig. 3.9 [20]).

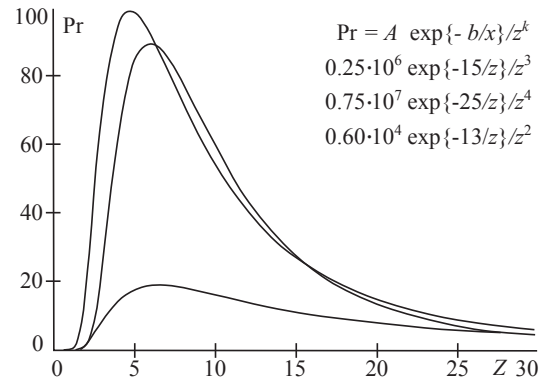


Рис. 3. Продуктивность CO_2
Fig. 3. CO_2 productivity

Разложение органики, дыхание корней, жизнедеятельность микроорганизмов — сложнейшая задача моделирования (см., например, описание многопараметрической модели ROMUL [15, 19]). Вместе с тем характерный вид продуктивности CO_2 , представленный на рис. 3, прозрачен и его можно постулировать по разрезу почвы. Ясно, на какой глубине максимум, а в лабораторных условиях можно для конкретного типа почвы определить оптимальные температуру и влажность.

В качестве базовой примем в (7) зависимость $\mathcal{F}_{\text{пр}} = A \exp\{-b/z\}/z^k$, $k > 0$. Аррениусовский всплеск в подповерхностном слое (температуру и влажность считаем максимально благоприятными) сменяется относительно медленным спадом со степенной скоростью (плотность корней, бактерий, органических веществ быстро падает). Параметры A, b, k подлежат уточнению в лабораторных условиях.

Остается учесть влияние отклонений температуры и влажности от оптимальных значений. Воспользуемся методологией штрафных функций (или факторов). Вне некоторого промежутка значений объемной влажности продуцирование CO_2 практически прекращается, следовательно, остается рассмотреть $\theta \in [\theta_{\min}^0, \theta_{\max}^0]$. Выберем, следуя [13], фактор влажности в форме: $\alpha > 1, \beta > 0$,

$$f_{\theta}(\theta) = \left[\frac{\theta - \theta_{\min}^0}{\hat{\theta} - \theta_{\min}^0} \right]^{\alpha} \cdot \left[\frac{\theta_{\max}^0 - \theta}{\theta_{\max}^0 - \hat{\theta}} \right]^{\beta} \quad (8)$$

Значение $\hat{\theta} = [\alpha\theta_{\max}^0 + \beta\theta_{\min}^0]/[\alpha + \beta]$ оптимальной влажности (при благоприятной температуре), для которой $f_{\max} = f_{\theta}(\hat{\theta}) = 1$, задается из опытных данных. Варьируемым параметром является $\alpha > 1$, а значение $\beta > 0$ вычисляется по заданным $\hat{\theta}, \alpha$. Условие $\alpha > 1$ обеспечивает более «плавную» восходящую ветвь в силу $f_{\theta}(\theta_{\min}^0) = f'_{\theta}(\theta_{\min}^0) = 0$. Характерный вид функции f_{θ} представлен на рис. 4. Для примера $\theta_{\min}^0 = 0.1, \theta_{\max}^0 = 0.8, \hat{\theta} = 0.5, 0.6$.

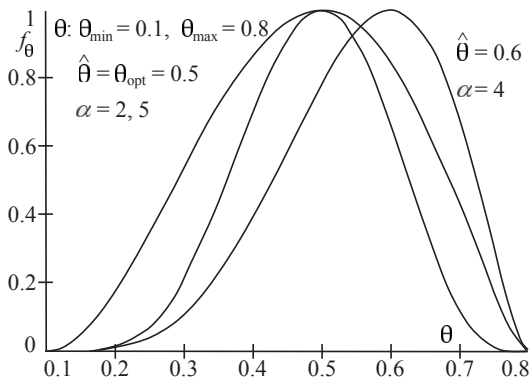


Рис. 4. Зависимость фактора f_{θ} от $a = \alpha$
Fig. 4. Dependence of the factor f_{θ} on the $a = \alpha$

Аналогичным образом определяется фактор $f_T(T)$, и тогда продуктивность принимает форму зависимости

$$\mathcal{F}_{\text{пр}} = f_{\theta}(\theta) f_T(T) A \exp\{-bz^{-1}\} z^{-k}, \quad (9)$$

$$\theta = \theta(t, z), \quad T = T(t, z).$$

В (9) не будем формально использовать фактор порозности аэрации f_{ε} , поскольку это лишь одна из многих дополнительных характеристик, влияющих на продуктивность «жизнеобитаемого» слоя («паспорт» слоя будет определяться значениями A, b, k).

Если участок леса открытый и травянистая растительность достаточно развита, то необходимо дополнительно учесть световой фактор:

$$f_L(t) = L_0 + (1 - L_0) \left[\frac{t}{t_L} \right]^p \cdot \left[\frac{t_* - t}{t_* - t_L} \right]^q, \quad (10)$$

где принято $p > 1, q > 0$, « $L = \text{Light}$ », $t_L: f_{\max} = f_L(t_L) = 1$, t_* — суточный период времени (до начала следующего светового дня). В июле в условиях белых ночей можно в (10) принять $t_L = t_*/2$ (6 часов вечера). При этом $q = q(p, t_L)$ аналогично (8). Значение «минимального уровня» $L_0 > 0$ соответствует заметному продуцированию CO_2 в течение суток, даже ночью (иначе $L_0 = 0$).

Динамика $\varepsilon(t, z)$ и $\theta(t, z)$

Один из характерных вариантов зависимости порозности аэрации и объемной влажности от глубины представлен в [20, с. 40]: порозность монотонно убывает, а влажность растет (с выходом на асимптоты). Величины ε, θ связаны соотношением $\varepsilon + \theta + \zeta = 1$, где ζ — объемная доля сухого вещества почвы. Целесообразно экспериментально определять θ и ζ , а уже затем вычислять ε . Если воспринимать влагу как питательный ресурс, то по аналогии можно воспользоваться часто используемыми в микробиологии и биохимии функциями Моно (Михаэлиса–Ментен) [10, с. 18] вида $\theta = \theta_{\max} z/[z + h]$. Это кривая насыщения, параметр h имеет смысл глубины, на которой функция достигает половины «асимптотического» максимума. Впрочем, такая же функция используется и при описании зависимости средней длины свободного пробега от температуры в газовой динамике: $\lambda = \lambda_{\infty} T/[T + \text{const}]$ (формула Сезерленда [11, с. 377]). Можно добавить в знаменателе «ингибирующее» слагаемое вида rz^2 [10, с. 30], которое даст возможность моделировать максимум на определенной глубине (следствие прошедшего накануне дождя) или использовать более «плавную» квадратичную зависимость (см. рис. 5, 6).

Целесообразно отразить зависимость объемной влажности от времени $h = h(t)$, поскольку происходят интенсивные процессы испарения, жизнедеятельности микроорганизмов и корневой системы (гравитационное стекание влаги уже практически прекратилось). В частности, днем $\theta(t, z) = \theta_{\max} z/[z + h(t)]$

с монотонно растущей функцией $h(t)$, например, $h(t) = h_0 + v_h t$, $v_h = v_{h,d} > 0$. Тогда достижение половины максимума будет во времени сдвигаться вглубь почвы, что соответствует процессу «оседания» уровня влаги. В ночной период $v_h = v_{h,n} < 0$ и происходит частичное восстановление влажности.

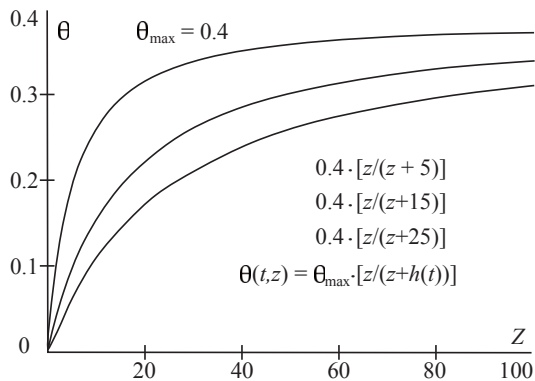


Рис. 5. Зависимость θ от параметра $b = h$
Fig. 5. Dependence of θ on the parameter $b = h$

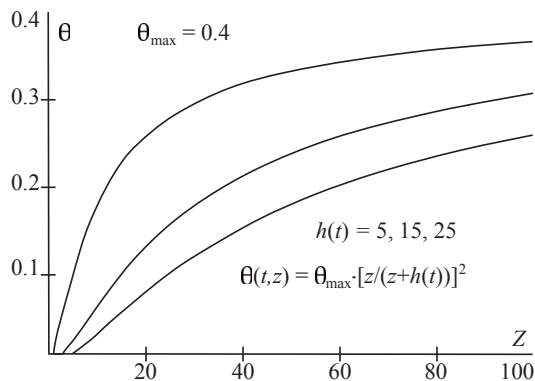


Рис. 6. Динамика квадратичной зависимости θ
Fig. 6. The dynamic of θ quadratic dependence

Это простейший вариант моделирования динамики $\theta(t, z)$. Использование теории движения почвенной влаги [8] существенно усложнило бы модель. Параметр скорости оседания влаги v_h зависит от интенсивности процессов испарения и поглощения корневой системой. Детализация этих процессов является сложной самостоятельной проблемой. Измерения влажности и температуры (по глубине и в динамике) для рассматриваемого класса песчаных почв значительно более доступны по сравнению с «трудноуловимой» газовой фазой. Это позволяет не усложнять модель.

Начальные и граничные условия

Начало отсчета времени соответствует началу светового дня (началу нагрева почвы,

условно 6 часов утра). Начальные условия генерируются с помощью тех же функций насыщения (аналогично зависимостям, представленным на рис. 5, 6) по экспериментальным данным. За ночь происходит «разгрузка» профиля концентрации, график концентрации становится монотонным по глубине.

Граничные условия для краевой задачи принимаем первого рода: задаются концентрации CO_2 на глубине 1–2 метра (стабильное значение, которое можно установить экспериментально) и у поверхности (атмосферный уровень углекислого газа).

Измеряются показатели температуры, объемной влажности и поток CO_2 с поверхности почвы в атмосферу. По этим данным требуется настроить (идентифицировать) параметры модели. Поставленная цель моделирования: сопоставить диффузионную и конвективную составляющие потока и оценить, какая часть продуцирования углекислого газа относится к стоку в атмосферу, а какая достигает грунтовых вод и способна к депонированию.

По порозности аэрации на «контрольной глубине» (плоское горизонтальное сечение поделится на части в соответствии с объемными показателями ε , θ и ζ) можно оценить газовую составляющую потока CO_2 вглубь, а показания лизиметров дадут представление о потоке растворенного углекислого газа в почвенной влаге после интенсивных осадков. Эту информацию следует учесть при решении обратной задачи параметрической идентификации модели, при подсчете концентраций и материального баланса потоков.

Финансирование исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. Даркен Л. С., Гурри Р. В. Физическая химия металлов. М., 1960. 585 с.
2. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 457 с.
3. Кириченко П. А. Термодинамика, статистическая и молекулярная физика. М.: Физматкнига, 2005. 176 с.
4. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1969. 402 с.

5. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика // Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теор. физика. Т. X. М.: Наука, 1979. 528 с.
6. Лыков А. В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 480 с.
7. Лыков А. В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. М.: ГИТТЛ, 1954. 298 с.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
9. Полуэктов Р. А., Смоляр Э. И., Тарлеев В. В., Топаж А. Г. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. СПб.: СПбГУ, 2006. 396 с.
10. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. М.; Ижевск: ИКИ-РХД, 2003. 184 с.
11. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. I. М.: Наука, 1970. 511 с.
12. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит, 2005. 544 с.
13. Смагин А. В. Газовая фаза почв. М.: МГУ, 2005. 301 с.
14. Тарко А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Матем. моделирование. М.: Физматлит, 2005. 232 с.
15. Чертов О. Г., Комаров А. С., Надпорожская М. А., Михайлов А. В., Быховец С. С.,

Зудин С. Л., Зубкова Е. В. Динамическое моделирование процессов трансформации органического вещества почв. Имитационная модель ROMUL. СПб.: СПбГУ, 2007. 96 с.

16. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
17. Шейн Е. В. Курс физики почв. М.: МГУ, 2005. 432 с.
18. Шейн Е. В., Рыжова И. М. Математическое моделирование в почвоведении. М., 2016. 377 с.
19. Komarov A., Chertov O., Bykhovets S., Shaw C., Nadporozhskaya M., Frolov P., Shashkov M., Shanin V., Grabarnik P., Pripulina I., Zubkova E. Romul Hum model of soil organic matter formation coupled with soil biota activity. I. Problem formulation, model description, and testing // Ecological Modelling. 2017. Vol. 345. P. 113–124. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2016.08.007
20. Richter J. The Soil as a Reactor: Modelling Processes in the Soil. Catena Verlag, 1987. 192 p.
21. Zaika Yu. V., Bakhmet O. N. Boundary value problem of CO₂ production and transport in forest sandy soil // In: A Closer Look at Boundary Value Problems, New York: Nova Science Publishers, 2020.

Поступила в редакцию 10.05.2020

REFERENCES

1. Darken L. S., Gurri R. V. Fizicheskaya khimiya metallov [Physical chemistry of metals]. Moscow, 1960. 585 p.
2. Zommerfel'd A. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh fiziki [Differential equations in partial derivatives in physics]. Moscow: IL, 1950. 457 p.
3. Kirichenko P. A. Termodinamika, statisticheskaya i molekulyarnaya fizika [Thermodynamics, statistical and molecular physics]. Moscow: Fizmatkniga, 2005. 176 p.
4. Landau L. D., Akhiezer A. I., Lifshits E. M. Kurs obshchei fiziki. Mekhanika i molekulyarnaya fizika [A course of general physics. Mechanics and molecular physics]. Moscow: Nauka, 1969. 402 p.
5. Lifshits E. M., Pitaevskii L. P. Fizicheskaya kinetika [Physical kinetics]. Landau L. D., Lifshits E. M. Teor. fizika [Theoretical physics]. Vol. X. Moscow: Nauka, 1979. 528 p.
6. Lykov A. V. Teplomassoobmen [Heat and mass exchange]. Moscow: Energiya, 1978. 480 p.
7. Lykov A. V. Yavleniya perenosa v kapillyarno-poristykh telakh [Transport phenomena in capillary-porous bodies]. Moscow: GITTL, 1954. 298 p.

8. Polubarinova-Kochina P. Ya. Teoriya dvizheniya gruntovykh vod [Groundwater theory]. Moscow: Nauka, 1977. 664 p.

9. Poluektov R. A., Smolyar E. I., Tarleev V. V., Topazh A. G. Modeli produktzionnogo protsesssa sel'skokhozyaistvennykh kul'tur [Models of the productional process in crops]. St. Petersburg: SPbGU, 2006. 396 p.
10. Riznichenko G. Yu. Matematicheskie modeli v biofizike i ekologii [Mathematical models in biophysics and ecology]. Moscow; Izhevsk: IKI-RKhD, 2003. 184 p.
11. Savel'yev I. V. Kurs obshchei fiziki [A course of general physics]. Vol. I. Moscow: Nauka, 1970. 511 p.
12. Sivukhin D. V. Obshchii kurs fiziki. T. II. Termodinamika i molekulyarnaya fizika [A general physics course. Thermodynamics and molecular physics]. Moscow: Fizmatlit, 2005. 544 p.
13. Smagin A. V. Gazovaya faza pochv [Gaseous phase of soils]. Moscow: MGU, 2005. 301 p.
14. Tarko A. M. Antropogennye izmeneniya global'nykh biosfernykh protsessov. Matem. modelirovanie [Man-induced changes in global biospheric processes. Mathematical modelling]. Moscow: Fizmatlit, 2005. 232 p.

15. *Chertov O. G., Komarov A. S., Nadporozhskaya M. A., Mikhailov A. V., Bykhovets S. S., Zudin S. L., Zubkova E. V.* Dinamicheskoe modelirovanie protsessov transformatsii organicheskogo veshchestva pochv. Imitatsionnaya model' ROMUL [Dynamic modelling of transformation processes of organic matter in soils. ROMUL simulation model]. St. Petersburg: SPbGU, 2007. 96 p.
16. *Chudnovskii A. F.* Teplofizika pochv [Thermal physics]. Moscow: Nauka, 1976. 352 p.
17. *Shein E. V.* Kurs fiziki pochv [A course of soil physics]. Moscow: MGU, 2005. 432 p.
18. *Shein E. V., Ryzhova I. M.* Matematicheskoe modelirovanie v pochvovedenii [Mathematical modelling in soil science]. Moscow, 2016. 377 c.
19. *Komarov A., Chertov O., Bykhovets S., Shaw C., Nadporozhskaya M., Frolov P., Shashkov M., Shanin V., Grabarnik P., Pripulina I., Zubkova E.* Romul Hum model of soil organic matter formation coupled with soil biota activity. I. Problem formulation, model description, and testing. *Ecological Modelling*. 2017. Vol. 345. P. 113–124. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2016.08.007
20. *Richter J.* The Soil as a Reactor: Modelling Processes in the Soil. Catena Verlag, 1987. 192 p.
21. *Zaika Yu. V., Bakhmet O. N.* Boundary value problem of CO_2 production and transport in forest sandy soil. *A Closer Look at Boundary Value Probl.* New York: Nova Science Publishers, 2020.

Received May 10, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Заика Юрий Васильевич

руководитель лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 780059

Бахмет Ольга Николаевна

председатель КарНЦ РАН, член-корр. РАН, д. б. н.
Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: bahmet@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766040

CONTRIBUTORS:

Zaika, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 780059

Bakhmet, Olga

Department of Multidisciplinary Scientific Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: bahmet@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766040

УДК 519.87:539.2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПИКОВ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА

Ю. В. Заика, Е. К. Костикова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

При исследовании спектров термодесорбции (ТДС-спектров) изотопов водорода используются различные математические модели, в частности, в форме реакции первого порядка для усредненной по объему концентрации (в случае лимитирования диффузией), второго порядка (с учетом рекомбинации атомов водорода на поверхности в молекулы) и более детализированные модели, отражающие многостадийность переноса (диффузия в объеме, выход на поверхность, рекомбинация, десорбция). Интерес представляет анализ структуры спектра с целью выявления соответствующих каждому пику причин и «движущих сил» физико-химического характера. В статье приведены анализ симметричности унимодальных ТДС-спектров и результаты численного моделирования.

Ключевые слова: термодесорбция водорода; численное моделирование.

Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. NUMERICAL MODELING OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION PEAKS

Various mathematical models are used for investigate the thermal desorption spectra (TDS spectra) of hydrogen isotopes, in particular, in the form of a first-order reaction for the volume-averaged concentration (in the case of limitation by diffusion), second-order models (taking into account the recombination of hydrogen atoms on the surface into molecules) and more detailed models reflecting multistage transport (diffusion in the buk, mifration to the surface, recombination, desorption). It is interesting to analyze the structure of the spectrum in order to identify the causes and «driving forces» of a physical and chemical nature corresponding to each peak. The article presents an analysis of the symmetry of unimodal TDS spectra and the results of simulation.

Key words: hydrogen thermodesorption; numerical modeling.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к взаимодействию изотопов водорода с различными материалами носит многоплановый характер [1–5]: защита конструкционных материалов от водородной коррозии, транспортировка углеводородного сырья, ракетостроение, водородная энергетика, перспективы термоядерного синтеза.

Одним из наиболее информативных методов исследования кинетики взаимодействия новых материалов с водородом является термодесорбционная спектрометрия (ТДС), позволяющая «сканировать» материал в нестационарных условиях в широком диапазоне рабочих температур. Математические модели термодесорбции и водородопроницаемости с уче-

том различных стадий переноса и численные методы решения краевых задач, разрабатываемые авторами статьи, изложены в [11, 15–18].

Трудности анализа спектров типичны для некорректных обратных задач математической физики: неединственность решения, неоднозначность интерпретации и высокая чувствительность к погрешностям входных данных. На экспериментальном спектре наблюдается результат наложения множества процессов, подлежащих идентификации. Сначала необходима идентификация по физико-химическим процессам, а затем уже параметрическая идентификация в соответствии с принятой физически обоснованной моделью.

Статья содержит некоторые результаты численного моделирования, ориентированные на экспериментальные данные и теоретические положения кинетики взаимодействия изотопов водорода с различными материалами, изложенные в работах [4, 7–10, 12–14].

МОДЕЛЬ РЕАКЦИИ ПОРЯДКА $\alpha \in [1, 2]$

В качестве отправной точки рассуждений рассмотрим уравнение реакции первого порядка $\dot{X}(t) = -K(T)X(t)$, где $X(t)$ – текущая усредненная концентрация водорода в образце, $K(T) = K_0 \exp\{-Q/RT\}$ (аррениусовская зависимость кинетического коэффициента от температуры), $T(t) = T_0 + \beta t$ (равномерный линейный нагрев с относительно невысокой скоростью β , $[\beta] = \text{K/s}$).

Для полноты изложения, чтобы пояснить смысл обобщения, приведем кратко схему вывода уравнения, когда десорбция лимитирована диффузией. Рассмотрим краевую задачу $c_t = D(T(t))c_{xx}$ [$t > 0$, $x \in (0, h)$], $c = c_0 > 0$ [$t = 0$], $c = 0$ [$t > 0$, $x = 0, h$]. Для растворенного водорода речь идет об атомах, $[c] = 1/\text{см}^3$. В начальный момент диффузانت распределен равномерно. Затем вследствие вакуумирования мгновенно (в относительном масштабе времени) устанавливаются нулевые концентрации в подповерхностном объеме пластины. После перехода к безразмерным переменным $t' = \int_0^t D(T(\tau)) d\tau/h^2$, $x' = x/h$, $c' = c/c_0$ получаем формально $D = 1$, $h = 1$, $c_0 = 1$ (в текущих промежуточных выкладках оставляем прежние обозначения, не усложняя их штрихами). Тогда для усредненной переменной $\bar{c}(t) = \int_0^1 c(t, x) dx$ (см., например, [6, с. 27]) справедливо представление

$$\bar{c}(t) = \sum_{n=1,3,5 \dots} \frac{8}{\pi^2 n^2} \exp\left\{-\frac{n^2 t}{\tau}\right\}, \quad \tau \equiv \frac{1}{\pi^2}.$$

При анализе ТДС-спектров нас интересует производная $d\bar{c}/dt$, которая при $t = 0$ определяется почленным дифференцированием ряда. Это естественное следствие несогласованности при $t = 0$ начального и граничного условий. Строго говоря, ряд представляет так называемое обобщенное решение краевой задачи. Спустя непродолжительное время можно ограничиться первым слагаемым: $\bar{c}(t) \approx 8 \exp\{-t/\tau\}/\pi^2$ ($t > t_0 > 0$), где параметр τ приобретает смысл «времени релаксации» (уменьшения в e раз). Чтобы компенсировать отброшенные слагаемые и ретроспективно «вписаться» в начальные данные $\bar{c}(0) = c_0 = 1$, увеличим коэффициент с $8/\pi^2$ до 1. Теперь для аппроксимации $X(t) \approx \bar{c}(t)$ ($t \geq 0$) примем модель $\dot{X}(t) = X(t)/\tau$, $X(0) = X_0 = 1$, и возвратимся к исходным переменным (t, x) :

$$\dot{X}(t) = -K(T)X(t), \quad X_0 = 1, \quad K = \pi^2 h^{-2} D(T).$$

Здесь мы оставили нормировку $\bar{c}(t) = \int_0^h c(t, x) dx/h \mapsto \bar{c}(t)/c_0$, т. е. теперь $X(t) \in (0, 1)$ – усредненная доля (от исходной равномерной концентрации водорода c_0), оставшаяся в образце к моменту времени $t > 0$. Модель работоспособна, когда в приложениях нас интересует интегральный поток десорбции без детализации последовательности физико-химических процессов. Интерпретация $K(T)$ позволяет для пористых и порошкообразных материалов говорить обобщенно об эффективных характеристиках переноса: коэффициенте диффузии D и характерном диффузионном пробеге h . В принципе можно не связывать $K(T)$ с диффузией, ограничившись выводом уравнения на уровне «скорость десорбции пропорциональна текущей усредненной концентрации». В любом случае постулируется аррениусовская зависимость $K(T) = K_0 \exp\{-Q/RT\}$ с предэкспонентой (частотным множителем K_0) и энергией активации Q .

С другой стороны, в теории адсорбции-десорбции используется уравнение Поляни – Вигнера $\dot{\theta}(t) = -M(T)\theta^n(t)$, где θ – степень заполнения поверхности. В частности, если речь идет о термодесорбции диссоциативно хемосорбированного двухатомного газа, то $n = 2$. Модель можно адаптировать и для усредненной по объему концентрации, используя понятие эффективного коэффициента рекомбинации [5]. Для этого уравнение $d\bar{c}/dt = -b(T)\bar{c}^2$ разделим на c_0 и получим $\dot{X} = -K(T)X^2$, где $K = bc_0$. Концентрация c_0 определяется начальным насыщением образца. При этом с ростом давления насыщения из газовой фазы температура максимума модельного потока десорбции будет уменьшаться.

Преимущественно адсорбция водорода характерна при относительно низких температурах, а описанное выше лимитирование диффузией – при высоких. В реальности диффузия и десорбция с поверхности взаимосвязаны (динамика процессов на поверхности диктует граничные условия для уравнения диффузии). Такие более детализированные модели уже требуют разработки специализированного математического обеспечения [16, 18].

Синтезируя приведенные рассуждения, рассмотрим усредненную модель (для равномерного нагрева):

$$\frac{dX}{dT} = -\beta^{-1}K(T)X^\alpha(T), \quad X(T_0) = 1, \quad \alpha \in [1, 2],$$

$$K(T) = K_0 \exp\{-Q[RT]^{-1}\}, \quad T \in [T_0, T_*],$$

$$T(t) = T_0 + \beta t, \quad dT = \beta dt.$$

Здесь T_0 – начальная температура (обычно комнатная), когда десорбция водорода практически отсутствует; T_* – конечная температура (когда десорбция уже пренебрежимо мала на фоне максимума потока); безразмерная переменная $X(T)$ имеет смысл доли усредненной по объему образца концентрации \bar{c} от концентрации равномерного начального насыщения c_0 . В силу $t \leftrightarrow T$ можно записать $X(T) = \bar{c}(T)/c_0$. Кинетический коэффициент $K(T)$ ($[K] = 1/s$) заранее не связываем явной формулой с коэффициентом диффузии $D(T)$ или коэффициентом рекомбинации $b(T)$. Если предполагается обрабатывать данные с различными условиями равномерного насыщения, то целесообразно явно выделить зависимость от c_0 в форме $K = K_c(T)c_0^{\alpha-1}$.

Параметр $\alpha \in [1, 2]$ позволяет учитывать степень участия в процессе насыщения ассоциативной хемосорбции, растворения в объеме с последующей рекомбинацией атомов водорода в молекулы при термодесорбции. Иными словами, применяем усреднение не только по концентрации, но также по лимитирующим (во взаимодействии) процессам диффузии и рекомбинации. Что касается самой «дробности», то в математической физике теория уравнений диффузии с дробными производными разработана. Усредненные по концентрации модели (если нас интересует общий поток без детализации) адекватно описывают основную часть изолированного всплеска на ТДС-спектре (когда росту $K(T)$ активно «противодействует» уменьшение $X(T)$, что и формирует пик). Начальные и конечные участки графика термодесорбции (когда поток относительно мал и измеряется с меньшей точностью) малоинформативны.

СВОЙСТВА МОДЕЛЬНОГО ТДС-ПИКА

Унимодальность и метод Киссинджера

Нас интересует зависимость $w(T) \equiv -dX/dT = K(T)X^\alpha(T)/\beta$ – нормированный поток термодесорбции (в долях $X = \bar{c}/c_0$ на градус температуры). Знак тождества (\equiv) часто используем по контексту в смысле равенства по определению. Если оперируем временем, то рассматриваем $v(t) \equiv -\dot{X}(t) = K(T(t))X^\alpha(t)$. При этом $w(T) = v(T)/\beta$ с учетом $t \leftrightarrow T = T_0 + \beta t$. График $w(T)$ представляет ТДС-спектр. Поскольку используется (безразмерная) нормировка $X(T_0) = 1$, то должно быть $S \equiv \int_{T_0}^{T_*} w(T) dT = 1$. Строго говоря, нужно формально интегрировать на $(0, +\infty)$, но мы рассматриваем отрезок $[T_0, T_*]$, вне которого поток пренебрежимо мал. Итак, модельный ТДС-пик нормирован по площади. Регистрируемый поток (например, в единицах $\text{mol}/\text{cm}^3\text{s}$) нормируется интегралом (который равен c_0). Говоря о потоках, слово «плотность» обычно опускаем по контексту.

Интегрируя уравнение $dX/dT = -KX^\alpha/\beta$ в квадратурах, получаем: $w(T) = -dX/dT$,

$$w(T) = \begin{cases} \beta^{-1}K(T) \exp\left\{-\beta^{-1} \int_{T_0}^T K(\tilde{T}) d\tilde{T}\right\}, \\ \beta^{-1}K(T) \left[1 + (\alpha-1) \beta^{-1} \int_{T_0}^T K(\tilde{T}) d\tilde{T}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \end{cases}$$

где первая формула соответствует $\alpha = 1$, а вторая – $\alpha \in (1, 2]$. Представления согласованы: правосторонний предельный переход $\alpha \rightarrow +1$ во второй формуле дает первую. Начальная температура T_0 относительно низкая (обычно комнатная, когда $K(T_0) \ll 1$ и поток еще пренебрежимо мал). С ростом температуры аррениусовский коэффициент $K(T)$ монотонно выходит на горизонтальную асимптоту, а множитель с интегралом монотонно убывает. Это дает колоколообразный график $w(T)$.

Далее производную по T (в отличие от точки сверху для производной по времени t) будем обозначать штрихом. Приведем результаты вычислений (с учетом $K' = KQ/RT^2$):

$$w'(T) = w(T)\varphi(T), \quad \alpha \in [1, 2],$$

$$w''(T) = w(T)[\varphi^2(T) + \varphi'(T)],$$

$$w'''(T) = w(T)[\varphi^3(T) + 3\varphi(T)\varphi'(T) + \varphi''(T)].$$

Здесь приняты обозначения

$$\varphi(T) \equiv \frac{Q}{RT^2} - \alpha\beta^{-1}K(T)\hat{K}^{-1}(T),$$

$$\hat{K}(T; \alpha) \equiv \left[1 + (\alpha-1) \beta^{-1} \int_{T_0}^T K(\tilde{T}) d\tilde{T}\right].$$

В контексте обратной задачи параметрической идентификации отметим, что

$$\hat{K}(T; \alpha) = X^{1-\alpha}(T), \quad \hat{K}(T; 1) = 1.$$

Для поиска температуры $T_m = T_{\max}$ экстремума (который является единственным, глобальным максимумом) запишем уравнение $w'(T_m) = 0$, откуда $w' = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$,

$$K(T_m) = \frac{\beta z}{\alpha T_m} \hat{K}(T_m; \alpha), \quad z \equiv \frac{Q}{RT_m}. \quad (1)$$

Выделение безразмерной переменной z в выкладках целесообразно, поскольку дробь вида $-E/RT$ фигурирует в экспоненте закона Аррениуса. В дальнейшем рассмотрении потребуются следующие производные:

$$w''(T_m) = w(T_m)\varphi'(T_m) = w(T_m)T_m^{-2}z[-\alpha^{-1}z - 2] < 0, \quad (2)$$

$$w'''(T_m) = w(T_m)\varphi''(T_m) = w(T_m)T_m^{-3}z[\alpha^{-2}(\alpha - 2)z^2 + 2z + 6]. \quad (3)$$

Рассмотрим сначала (1) как уравнение для $T = T_m$. Перепишем его в форме

$$f(T) \equiv \alpha T^2 K - (\alpha - 1) \frac{Q}{R} \int_{T_0}^T K d\tilde{T} = \frac{\beta Q}{R}. \quad (4)$$

Геометрически требуется найти пересечение графика функции $f(T)$ с горизонтальной прямой, определяемой значением $\beta Q/R$. Поскольку из соотношений $K(T) = K_0 \exp\{-Q/RT\}$, $K'(T) = K(T)Q/[RT^2]$ следует неравенство $f'(T) = K(T)[2\alpha T + Q/R] > 0$ (положительна и вторая производная), то решение единственно. Существование обеспечивается условием $K(T_0) \ll 1$ (формально можно рассматривать $T_0 = 0$ и $T > 0$). Увеличение β (правой части уравнения (4)) смещает температуру максимума спектра (T_m) вправо.

Уточним априорное ограничение на выбор предэкспоненты (частотного множителя) K_0 , диктуемое уравнением (4). Значение T_0 определено как температура (обычно комнатная), при которой поток еще незначителен на фоне предстоящего максимума при $T = T_m > T_0$. Поэтому в рамках модели ТДС-пика должно быть выполнено неравенство $f(T_0) < \beta Q/R$, т. е. $K_0 < \beta Q \exp\{Q/RT_0\}/[\alpha RT_0^2]$.

На практике (при $\alpha = 1$) для оценки параметров K_0 , Q используют зависимость регистрируемого значения T_m от скорости нагрева β . После чего полученные оценки сопоставляются с экспертными данными о параметрах возможных физико-химических процессов. Скорости нагрева известны, а T_m определяются по экспериментальному графику.

Подчеркнем, что зависимость $T_m(K_0, Q; \alpha, \beta)$ определяется алгоритмически численным решением уравнения (4), т. е. у переменной $z = Q/RT_m$ числитель и знаменатель не являются независимыми при фиксированных K_0 .

На рисунках 1–4 показаны возможные значения параметра K_0 в зависимости от скорости нагрева β для широких диапазонов пиковых температур $T_{Peak}^1 - T_{Peak}^4$ (согласно данным [7]) и энергий активации основных диффузионных и хемосорбционных процессов в графите $Q_I - Q_{IV}$ (в соответствии с табл. 1 [4]).

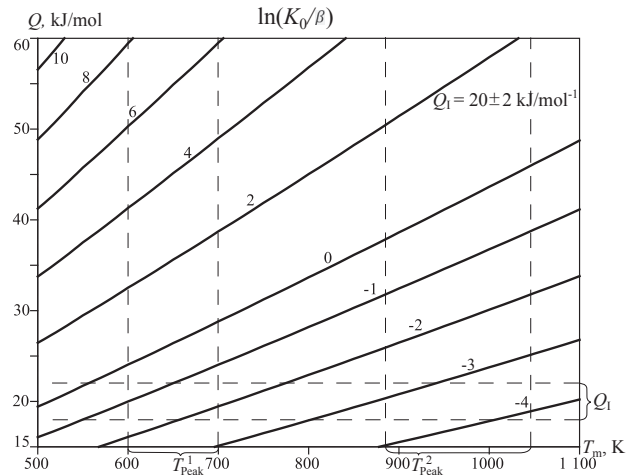


Рис. 1. Значения $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_I$
Fig. 1. Values $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_I$

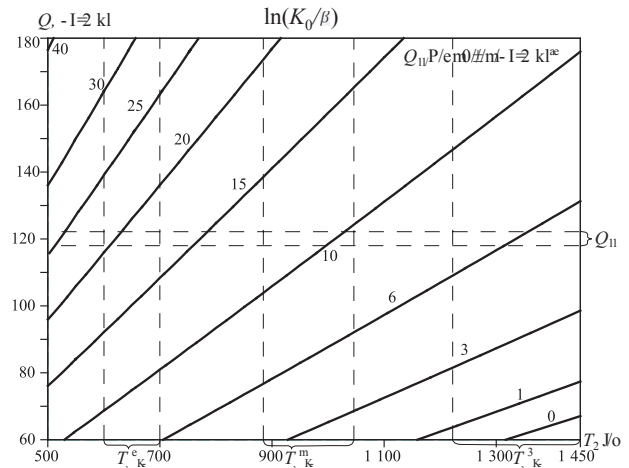


Рис. 2. Значения $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_{II}$
Fig. 2. Values $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_{II}$

Классического метода Киссинджера и приближения ТДС-1 ($\alpha = 1$) не всегда достаточно для удовлетворительной аппроксимации. В статье [7] на рис. 3 представлены пять ТДС-спектров дейтерия, полученных при различных скоростях нагрева графита ISO-880.

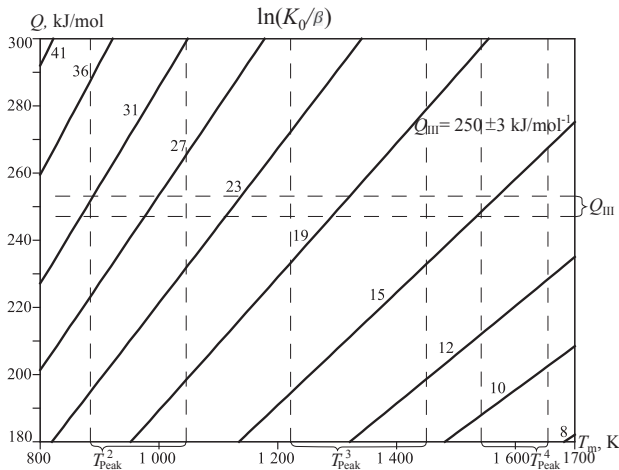


Рис. 3. Значения $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_{III}$
 Fig. 3. Values $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_{III}$

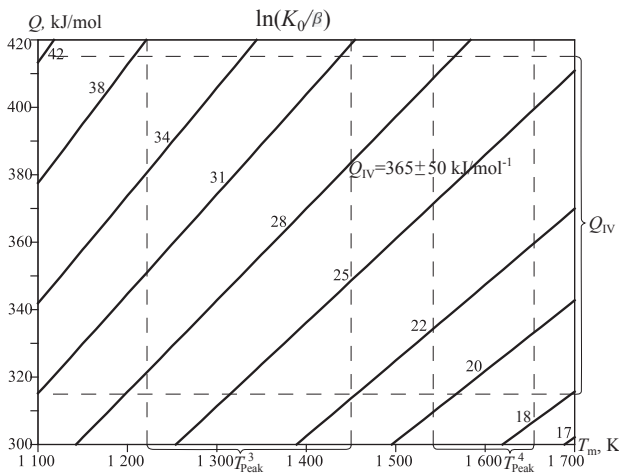


Рис. 4. Значения $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_{IV}$
 Fig. 4. Values $\ln[K_0/\beta]$: $\sim T_m$, $Q \approx Q_{IV}$

Спектры имеют по 4 вершины (пики пронумерованы по возрастанию температуры). Авторы, используя метод Киссинджера, оценивают энергию активации высокотемпературных пиков 3 и 4 по сдвигу пиковой температуры при варьировании скорости нагрева. По мнению авторов, пик 3, вероятно, лимитируется диффузией, а пик 4 — процессами высвобождения из дефектов. Но при наложении на экспериментальный график пиков с энергиями активации, полученными методом Киссинджера, видно существенное расхождение: теоретические пики оказываются заметно уже экспериментальных. Кроме того, отмечается, что полученная методом Киссинджера энергия активации пика 3 (3.48 эВ) довольно высока, чтобы быть энергией активации диффузии. Поэтому на этот пик, по мнению авторов, оказывают сильное влияние процессы захвата

и высвобождения ловушками. Для пика 4 та же ситуация: теоретическая кривая (по Киссинджеру) не воспроизводит экспериментальные спектры. Авторы предполагают, что широкий высокотемпературный пик 4 обусловлен кластерами дефектов сложной структуры. А потому пик 4 может разлагаться на сумму (до 10!?) пиков десорбции из ловушек с различными энергиями активации.

Выполнен расчет энергий активации высокотемпературных пиков 3–4 (в обозначениях [7]) с использованием аналога метода Киссинджера, но в предположении, что пики обусловлены реакциями второго порядка ($\alpha = 2$). Результаты представлены на рис. 5. С учетом $\hat{K}^{-1}(T_m; \alpha) = X^{\alpha-1}(T_m)$ «соотношение Киссинджера» для различных α записывается как

$$\ln \frac{\beta^{1/\alpha}}{T_m^2} = -\frac{1}{\alpha RT_m} \cdot Q + \ln \left[\frac{\alpha R}{Q} \cdot (K_0 w^{\alpha-1}(T_m))^{1/\alpha} \right].$$

Это соотношение следует из подстановки в формулу (1) усредненной текущей концентрации, определяемой выражением $X = (w/[K/\beta])^{1/\alpha}$, где нормированный поток w известен по результатам эксперимента. В координатах $\{-1/[\alpha RT_m], \ln[\beta^{1/\alpha}/T_m^2]\}$ значение энергии активации есть угловой коэффициент линейной регрессии. Как показали численные эксперименты, при расстановке пиковых температур для различных скоростей нагрева (данные взяты с рис. 3 [7]) в координатах «типа Киссинджера» точки группируются близко к линии регрессии и при $\alpha = 1$, и при $\alpha = 2$ (промежуточные значения дают такую же картину). Полученные значения Q несколько меньше, чем в [7] (при $\alpha = 1$).

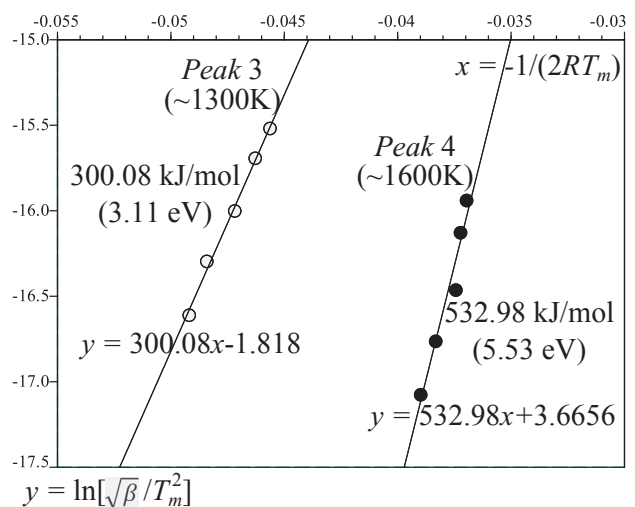


Рис. 5. Определение энергии активации, $\alpha = 2$
 Fig. 5. Determination of activation energy, $\alpha = 2$

Анализ симметрии ТДС-пика

Одной из общепринятых методик является разложение спектра на сумму гауссовских кривых (например, в пакете прикладных программ Origin). Более адекватным является разложение на сумму ТДС-пиков, генерируемых реакциями 1–2 порядков. Но они, строго говоря, несимметричны. Возникает задача поиска критериев симметричности и диапазонов параметров, где отклонения от гауссианов практически несущественны.

Качественное отличие ТДС-пика ($\alpha \in [1, 2]$) от гауссовской кривой вида

$$G(T) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(T - T_m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

лишь в возможной существенной (в широком диапазоне параметров) несимметричности относительно вертикали $T = T_m$. В этом случае унимодальный ТДС-спектр хорошо аппроксимируется склейкой двух гауссианов

$$G_{1,2}(T) = w(T_m) \exp\left\{-\frac{(T - T_m)^2}{2\sigma_{1,2}^2}\right\}, \quad T \leq T_m.$$

Следуя «правилу двух сигм», такую аппроксимацию достаточно рассматривать на отрезке $[T_m^-, T_m^+] \equiv [T_m - 2\sigma_1, T_m + 2\sigma_2] \cap [T_0, T_*]$. Практический интерес представляет «яркая» часть спектра, начальный и конечный этапы (когда поток незначителен на фоне максимума) малоинформативны.

На рис.6 представлено отношение σ_2/σ_1 для модельных спектров при различных $\alpha \in [1, 2]$ и энергиях активации $Q_I - Q_{IV}$, характерных для процессов хемосорбции и диффузии в углеродных материалах (см. табл. 1 [4]).

Численные эксперименты в широком диапазоне $\{K_0, Q\}$ [4] показывают, что, за редким исключением, модельный спектр несимметричен. Это соответствует экспериментальным данным. Аппроксимация спектров гауссианами позволяет получать приближения параметров с последующим уточнением в рамках рассматриваемых моделей. Пик, соответствующий реакции первого порядка ($\alpha = 1$), может быть практически симметричным. Возможен вариант «относительно крутой восходящий фронт и пологий нисходящий», но обычно

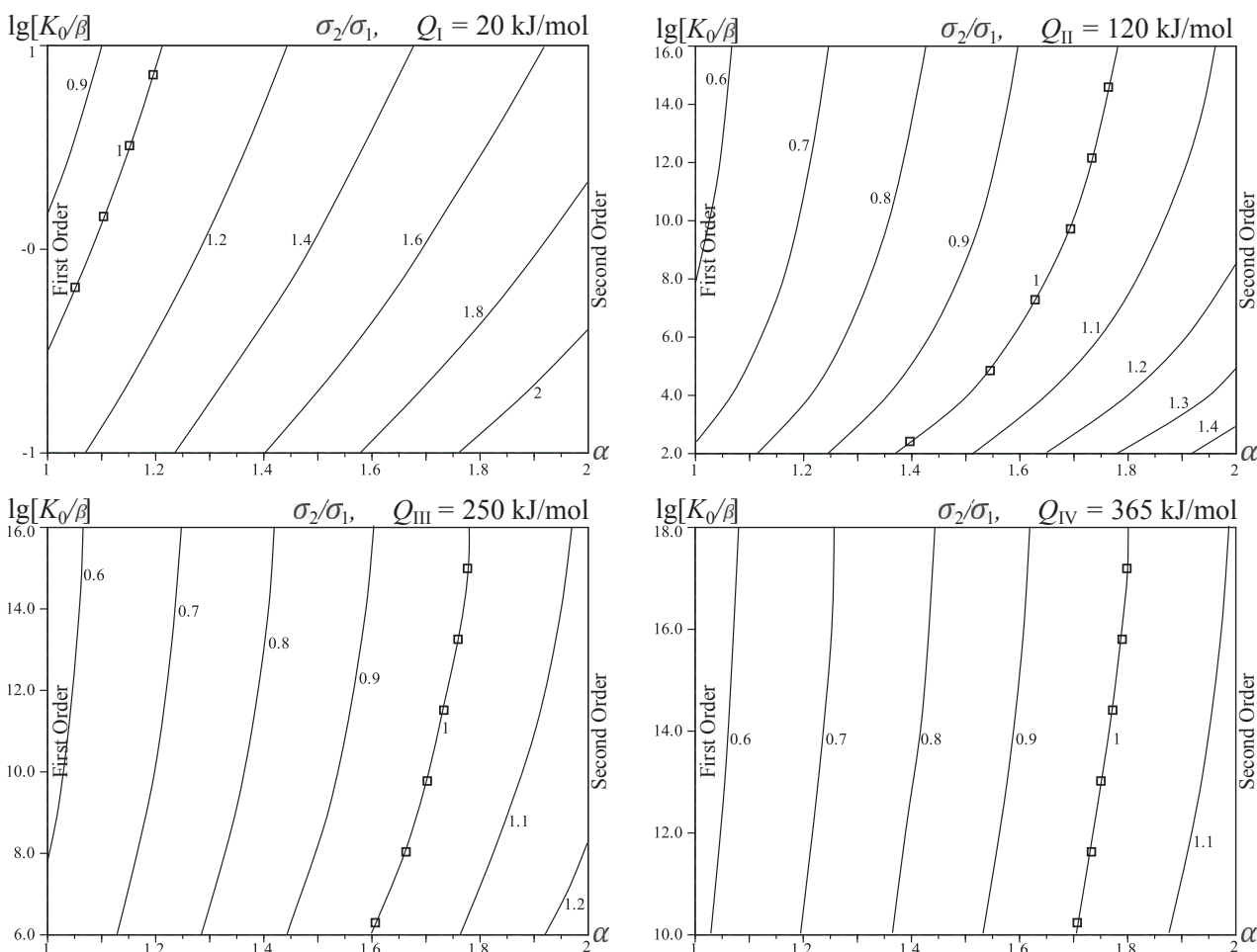


Рис. 6. Отношение ширины нисходящего фронта к ширине восходящего
Fig. 6. The ratio of the width of the descending front to the width of the ascending

пологий восходящий фронт сменяется крутым нисходящим. Для спектра реакции второго порядка ($\alpha = 2$) характерен относительно крутой восходящий фронт и пологий нисходящий.

Перейдем к критерию симметричности графика $w(T)$ относительно вертикали $T = T_m$. Для этого воспользуемся разложением

$$w(T_m + \Delta) = w(T_m) + w'(T_m)\Delta + \frac{1}{2}w''(T_m)\Delta^2 + \frac{1}{6}w'''(T_m)\Delta^3 + \frac{1}{24}w^{(4)}(T_m)\Delta^4 + o(\Delta^4).$$

Численные эксперименты подтверждают, что в физически реальном диапазоне $T \in [T_m^-, T_m^+]$ пятую производную уже можно не учитывать. В экстремуме $w'(T_m) = 0$, а слагаемые с Δ^2 и Δ^4 дадут те же значения при замене Δ на $-\Delta$. Следовательно, для оценки симметричности нужно оценить $w'''(T_m)$ в сравнении с $w''(T_m)$. Критерий симметричности (с учетом (1), (2))

$$|w''(T_m)| \gg \frac{|\Delta|}{3} |w'''(T_m)|, \quad \Delta \in [-2\sigma_1, 2\sigma_2],$$

$$T_m = T_m(K_0, Q; \alpha, \beta), \quad \sigma_i = \sigma_i(T_m, Q; \alpha, \beta),$$

преобразуется к виду ($z \equiv Q/RT_m$)

$$\frac{|\Delta|}{3T_m} \cdot \frac{|6 + 2z - \alpha^{-2}(2 - \alpha)z^2|}{2 + z} \ll 1. \quad (5)$$

Проиллюстрируем предложенный критерий на рис. 7. Среди представленных допустимых значений α и z только малая часть точек оказывается на «высоком хребте», где соотношение параметров дает практически симметричный спектр. Отметим, что при $\alpha = 2$ заведомо $w'''(T_m) = w(T_m)(2z + 6)z/T_m^3 > 0$, что объясняет выводы численных экспериментов о несимметричности ТДС-спектра реакции второго порядка (восходящий фронт ниже). Вопрос лишь в том, насколько это отклонение существенно в конкретной задаче. Для $\alpha < 2$ спектры, близкие к симметричным, получаются при $w'''(T_m) \approx 0$, откуда $z(\alpha) \approx \alpha^2 [1 + \sqrt{1 + 6\alpha^{-2}(2 - \alpha)}] / (2 - \alpha)$. Формально $z(\alpha) \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 2^-$, но гипотетическое превышение порога $z > 20 - 30$ требует дополнительного физического обоснования.

В частности, для реакции первого порядка $z \approx Q/[RT_m] = 1 + \sqrt{7}$ ($\alpha = 1$), что соответствует относительно низким значениям энергии активации Q . Даже если выполняется равенство $w'''(T_m) = 0$ ($z^2 - 2z - 6 = 0$), то при соответствующем значении z выполняется $w^{(5)}(T_m) = w(T_m)zT_m^{-5}p_4(z)$, $p_4(z) \equiv (z^2 - 2z - 6)(9z^2 + 20z - 42) - 60z - 132 < 0$.

Строго говоря, спектр всегда несимметричен. Поскольку третья производная $w'''(T_m)$ может менять знак (в широком диапазоне параметров), то более пологой может оказаться как восходящая, так и нисходящая ветвь.

При фиксированном Q спектр второго порядка шире, значения $w''(T_m)$ и $w'''(T_m)$ больше при $\alpha = 2$, чем при $\alpha = 1$. Варьирование порядка реакции $\alpha \in [1, 2]$ сопровождается сдвигом пиковой температуры. Изолированный пик, в котором пологий восходящий фронт сменяется резким нисходящим, не следует связывать с реакцией второго порядка.

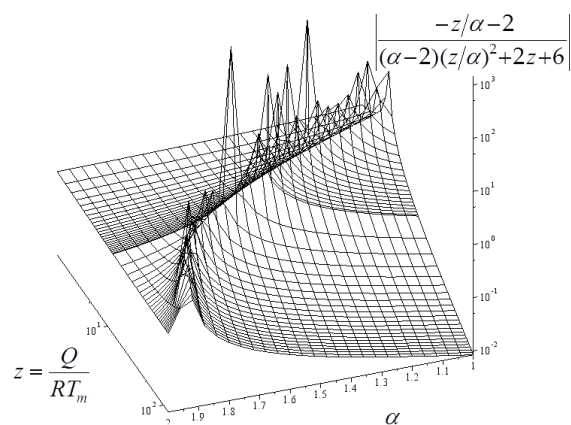


Рис. 7. Критерий (5) симметричности пиков
Fig. 7. Criterion (5) of peaks symmetry

МОДЕЛЬ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Выше рассмотрена модель динамики десорбции в терминах усредненной по объему образца концентрации. Рассмотрим более детализированную модель, явно разделяя объемные и поверхностные процессы (следуя работе [1, с. 177–206]). Ресорбцией пренебрегаем. Для тонкой пластины толщины ℓ краевая задача ТДС-дегазации примет следующий вид:

$$\begin{aligned} c_t(t, x) &= D(T)c_{xx}, \quad t \in (0, t_*), \quad x \in (0, \ell), \\ c(0, x) &= c_0, \quad x \in [0, \ell], \quad c_{0,\ell}(t) = g(T)q(t), \\ \dot{q}(t) &= -b(T)q^2(t) + D(T)c_x(t, 0), \\ J(T) &= b(T)q^2(t), \quad T(t) = T_0 + \beta t, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Здесь $c(t, x)$ — концентрация растворенного атомарного водорода; $q(t)$ — поверхностная концентрация; D, b, g — (аррениусовские) коэффициенты диффузии, десорбции, быстрого растворения (квазиравновесия поверхностной и приповерхностной объемной концентрации); $J(t) = J(T(t))$ — плотность десорбции (атомов, рекомбинировавших в молекулы).

Модель позволяет на качественном уровне воспроизвести кривые, подобные экспериментальным пикам 1–4 (см. Fig. 5 в [8]). Результаты численного моделирования представлены на рис. 8 и 9, в том числе в логарифмической шкале. Фиксированы следующие значения параметров: $\ell = 0.1$ см, $b_0 = 10^3$ см²/с, $E_b = 250$ кДж/моль, $D_0 = 0.1$ см²/с, $E_D = 125$, $g_0 = 10^4$ см⁻¹, $E_g = 0$, $c_0 = 4.8 \times 10^{18}$ см⁻³, $T_0 = 300$ К. Скорость нагрева варьируется: $\dot{T} = \beta = 0.0083, 0.0167, 0.0333, 0.0667, 0.1$ К/с. При меньшей скорости нагрева максимумы пиков достигаются при меньшей температуре (но за большее время).

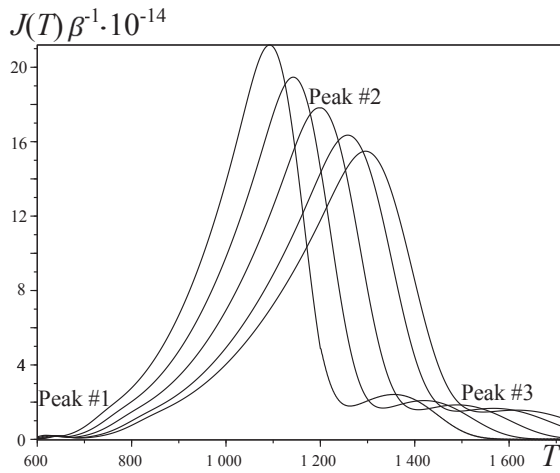


Рис. 8. Модельные спектры, влияние β
Fig. 8. Model spectrum, effect of β

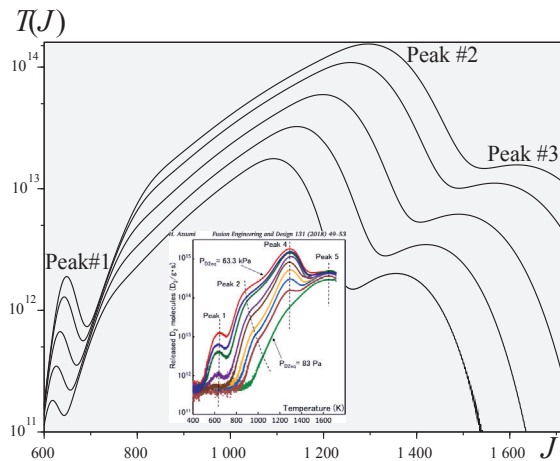


Рис. 9. Спектры в логарифмической шкале
Fig. 9. Spectrum in logarithmic scale

Алгоритм решения краевых задач термодесорбции на основе разностных схем (включая учет обратимого захвата диффузанта различными рода ловушками) подробно описан в [15]. Аппроксимации в классе ODE представлены

в [16, 18]. «Раздвоение» (бифуркация) спектра появляется при определенном соотношении энергий активации диффузии и десорбции, когда ни один из процессов не является строго лимитирующим и проявляется взаимообусловленность их динамики. В «синтезированной» модели для усредненной концентрации использование параметра $\alpha \in [1, 2]$ позволяет учитывать интегрально вклад (доли) диффузионных и поверхностных процессов.

Представление в линейных координатах на рис. 8 показывает несопоставимость масштабов пиков, обозначенных номерами 2 и 3 на Fig. 1,6 [8], с основным ТДС-всплеском. Выраженными эти «пики» становятся лишь при использовании логарифмической шкалы.

Более того, причина модельного пика 2-3 известна. После десорбции с поверхности и из подповерхностного слоя поток локально падает (пик 1). Затем поток начинает снова расти. Причина: дальнейший нагрев и образовавшийся большой градиент концентрации у поверхности. Падение градиента замедляет скорость диффузионной подкачки, и образуется естественное плечо 2-3, которое не является следствием каких-либо реакций 1-2 порядков в объеме (ловушек с «энергиями связи» нет). Это в модели, когда ответ на вопрос о причинах изгибов спектра известен после численного решения краевой задачи. Приписывание каждому экспериментальному локальному пику энергий связи в объеме требует дополнительного физического обоснования.

Модель динамического взаимодействия «поверхность–объем» позволяет воспроизвести экспериментальный спектр с пиками 1–4 (Fig. 5 [8]). Один из способов добавления пятого широкого высокотемпературного пика в модельном спектре — учет дефектов:

$$\begin{aligned} \partial_t c &= D \partial_x^2 c - \sum_{\nu=1}^m \left[a_{\nu}^{-} [1 - Z_{\nu}] c - a_{\nu}^{+} z_{\nu} \right], \\ \partial_t z_{\nu} &= a_{\nu}^{-}(T) [1 - Z_{\nu}] c(t, x) - a_{\nu}^{+}(T) z_{\nu}(t, x). \end{aligned}$$

Здесь $z_{\nu}(t, x)$ — концентрации атомов водорода, захваченного дефектами различных типов; a_{ν}^{\mp} — коэффициенты поглощения и выделения H ловушками; $Z_{\nu} \equiv z_{\nu}(t, x) / z_{\nu}^{\max}$ — степень насыщения ($z_{\nu}^{\max} = \max z_{\nu}$). Для практических целей захват учтен в простейшей «интегральной» форме, уточнение геометрии дефектов и их распределения существенно усложнило бы модель. Если дефект, например, не микрополости, а включения гидридной фазы, то на этапе дегазации соответствующий коэффициент $a_j^{-}(T) \equiv 0$, а значение $a_j^{+}(T) > 0$ лишь после достижения критической температуры: $T(t) \geq T_{\text{crit}}$.

Например, для модельного воспроизведения высокотемпературного пика 5 (Fig. 5 [8]) в краевую задачу достаточно добавить одну ловушку типа «разложения гидридной фазы» (в процессе дегазации $a^- = 0$), динамика концентрации в которой определяется соотношением $\partial_t z = -a^+(T)z$. Параметры: $z(0) = 10^{18} \text{ см}^{-3}$; $a_0^+ = 50 \text{ с}^{-1}$; $E_a = 150$; дефект начинает выделять водород при достижении критической температуры $T_{\text{crit}} = 1200 \text{ К}$.

Воспримем теперь ТДС-спектр, генерируемый динамической моделью, как экспериментальный и применим к пикам ##1–3 на рис. 9 (по аналогии с пиками 1, 4, 5 в нумерации [8]) методику разложения на «составляющие» элементарные реакции и методику Киссинджера. Соответствующие этим локальным пикам температуры: $T_{1-3} \approx 650, 1300, 1600 \text{ К}$. Плечо 2-3, заметное лишь в логарифмической шкале, относим к естественному замедлению диффузии-десорбции и не воспринимаем как проявление реакций в объеме. Обработка «экспериментальных данных» в априорном предположении наложения реакций 1-го порядка (для определенности) дает следующие результаты (см. рис. 10). Энергия активации, соответствующая $T_m(\text{Peak \#1})$, имеет значение 264.5 кДж/моль . Это соответствует $E_b = 250$, так что первый локальный пик спектра можно считать именно десорбционным. На его долю приходится малое количество выделившегося водорода (менее 0.2%). Второй выраженный пик $T_m(\text{Peak \#2})$ дает «диффузионное» значение $125.3 \approx 125 = E_D$. Высокотемпературному пику соответствует (естественно в силу модели) $150 = E_a$. При этом в координатах Киссинджера $\{1/T_m, \ln[\beta/T_m^2]\}$ имеем практически прямые во всех трех случаях.

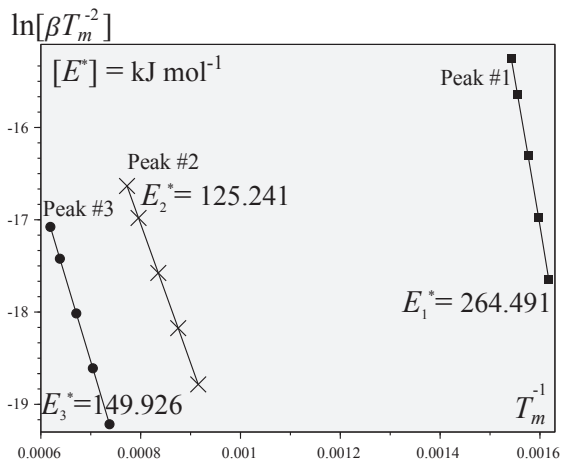


Рис. 10. Оценка энергий активации
Fig. 10. Estimation of activation energies

Таким образом, в приведенном модельном примере методика разложения на элементарные реакции (в терминах усредненной объемной концентрации) дает хорошие приближения, но не для «энергий связи» захваченного в объеме водорода, а для энергий активации физико-химических процессов десорбции, диффузии, разложения «гидридной фазы» (или оксида на поверхности при соответствующем увеличении эффективного коэффициента b) в их динамическом взаимодействии.

Финансирование исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Взаимодействие* водорода с металлами / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.
2. *Водород* в металлах / Ред. Г. Алефельд, И. Фелькль. М.: Мир, 1981. Т. 1, 2. 506, 430 с.
3. *Изотопы* водорода. Фундаментальные и прикладные исследования / Ред. А. А. Юхимчук. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 697 с.
4. *Нечаев Ю. С.* О природе, кинетике и предельных значениях сорбции водорода углеродными наноструктурами // *Успехи физических наук*. 2006. Т. 176(6). С. 581–610.
5. *Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярко С. С.* Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.
6. *Шьюмон П.* Диффузия в твердых телах. М.: Металлургия, 1966.
7. *Atsumi H., Takemura Y., Miyabe T., Konishi T., Tanabe T., Shikama T.* Desorption of hydrogen trapped in carbon and graphite // *J. Nucl. Mater.* 2013. Vol. 442(1–3). P. S746–S750. doi: 10.1016/j.jnucmat.2013.03.041
8. *Atsumi H., Kondo Y.* Retention and release of hydrogen isotopes in carbon materials priorly charged in gas phase // *Fusion Eng. Des.* 2018. Vol. 131. P. 49–53. doi: 10.1016/j.fusengdes.2018.04.039
9. *Legrand E., Oudriss A., Savall C., Bouhattate J., Feaugas X.* Towards a better understanding of hydrogen measurements obtained by thermal desorption spectroscopy using FEM modeling // *Int. J. Hydrog. Energy.* 2015. Vol. 40. P. 2871–2881. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.12.069
10. *Nechaev Yu. S., Alexandrova N. M., Shurygina N. A., Cheretaeva A. O., Pisarev A. A.* On the kinetic analysis of the hydrogen thermal desorption spectra for graphite and advanced carbon nanomaterials // *Fullerenes, Nanotubes*

and Carbon Nanostructures. 2019. Vol. 28, iss. 2. P. 147–149. doi: 10.1080/1536383X.2019.1680982

11. Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V. Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface // *Int. J. Hydrog. Energy*. 2011. Vol. 36(1). P. 1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121
12. Vyazovkin S., Burnham A. K., Criado J. M., Perez-Maqueda L. A. ICTAC Kinetics Committee recommendations for performing kinetic computations on thermal analysis data // *Thermochim. Acta*. 2011. Vol. 520. P. 1–19. doi: 10.1016/j.tca.2011.03.034
13. Vyazovkin S., Chrissafis K., Di Lorenzo M. L., Koga N. ICTAC Kinetics Committee recommendations for collecting experimental thermal analysis data for kinetic computations // *Thermochim. Acta*. 2014. Vol. 590. P. 1–23. doi: 10.1016/j.tca.2014.05.036
14. Wei F.-G., Enomoto M., Tsuzaki K. Applicability of the Kissinger's formula and comparison with the McNabb–Foster model in simulation of thermal desorption spectrum // *Comp. Mater. Sci*. 2012. Vol. 51. P. 322–330. doi: 10.1016/j.commatsci.2011.07.009

15. Zaika Yu. V., Kostikova E. K. Computer simulation of hydrogen thermodesorption // *Adv. Mater. Sci. Appl*. 2014. Vol. 3, iss. 3. P. 120–129. doi: 10.5963/AMSA0303003

16. Zaika Yu. V., Kostikova E. K. Computer simulation of hydrogen thermal desorption by ODE-approximation // *Int. J. Hydrog. Energy*. 2017. Vol. 42(1). P. 405–415. doi: 10.1016/j.ijhydene.2016.10.104

17. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // *Appl. Math. Modelling*. 2009. Vol. 33. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018

18. Zaika Yu. V., Sidorov N. I., Fomkina O. V. Identification of hydrogen permeability parameters of membrane materials in an aggregated experiment // *Int. J. Hydrog. Energy*. 2020. Vol. 45. P. 7433–7443. doi: 10.1016/j.ijhydene.2019.04.098

Поступила в редакцию 18.05.2020

REFERENCES

1. *Vzaimodeistvie vodoroda s metallami* [Interaction of hydrogen with metals]. Moscow: Nauka, 1987. 296 p.
2. *Vodorod v metallah* [Hydrogen in metals]. Moscow: Mir, 1981. Vol. 1, 2. 506, 430 p.
3. *Izotopy vodoroda. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya* [Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies]. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. 697 p.
4. Nechaev Yu. S. O prirode, kinetike i predel'nykh znacheniyakh sorbsii vodoroda uglerodnymi nanostrukturami [On the nature, kinetics and limit values of hydrogen sorption by carbon nanostructures]. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sci.]. 2006. Vol. 176(6). P. 581–610.
5. Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarko S. S. Pronitsaemost' vodoroda cherez metally [Hydrogen permeability through metals]. Moscow: MIFI, 2008. 144 p.
6. Sh'yumon P. Diffuziya v tvyordykh telakh [Diffusion in solids]. Moscow: Metallurgiya, 1966.
7. Atsumi H., Takemura Y., Miyabe T., Konishi T., Tanabe T., Shikama T. Desorption of hydrogen trapped in carbon and graphite. *J. Nucl. Mater*. 2013. Vol. 442(1–3). P. S746–S750. doi: 10.1016/j.jnucmat.2013.03.041
8. Atsumi H., Kondo Y. Retention and release of hydrogen isotopes in carbon materials priorly charged in gas phase.

Fusion Eng. Des. 2018. Vol. 131. P. 49–53. doi: 10.1016/j.fusengdes.2018.04.039

9. Legrand E., Oudriss A., Savall C., Bouhattate J., Feaugas X. Towards a better understanding of hydrogen measurements obtained by thermal desorption spectroscopy using FEM modeling. *Int. J. Hydrog. Energy*. 2015. Vol. 40. P. 2871–2881. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.12.069

10. Nechaev Yu. S., Alexandrova N. M., Shurygina N. A., Cheretaeva A. O., Pisarev A. A. On the kinetic analysis of the hydrogen thermal desorption spectra for graphite and advanced carbon nanomaterials. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 2019. Vol. 28, iss. 2. P. 147–149. doi: 10.1080/1536383X.2019.1680982

11. Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V. Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface. *Int. J. Hydrog. Energy*. 2011. Vol. 36(1). P. 1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121

12. Vyazovkin S., Burnham A. K., Criado J. M., Perez-Maqueda L. A. ICTAC Kinetics Committee recommendations for performing kinetic computations on thermal analysis data. *Thermochim. Acta*. 2011. Vol. 520. P. 1–19. doi: 10.1016/j.tca.2011.03.034

13. Vyazovkin S., Chrissafis K., Di Lorenzo M. L., Koga N. ICTAC Kinetics Committee recommendations for collecting experimental thermal analysis data for kinetic computations. *Thermochim. Acta*. 2014. Vol. 590. P. 1–23. doi: 10.1016/j.tca.2014.05.036

14. *Wei F.-G., Enomoto M., Tsuzaki K.* Applicability of the Kissinger's formula and comparison with the McNabb–Foster model in simulation of thermal desorption spectrum. *Comp. Mater. Sci.* 2012. Vol. 51. P. 322–330. doi: 10.1016/j.commatsci.2011.07.009
15. *Zaika Yu. V., Kostikova E. K.* Computer simulation of hydrogen thermodesorption. *Adv. Mater. Sci. Appl.* 2014. Vol. 3, iss. 3. P. 120–129. doi: 10.5963/AMSA0303003
16. *Zaika Yu. V., Kostikova E. K.* Computer simulation of hydrogen thermal desorption by ODE-approximation. *Int. J. Hydrog. Energy.* 2017. Vol. 42(1). P. 405–415. doi: 10.1016/j.ijhydene.2016.10.104
17. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding. *Appl. Math. Modelling.* 2009. Vol. 33. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018
18. *Zaika Yu. V., Sidorov N. I., Fomkina O. V.* Identification of hydrogen permeability parameters of membrane materials in an aggregated experiment. *Int. J. Hydrog. Energy.* 2020. Vol. 45. P. 7433–7443. doi: 10.1016/j.ijhydene.2019.04.098

Received May 18, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Заика Юрий Васильевич

руководитель лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 780059

Костикова Екатерина Константиновна

научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kostikova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Zaika, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 780059

Kostikova, Ekaterina

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kostikova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

УДК 519.21, 515.12

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕРАХ С МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ КВАНТОВАНИЯ

А. В. Иванов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Известно, что размерность квантования вероятностной меры, заданной на метрическом компакте, не превосходит емкостной размерности ее носителя. В связи с этим естественно возникает следующий вопрос о промежуточных значениях размерностей квантования. Пусть (X, ρ) – метрический компакт емкостной размерности $\dim_B X = d$. Верно ли, что для любого $a \in [0, d]$ существует вероятностная мера μ с носителем $\text{supp}(\mu) = X$, для которой размерность квантования $D(\mu)$ равна a ? В работе рассматривается частный случай этого вопроса, касающийся существования мер, размерность квантования которых принимает наибольшее возможное значение равное $\dim_B X$. Получена оценка нижней размерности квантования вероятностной меры μ , удовлетворяющей условию $\mu(B(x, \varepsilon)) \geq c\varepsilon^\gamma$ для любой точки $x \in X$, где c и γ – положительные константы (теорема 1). Из этой оценки следует существование искомых мер на слабо однородных компактах. Из теоремы 1 вытекает также равенство $D(\mu) = \dim_B X$ для равномерно распределенных мер (в смысле терминологии, принятой в геометрической теории меры) и вероятностных мер компактных метрических пространств Альфорса.

Ключевые слова: размерность квантования; емкостная размерность; слабо однородный компакт; пространство Альфорса.

A. V. Ivanov. ON PROBABILITY MEASURES WITH A MAXIMUM OF QUANTIZATION DIMENSION

It is known that the quantization dimension of a probability measure on a metric compact space does not exceed the box-dimension of its support. In this connection, the following question naturally arises about intermediate values of quantization dimensions. Let (X, ρ) be a metric compact with box-dimension $\dim_B X = d$. Is it true that for any $a \in [0, d]$ there exists a probability measure μ with support $\text{supp}(\mu) = X$ for which the quantization dimension $D(\mu)$ is a ? In this paper we consider a special case of this question concerning the existence of measures whose quantization dimension takes the largest possible value, which is equal to $\dim_B X$. An estimate is obtained for the lower quantization dimension of a probability measure μ satisfying the condition $\mu(B(x, \varepsilon)) \geq c\varepsilon^\gamma$ for any point $x \in X$, where c and γ are positive constants (Theorem 1). This estimate implies the existence of the desired measures on weakly homogeneous compact spaces. Theorem 1 also implies the equality $D(\mu) = \dim_B X$ for uniformly distributed measures (in the sense of the terminology adopted in geometric measure theory) and probability measures of compact metric Ahlfors spaces.

Keywords: quantization dimension; box-dimension; weakly homogeneous compact space; Ahlfors space.

Известно, что размерность квантования вероятностной меры, заданной на метрическом компакте, не превосходит емкостной размерности ее носителя. В связи с этим в работе [1] поставлен следующий вопрос о промежуточных значениях размерностей квантования. Пусть (X, ρ) — метрический компакт емкостной размерности $\dim_B X = d$. Верно ли, что для любого $a \in [0, d]$ существует вероятностная мера μ с носителем $\text{supp}(\mu) = X$, для которой размерность квантования $D(\mu)$ равна a ? В данной статье рассматривается частный случай этого вопроса, касающийся существования мер, размерность квантования которых принимает наибольшее возможное значение равное $\dim_B X$. В [1] показано, что условие $\text{supp}(\mu) = X$ при этом не является существенным, поскольку для любой вероятностной меры μ существует мера μ' той же размерности квантования с носителем $\text{supp}(\mu') = X$.

В настоящей работе получена оценка нижней размерности квантования вероятностной меры μ , удовлетворяющей условию $\mu(B(x, \varepsilon)) \geq c\varepsilon^\gamma$ для некоторых положительных констант c и γ для любой точки $x \in X$ при малых ε^1 (теорема 1). Из этой оценки следует существование искомых мер на слабо однородных компактах. Из теоремы 1 вытекает также равенство $D(\mu) = \dim_B X$ для равномерно распределенных мер (в смысле терминологии, принятой в геометрической теории меры) и вероятностных мер компактных метрических пространств Альфорса.

Емкостная размерность замкнутого подмножества метрического компакта (X, ρ) и размерность квантования вероятностной меры, заданной на X , могут быть определены по общей функториальной схеме (см. [1]). Для компакта (X, ρ) через $\text{exp } X$ обозначается пространство непустых замкнутых подмножеств X с метрикой Хаусдорфа ρ_H . Известно, что метрическое пространство $(\text{exp } X, \rho_H)$ компактно (см. [3]). Для любого натурального n $\text{exp}_n X = \{F \in \text{exp } X : |F| \leq n\}$ — замкнутое подпространство $\text{exp } X$. Пусть $F \in \text{exp } X$. Положим

$$N(F, \varepsilon) = \min\{n : \rho_H(F, \text{exp}_n X) \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$. Нетрудно показать, что $N(X, \varepsilon)$ равно наименьшему числу элементов ε -сети в X . ε -Сеть $A \subset X$ будем называть *оптимальной*, если $|A| = N(X, \varepsilon)$. Подмножество $C \subset X$ называется ε -разделенным, если для любых двух различных точек $x, y \in C$ $\rho(x, y) > \varepsilon$. Любое максимальное (по включению) ε -разделенное множество является ε -сетью. Следовательно,

¹Через $B(x, \varepsilon)$ обозначается замкнутый ε -шар точки $x \in X$: $B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$.

в компакте X всегда существует ε -разделенное множество мощности $N(X, \varepsilon)$.

Емкостная размерность $\dim_B F$ множества $F \in \text{exp } X$ определяется по следующей формуле (см. [2]):

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(F, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}. \quad (1)$$

Если указанный предел не существует, то рассматривают верхний или нижний пределы и получают соответственно верхнюю $\overline{\dim}_B F$ или нижнюю $\underline{\dim}_B F$ емкостные размерности множества F . При этом всегда $\underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$. (Равенство $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$ означает, что определена размерность $\dim_B F$.)

Для компакта X через $P(X)$ будем обозначать пространство вероятностных мер на X (см. [2]), наделенное метрикой Канторовича — Рубинштейна ρ_P . По определению, для любых мер $\mu, \nu \in P(X)$

$$\rho_P(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \text{Lip}_1(X)\},$$

где $\text{Lip}_1(X)$ — множество нерастягивающих функций, то есть таких отображений $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$ (при этом $\mu(f) = \int_X f d\mu$). Носителем $\text{supp}(\mu)$ меры $\mu \in P(X)$ называется наименьшее замкнутое подмножество X , мера которого равна 1. Для любого натурального n множество $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\text{supp}(\mu)| \leq n\}$ является замкнутым подпространством $P(X)$. Для $\mu \in P(X)$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$N(\mu, \varepsilon) = \min\{n : \rho_P(\mu, P_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

В [1] показано, что размерности квантования меры $\mu \in P(X)$ (верхнюю $\overline{D}(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}(\mu)$) можно определить по формулам, аналогичным (1):

$$\overline{D}(\mu) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\mu, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

$$\underline{D}(\mu) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\mu, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}.$$

Если $\overline{D}(\mu) = \underline{D}(\mu)$, то существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\mu, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} = D(\mu).$$

Известно (см. [1, 4]), что всегда

$$\overline{D}(\mu) \leq \overline{\dim}_B(\text{supp}(\mu)),$$

$$\underline{D}(\mu) \leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\mu)).$$

В основе полученных в работе результатов лежит следующая

Теорема 1. Пусть μ — вероятностная мера на X , для которой существуют положительные числа c, γ и ε_0 такие, что для любой точки $x \in X$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняется неравенство

$$\mu(B(x, \varepsilon)) \geq c\varepsilon^\gamma. \quad (1)$$

Тогда $\overline{\dim}_B X \leq \gamma$ и

$$\underline{D}(\mu) \geq \frac{\beta}{\gamma - \beta + 1}, \quad (2)$$

где $\beta = \underline{\dim}_B X$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ — ε -разделенное множество мощности $k = N(X, \varepsilon)$. Тогда $\mu(\bigcup_i B(a_i, \varepsilon/2)) \leq 1$, и множества $B(a_i, \varepsilon/2)$ попарно не пересекаются. Следовательно, $N(X, \varepsilon)c(\varepsilon/2)^\gamma \leq 1$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$

$$N(X, \varepsilon) \leq \frac{p}{\varepsilon^\gamma},$$

где $p > 0$. Откуда следует, что

$$\overline{\dim}_B X \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{p}{\varepsilon^\gamma}}{-\ln \varepsilon} = \gamma.$$

Для точки $a \in X$ и $\varepsilon > 0$ определим функцию $f_{(a, \varepsilon)} : X \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $f_{(a, \varepsilon)}(x) = \varepsilon - \rho(a, x)$ при $x \in B(a, \varepsilon)$, и $f_{(a, \varepsilon)}(x) = 0$ при $x \notin B(a, \varepsilon)$.

В силу неравенств (1) и $f_{(a, \varepsilon)}(x) \geq 0$ получаем:

$$\begin{aligned} \int_{B(a, \varepsilon)} f_{(a, \varepsilon)} d\mu &\geq \int_{B(a, \varepsilon/2)} f_{(a, \varepsilon)} d\mu \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \mu(B(a, \varepsilon/2)) \geq q\varepsilon^{\gamma+1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q = \frac{c}{2^{\gamma+1}} > 0$.

Пусть $\beta = \underline{\dim}_B X \leq \overline{\dim}_B X \leq \gamma$. Если $\beta = 0$, то неравенство (2) очевидно. Поэтому будем считать, что $\beta > 0$, и пусть $\delta > 0$ таково, что $\beta - \delta > 0$. Поскольку $\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(X, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}$, при малых ε выполняется неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-\delta}} < N(X, \varepsilon). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь произвольную меру $\nu \in P(X)$, носитель которой содержит $m \in \mathbb{N}$ точек, и пусть положительное число ε удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{\varepsilon^{\beta-\delta}} > 2m. \quad (5)$$

Тогда в силу (4)

$$N(X, \varepsilon) > 2m \quad (6)$$

при достаточно малых ε .

Пусть $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ — ε -разделенная ε -сеть в X . Тогда $k \geq N(X, \varepsilon)$ и множества $B_i = B(c_i, \frac{\varepsilon}{2})$, $i = 1, \dots, k$ попарно не пересекаются. Положим $E = \{i : B_i \cap \text{supp}(\nu) = \emptyset\}$. В силу (4) и (5)

$$|E| > \frac{1}{2\varepsilon^{\beta-\delta}}. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, которая определяется следующим образом: $f(x) = f_{(c_i, \varepsilon/2)}$ при $x \in B_i, i \in E$ и $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus \bigcup_{i \in E} B_i$. Легко проверить, что $f \in Lip_1(X)$ и $\nu(f) = 0$. Применяя неравенства (3) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \rho_P(\nu, \mu) &\geq |\mu(f) - \nu(f)| = \sum_{i \in E} \int_{B_i} f d\mu \\ &= \sum_{i \in E} \int_{B_i} f_{(c_i, \frac{\varepsilon}{2})} d\mu \geq |E| q (\varepsilon/2)^{\gamma+1} > s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1}, \end{aligned}$$

где $s = \frac{q}{2^{\gamma+2}} > 0$.

Тем самым доказано, что если ε достаточно мало и $m = |\text{supp}(\nu)| < \frac{1}{2\varepsilon^{\beta-\delta}}$, то $\rho_P(\nu, \mu) > s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1}$. Следовательно, $N(\mu, s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1}) \geq \frac{1}{2\varepsilon^{\beta-\delta}}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \underline{D}(\mu) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\mu, s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1})}{-\ln(s\varepsilon^{\gamma-\beta+\delta+1})} \\ &\geq \frac{\beta - \delta}{\gamma - \beta + \delta + 1} \end{aligned}$$

для любого $\delta > 0$, откуда сразу следует неравенство (2). \square

Следствие 1. Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\mu \in P(X)$. Если $\dim_B X = \alpha$ и для меры μ существуют константы $c, \varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любой точки $x \in X$

$$\mu(B(x, \varepsilon)) \geq \frac{c}{N(X, \varepsilon)},$$

то $D(\mu) = \dim_B X = \alpha$.

Доказательство. При $\alpha = 0$ утверждение тривиально, поскольку $\overline{D}(\mu) \leq \dim_B X$. Пусть $\alpha > 0$. Фиксируем $\delta > 0$ такое, что $\alpha - \delta > 0$. Поскольку $\dim_B X = \alpha$, при достаточно малых ε выполняется неравенство: $N(X, \varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+\delta}}$. Таким образом, $\mu(B(X, \varepsilon)) \geq c\varepsilon^{\alpha+\delta}$ при малых ε . Откуда в силу теоремы 1 получаем

$$\underline{D}(\mu) \geq \frac{\alpha}{\delta + 1}$$

для любого $\delta > 0$. Следовательно, $\alpha \leq \underline{D}(\mu) \leq \overline{D}(\mu) \leq \overline{\dim}_B X = \alpha$. \square

В геометрической теории меры мера $\mu \in P(X)$ называется равномерно распределенной, если для любого $\varepsilon > 0$ и любых двух точек $x, y \in X$

$$\mu(B(x, \varepsilon)) = \mu(B(y, \varepsilon)) > 0.$$

Следствие 2. Пусть (X, ρ) — метрический компакт размерности $\dim_B X = \alpha$, на котором существует равномерно распределенная вероятностная мера μ . Тогда $D(\mu) = \alpha$.

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим оптимальную ε -сеть $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, где $k = N(X, \varepsilon)$. Имеем:

$$1 = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k B(a_i, \varepsilon)\right) \leq k\mu(B(x, \varepsilon)),$$

где x — произвольная точка X . Откуда следует, что

$$\mu(B(x, \varepsilon)) \geq \frac{1}{N(X, \varepsilon)}.$$

Таким образом, $D(\mu) = \alpha$ в силу следствия 1. \square

Метрический компакт (X, ρ) называется слабо однородным (см. [5]), если существует константа $c > 0$ такая, что для любых двух положительных чисел $\varepsilon, r : \varepsilon \leq r$ выполняется неравенство

$$N(X, r) \inf_{x \in X} N(B(x, r), \varepsilon) \geq cN(X, \varepsilon).$$

Напомним, что компакт X называется однородным, если для любых точек $x, y \in X$ существует изометрия $f : X \rightarrow X$, переводящая x в y . В однородном компакте величина $N(B(x, r), \varepsilon)$ не зависит от выбора x . При этом выполняется очевидное неравенство $N(X, r)N(B(x, r), \varepsilon) \geq N(X, \varepsilon)$. Таким образом, всякий однородный компакт слабо однороден.

Следствие 3. Если X — слабо однородный компакт размерности $\dim_B X = \alpha$, то на X существует вероятностная мера μ , для которой $D(\mu) = \alpha$.

Доказательство. Пусть $as(X) = \{N(X, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} = \{1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ — аппроксимационный спектр компакта X (см. [1]). Положим $\varepsilon_n = \min\{\varepsilon : N(X, \varepsilon) = k_n\}$. Пусть A — конечное подмножество X . Через μ_A^u обозначим равномерно распределенную вероятностную меру на A : $\mu_A^u = \frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} \delta_x$, где δ_x — мера Дирака. Всякую последовательность $(\mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$, где A_n — ε_n -оптимальное подмножество X , назовем допустимой. Аналогичная конструкция

была рассмотрена в [5], где фактически доказано (теорема 4), что для всякой меры μ , которая является предельной точкой допустимой последовательности в слабо однородном компакте, существует константа $c > 0$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in X$

$$\mu(B(x, \varepsilon)) \geq \frac{c}{N(X, \varepsilon)}.$$

Поэтому в силу следствия 1 $D(\mu) = \alpha$ для всякой предельной точки μ любой допустимой последовательности в слабо однородном компакте. \square

Метрический компакт (X, ρ) с заданной на нем вероятностной мерой μ называется пространством Альфорса размерности $d > 0$, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что для любой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства:

$$c_1\varepsilon^d \leq \mu(B(x, \varepsilon)) \leq c_2\varepsilon^d.$$

Следующее утверждение, доказанное в [4] для компактных подмножеств \mathbb{R}^n с метрикой, индуцированной нормой, также вытекает из теоремы 1.

Следствие 4. Если (X, ρ, μ) — компакт Альфорса размерности d , то $D(\mu) = \dim_B X = d$.

Доказательство. Пусть A — оптимальная ε -сеть в X , т. е. $|A| = N(X, \varepsilon)$. Тогда

$$\sum_{x \in A} \mu(B(x, \varepsilon)) \geq \mu\left(\bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)\right) = 1.$$

Следовательно, $N(X, \varepsilon)c_2\varepsilon^d \geq 1$ и, значит, $N(X, \varepsilon) \geq \frac{1}{c_2\varepsilon^d}$. Таким образом,

$$\underline{\dim}_B X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(X, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} \geq d.$$

В то же время по теореме 1 $\overline{\dim}_B X \leq d$. Значит, $\underline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B X = d$, и в силу (2) $D(\mu) = d$. \square

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. В. О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестник Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. № 63. С. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2

2. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: ИКИ, 2013. 404 с.

3. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.

4. *Graf S., Luschny H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag. 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

5. *Ostrovsky E., Sirota L.* Uniform measures on the arbitrary compact metric spaces, with applications. 2014. arXiv:1403.5725 [math.FA]

Поступила в редакцию 04.03.2020

REFERENCES

1. *Ivanov A. V.* О функторе вероятностных мер и размерности квантования [On the functor of probability measures and quantization dimensions]. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta. Matem. i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Math. and Mechanics]. 2020. No. 63. P. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2

2. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications. The University of Chicago Press, 1997. 397 p. doi: 10.7208/chicago/9780226662237.001.0001

3. *Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruksii [General topology. Basic structures]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1988. 252 p.

4. *Graf S., Luschny H.* Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag. 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

5. *Ostrovsky E., Sirota L.* Uniform measures on the arbitrary compact metric spaces, with applications. 2014. arXiv:1403.5725 [math.FA]

Received March 04, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Aleksander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441

УДК 515.12

О СООТНОШЕНИИ КЛАССОВ КОМПАКТОВ ФЕДОРЧУКА И РОЗЕНТАЛЯ

А. В. Иванов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Вопрос о соотношении классов компактов Федорчука и Розенталя впервые затронут в работе С. Ватсона 1992 года. Примером компакта Розенталя, который не является компактом Федорчука счетной спектральной высоты, является известный компакт Хелли. В работе показано, что существуют многочисленные примеры компактов Федорчука спектральной высоты 3 (среди которых есть и совершенно нормальные компакты), не являющихся компактами Розенталя.

Ключевые слова: вполне замкнутое отображение; компакт Федорчука; компакт Розенталя; LUR -норма.

A. V. Ivanov. ON THE RELATION BETWEEN THE CLASSES OF FEDORCHUK AND ROSENTHAL COMPACTA

The question of the relationship between the classes of Fedorchuk and Rosenthal compact spaces was first raised in 1992 by Watson. An example of a Rosenthal compact, which is not a Fedorchuk compact of countable spectral height, is the well-known Helly compact. It is shown here that there exist numerous examples of Fedorchuk compacta of spectral height 3 (among which there are perfectly normal compacta) that are not Rosenthal.

Key words: fully closed mapping; Fedorchuk compactum; Rosenthal compactum; LUR -norm.

Вопрос о соотношении классов компактов Федорчука и Розенталя впервые был затронут в работе С. Ватсона 1992 года, где была сформулирована следующая проблема (см. [10, problem 3.2.14]): верно ли, что компакт Хелли можно представить как предел счетной обратной последовательности резольвент? Компакт Хелли — наиболее известный пример из класса компактов Розенталя, а понятие резольвенты лежит в основе определения компактов Федорчука. Проблема Ватсона в 2018 году была решена отрицательно [4].

Тематика данной заметки связана с результатами, касающимися перенормировки банахова пространства $C(X)$ непрерывных функций, заданных на компакте X . В работе [7]

доказано существование LUR -нормы на $C(X)$ для компактов X , лежащих в некотором подклассе класса компактов Розенталя. В [6] аналогичное утверждение установлено для компактов Федорчука спектральной высоты 3. Указанные результаты естественно приводят к вопросу о соотношении этих двух классов (такой вопрос был поставлен, в частности, Т. Банахом на конференции «2018 International Conference on Topology and its Applications» в Нафпактосе (Греция) в июле 2018). Известно, что классический компакт «две стрелки»: $S(I) = [0, 1] \times_l \{0, 1\}$ (лексикографическое произведение отрезка I на двоеточие с порядковой топологией) является компактом Розенталя и одновременно компактом Федорчука

спектральной высоты 3. В то же время компакт Хелли, для которого существует LUR -норма на $C(X)$ (см., [8]), не является компактом Федорчука счетной спектральной высоты согласно [4]. В настоящей заметке показано, что существуют разнообразные примеры компактов Федорчука спектральной высоты 3 (в числе которых и совершенно нормальные компакты), которые не являются компактами Розенталя.

Напомним, что компактами Розенталя называются компактные подмножества пространства функций первого класса Бэра (с топологией поточечной сходимости), заданных на полном сепарабельном метрическом пространстве.

Определение компактов Федорчука, или F -компактов, неразрывно связано с понятием вполне замкнутого отображения, которое обобщает упомянутую выше конструкцию резольвенты. Непрерывное сюръективное отображение $f : X \rightarrow Y$ компактов¹ называется вполне замкнутым, если для любых двух дизъюнктивных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$ пересечение $f(A) \cap f(B)$ конечно (см. [5]). Вполне замкнутое отображение f будем называть *допустимым*, если прообразы $f^{-1}(y)$ всех точек $y \in Y$ имеют счетный вес. Компакт X называется F -компактом, если его можно представить в виде предела непрерывного вполне упорядоченного обратного спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}$, в котором X_0 есть точка, а все соседние проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ ($\alpha + 1 < \gamma$) – допустимые вполне замкнутые отображения. Наименьшая возможная длина γ такого спектра S , дающего в пределе X , называется спектральной высотой $sh(X)$ F -компакта X (см. [3]).

Ниже пойдет речь исключительно об F -компактах спектральной высоты 3, которые могут быть охарактеризованы как неметризуемые компакты, обладающие допустимым вполне замкнутым отображением на метризуемый неодноточечный компакт. Таким образом, со всяким F -компактом X спектральной высоты $sh(X) = 3$ изначально связано некоторое допустимое вполне замкнутое отображение $f : X \rightarrow K$ на метризуемый компакт K . При этом множество $T(X, f) = \{f^{-1}(t) : t \in K, |f^{-1}(t)| > 1\}$ нетривиальных слоев отображения f несчетно в силу неметризуемости X (см. [5, предложение 3.10]). В работе [2] доказано, что допустимое вполне замкнутое отображение $f : X \rightarrow K$ компакта X на метризуемый компакт K определено почти однозначно. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. [2] *Если $f_i : X \rightarrow K_i, i = 1, 2$ – допустимые вполне замкнутые отображения компакта X на метризуемые компакты K_1, K_2 , то множество несовпадающих нетривиальных слоев f_1 и f_2 не более чем счетно. Другими словами,*

$$|T(X, f_1) \Delta T(X, f_2)| \leq \omega_0,$$

где Δ обозначает симметрическую разность множеств.

Для всякого допустимого вполне замкнутого отображения $f : X \rightarrow K$ компакта X на метризуемый компакт K введем обозначения:

$$A(X, f, 2) = \{t \in K : |f^{-1}(t)| = 2\},$$

$$A(X, f, > 2) = \{t \in K : |f^{-1}(t)| > 2\}.$$

В силу теоремы 1 свойства счетности² или несчетности множеств $A(X, f, 2)$ и $A(X, f, > 2)$ не зависят от выбора конкретного отображения f , т. е. являются топологическими свойствами F -компакта X . Поэтому, когда речь идет о мощности этих множеств, параметр f в их обозначении можно опустить.

В формулировке следующей ниже теоремы 2 фигурирует понятие ps -свойства (perfect set property) топологического пространства, которое означает, что в данном пространстве имеется подмножество, гомеоморфное канторовскому совершенному множеству П. Доказательство теоремы 2 опирается на следующую лемму, которая фактически доказана в [2].

Лемма 1. *Пусть $f_i : X \rightarrow K_i, i = 1, 2$ – непрерывные отображения компакта X на метризуемые компакты K_i с метризуемыми слоями $f_i^{-1}(t), t \in K_i$, причем f_2 вполне замкнуто. Тогда множество $\{t \in K_2 : |f_1(f_2^{-1}(t))| > 1\}$ не более чем счетно.*

Другими словами, в условиях леммы почти все слои отображения f_2 содержатся в слоях f_1 .

Теорема 2. *Пусть X – совершенно нормальный F -компакт спектральной высоты 3, являющийся компактом Розенталя. Тогда для X выполняются неравенства $|A(X, 2)| > \omega_0, |A(X, > 2)| \leq \omega_0$ и для любого допустимого вполне замкнутого отображения $f : X \rightarrow K$ на метризуемый компакт K множество $A(X, f, 2)$ обладает ps -свойством.*

Доказательство. Всякий совершенно нормальный F -компакт счетной спектральной высоты наследственно сепарабелен (см. [3]).

¹Компакт – компактное хаусдорфово пространство.

²Для упрощения терминологии под счетным множеством мы понимаем множество мощности $\leq \omega_0$.

Следовательно, в X нет несчетных дискретных подпространств и, согласно теореме С. Тодорчевича [9, теорема 3], существует непрерывное отображение $f_1 : X \rightarrow K_1$ на метризуемый компакт K_1 , все слои которого $f_1^{-1}(t)$, $t \in K_1$ содержат не более двух точек. Пусть $f_2 : X \rightarrow K_2$ — произвольное допустимое вполне замкнутое отображение X на метризуемый компакт K_2 . По лемме 1 почти все слои f_2 содержатся в слоях f_1 , т. е. состоят не более чем из двух точек. Откуда сразу следует, что $|A(X, > 2)| \leq \omega_0$. А поскольку компакт X неметризуем и множество нетривиальных слоев f_2 несчетно, получаем, что $|A(X, 2)| > \omega_0$.

Пусть теперь $f : X \rightarrow K$ — произвольное допустимое вполне замкнутое отображение на метризуемый компакт. Поскольку X — наследственно сепарабельный компакт Розенталя, в X топологически содержится пространство «две стрелки» $S(I)$ (см. [9, теорема 4]). Положим, $g_1 = f|_{S(I)} : S(I) \rightarrow f(S(I)) = K_1 \subset K$, и пусть g_2 — стандартное проектирование $S(I)$ на отрезок I . Отображение g_1 вполне замкнуто как ограничение вполне замкнутого отображения на замкнутое подпространство (см. [5, предложение 1.14]); g_2 также является вполне замкнутым. Поэтому согласно теореме 1 почти все слои g_1 состоят из двух точек. Следовательно,

$$|K_1 \setminus A(X, f, 2)| \leq \omega_0.$$

Таким образом, множество $K_1 \cap A(X, f, 2)$ является несчетным борелевским подмножеством K и, следовательно, обладает ps -свойством. \square

Установленное при доказательстве теоремы 2 ограничение на множество $A(X, f, 2)$ (ps -свойство) для всякого содержащего $S(I)$ совершенно нормального F -компакта спектральной высоты 3 на первый взгляд представляется слишком слабым. Однако следующее предложение показывает, что усилить это требование нельзя.

Предложение 1. *Для любого подмножества $V \subset I = [0, 1]$, обладающего ps -свойством, существуют совершенно нормальный F -компакт X спектральной высоты 3 и допустимое вполне замкнутое отображение $f : X \rightarrow I$ такие, что X содержит $S(I)$, $A(X, f, 2) = V$ и $A(X, f, > 2) = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $\pi : S(I) \rightarrow I$ — проекция «двух стрелок» на отрезок. Рассмотрим на $S(I)$ разбиение R , нетривиальными элементами которого являются множества $\pi^{-1}(t)$ при $t \notin V$. Поскольку отображение π вполне замкнуто, фактор-пространство $X = S(I)/R$ по

разбиению R является хаусдорфовым (см. [5]). Кроме того, в [5] доказано, что однозначно определенное отображение $f : X \rightarrow I$, удовлетворяющее равенству: $\pi = f \circ g$, где $g : S(I) \rightarrow X$ — факторная проекция, является вполне замкнутым. Таким образом, X — совершенно нормальный F -компакт спектральной высоты 3. При этом очевидно, что $A(X, f, 2) = V$ и $A(X, f, > 2) = \emptyset$.

Покажем, что X содержит $S(I)$. По условию в V содержится канторово совершенное множество Π . Пусть $a = \inf \Pi$, $b = \sup \Pi$. Тогда Π можно представить в виде:

$$\Pi = [a, b] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n),$$

где (a_n, b_n) — попарно дизъюнктные интервалы, лежащие на отрезке $[a, b]$. Склеивая точки каждой пары a_n, b_n , $n \in \mathbb{N}$, мы получим факторное отображение $h : \Pi \rightarrow I'$ на некоторый отрезок I' .

Множество $f^{-1}\Pi$ состоит из точек вида $(t, 0), (t, 1) \in f^{-1}(t) \subset S(I)$, где $t \in \Pi$. Рассмотрим в $f^{-1}\Pi$ подмножество

$$Z = \bigcup \{f^{-1}(t) : t \in \Pi, t \neq a_n, b_n, n \in \mathbb{N}\} \\ \cup \{(a_n, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(b_n, 1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко проверить, что отображение $s : Z \rightarrow S(I')$, действующее по формулам: $s(t, 0) = (h(t), 0)$, $s(t, 1) = (h(t), 1)$, где $t \in \Pi$, является гомеоморфизмом Z и $S(I')$. \square

Из теоремы 2 сразу следует, что любой совершенно нормальный компакт Федорчука спектральной высоты 3, для которого множество $A(X, > 2)$ несчетно, не является компактом Розенталя. Такие примеры известны (см. [5]), однако все они построены при дополнительных теоретико-множественных предположениях (например, в предположении континуум-гипотезы CH). Тем не менее справедлива следующая «наивная» теорема.

Теорема 3. *Существует сепарабельный компакт Федорчука X спектральной высоты 3, не являющийся компактом Розенталя, для которого $|A(X, 2)| \leq \omega_0$ и $|A(X, > 2)| > \omega_0$.*

Доказательство. В предположении CH искомым компактом является любой упомянутый выше совершенно нормальный F -компакт.

Предположим теперь, что выполняется отрицание континуум-гипотезы. Пусть Y — F -компакт спектральной высоты 3 с несовпадающими размерностями, построенный В. В. Федорчуком (см. [1, гл. 5.6.2]). Компакт Y сепарабелен и обладает допустимым вполне за-

мкнутом отображением $f : Y \rightarrow K$ на метрический компакт, все слои которого имеют мощность континуум. Пусть B — несчетное подмножество K мощности $< c$. Рассмотрим разбиение R компакта Y , нетривиальными элементами которого являются множества $f^{-1}(t)$ при $t \notin B$. Как и при доказательстве предложения 1, получаем, что факторпространство $X = Y/R$ является сепарабельным F -компактом спектральной высоты 3 и существует вполне замкнутое отображение $g : X \rightarrow K$, нетривиальные слои которого совпадают с множествами $f^{-1}(t)$, $t \in B$.

Согласно результатам С. Тодорчевича [9, теорема 5], всякий сепарабельный компакт Розенталя либо содержит дискретное подмножество мощности континуум, либо допускает непрерывное отображение на метризуемый компакт кратности не больше 2.

Компакт X не содержит дискретных подмножеств мощности c . В самом деле, если D — дискретное подмножество X , то множество точек D , в которых отображение g взаимно однозначно, не более чем счетно в силу метризуемости K . Пересечение D с каждым слоем $g^{-1}(t)$, $t \in B$ также не более чем счетно в силу метризуемости такого слоя. Следовательно, $|D| \leq |B| < c$. В силу леммы 1 компакт X нельзя непрерывно отобразить на метрический компакт с кратностью ≤ 2 , поскольку вполне замкнутое отображение g имеет несчетное множество слоев бесконечной мощности. Итак, X не является компактом Розенталя. \square

Пример совершенно нормального F -компакта спектральной высоты 3, не являющегося компактом Розенталя, можно построить также на основе установленного в теореме 2 ps -свойства множества $A(X, f, 2)$.

Теорема 4. *Существует совершенно нормальный F -компакт X спектральной высоты 3, не являющийся компактом Розенталя, для которого $|A(X, > 2)| \leq \omega_0$.*

Доказательство. Пусть B — множество Бернштейна, лежащее на отрезке I (такое множество пересекается с каждым замкнутым нигде не плотным подмножеством I по счетному числу точек). Множество B несчетно и не обладает ps -свойством. Как и при доказательстве предложения 1, рассмотрим вполне замкнутую проекцию $\pi : S(I) \rightarrow I$ и для подмножества $B \subset I$ построим факторпространство X и вполне замкнутое отображение $f : X \rightarrow I$. Мы получим совершенно нормальный F -компакт X спектральной

высоты 3, для которого $A(X, f, 2) = B$ и $A(X, f, > 2) = \emptyset$. Поскольку B не обладает ps -свойством, X не является компактом Розенталя. \square

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 577 с.
2. Гулько С. П., Иванов А. В. О вполне замкнутых отображениях компактов Федорчука // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 50. С. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1
3. Иванов А. В. О наследственной нормальности F -бикомпактов // Матем. заметки. 1986. Т. 39, вып. 4. С. 606–611. doi: 10.1007/BF01158007
4. Иванов А. В. О произведениях F -компактных пространств // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 2. С. 345–352. doi: 10.17377/smzh.2018.59.209
5. Федорчук В. В. Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, вып. 4. С. 105–235. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2
6. Gul'ko S. P., Ivanov A. V., Shulikina M. S., Troyanski S. Locally uniformly rotund renormings of the spaces of continuous functions on Fedorchuk compact. 2018. URL: www.um.es/beca/xvieafmv/talks/Troyanski.pdf (дата обращения: 15.01.2020).
7. Haydon R., Moltó A., Orihuela J. Spaces of functions with countably many discontinuities // Israel J. Math. 2007. Vol. 158. P. 19–39. doi: 10.1007/s11856-007-0002-1
8. Moltó A., Orihuela J., Troyanski S., Valdivia M. Non-linear transfer technique // Lect. Notes Math. 1951. Berlin: Springer, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-85031-1
9. Todorčević S. Compact subsets of the first Baire class // J. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 1179–1212. doi: 10.1090/S0894-0347-99-00312-4
10. Watson S. The construction of topological spaces: plank and resolutions. Recent Progress in general Topology / M. Hušek and J. van Mill (eds). North-Holland, Amsterdam, 1992. P. 673–757.

Поступила в редакцию 20.02.2020

REFERENCES

1. *Aleksandrov P. S., Pasynkov B. A.* Vvedenie v teoriyu razmernosti [Introduction to the dimension theory]. Moscow: Nauka, 1973. 577 p.
2. *Gul'ko S. P., Ivanov A. V.* O vpolne zamknutykh otobrazheniyakh kompaktov Fedorchuka [On fully closed mappings of Fedorchuk compacta]. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta. Matem. i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Math. and Mechanics]. 2017. No. 50. P. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1
3. *Ivanov A. V.* Hereditary normality of F-bcompacta. *Math. Notes*. 1986. Vol. 39, iss. 4. P. 332–334. doi: 10.1007/BF01158007
4. *Ivanov A. V.* On products of F-compact spaces. *Sib. Math. J.* 2018. Vol. 59, iss. 2. P. 270–275. doi: 10.17377/smzh.2018.59.209
5. *Fedorchuk V. V.* Fully closed mappings and their applications. *J. Math. Sci.* 2006. Vol. 136, no. 5. P. 4201–4292. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2
6. *Gul'ko S. P., Ivanov A. V., Shulikina M. S., Troyanski S.* Locally uniformly rotund renormings of the spaces of continuous functions on Fedorchuk compacta. 2018. URL: www.um.es/beca/xvieafmv/talks/Troyanski.pdf (accessed: 15.01.2020).
7. *Haydon R., Moltó A., Orihuela J.* Spaces of functions with countably many discontinuities. *Israel J. Math.* 2007. Vol. 158. P. 19–39. doi: 10.1007/s11856-007-0002-1
8. *Moltó A., Orihuela J., Troyanski S., Valdivia M.* Non-linear transfer technique. *Lect. Notes Math.* 1951. Berlin: Springer, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-85031-1
9. *Todorčević S.* Compact subsets of the first Baire class. *JAMS*. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 1179–1212. doi: 10.1090/S0894-0347-99-00312-4
10. *Watson S.* The construction of topological spaces: plank and resolutions. *Recent Progress in general Topology*. Eds M. Hušek and J. van Mill. 1992. P. 673–757.

Received February 20, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Aleksander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441

УДК 519.977

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ВХОДНОМ ПОТОКЕ ЗАГРЯЗНЕНИЙ: ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА И СТАБИЛИЗАЦИЯ

А. Н. Кириллов, И. В. Данилова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Предлагается математическая модель процесса биологической очистки сточных вод в аэротенке на основе естественных балансовых соотношений. Модель, задаваемая системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, носит достаточно общий характер: функции, описывающие процесс окисления и входные потоки, не конкретизируются. Найдено инвариантное множество и доказана его асимптотическая глобальная устойчивость. На основании предложенной модели разработан метод стабилизации процесса биоочистки при нестационарном, кусочно-постоянном, входном потоке загрязнений.

Ключевые слова: стабилизация; биологическая очистка; инвариантное множество.

A. N. Kirillov, I. V. Danilova. DYNAMICS OF THE BIOLOGICAL WASTEWATER TREATMENT PROCESS UNDER VARIABLE POLLUTION INPUT FLOW: INVARIANT SETS AND STABILIZATION

A mathematical model of the biological wastewater treatment process, based on simple balance equations, is proposed. The model of the process, a nonlinear system of ordinary differential equations, has a general nature: the functions describing oxidation and the input flow are not specified. The invariant set is found and its asymptotic global stability is proved. On the basis of the proposed model, a technique has been developed to stabilize the wastewater treatment process when the pollutant inflow is non-stationary, piecewise-constant.

Key words: stabilization; biological treatment; invariant set.

ВВЕДЕНИЕ

Математическому моделированию динамики процесса биологической очистки сточных вод на основе применения активного ила посвящено большое количество исследований [1–3, 6–10]. Моделирование технологических процессов, к которым относится и процесс биоочистки, отличается от моделирования,

например, процессов движения летательных объектов обилием факторов, влияющих на процесс, невозможностью их точного описания, а также невозможностью проведения экспериментов с исследуемым процессом. Попытки учесть как можно большее число параметров и связей между ними приводят к невозможности исследования модели и, в результа-

те, к невозможности ее применения для предсказания развития процесса и управления им. В связи с этим в предлагаемой работе рассматривается простая, основанная на балансовых соотношениях, модель системы биологической очистки осадков сточных вод, состоящей из аэротенка, отстойника и звена рециркуляции.

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БИООЧИСТКИ

Рассмотрим следующую динамическую систему, представляющую модель процесса биоочистки воды в аэротенке:

$$\begin{cases} \dot{x} = Q(a_1, u) + f(x, s) - (b + u)x, \\ \dot{s} = R(a_2, b) - \frac{1}{Y}f(x, s) - (b + u)s, \end{cases} \quad (1)$$

где $s = s(t)$ – концентрация загрязнений (субстрата); $x = x(t)$ – концентрация микроорганизмов, t – время; Y – коэффициент утилизации субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов; k – константа полунасыщения; b, a_2 – соответственно скорость и концентрация субстрата на входе; u, a_1 – соответственно скорость и концентрация биомассы в возвратном потоке, $u \in [0, \bar{u}]$, $0 < u$ – постоянная, характеризующая технические возможности аэротенка; μ – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов. Будем считать, что Y, b, a_2, a_1 – положительные постоянные, u – управляющее воздействие. Пусть функции Q, R, f обеспечивают единственность решения задачи Коши.

Поясним смысл балансовых уравнений (1): $Q = Q(a_1, u), R = R(a_2, b)$ – скорости расхода микроорганизмов и субстратов соответственно на входе в аэротенк, $Q \in [0, \bar{Q}], R \in [0, \bar{R}]$, \bar{Q}, \bar{R} – положительные постоянные; $f(x, s) \geq 0$ – скорость прироста биомассы микроорганизмов за счет окисления ими субстратов, $-f(x, s)/Y$ – скорость убыли субстратов за счет их окисления микроорганизмами; $-(b+u)x, -(b+u)s$ – скорости расхода биомассы и субстратов соответственно на выходе из аэротенка. Естественно предположить, что $f(x, 0) = f(0, s) = 0$ и $f(x, s) \leq cx$, где $0 \leq c$ – постоянная. Последнее ограничение отражает насыщаемость, присущую процессу окисления субстрата микроорганизмами.

Следует отметить, что представленная динамическая система (1) обобщает модель биоочистки, предложенную в [2].

Нетрудно показать, что положительная четверть $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, s) : x \geq 0, s \geq 0\}$ является инвариантным множеством системы (1).

Также из вида правых частей системы (1) и ограничений на Q, R, f , которые введены выше, следует, что при достаточно больших постоянных $\bar{x} \geq 0, \bar{s} \geq 0$ инвариантным множеством системы (1) является прямоугольник P вида:

$$P = \{(x, s) : x \in [0, \bar{x}], s \in [0, \bar{s}]\}. \quad (2)$$

Соотношение (2) значит, что решения системы (1) положительно устойчивы по Лагранжу, что мотивирует использование этой модели процесса биоочистки. Устойчивость по Лагранжу, как важная характеристика математических моделей экологических систем, отмечена в известной работе [5].

Теорема 1. Пусть Q, R – положительные постоянные, $D(u) = (Q + Y \cdot R)/(b + u)$. Тогда прямая

$$l(u) = \{(x, s) : x + sY = D(u)\}$$

является интегральным притягивающим множеством системы (1) при постоянном u .

Доказательство. Умножив второе уравнение системы (1) на Y и сложив его с первым уравнением, получим

$$\dot{z} = Q + Y \cdot R - (b + u)z, \quad (3)$$

где $z = x + Ys$. Приравняв правую часть уравнения (3) к нулю, получим его стационарное решение

$$z = D(u).$$

Таким образом, прямая $x + Ys = D(u)$ – инвариантное множество системы (1). Поскольку в (3) коэффициент перед z отрицателен, то положение равновесия асимптотически (глобально) устойчиво, откуда следует утверждение леммы. \square

Конкретизируем вид функций Q и R , следуя работе [6]. Пусть $Q(a_1, u) = ua_1, R(a_2, b) = ba_2$. Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = ua_1 + f(x, s) - (b + u)x, \\ \dot{s} = ba_2 - \frac{1}{Y}f(x, s) - (b + u)s. \end{cases} \quad (4)$$

Стабилизация системы (4) при кусочно-постоянном R . В работах [3, 4] разработан метод стабилизации системы, предложенной в [6]. При этом величина входного потока загрязнений Q была постоянной. Но в реальных условиях нагрузка на входе в аэротенк не является стационарной. Поэтому важно так организовать технологический процесс биоочистки, чтобы изменения входного потока не ухудшали качество очищенной воды.

Ниже будем предполагать, что R – кусочно-постоянная функция времени.

Предварительно получим следующий технический результат, а именно исследуем кинематику прямой $l(u)$. Имеем

$$D(u) = \frac{ua_1 + Yba_2}{b + u},$$

$$D'(u) = \frac{a_1(b + u) - (ua_1 + Yba_2)}{(b + u)^2}$$

$$= \frac{b(a_1 - Ya_2)}{(b + u)^2}.$$

Отсюда следует, что если $a_1 - Ya_2 > 0$, то $D'(u) > 0$, т. е. прямая $l(u)$ движется вверх с возрастанием u . Если $a_1 - Ya_2 < 0$, то $l(u)$ с ростом u движется вниз. Если $a_1 - Ya_2 = 0$, то при изменении u прямая l_0 остается неподвижной.

Очевидно, величины b, a_2 , характеризующие интенсивность потока загрязнений на входе в аэротенк, не являются постоянными. Естественно предположить, что b и a_2 – кусочно-постоянные функции времени. Таким образом, как отмечено выше, $R = ba_2$ – кусочно-постоянная функция времени. Ограничимся случаем кусочно-постоянной концентрации загрязнения a_2 , считая величину b постоянной. Случай кусочно-постоянной скорости b при постоянной концентрации a_2 рассматривается, как будет видно из дальнейшего, проще. Если же кусочно-постоянны обе величины, b и a_2 , то рассуждение следует первому случаю. Ниже используем обозначение $l(u) = l(u, a_2)$, $D(u) = D(u, a_2)$.

Рассмотрим следующую задачу стабилизации. Пусть в аэротенке при $a_2 = a_2^*$ поддерживается скорость возвратного потока активного ила на желательном уровне $u = u^*$, которому соответствует инвариантное множество $l(u^*, a_2^*)$ системы (4). Поставим задачу стабилизации множества $l(u^*)$ за счет изменения скорости u .

Предположим, что в некоторый момент времени $t = t_1$ произошло увеличение концентрации загрязнителя до значения $a_2 = a_+ > a_2^*$. Следует отметить, что мгновенность изменения концентрации рассматривать проще, а суть метода стабилизации не изменится, если ввести временной промежуток, на котором изменится концентрация a_2 .

Пусть $a_2^* < a_1/Y$, т. е. $a_1 - Ya_2^* > 0$. Если $a_+ < a_1/Y$, то учитывая, что при увеличении a_2 увеличивается $D(u, a_2)$, получаем, что прямая $l(u^*, a_+)$ будет расположена выше, чем $l(u^*, a_2^*)$. Поскольку $D'(u, a_2) > 0$, то для возврата прямой $l(u^*, a_+)$ в начальное положение

$l(u^*, a_2^*)$ следует уменьшить значение u^* , положив $u = \tilde{u}$, где \tilde{u} – решение уравнения

$$D(u^*, a_2^*) = D(\tilde{u}, a_+), \quad (5)$$

откуда получаем

$$\tilde{u} = \frac{Ya_+(b + u^*) - (a_1u^* + Yba_2^*)}{(Ya_2^* - a_1)}.$$

Но при этом должно выполняться условие $\tilde{u} > 0$, что равносильно $D(u^*, a_2^*) > Ya_+$, или

$$a_+ < \frac{u^*a_1 + Yda_2^*}{Y(b + u^*)}. \quad (6)$$

Условие (6) дает ограничения на концентрацию входного потока загрязнений, с которой может справиться система биоочистки, использующая предлагаемый метод стабилизации, если выполнены ограничения, заданные выше.

Пусть по-прежнему $a_2^* < a_1/Y$, но $a_+ \geq a_1/Y$. Тогда, как нетрудно показать, не существует положительного решения \tilde{u} уравнения (6).

Пусть $a_2^* \geq a_1/Y$. Тогда, очевидно, $a_+ > a_1/Y$. Поскольку теперь $D'(u, a_2) < 0$, то при любом $a_+ > a_2^*$ существует решение \tilde{u} уравнения (5).

Случай, когда в некоторый момент времени $t = t_2$ происходит уменьшение величины a_2^* до значения $a_- < a_2^*$, рассматривается аналогично вышеизложенному. А именно, если $a_2^* < a_1/Y$, то при любом $a_- < a_2^*$ существует решение \hat{u} уравнения $D(u^*, a_2^*) = D(\hat{u}, a_-)$. Если $a_2^* > a_1/Y$ и $a_- > a_1/Y$, то решение \hat{u} существует при условии $a_- > D(u^*, a_2^*)$. Если $a_2^* > a_1/Y$ и $a_- \leq a_1/Y$, то \hat{u} не существует.

Следует отметить, что предложенный выше метод стабилизации применим и к более общей системе (1), если на функции Q, R, f наложить соответствующие естественные ограничения. Для того чтобы изложение не имело чрезмерно абстрактный характер, метод стабилизации изложен на примере системы (4). Несложно видеть, что метод стабилизации, опирающийся на теорему 1, применим и в случае, когда параметры системы не известны точно, что означает его грубость, которая является крайне важной характеристикой в практических задачах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена общая модель биологической очистки сточных вод в аэротенке, полученная из естественных балансовых соотношений. Найдено инвариантное множество соот-

ветствующей динамической системы и доказана его асимптотическая глобальная устойчивость. На основании предложенной модели разработан метод стабилизации процесса биочистки при нестационарном входном потоке загрязнений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18-01-00249а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 144 с.
2. Кириллов А. Н. Динамическое моделирование и стабилизация процесса биологической очистки сточных вод // Целлюлоза. Бумага. Картон. 2008. № 5. С. 66.
3. Кириллов А. Н. Задачи стабилизации экологических систем // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1994. Вып. 6. С. 883–892.
4. Кириллов А. Н. Инвариантные множества системы управления процессом биологической очистки // Труды КарНЦ РАН. 2011. № 5. С. 33–37.
5. Свирежнев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

REFERENCES

1. Vavilin V. A. Vremya oborota biomassy i destruktziya organicheskogo veshchestva v sistemakh biologicheskoi ochistki [Turnover time of biomass and organic substance destruction in the biological treatment systems]. Moscow: Nauka, 1986. 144 p.
2. Kirillov A. N. Dinamicheskoe modelirovanie i stabilizatsiya protsessa biologicheskoi ochistki stochnykh vod [Dynamical modelling and process stabilization of the biological wastewater treatment]. *Tsellyuloza. Bumaga. Karton* [Cellulose. Paper. Cardboard]. 2008. No. 5. P. 66.
3. Kirillov A. N. Zadachi stabilizatsii ekologicheskikh sistem [Problems of ecological systems stabilization]. *Obozrenie priklad. i promyshl. matem.* [Appl. Industrial Math. Reviews]. 1994. No. 6. P. 883–892.
4. Kirillov A. N. Invariantnye mnozhestva sistemy upravleniya protsessom biologicheskoi ochistki [Invariant sets of a biological treatment process control system]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2011. No. 5. P. 33–37.
5. Svirezhev Yu. M., Logofet D. O. Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv [Stability of

6. Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process // *Environ. Tech. Letters*. 1985. Vol. 6. P. 467–476. doi: 10.1080/09593338509384365

7. Dupont R., Sinkjaer O. Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models // *Water Sci. Tech.* 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186

8. Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G. v. R., Matsuo T. A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // *Water Research*. 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

9. Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B. A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models // *Water Research*. 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

10. Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D. A dynamic model of the clarification–thickening process // *Water Research*. 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Поступила в редакцию 15.04.2020

biological communities]. Moscow: Nauka, 1978. 178 p.

6. Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process. *Environ. Tech. Letters*. 1985. Vol. 6. P. 467–476.

7. Dupont R., Sinkjaer O. Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models. *Water Sci. Tech.* 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186; doi: 10.1080/09593338509384365

8. Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G. v. R., Matsuo T. A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems. *Water Research*. 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

9. Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B. A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models. *Water Research*. 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

10. Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D. A dynamic model of the clarification–thickening process. *Water Research*. 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Received April 15, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич

ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: krllv1812@yandex.ru
тел.: (8142) 763370

Данилова Инна Владимировна

аспирант
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: DanilovaInna1987@mail.ru

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: krllv1812@yandex.ru
tel.: (8142) 766312

Danilova, Inna

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: DanilovaInna1987@mail.ru

УДК 519.179.2, 519.876.5

ОБ УСЛОВИЯХ СВЯЗНОСТИ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ

М. М. Лери

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются два вида моделей случайных конфигурационных графов с разными распределениями степеней вершин: дискретным степенным распределением и распределением Пуассона. Параметры распределений принимают фиксированные значения. Посредством имитационного моделирования для разных видов графов найдены оценки вероятностей того, что граф представляет собой одну компоненту связности, состоящую из всех вершин графа в зависимости от размера графа и параметра распределения степеней вершин.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степенное распределение; распределение Пуассона; связность графа; имитационное моделирование.

M. M. Leri. ON CONDITIONS OF CONFIGURATION GRAPHS' CONNECTIVITY

We consider two types of random configuration graphs: with the power-law and with the Poisson vertex degree distributions. The parameters of these distributions are fixed. By simulations we estimate the probabilities of graph connectivity (when all graph vertices are joined into one connected component) in different graph types and their dependence on the graph size and the vertex degree distribution parameter.

Key words: configuration graph; power-law distribution; Poisson distribution; graph connectivity; simulations.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см., например, [3–5]), что случайные графы нашли широкое применение в качестве моделей для описания различных видов сетей коммуникаций, от локальных сетей местного значения до глобальных, имеющих международный охват. Сетевые модели, соответственно, также имеют некоторое разнообразие, как в определении степеней вершин случайного графа, так и в установлении связей между этими вершинами. В частности, наблюдения за реальными сетями телекоммуникаций показали (см., например, [4, 9]), что для их описания лучше всего подходят модели случайных графов, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с общим законом распределения.

С увеличением размеров сетей и с ростом их разнообразия стало понятно, что для адекватного отражения топологии и функционирования таких сетей при построении их математических моделей недостаточно учитывать только распределение степеней вершин в соответствующей модели случайного графа, но необходимо также принимать в рассмотрение и другие не менее важные характеристики сети. Одной из таких характеристик качества сети является связность. Связность сети и, соответственно, связность случайного графа означают, что все вершины объекта напрямую или опосредованно связаны между собой, то есть для любой пары вершин всегда существует хотя бы одна цепь, соединяющая их между собой.

СВЯЗНОСТЬ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ

В работе рассматриваются конфигурационные графы, впервые предложенные Б. Боллобашем в [2], с N вершинами, степени которых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с общим распределением. Рассматриваются два варианта распределений степеней вершин графа. Во-первых, это степенное распределение, заданное следующим равенством [9]:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k + c_1\} = k^{-\tau} - (k + 1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots$, и, во-вторых, распределение Пуассона:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k + c_2\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Целочисленные константы $c_1 \geq 0$ и $c_2 \geq 1$ определяют сдвиги соответствующих распределений. Параметры $\tau > 1$ и $\lambda > 0$ распределений (1) и (2) степеней вершин графа принимают фиксированные значения. При построении конфигурационного графа вначале определяются степени каждой из N вершин в соответствии с выбранным распределением (степенным или Пуассона) с заданными параметрами τ или λ соответственно. Степени вершин графа определяют различимые полуредра [9], занумерованные в произвольном порядке. Соединение всех полуредра графа между собой попарно и равновероятно образует ребра. Сумма степеней вершин при таком построении должна быть четной, поэтому, если она оказывается нечетной, к равновероятно выбранной вершине добавляется одно недостающее полуредра: степень соответствующей вершины увеличивается на 1, и она соединяется ребром с той вершиной, чье ребро ранее осталось без пары. В результате такого построения конфигурационные графы могут иметь петли, циклы и кратные ребра.

Относительно конфигурационных графов с распределением степеней вершин (1) известно (см., например, [3, 5, 9]), что если значение параметра распределения степеней вершин τ лежит в интервале $(1, 2)$, то в таком графе существует так называемая гигантская компонента связности, и она единственна. Число вершин, принадлежащих этой компоненте, пропорционально числу вершин графа N при $N \rightarrow \infty$, в то время как число вершин любой из меньших компонент этого графа бесконечно мало по сравнению с числом вершин в гигантской компоненте.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что рассматриваемый случайный граф

представляет собой одну компоненту связности, содержащую в себе все N вершин графа. В [6] показано, что если распределение степеней вершин случайного графа задано так, что $p_1 = p_2 = 0$, то вероятность $\mathbf{P}(A) \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$. В [1] рассматривались условные конфигурационные графы с неизвестным распределением степеней вершин при слабых ограничениях на предельное поведение хвоста распределения и были найдены условия, при которых граф будет асимптотически достоверно связан.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Цель данной работы состояла в том, чтобы оценить вероятность события A и найти зависимость $\mathbf{P}(A)$ от числа вершин графа N и параметра распределения степеней вершин. Исследование проводилось посредством методов имитационного моделирования с последующей статистической обработкой данных.

Для получения статистических данных рассматривались три типа конфигурационных графов с распределением степеней вершин (1) и тремя значениями сдвига c_1 :

- $c_1 = 0$: $p_k > 0, k = 1, 2, \dots$;
- $c_1 = 1$: $p_1 = 0$;
- $c_1 = 2$: $p_1 = p_2 = 0$

и три типа конфигурационных графов с распределением степеней вершин (2) и тремя значениями сдвига c_2 :

- $c_2 = 1$: $p_k > 0, k = 1, 2, \dots$;
- $c_2 = 2$: $p_1 = 0$;
- $c_2 = 3$: $p_1 = p_2 = 0$.

Для всех видов конфигурационных графов рассматривались графы размерностей $100 \leq N \leq 10000$ с шагом 500. В случае распределения (1) значения параметра τ изменялись от 1.01 до 3.0 с шагом 0.01, а при распределении степеней вершин (2) значения параметра λ изменялись от 0.01 до 8.0 с шагом 0.01.

На основе полученных данных были построены регрессионные зависимости вероятностей $\mathbf{P}(A)$ того, что граф состоит из одной компоненты связности, включающей в себя все N вершин, от объема графа N и параметра распределения степеней вершин (τ или λ). Введем следующие обозначения вероятностей связности графов. Для графов с распределением степеней вершин (1):

$$\mathbf{P}_{pl}^0(A) \text{ при } c_1 = 0;$$

$$\mathbf{P}_{pl}^1(A) \text{ при } c_1 = 1;$$

$$\mathbf{P}_{pl}^2(A) \text{ при } c_1 = 2$$

и для графов с распределением степеней вершин (2):

$$\mathbf{P}_{ps}^1(A) \text{ при } c_2 = 1;$$

$$\mathbf{P}_{ps}^2(A) \text{ при } c_2 = 2;$$

$$\mathbf{P}_{ps}^3(A) \text{ при } c_2 = 3.$$

В случае степенного распределения степеней вершин со сдвигом $c_1 \geq 0$ получены следующие регрессионные уравнения (рис. 1 и 2):

$$\mathbf{P}_{pl}^0(A) = e^{1-2.79\tau^{97.35-\frac{9500.45}{N}}}, \quad R^2 = 0.89,$$

$$\mathbf{P}_{pl}^1(A) = 2.4 - \frac{1.55\tau^{0.28}}{N^{0.01}}, \quad R^2 = 0.98,$$

при $c_1 = 2$ для любых $1.01 \leq \tau \leq 3$: $0.99 \leq \mathbf{P}_{pl}^2(A) \leq 1$ при $100 \leq N \leq 1000$, и $\mathbf{P}_{pl}^2(A) = 1$ при $1000 < N \leq 10000$.

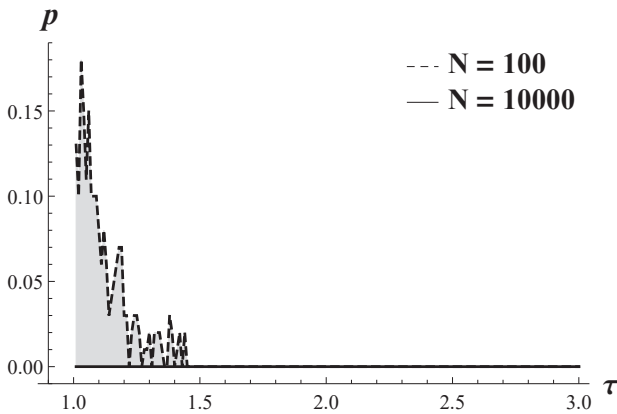


Рис. 1. Зависимость $\mathbf{P}_{pl}^0(A)$ от N и τ
Fig. 1. Dependence of $\mathbf{P}_{pl}^0(A)$ on N and τ

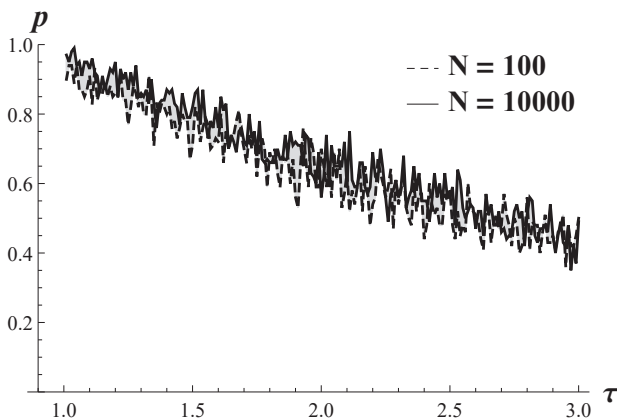


Рис. 2. Зависимость $\mathbf{P}_{pl}^1(A)$ от N и τ
Fig. 2. Dependence of $\mathbf{P}_{pl}^1(A)$ on N and τ

В случае, когда степени вершин имели распределение Пуассона со сдвигом $c_2 \geq 1$, регрессионные уравнения были следующими (рис. 3 и 4):

$$\mathbf{P}_{ps}^1(A) = \sqrt{0.12 - 2.75N^{0.04} + 2.7\lambda^{0.34}},$$

$$\mathbf{P}_{ps}^2(A) = e^{-0.114\lambda^{-1.335+\frac{24.216}{N}}}$$

с коэффициентами детерминации равными 0.97 и 0.98 соответственно. В случае, когда $c_2 = 3$: $\mathbf{P}_{ps}^3(A) = 1$ для любых значений параметра $0.01 \leq \lambda \leq 8$ и любых объемов графа $100 \leq N \leq 10000$.

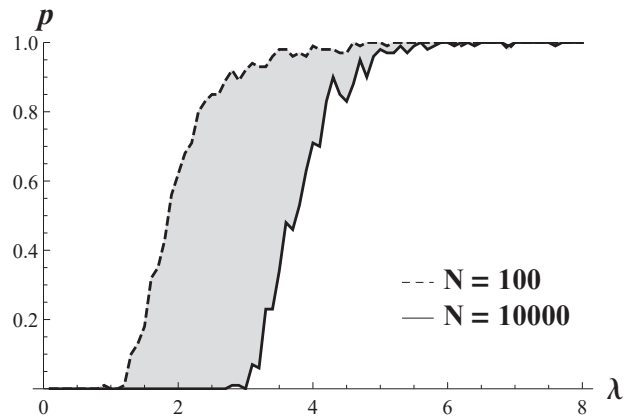


Рис. 3. Зависимость $\mathbf{P}_{ps}^1(A)$ от N и λ
Fig. 3. Dependence of $\mathbf{P}_{ps}^1(A)$ on N and λ

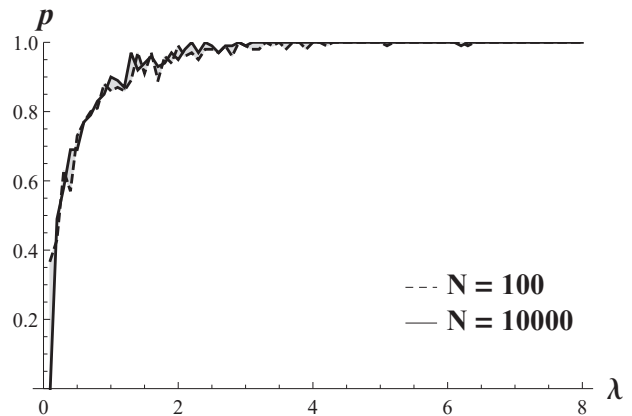


Рис. 4. Зависимость $\mathbf{P}_{ps}^2(A)$ от N и λ
Fig. 4. Dependence of $\mathbf{P}_{ps}^2(A)$ on N and λ

Таким образом, результаты имитационного моделирования, во-первых, показывают, что действительно, если распределение степеней вершин случайного графа задано так, что $p_1 =$

$p_2 = 0$, то вероятность того, что все вершины графа образуют одну компоненту связности, приближается к 1 с ростом объема графа. Вторых, полученные в данной работе уравнения зависимостей этой вероятности в случаях, когда только $p_1 = 0$ или когда $p_k > 0$ для всех $k \geq 1$, могут служить основанием для понимания сетевых топологий, определяющих различие в свойствах и функционировании сетей, а также могут быть использованы как при моделировании реальных сетей, так и при изучении устойчивости конфигурационных графов к различного вида разрушениям [7, 8].

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Исследования выполнены на научном оборудовании Центра коллективного пользования Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Ю. Л. О связности конфигурационных графов // Дискретная математика. 2019. Т. 31, № 2. С. 114–122. doi: 10.4213/dm1573
2. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Combin. 1980.

REFERENCES

1. Pavlov Yu. L. O svyaznosti konfiguratsionnykh grafov [On connectivity of configuration graphs]. *Discretnaya Matematika*. [Discrete Math. Appl.]. 2019. Vol. 31, iss. 2. P. 114–122. doi: 10.4213/dm1573
2. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combinatorics*. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
3. Durrett R. *Random Graph Dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594
4. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the Internet topology. *Comp. Comm. Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
5. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

3. Durrett R. *Random Graph Dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594
4. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the Internet topology // *Comp. Comm. Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
5. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
6. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. 2018. Vol. 2. 314 p. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCI.pdf> (дата обращения: 11.02.2020)
7. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model // *Austrian J. Stat.* 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/ajs.v43i4.34
8. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs // *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362
9. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 11.04.2020

6. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. 2018. Vol. 2. 314 p. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCI.pdf> (accessed: 11.02.2020).
7. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model. *Austrian J. Stat.* 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/ajs.v43i4.34
8. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs. *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362
9. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received April 11, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Лери Марина Муксумовна
научный сотрудник, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: leri@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Leri, Marina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: leri@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

ОБ АСИМПТОТИКЕ СТЕПЕННОЙ СТРУКТУРЫ УСЛОВНЫХ ИНТЕРНЕТ-ГРАФОВ

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по неизвестному закону, зависящему от произвольной медленно меняющейся функции. Степень каждой вершины равна числу инцидентных ей занумерованных полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Такие модели используются для адекватного описания различных сетей коммуникаций и сети Интернет. Изучается подмножество таких случайных графов при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n . В статье получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; Интернет-граф; условный граф; степень вершины; степенная структура; асимптотика.

Yu. L. Pavlov. ON THE ASYMPTOTICS OF THE DEGREE STRUCTURE OF CONDITIONAL INTERNET GRAPHS

We consider configuration graphs with N vertices, whose degrees are independent and identically distributed according to an unknown distribution law that depends on an arbitrary slowly varying function. The degree of each vertex is equal to the number of incident numbered semi-edges. The graph is constructed by joining all of the semi-edges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used to adequately describe various communication networks and Internet topologies. We study the subset of such random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and it is equal to n . The paper finds the limit distributions of the maximum vertex degree and the number vertices with a given degree as $N, n \rightarrow \infty$ in such a way that $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$.

Key words: configuration random graph; Internet graph; conditional graph; vertex degree; degree structure; asymptotics.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании сложных сетей коммуникаций широко используется теория случайных графов [7]. Важнейшими примерами таких сетей являются Интернет и социальные сети. Наблюдения за реальными сетями показав-

ли [6], что степени узлов можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Установлено, что число узлов, степени которых равны k , при $k \rightarrow \infty$ пропорционально k^{-g} , где g – положительный параметр. Поэтому в [9] предложено в моде-

лях сетей использовать следующее распределение случайной величины ξ , равной степени любой вершины графа:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = h(k)k^{-g}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $g > 1$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся функция. Одним из видов графов, наиболее часто используемых для моделирования сетей, являются так называемые конфигурационные графы, введенные в работе [5]. В таких графах степень каждой вершины равна числу различных инцидентных ей различимых полуребер, для которых смежные вершины еще не определены. Если сумма степеней вершин оказывается нечетной, то в граф вводится вспомогательная вершина единичной степени. Формирование графа завершается путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом и образования таким образом ребер. Понятно, что при этом могут появляться петли и кратные ребра. В [9] отмечается, что вспомогательная вершина и инцидентное ей ребро не влияют на предельное поведение основных характеристик графа при стремлении к бесконечности числа вершин. Поэтому ниже мы будем рассматривать только степени основных вершин. Поскольку такие конфигурационные графы используются для моделирования сети Интернет, в некоторых работах (см., например, [8]) их называют Интернет-графами.

В статье [3] впервые рассматривались условные Интернет-графы при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n , а распределение (1) задавалось следующим образом:

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Очевидно, что (2) является частным случаем распределения (1), если $g = \tau + 1$ и $h(k) = \tau + o(1)$. В этих условиях в [3] найдены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при различном характере стремления числа вершин и числа ребер к бесконечности и различных значениях параметра τ . Доказательства этих результатов в значительной степени опирались на использование обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, введенной и исследованной В. Ф. Колчиным [1].

В статье [2] впервые изучались условные конфигурационные графы с неизвестным распределением степеней вершин, обладающим свойствами: $p_k > 0, k = 1, 2, \dots$ и при $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \quad (3)$$

где $d > 0, g \geq 1, h \geq 0, g + h > 1$. В этой же статье приводятся различные примеры распределений степеней, обладающих названными свойствами. В частности, такие распределения возникают, если распределение (2) является случайным из-за случайного параметра τ с известным законом распределения. Нетрудно видеть, что распределение, обладающее свойством (3), является частным случаем распределения (1).

Пусть N – число вершин графа. Обозначим ξ_1, \dots, ξ_N степени вершин $1, \dots, N$ соответственно, эти случайные величины независимы и распределены так же, как и ξ . Пусть $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$. Если выполнено условие $\zeta_N = n$, то в таком условном графе степени вершин уже не являются независимыми. Обозначим $\eta_{(N)}$ и μ_r случайные величины, равные максимальной степени вершины и числу вершин заданной степени r соответственно. В [2] найдены предельные распределения этих случайных величин при различном характере стремления N и n к бесконечности. Естественно возникает задача получения аналогичных результатов в наиболее общем случае, когда степени вершин имеют распределение (1). Такая задача в настоящей статье рассматривается впервые. Основная трудность в соответствующих доказательствах заключается в том, что в (1) неизвестен явный вид медленно меняющейся функции $h(k)$. Проще всего такая задача решается при условии $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, что и будет сделано в настоящей статье. Для этого мы будем использовать те же схемы доказательств, терминологию и обозначения, что и в статье [2]. Остальные случаи предельного поведения N и n будут рассмотрены в других публикациях.

В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теоремы 1 для $\eta_{(N)}$ и теоремы 2 для μ_r . Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–11), с помощью которых в последнем разделе статьи доказываются теоремы 1 и 2.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем независимые случайные величины η_1, \dots, η_N такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \lambda^k p_k / B(\lambda), \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, N, 0 < \lambda < 1$,

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k p_k. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$m = m(\lambda) = \mathbf{E}\eta_1 = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k p_k, \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\eta_1 = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \lambda^k p_k - m^2. \quad (7)$$

Обозначим также

$$M = \mathbf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k. \quad (8)$$

Замечание. Из (1) и (8) следует, что если $g > 2$, то M конечно, а если $g < 2$, то $M = \infty$. Далее в качестве параметра λ будем использовать единственное решение уравнения

$$m(\lambda) = n/N. \quad (9)$$

В статье доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < M$, а $r = r(N, n)$ выбираются так, что

$$\frac{N\lambda^{r+1}h(r)}{B(\lambda)r^g} \rightarrow \gamma, \quad (10)$$

где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r+k\} = \exp\{-\gamma\lambda^k(1-\lambda)^{-1}\}(1+o(1)).$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < M$. Тогда для любого натурального r равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda) \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) \right). \quad (11)$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Из (1) и (4) нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. Справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \dots + \eta_N = n\}. \end{aligned}$$

Введем вспомогательные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \leq r\}, \quad (12)$$

где $i = 1, \dots, N$, и пусть $\nu_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$, $\nu_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \dots + \eta_N^{(r)}$. Из леммы 1 следует, что выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [1], в рамках которой имеет место такое утверждение.

Лемма 2. Справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\nu_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = n\}},$$

где

$$P_r = \mathbf{P}\{\eta_1 > r\}. \quad (13)$$

Пусть $\tilde{\eta}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\eta}_N^{(r)}$ – случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \quad (14)$$

где $i = 1, \dots, N$. Обозначим также $\tilde{\nu}_N^{(r)} = \tilde{\eta}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\eta}_N^{(r)}$. Из леммы 1, (4) и (14) следует, как известно [1], такой результат.

Лемма 3. Справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\mu_r = k\} \\ &= \binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\nu}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = n\}}. \end{aligned}$$

Леммы 2 и 3 будут использованы при доказательстве теорем 1 и 2 соответственно. Для этого ниже будут рассмотрены асимптотики бинома $(1 - P_r)^N$ из леммы 2, биномиальных вероятностей из леммы 3 и сумм $\nu_N, \nu_N^{(r)}, \tilde{\nu}_N^{(r)}$. Сначала выясним простейшие свойства параметра λ .

Лемма 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < M$. Тогда $0 < C_3 \leq \lambda \leq C_4 < 1$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda \rightarrow 0$. Тогда из (4), (6), (9) следует, что

$$\frac{n}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k p_k}{B(\lambda)} \rightarrow 1,$$

что противоречит условию $n/N \geq C_1 > 1$. Пусть $\lambda = 1 - x, x \rightarrow 0$. Тогда из (5) видим, что для любого натурального A

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^A p_k + o(1) + \sum_{k=A+1}^{\infty} \lambda^k p_k. \quad (15)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{k=A+1}^{\infty} \lambda^k p_k < \mathbf{P}\{\xi > A\},$$

а последняя вероятность, как видно из (1), может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого A . Отсюда и из (15) находим, что $B(\lambda) \rightarrow 1$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \lambda^k p_k = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^A k p_k + \sum_{k=A+1}^{\infty} k \lambda^k p_k,$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \lambda^k p_k \geq M(1 + o(1)).$$

Отсюда и из (6), (9) очевидным образом приходим к противоречию с условием $n/N \leq C_2 < M$. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим асимптотику NP_r .

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$NP_{r+k} = \gamma \lambda^k (1 - \lambda)^{-1} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Из (12) и (13) следует, что

$$NP_{r+k} = N p_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{r+j+k+1}(\lambda)}{p_{r+1}(\lambda)}. \quad (16)$$

Отсюда и из (1), (4) вытекает:

$$NP_{r+k} = N p_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{k+j} \times \left(1 - \frac{j+k}{r+j+k+1}\right)^g \frac{h(r+j+k+1)}{h(r+1)}. \quad (17)$$

Из (10) и леммы 4 находим, что $r \rightarrow \infty$. Пусть A – некоторое натуральное число. Из теоремы 1.1 [4] следует, что

$$\sum_{j=0}^A \lambda^{k+j} \left(1 - \frac{j+k}{r+j+k+1}\right)^g \frac{h(r+j+k+1)}{h(r+1)} \quad (18)$$

$$= (1 + o(1)) \sum_{j=0}^A \lambda^{j+k} = \frac{1 - \lambda^{A+k}}{1 - \lambda} + o(1),$$

и это выражение можно сделать сколь угодно близким к $(1 - \lambda)^{-1}$ выбором достаточно большого A . С помощью теоремы 1.2 [4] приходим к оценке:

$$\sum_{j=A+1}^{\infty} \lambda^j \frac{h(r+j+k+1)}{h(r+1)} < \frac{2\lambda_1^A}{1 - \lambda_1}, \quad (19)$$

где $\lambda < \lambda_1 < 1$, а эта величина тем ближе к нулю, чем больше A . Теперь из (4), (10), (17)–(19) получаем:

$$NP_{r+k} \sim \frac{N \lambda^{r+k+1} h(r)}{B(\lambda)(1 - \lambda)r^g},$$

и утверждение леммы 5 следует из условия (10).

В следующих леммах рассматривается асимптотическое поведение сумм $\nu_N, \nu_N^{(r)}, \tilde{\nu}_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\nu_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 6. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < M$. Тогда

$$\varphi_N(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. В данных условиях можно ограничиться почти дословным повторением доказательства соответствующей части леммы 8 [2], отличие состоит только в необходимости учета поведения медленно меняющейся функции $h(k)$ в (1). Обозначим

$$\varphi(t) = \mathbf{E} e^{it\eta_1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p_k(\lambda). \quad (20)$$

В окрестности нуля справедливо разложение:

$$\ln \varphi(t) = imt - \sigma^2 t^2/2 + t^3 Q(t)/6, \quad (21)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_v |(\ln \varphi(v))'''|. \quad (22)$$

В силу леммы 4 $0 < C_3 \leq \lambda \leq C_4 < 1$, поэтому из (1), (5)–(7) следует, что

$$0 < C_5 \leq \sigma^2 \leq C_6 < \infty. \quad (23)$$

В ходе доказательства леммы 8 [2] показано, что

$$(\ln \varphi(t))'''_t = - \left(\frac{f_4(t)}{f_1(t)} - 3 \frac{f_3(t)f_2(t)}{f_1^2(t)} + 2 \left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)} \right)^3 \right),$$

где

$$f_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{j-1} (\lambda e^{it})^k p_k, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда и из (1), (22) и леммы 4 находим, что

$$0 < C_7 \leq |Q(t)| \leq C_8 < \infty. \quad (24)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{iNmt}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right),$$

утверждение леммы 6 нетрудно получить из (21)–(24).

Применяя лемму 6, соотношения (21)–(24) и повторяя дословно доказательство леммы 9 [2], получаем такой результат.

Лемма 7. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}.$$

Обозначим $\varphi_N^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\nu_N^{(r)} - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 8. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\varphi_N^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Из (4), (9), (12), (13) и (20) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_N^{(r)}(t) &= \frac{1}{(1 - P_r)^N} e^{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}} \\ &\times \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) - \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) e^{-\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}} \right)^N. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 6 получаем:

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \frac{1 + o(1)}{(1 - P_r)^N} e^{-t^2/2} \quad (25)$$

$$\times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j} e^{-\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}} \right)^N.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j} e^{-\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}} \\ &= P_r + O\left(\frac{|t|}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\infty} (r+j)p_{r+j}(\lambda)\right), \end{aligned}$$

и, как видно из (25), для доказательства леммы 8 достаточно убедиться, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (r+j)p_{r+j}(\lambda) = o(1/N). \quad (26)$$

По аналогии с (15), (16) с помощью леммы 4 находим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (r+j)p_{r+j}(\lambda) = O(rp_{r+1}(\lambda)). \quad (27)$$

Из свойств медленно меняющейся функции очевидным образом следует, что соотношение (10) имеет место, только если $r = o(\sqrt{N})$. Отсюда, из леммы 4 и (16), (23), (27) следует (26). Лемма 8 доказана.

Как и в случае леммы 7, повторяя доказательство соответствующей части леммы 11 [2], с помощью леммы 8 приходим к такому утверждению.

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}.$$

Обозначим m_r и σ_r^2 математическое ожидание и дисперсию распределения (14) соответственно. Разумеется,

$$m_r = \frac{m - rp_r(\lambda)}{1 - p_r(\lambda)}, \quad (28)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1 - p_r(\lambda))^2} \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) \right).$$

Пусть $\tilde{\varphi}_S(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\tilde{\nu}_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma\sqrt{S})$. Из (4), (7) и (14) вытекает, что характеристическая функция $\tilde{\varphi}_r(t)$ случайной величины $\tilde{\eta}_1^{(r)}$ имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \frac{\varphi(t) - p(\lambda)e^{itr}}{1 - p_r(\lambda)}.$$

Используя это равенство и дублируя доказательство соответствующего утверждения леммы 12 [2], убеждаемся в справедливости следующего результата.

Лемма 10. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < M$, а r – фиксированное натуральное число. Тогда при $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ для любого фиксированного t

$$\tilde{\varphi}_S(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Лемма 10 говорит о слабой сходимости распределения суммы $\tilde{\nu}_S^{(r)}$ к нормальному закону. На самом деле имеет место и локальная сходимость, что нетрудно проверить, повторяя доказательство леммы 13 [2].

Лемма 11. Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда при $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ для целых неотрицательных k равномерно относительно $z_r = (k - Sp_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\tilde{\nu}_S^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi S}} e^{-z_r^2/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Из лемм 7 и 9 следует, что при выполнении условий теоремы 1

$$\mathbf{P}\{\nu_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\nu_N = n\} \rightarrow 1. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 1 следует из лемм 2, 5 и соотношения (29).

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$k = Np_r(\lambda) + u_r\sigma_{rr}\sqrt{N}. \quad (30)$$

Согласно нормальному приближению биномиальных вероятностей

$$\begin{aligned} & \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}} \\ & \times \exp\left\{-\frac{(k - Np_r(\lambda))^2}{2N p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}\right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из леммы 7 получаем:

$$\mathbf{P}\{\nu_N = n\} \sim (\sigma\sqrt{2\pi N})^{-1}. \quad (32)$$

Применяя лемму 3 и собирая вместе (6), (7), (11), (28), (30)–(32), прямыми вычислениями завершаем доказательство теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
2. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
3. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 144 с.
5. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
6. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594
7. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
8. Reittu H., Norros I. On the effect of very large nodes in Internet graphs GLOBECOM'02 // IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105
9. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 24.02.2020

REFERENCES

1. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342
2. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. SB MATH. 2018. Vol. 209, iss. 2. P. 258–275. doi: 10.1070/SM8832
3. Pavlov Yu. L., Chepyukova I. A. Random graphs of Internet type and the

generalised allocation scheme. Discrete Math. Appl. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

4. Seneta E. Regularly varying functions. Lecture Notes in Math. 508. Berlin: Springer, 1976. 112 p.
5. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

6. *Durrett R.* Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

7. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

8. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs

GLOBECOM'02. *IEEE*. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

9. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received February 24, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович

главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

ОБ УСЛОВИИ СВЯЗНОСТИ ИНТЕРНЕТ-ГРАФА С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПАРАМЕТРОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматривается случайный конфигурационный граф с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по степенному закону с параметром $\tau = \tau(N)$. Они равны числу исходящих из вершин занумерованных в произвольном порядке полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Такие модели можно использовать для адекватного описания топологии различных сетей коммуникаций, включая Интернет. Свойства графа зависят от поведения параметра τ . В статье исследуются условия, при выполнении которых случайный конфигурационный граф асимптотически связан, если $N \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; связность графа.

Yu. L. Pavlov. ON THE CONNECTIVITY CONDITION FOR AN INTERNET GRAPH WITH A VARIABLE PARAMETER OF THE VERTEX DEGREE DISTRIBUTION

We consider a configuration graph with N vertices, whose degrees are independent and identically distributed according to power-law distribution with the parameter $\tau = \tau(N)$. They are equal to the number of each vertex's numbered semi-edges. The graph is constructed by joining all of the semi-edges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used to adequately describe various communication networks and Internet topologies. The properties of the graph depend on the behaviour of the parameter τ . The paper investigates the conditions under which a random configuration graph is asymptotically connected as $N \rightarrow \infty$.

Key words: configuration random graph; graph connectivity.

ВВЕДЕНИЕ

В статье [2] рассматривались конфигурационные графы со случайными независимыми распределениями степеней вершин. Обозначим ξ случайную величину, равную степени любой вершины графа, и пусть

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

В [2] предполагалось, что о распределении (1) известна только асимптотика p_k при $k \rightarrow \infty$:

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \quad (2)$$

где $d > 0, g > 1, h \geq 0$. Целью исследований в упомянутой статье было нахождение условий, при выполнении которых такой случай-

ный граф, содержащий N вершин, при $N \rightarrow \infty$ является асимптотически связным. Это значит, что вероятность того, что граф связан, стремится к единице. Более того, были даны оценки скорости сходимости такой вероятности. Обозначим A_N событие, состоящее в том, что граф не связан. Один из полученных в [2] результатов состоит в том, что если $p_k > 0, k = 1, 2, \dots$, то при $1 < g < 3/2$

$$\mathbf{P}\{A_N\} = O\left(\left(\frac{\ln^h N}{N^{3-2g}}\right)^{\frac{1}{g-1}}\right). \quad (3)$$

Опубликовано много работ, в которых конфигурационные графы используются в качестве моделей сложных сетей коммуникаций, в частности сети Интернет (см., например, [4]). В статье [6] предложено для этого использовать графы, в которых распределение (1) имеет вид:

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\tau > 0$. В некоторых работах [3, 5] такие графы называются Интернет-графами, и именно они рассматриваются в данной статье. Из (4) легко следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{\tau}{k^{\tau+1}}.$$

Таким образом, распределение (4) является частным случаем распределения (1), если $d = \tau, g = \tau + 1, h = 0$. Из результатов [2] следует, что конфигурационный граф с распределением (4) асимптотически связан, если $0 < \tau < 1/2$.

Исследования последних лет показали, что в современных сетях коммуникаций их свойства могут изменяться по мере увеличения числа узлов и, соответственно, в моделирующих сети случайных графах могут меняться распределения степеней вершин. Доказательства результатов статьи [2] опираются на использование функций, непрерывно зависящих от параметров распределения (1), (2), поэтому очевидно, что, в соответствии с (4), граф остается асимптотически связным, если τ зависит от N и принадлежит интервалу $[\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$ для любого фиксированного $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1/4$. Предположим теперь, что $\tau = \tau(N) \uparrow 1/2$. Главным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема. Пусть $N \rightarrow \infty, \tau \uparrow 1/2$ так, что $(1-2\tau) \ln N \rightarrow \infty$. Тогда граф является асимптотически связным и

$$\mathbf{P}\{A_N\} = O(N^{\frac{2\tau-1}{\tau}}).$$

Заметим, что полученная в теореме оценка скорости сходимости к нулю вероятности несвязности графа в рассматриваемом случае согласуется с соотношением (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Ниже приводится лемма, с помощью которой далее будет доказана теорема. Обозначим ξ_1, \dots, ξ_N независимые одинаково распределенные случайные величины, равные степеням вершин $1, \dots, N$ соответственно. Разумеется, распределение этих случайных величин совпадает с распределением (4). Обозначим ζ_N сумму степеней вершин:

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N.$$

Для этой суммы справедливо следующее утверждение о локальной сходимости ее распределения к предельному закону.

Лемма. Пусть $N \rightarrow \infty, \tau \uparrow 1/2$. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $k/N^{1/\tau}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = g(k/N^{1/\tau})(1 + o(1)),$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем $1/2$ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\left\{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}|t|(1 - i \operatorname{sgn} t)\right\}. \quad (5)$$

Доказательство. Из (1) и (4) следует, что характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения степени любой вершины графа имеет вид:

$$\varphi(t) = 1 + (e^{it} - 1)\Phi(e^{it}, \tau, 1), \quad (6)$$

где

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}$$

– трансцендентная функция Лерча [1]. Обозначим $\Psi(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\zeta_N/N^{1/\tau}$. Очевидно, что

$$\Psi(t) = \varphi^N(t/N^{1/\tau}). \quad (7)$$

Отсюда и из (6) получаем, что

$$\ln \Psi(t) \quad (8)$$

$$= N \ln(1 + (e^{it/N^{1/\tau}} - 1)\Phi(e^{it/N^{1/\tau}}, \tau, 1)).$$

Известно [1], что при $\tau \in (0, 1)$ и $t \rightarrow 0$ справедливо соотношение:

$$\Phi(e^{it}, \tau, 1) = \Gamma(1 - \tau)(-it)^{\tau-1}(1 + o(1)),$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x . Отсюда и из (6) при $t \rightarrow 0$ и $\tau \uparrow 1/2$ нетрудно получить, учитывая равенство $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, что

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 - \sqrt{\pi}(-it)^\tau(1 + o(1)) + O(t^{\tau+1}) \\ &= 1 - \sqrt{\pi}|t|^\tau \left(\cos \frac{\pi\tau}{2} \right) \left[1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2} \right] + o(\sqrt{|t|}) \\ &= 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}|t|^\tau(1 - isgnt)(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (9)$$

Используя (7)–(9), находим, что при любом фиксированном t

$$\ln \Psi(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}|t|(1 - sgnt)(1 + o(1)). \quad (10)$$

Из (5) и (10) следует, что распределение суммы ζ_N слабо сходится к устойчивому закону с плотностью $g(x)$. Далее докажем, что на самом деле имеет место локальная сходимост. Для этого представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ по формуле обращения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} \\ &= (2\pi N^{1/\tau})^{-1} \int_{-\pi N^{1/\tau}}^{\pi N^{1/\tau}} e^{-ikt/N^{1/\tau}} \Psi(t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично,

$$g(k/N^{1/\tau}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt/N^{1/\tau}} f(t) dt. \quad (12)$$

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi(N^{1/\tau})^{-1} \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - g(k/N^{1/\tau}). \quad (13)$$

С помощью (11) и (12) эту разность можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-ikt/N^{1/\tau}} (\Psi(t) - f(t)) dt, \\ I_2 &= \int_{A < |t| < \varepsilon N^{1/\tau}} e^{-ikt/N^{1/\tau}} \Psi(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon N^{1/\tau} \leq |t| \leq \pi N^{1/\tau}} e^{-ikt/N^{1/\tau}} \Psi(t) dt, \end{aligned}$$

$$I_4 = - \int_{A < |t|} e^{-ikt/N^{1/\tau}} f(t) dt,$$

выбор положительных постоянных A и ε будет ясен из дальнейшего.

Очевидно, что для доказательства леммы достаточно убедиться, что каждый из интегралов $I_1 - I_4$ и, соответственно, разность R_N стремится к нулю. Из (5) и (10) следует, что $I_1 \rightarrow 0$. Легко видеть также, что

$$|I_4| \leq \int_{A < |t|} |f(t)| dt,$$

а последняя величина может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого A .

Рассмотрим I_2 . Используя (7) и (9), нетрудно получить, что в области интегрирования I_2 при достаточно малом ε

$$|\Psi(t)| \leq e^{-C_1 \sqrt{|t|}},$$

где C_1 – некоторая положительная постоянная. Следовательно,

$$|I_2| \leq \int_{A < |t|} e^{-C_1 \sqrt{|t|}} dt,$$

что, как и в случае I_4 , можно сделать сколь угодно малым выбором A .

Осталось рассмотреть I_3 . Известно, что если $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$, то существует такое $C_2 > 0$, что $|\varphi(t)| \leq e^{-C_2}$, поэтому из (7) получаем, что

$$|I_3| \leq 2\pi N^{1/\tau} e^{-C_2 N}.$$

Последнее неравенство означает, что $I_3 \rightarrow 0$. Собирая вместе все полученные оценки интегралов $I_1 - I_4$, из (13) и (14) получаем утверждение леммы.

Теперь мы можем установить основной результат статьи.

Доказательство теоремы. Воспользуемся обозначениями и логикой доказательства теоремы статьи [2]. Событие A_N означает, что множество вершин графа можно разделить на два непустых непересекающихся подмножества Ω и Ω^* таких, что ни одна из вершин, входящих в Ω , не имеет ребер, соединяющих ее с вершинами из Ω^* . Мы можем также считать, что $|\Omega| \leq N/2$, где $|\Omega|$ означает мощность множества Ω . Обозначим

$$\zeta_N(\Omega) = \sum_{i \in \Omega} \xi_i, \quad \zeta_N(\Omega^*) = \sum_{i \in \Omega^*} \xi_i.$$

Общее число различных графов равно $(\zeta_N - 1)!!$, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_N\} &\leq \sum_{\Omega \in \Lambda} \frac{(\zeta_N(\Omega) - 1)!! (\zeta_N(\Omega^*) - 1)!!}{(\zeta_N - 1)!!} \\ &\leq \sum_{\Omega \in \Lambda} \prod_{j=1}^{\zeta_N(\Omega)/2} \frac{\zeta_N(\Omega) - 2j + 1}{\zeta_N - 2j + 1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где Λ – множество всех возможных разбиений вершин графа на Ω и Ω^* .

Введем обозначение:

$$f(x) = \prod_{j=0}^{x-1} \frac{2j+1}{\zeta_N - 2j - 1}. \quad (16)$$

Тогда из (15) следует, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq \sum_{s=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} R_N(s), \quad (17)$$

где

$$R_N(s) = \binom{N}{s} f\left(\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil\right), \quad (18)$$

$\lfloor N/2 \rfloor$ означает максимальное целое число, не превосходящее $N/2$, а $\lceil s/2 \rceil$ – минимальное целое, не меньшее, чем $s/2$.

Далее будем следовать доказательству теоремы статьи [2] для рассматриваемого случая. Если s четное, то из (16) и (18) вытекает, что

$$\frac{R_N(s+2)}{R_N(s)} = \frac{(N-s)(N-s-1)f(s/2+1)}{(s+2)(s+1)f(s/2)}$$

и

$$\frac{f(s/2+1)}{f(s/2)} = \frac{s+1}{\zeta_N - s - 1}.$$

Отсюда нетрудно установить, используя лемму, что для любого четного $s \leq \lfloor N/2 \rfloor - 2$

$$\frac{R_N(s+2)}{R_N(s)} < q < 1, \quad (19)$$

где q можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого N . Если же s нечетно, то, рассуждая аналогично, видим, что

$$\begin{aligned} \frac{R_N(s+2)}{R_N(s)} &= \frac{(N-s)(N-s-1)f((s+3)/2)}{(s+2)(s+1)f((s+1)/2)} \\ &= \frac{(N-s)(N-s-1)}{(s+1)(\zeta_N - s - 2)}. \end{aligned}$$

Это соотношение позволяет обнаружить, опять с помощью леммы, что оценка (19) сохраняет силу и в случае нечетного s .

Из (17) очевидным образом следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_N\} &\leq R_N(1) \\ &+ R_N(2) \left(1 + \prod_{j \geq 1} \frac{R_N(2j+2)}{R_N(2j)}\right) \\ &+ R_N(3) \left(1 + \prod_{j \geq 2} \frac{R_N(2j+1)}{R_N(2j-1)}\right), \end{aligned}$$

поэтому из (19) получаем, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq R_N(1) + \frac{R_N(2) + R_N(3)}{1 - q}. \quad (20)$$

Учитывая (16) и (18), с помощью леммы находим, что

$$R_N(1) = O(N^{\frac{\tau-1}{\tau}}), \quad R_N(2) = O(N^{\frac{2\tau-1}{\tau}}),$$

$$R_N(3) = O(N^{\frac{3\tau-2}{\tau}}).$$

Отсюда и из (20) следует утверждение теоремы.

Финансовое обеспечение исследований осуществялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
2. Павлов Ю. Л. О связности конфигурационных графов // Дискретная математика. 2019. Т. 31, вып. 2. С. 115–123. doi: 10.4213/dm1573
3. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
4. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
5. Reittu H., Norros I. On the effect of very large nodes in Internet graphs GLOBECOM'02 // IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105
6. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 02.01.2020

REFERENCES

1. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. 321 p.
2. *Pavlov Yu. L.* O svyaznosti konfiguratsionnykh grafov [On connectivity of configuration graphs]. *Diskretnaya matem.* [Discrete Math. Appl.]. 2019. Vol. 31, iss. 2. P. 115–123. doi: 10.4213/dm1573
3. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random Internet-type graphs and the generalized allocation sceme. *Discrete Math. Appl.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

4. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

5. *Reittu H., Norros I.* On the effect of very large nodes in Internet graphs GLOBECOM'02. *IEEE*. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

6. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received January 02, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ДЕРЕВА В ЛЕСЕ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА

Е. В. Хворостянская

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматривается критический ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся с N частиц, число прямых потомков которого имеет распределение $p_k = (k + 1)^{-\tau} - (k + 2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Для соответствующего леса Гальтона – Ватсона с N деревьями и n некорневыми вершинами получено предельное распределение максимального объема дерева при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$.

Ключевые слова: ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона; случайный лес; максимальный объем дерева; предельное распределение.

E. V. Khvorostyanskaya. ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM TREE SIZE IN A GALTON-WATSON FOREST

We consider the critical Galton – Watson branching process starting with N particles where the number of direct descendants has a distribution $p_k = (k + 1)^{-\tau} - (k + 2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. For the corresponding Galton – Watson forest with N trees and n non-root vertices the limit distribution of the maximum tree size is obtained as $N, n \rightarrow \infty$ such that $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$.

Keywords: Galton – Watson branching process; random forest; maximum tree size; limit distribution.

Пусть G_N – критический ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона, начинающийся в момент времени $t = 0$ с N частиц, в котором число прямых потомков одной частицы задается случайной величиной ξ с распределением

$$p_k = \mathbf{P} \{ \xi = k \}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad p_0 > 0. \quad (1)$$

Совокупность траекторий процесса Гальтона – Ватсона G_N с соответствующим распределением вероятностей называется лесом Гальтона – Ватсона с N деревьями и является частным случаем случайного леса. Обозначим

такой лес через \mathfrak{F}_N . Будем считать, что начальные частицы процесса G_N и, следовательно, деревья в лесе \mathfrak{F}_N занумерованы числами $1, \dots, N$.

Исходный процесс G_N индуцирует на подмножестве $F_{N,n}$ траекторий процесса G_N , имеющих $N + n$ вершин, условное распределение вероятностей при условии, что число вершин равно $N + n$. Построенный таким образом лес Гальтона – Ватсона с N деревьями и n некорневыми вершинами обозначим через $\mathfrak{F}_{N,n}$. Подробно такие леса изучались в [4].

В частности, при условии существования конечного третьего момента распределения (1) и $N, n \rightarrow \infty$ получено полное описание предельного поведения максимального объема дерева, числа деревьев заданного объема, высоты дерева. Некоторые другие характеристики таких лесов рассматривались также в [6, 8, 10]. В [2] доказано, что условие $\mathbf{E}\xi^3 < \infty$ можно заменить более слабым: $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. В настоящей работе приводится пример случайного леса Гальтона – Ватсона $\mathfrak{F}_{N,n}$, в котором распределение (1) имеет только конечный первый момент. Главным результатом статьи является предельная теорема о максимальном объеме дерева в таком случайном лесе. При решении использован подход, предложенный в книге [4], а также результаты работы [1].

Пусть число прямых потомков одной частицы ветвящегося процесса G_N имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{(k+1)^\tau} - \frac{1}{(k+2)^\tau}, \quad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ Идея рассмотреть такой ветвящийся процесс появилась в связи с тем, что ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона находят применение при исследовании Интернет-графов [9], а одной из наиболее известных и изученных моделей графа Интернет-типа [7, 11] является модель, в которой степени вершин имеют распределение

$$q_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Сдвиг на 1 в распределении (2) обусловлен необходимостью существования траекторий ветвящегося процесса с ограниченным числом частиц, поскольку в рассматриваемой модели число некорневых вершин в лесе Гальтона – Ватсона равно n .

Учитывая (2), несложно показать, что

$$m = \mathbf{E}\xi = \zeta(\tau) - 1,$$

где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана. Поскольку ветвящийся процесс G_N является критическим, выполнено равенство $m = 1$, из которого следует, что значение параметра τ определяется соотношением $\zeta(\tau) = 2$ и находится в пределах $1 < \tau < 2$.

Обозначим через $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$ случайные величины, равные объемам деревьев леса $\mathfrak{F}_{N,n}$.

Согласно [4], классу лесов $\mathfrak{F}_{N,n}$ соответствует ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона G , распадающийся на N независимых процессов $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(N)}$, начинающихся с одной частицы, в котором случайные величины

$\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \dots$, равные числу прямых потомков одной частицы, имеют распределение

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 0 < \lambda \leq 1, \quad (4)$$

где

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k. \quad (5)$$

Обозначим через $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(N)}$ независимые одинаково распределенные случайные величины, равные числу частиц, существовавших в процессах $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(N)}$ до их вырождения, и пусть ν – случайная величина, равная общему числу частиц, существовавших в процессе G до его вырождения:

$$\nu = \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \dots + \nu^{(N)}.$$

В [4] показано, что справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\nu_1(\mathfrak{F}) = k_1, \dots, \nu_N(\mathfrak{F}) = k_N\} \quad (6)$$

$$= \mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = k_1, \dots, \nu^{(N)} = k_N \mid \nu = N + n\right\}.$$

Равенство (6) означает, что случайные величины $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$ и $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(N)}$ образуют обобщенную схему размещения [3], и позволяет свести задачу к изучению сумм независимых случайных величин, при этом параметр распределения независимых случайных величин может быть выбран любым наиболее удобным способом. Далее, если не указано дополнительно, будем считать, что параметр λ распределения (4) равен решению уравнения

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \quad (7)$$

Пусть $\eta(\mathfrak{F})$ – случайная величина, равная максимальному объему дерева в лесе из $\mathfrak{F}_{N,n}$:

$$\eta(\mathfrak{F}) = \max_{1 \leq k \leq N} \nu_k(\mathfrak{F}).$$

Через C, C_1, C_2, \dots будем обозначать произвольные положительные постоянные.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$ так, что $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$,

$$\frac{N \lambda^r \Gamma(1/\tau) \cos(\pi(2 - \tau)/2\tau)}{r^{1+1/\tau} \pi \tau (\Gamma(1 - \tau) \cos(\pi\tau/2))^{1/\tau}} \rightarrow \gamma, \quad (8)$$

где $a = \lambda/F(\lambda)$, γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta(\mathfrak{F}) \leq r + k + 1\} \rightarrow e^{-\gamma a^{k+1}/(1-a)}.$$

Докажем сначала вспомогательные утверждения (леммы 1–7), а затем с их помощью получим теорему 1.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\nu_r^{(1)}, \dots, \nu_r^{(N)}$ такие, что

$$\mathbf{P} \left\{ \nu_r^{(i)} = k \right\} = \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k | \nu^{(1)} \leq r + 1 \right\}, \quad (9)$$

где $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$

Обозначим $\nu_r = \nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N)}$, $P_r = \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} > r + 1 \right\}$. Из (6) следует, что

$$\mathbf{P} \left\{ \eta(\mathfrak{F}) \leq r + 1 \right\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P} \left\{ \nu_r = N + n \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \nu = N + n \right\}}. \quad (10)$$

Таким образом, для получения предельного распределения случайной величины $\eta(\mathfrak{F})$ достаточно найти асимптотику биннома $(1 - P_r)^N$ и вероятностей $\mathbf{P} \left\{ \nu_r = N + n \right\}$, $\mathbf{P} \left\{ \nu = N + n \right\}$.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_1, \dots, ξ_N имеют распределение (2), $\eta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$, $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_1 .

Лемма 1. При $N \rightarrow \infty$, $1 < \tau < 2$

$$\sup_k \left| N^{1/\tau} \mathbf{P} \left\{ \eta_N = k \right\} - g \left(\frac{k - Nm}{N^{1/\tau}} \right) \right| \rightarrow 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с показателем τ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -\Gamma(1 - \tau) |t|^\tau \left(1 - \frac{it}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2} \right) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right\}.$$

Доказательство. При $|x| \rightarrow \infty$ для функции распределения $F_1(x)$ случайной величины ξ_1 выполнены соотношения

$$F_1(x) = 0, \quad x < 0,$$

$$F_1(x) = 1 - \frac{1 + o(1)}{x^\tau}, \quad x > 0,$$

и по теореме 2.6.1 [1] при $0 < \tau < 2$ распределение случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем τ . В [5] показано, что при $t \rightarrow 0$ для характеристической функции $\tilde{\varphi}(t)$ случайной величины ξ , имеющей распределение (3), выполнено соотношение

$$\tilde{\varphi}(t) = 1 + it\zeta(\tau) - (-it)^\tau \Gamma(1 - \tau) + O(t^2).$$

Отсюда и из равенства $\varphi(t) = e^{-it} \tilde{\varphi}(t)$ получаем, что для любого фиксированного t

$$\begin{aligned} & \ln \left(\varphi^N \left(\frac{t}{N^{1/\tau}} \right) \right) \\ &= \frac{itNm}{N^{1/\tau}} - (-it)^\tau \Gamma(1 - \tau) + O(N^{1-2/\tau}). \end{aligned}$$

С помощью этого соотношения находим, что для характеристической функции $\psi(t)$ случайной величины $(\eta_N - Nm)/N^{1/\tau}$ при любом фиксированном t справедливо равенство

$$\begin{aligned} \ln \psi(t) &= -(-it)^\tau \Gamma(1 - \tau) + o(1) \\ &= -\Gamma(1 - \tau) \cos \left(\frac{\pi\tau}{2} \right) |t|^\tau \left(1 - \frac{it}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2} \right) + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда с помощью теорем 2.2.2, 4.2.1 [1] получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Для произвольного распределения $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ такого, что $p_0 > 0$, $F'(1) = 1$, при N , $n \rightarrow \infty$ существует единственное решение λ^* уравнения (7) и

1. $\lambda^* \rightarrow 0$, если $n/N \rightarrow 0$;
2. $0 < C_3 \leq \lambda^* \leq C_4 < 1$, если $0 < C_5 \leq n/N \leq C_6 < \infty$;
3. $\lambda^* \rightarrow 1$, если $n/N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $m(\lambda) = \lambda F'(\lambda)/F(\lambda)$. Нетрудно видеть, что

$$m'(\lambda) = \frac{R(\lambda)}{F^2(\lambda)},$$

где

$$R(\lambda) = \left(F'(\lambda) + \lambda F''(\lambda) \right) F(\lambda) - \lambda \left(F'(\lambda) \right)^2.$$

Используя (5), находим, что

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 p_{k+1} \lambda^k \sum_{k=0}^{\infty} p_k \lambda^k \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \lambda^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) p_{k+1} \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \lambda^k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_0 &= p_0 p_1, \quad r_1 = 2^2 p_0 p_2, \\ r_2 &= 3^2 p_0 p_3 + p_1 p_2, \quad r_3 = 4^2 p_0 p_4 + 2^2 p_1 p_3, \\ r_{2s} &= (2s+1)^2 p_0 p_{2s+1} + (2s-1)^2 p_1 p_{2s} \\ &+ (2s-3)^2 p_2 p_{2s-1} + \dots + p_s p_{s+1}, \quad s = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$r_{2s-1} = (2s)^2 p_0 p_{2s} + (2s-2)^2 p_1 p_{2s-1} + (2s-4)^2 p_2 p_{2s-2} + \dots + 2^2 p_{s-1} p_{s+1}, \quad s=3, 4, \dots$$

Легко видеть, что для любого $\lambda > 0$ выполнено неравенство $R(\lambda) > 0$. Значит, $m(\lambda)$ монотонно возрастает при $\lambda > 0$ и, поскольку функция $m(\lambda)$ непрерывна, уравнение $m(\lambda) = n/(N+n)$ имеет единственное решение. Отсюда нетрудно получить утверждение леммы, учитывая, что $m(0) = 0$, $m(1) = 1$.

Лемма 3. При выполнении условий теоремы 1 для любого целого фиксированного k

$$NP_{r+k} \rightarrow \gamma a^{k+1} (1-a)^{-1}.$$

Доказательство. С помощью леммы 1.3.4 [4] находим, что

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r+1}{r+k+1+l} \times \frac{\mathbf{P}\{\xi_1(\lambda) + \dots + \xi_{r+k+1+l}(\lambda) = r+k+l\}}{\mathbf{P}\{\xi_1(\lambda) + \dots + \xi_{r+1}(\lambda) = r\}}.$$

Используя (4), получаем равенство

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} a^k \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l (r+1) \mathbf{P}\{\eta_{r+k+1+l} = r+k+l\}}{(r+k+1+l) \mathbf{P}\{\eta_{r+1} = r\}},$$

где $a = \lambda/F(\lambda)$. С помощью леммы 1 при $r \rightarrow \infty$ и $m = 1$ отсюда находим, что

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} a^k \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l r^{1+1/\tau} g(-(r+k+1+l)^{-1/\tau}) (1+o(1))}{(r+k+l)^{1+1/\tau} g(-(r+1)^{-1/\tau})} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} a^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l r^{1+1/\tau} (1+o(1))}{(r+k+l)^{1+1/\tau}}.$$

Учитывая лемму 2, несложно показать, что $a < 1$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{\infty} a^l \left(\frac{r}{r+k+l}\right)^{1+1/\tau} = \frac{a}{1-a} + o\left(\frac{1}{r}\right)$$

и выполнено соотношение

$$NP_{r+k} = N\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} \frac{a^{k+1}}{1-a} (1+o(1)). \quad (11)$$

С помощью леммы 1.3.4 [4] и леммы 1 получаем, что при $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} = \frac{\lambda a^r}{r+1} \mathbf{P}\{\eta_{r+1} = r\} = \frac{\lambda a^r g(-r^{-1/\tau})}{r^{1+1/\tau}} (1+o(1)). \quad (12)$$

Используя равенство (2.3.1) и теорему 2.4.5 [1], можно показать, что при $x < 0$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \left(\Gamma(1-\tau) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right)^{-1/\tau} \times \left(\frac{\Gamma(1/\tau)}{\tau} \cos \frac{\pi(2-\tau)}{2\tau} + R(x) \right), \quad (13)$$

где

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\tau}\right)}{\tau k!} (-x)^k \left(\Gamma(1-\tau) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right)^{-k/\tau} \times \cos \left(\frac{\pi k}{2} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k} \right) \frac{2-\tau}{\tau} \right) \right).$$

Нетрудно проверить, что

$$|R(x)| \leq C_7 \sum_{k=1}^{\infty} (C_8 |x|)^k$$

и, следовательно, $R(x) = O(x)$ при $x \rightarrow 0$. Отсюда и из (12), (13) получаем, что при выполнении условий леммы

$$\mathbf{P}\left\{\nu^{(1)} = r+1\right\} = \frac{\lambda a^r}{r^{1+1/\tau}} \times \frac{\Gamma(1/\tau) \cos \frac{\pi(2-\tau)}{2\tau} (1+o(1))}{\pi\tau \left(\Gamma(1-\tau) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right)^{1/\tau}} = \frac{\gamma}{N} (1+o(1)). \quad (14)$$

Из (11), (14) следует утверждение леммы.

Обозначим

$$m(\lambda) = \mathbf{E}\xi_1(\lambda), \quad \sigma^2(\lambda) = \mathbf{D}\xi_1(\lambda),$$

$$\eta_s(\lambda) = \xi_1(\lambda) + \dots + \xi_s(\lambda),$$

и пусть $\varphi_\lambda(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\xi_1(\lambda)$, $\varphi_s(t)$ – характеристическая функция случайной величины $(\eta_s(\lambda) - sm(\lambda))/\sigma(\lambda)\sqrt{s}$. Нетрудно видеть, учитывая (4), что

$$m(\lambda) = \lambda F'(\lambda)/F(\lambda). \quad (15)$$

Лемма 4. При $s \rightarrow \infty$ и $0 < C_9 \leq \lambda \leq C_{10} < 1$ равномерно по t в любом конечном интервале

$$\varphi_s(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Учитывая (4), легко получить равенство

$$\varphi_\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p_k(\lambda) = \frac{F(\lambda e^{it})}{F(\lambda)}.$$

Используя это соотношение и (2), можно показать, что

$$(\ln \varphi_\lambda(t))' = \frac{iS_1(\lambda e^{it})}{F(\lambda e^{it})},$$

$$(\ln \varphi_\lambda(t))'' = -\frac{S_2(\lambda e^{it})}{F(\lambda e^{it})} + \left(\frac{S_1(\lambda e^{it})}{F(\lambda e^{it})} \right)^2, \quad (16)$$

$$(\ln \varphi_\lambda(t))''' = -\frac{iS_3(\lambda e^{it})}{F(\lambda e^{it})} \quad (17)$$

$$+ \frac{3iS_1(\lambda e^{it})S_2(\lambda e^{it})}{F^2(\lambda e^{it})} - 2i \left(\frac{S_1(\lambda e^{it})}{F(\lambda e^{it})} \right)^3,$$

где

$$S_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k p_k = -(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} \quad (18)$$

$$+ (2-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^\tau},$$

$$S_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k p_k = -(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}} \quad (19)$$

$$+ (4-2z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} - (4-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^\tau},$$

$$S_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k p_k = -(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-3}} \quad (20)$$

$$+ (6-3z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}} - (12-3z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} + (8-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^\tau}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < z < 1$ выполнены неравенства

$$0 < C_{11} \leq S_i(z) \leq C_{12} < \infty, \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Учитывая равенства $(\ln \varphi_\lambda(t))'_{t=0} = im(\lambda)$ и $(\ln \varphi_\lambda(t))''_{t=0} = -\sigma^2(\lambda)$, по формуле Тейлора находим, что в окрестности $t_0 = 0$

$$\ln \varphi_\lambda(t) = im(\lambda)t - \frac{\sigma^2(\lambda)}{2}t^2 + \frac{(\ln \varphi_\lambda(t))'''_{t=t_1}}{6}t^3, \quad (22)$$

где $|t_1| < \varepsilon$, ε – сколь угодно малое положительное число.

Из равенств $\sigma^2(\lambda) = -(\ln \varphi_\lambda(t))''_{t=0}$, (16), (21) получаем соотношение

$$0 < C_{13} \leq \sigma^2(\lambda) \leq C_{14} < \infty. \quad (23)$$

Тогда при $s \rightarrow \infty$ для любого фиксированного t с помощью (22) находим, что

$$\ln \varphi_s(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3 (\ln \varphi_\lambda(t/\sigma(\lambda)\sqrt{s}))'''}{6\sigma^3(\lambda)\sqrt{s}}. \quad (24)$$

Поскольку $0 < C_9 \leq \lambda \leq C_{10} < 1$, из (17), (21) следует, что при $s \rightarrow \infty$ для любого фиксированного t справедлива оценка

$$\left| (\ln \varphi_\lambda(t/\sigma(\lambda)\sqrt{s}))''' \right| \leq C_{15} < \infty. \quad (25)$$

Из (24), (25) получаем утверждение леммы.

Лемма 5. При $s \rightarrow \infty$ и $0 < C_9 \leq \lambda \leq C_{10} < 1$ для целых неотрицательных l равномерно относительно $u_s = (l - m(\lambda)s) / \sigma(\lambda)\sqrt{s}$ в любом конечном фиксированном интервале

$$\mathbf{P} \{ \eta_s(\lambda) = l \} = \frac{e^{-u_s^2/2}}{\sigma(\lambda)\sqrt{2\pi s}} (1 + o(1)).$$

Доказательство. По формуле обращения справедливы равенства

$$2\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}\mathbf{P} \{ \eta_s(\lambda) = l \} = \int_{-\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}}^{\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}} e^{-itu_s} \varphi_s(t) dt,$$

$$\sqrt{2\pi}e^{-u_s^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu_s} e^{-t^2/2} dt.$$

Разность

$$R_s = 2\pi \left(\sigma(\lambda)\sqrt{s}\mathbf{P} \{ \eta_s(\lambda) = l \} - \frac{e^{-u_s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

представим в виде суммы $R_s = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-itu_s} \left(\varphi_s(t) - e^{-t^2/2} \right) dt,$$

$$I_2 = - \int_{|t|>A} e^{-itu_s} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int_{A<|t|\leq\varepsilon\sigma(\lambda)\sqrt{s}} e^{-itu_s} \varphi_s(t) dt,$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon\sigma(\lambda)\sqrt{s}<|t|\leq\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s}} e^{-itu_s} \varphi_s(t) dt,$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее.

С помощью леммы 4 получаем, что $I_1 \rightarrow 0$ при выполнении условий леммы для любого фиксированного A .

Для интеграла I_2 справедлива оценка

$$|I_2| \leq 2 \int_A^\infty e^{-t^2/2} dt, \quad (26)$$

и его можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Нетрудно видеть, что при достаточно малых ε для $|t|/\sigma(\lambda)\sqrt{s} < \varepsilon$ выполнены соотношения (24), (25), из которых при $s \rightarrow \infty$ следует, что $\ln \varphi_s(t) = -t^2(1+R)/2$, где $|R| \leq C_{16}\varepsilon$. Тогда $|\varphi_s(t)| \leq e^{-C_{17}t^2}$ и интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым, выбрав A достаточно большим.

Пусть $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$. Поскольку максимальный шаг распределения (4) равен 1 и характеристическая функция $\varphi_\lambda(t)$ непрерывно зависит от λ , $0 < C_9 \leq \lambda \leq C_{10} < 1$, имеет место оценка $|\varphi_\lambda(t)| \leq e^{-C_{18}t}$. Тогда

$$|I_4| \leq 2\sigma(\lambda)\sqrt{s} \int_\varepsilon^\pi e^{-sC_{18}t} dt \leq 2\pi\sigma(\lambda)\sqrt{s} e^{-sC_{18}}$$

и, учитывая (23), нетрудно видеть, что $I_4 \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Из полученных оценок интегралов I_1 – I_4 находим, что разность R_s можно сделать сколь угодно малой при $s \rightarrow \infty$, откуда и следует утверждение леммы.

Обозначим через $\psi_r(u)$ характеристическую функцию случайной величины $(\nu_r - N\mathbf{E}\nu^{(1)})/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ и, следуя доказательству лемм 2.4.1, 2.4.2 [4], получим предельное распределение этой случайной величины.

Лемма 6. При выполнении условий теоремы 1 равномерно относительно u в любом конечном интервале

$$\psi_r(u) \rightarrow e^{-u^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим через $\varphi^{(1)}(u)$ характеристическую функцию случайной величины $\nu^{(1)}$ и найдем разложение $\ln \varphi^{(1)}(u)$ по формуле Тейлора в окрестности $u_0 = 0$. Согласно лемме 1.3.2 [4] для производящей функции $f_1(z)$ случайной величины $\nu^{(1)}$ справедливо равенство

$$f_1(z) = zF_\lambda(f_1(z)),$$

где

$$F_\lambda(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda)u^k = \frac{F(\lambda u)}{F(\lambda)}. \quad (27)$$

С помощью этих равенств и соотношения $\varphi^{(1)}(u) = f_1(e^{iu})$ находим, что

$$\varphi^{(1)}(u) = \frac{e^{iu}F(\lambda\varphi^{(1)}(u))}{F(\lambda)}.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\varphi^{(1)}(u)\right)' = \frac{i\varphi^{(1)}(u)}{1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u))},$$

$$\left(\ln \varphi^{(1)}(u)\right)' = \frac{i}{1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}, \quad (28)$$

$$\left(\ln \varphi^{(1)}(u)\right)'' = -\frac{e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^2} \quad (29)$$

$$-\frac{e^{iu}\varphi^{(1)}(u)F''_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^3},$$

$$\left(\ln \varphi^{(1)}(u)\right)''' = \frac{ie^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^2}$$

$$-\frac{2ie^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^3}$$

$$-\frac{3ie^{iu}\varphi^{(1)}(u)F''_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^4}$$

$$-\frac{ie^{iu}(\varphi^{(1)}(u))^2 F'''_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^4}$$

$$-\frac{3ie^{2iu}\varphi^{(1)}(u)F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u))F''_\lambda(\varphi^{(1)}(u))}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^4}$$

$$-\frac{3ie^{2iu}(\varphi^{(1)}(u))^2 (F''_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^2}{(1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u)))^5}.$$

Учитывая (27), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} F'_\lambda(z) &= \frac{S_1(\lambda z)}{zF(\lambda)}, \\ F''_\lambda(z) &= \frac{S_2(\lambda z) - S_1(\lambda z)}{z^2F(\lambda)}, \\ F'''_\lambda(z) &= \frac{S_3(\lambda z) - 3S_2(\lambda z) + 2S_1(\lambda z)}{z^3F(\lambda)}, \end{aligned}$$

где $S_1(z), S_2(z), S_3(z)$ определены в (18)–(20). С помощью леммы 2 и (21) находим, что при $0 < z < 1$

$$0 < C_{19} \leq F'_\lambda(z), F''_\lambda(z), F'''_\lambda(z) \leq C_{20} < \infty.$$

Поскольку, как несложно проверить, функция $F'_\lambda(z)$ возрастает по z и при выполнении условий леммы справедливо соотношение $F'_\lambda(1) = n/(N+n) \leq C_{21} < 1$, для достаточно малых значений u имеет место неравенство $|1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi^{(1)}(u))| \geq C_{22} > 0$, и, следовательно, выполнено

$$\left| \left(\ln \varphi^{(1)}(u) \right)''' \right| \leq C_{23} < \infty.$$

Учитывая это неравенство, получаем, что в окрестности $u_0 = 0$

$$\ln \varphi^{(1)}(u) = iu\mathbf{E}\nu^{(1)} - u^2\mathbf{D}\nu^{(1)}/2 + O(u^3), \quad (30)$$

при этом с помощью (7), (27)–(29) можно показать, что

$$\mathbf{E}\nu^{(1)} = \frac{n+N}{N}, \quad (31)$$

$$\mathbf{D}\nu^{(1)} = \left(\frac{n+N}{N} \right)^3 \sigma^2(\lambda).$$

Используя (9), находим, что

$$\begin{aligned} \psi_r(u) &= (1 - P_r)^{-N} \exp \left\{ -\frac{i u N \mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right\} \\ &\times \left(\varphi^{(1)} \left(\frac{u}{\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) \right)^N \left(1 - \left(\varphi^{(1)} \left(\frac{u}{\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) \right) \right)^{-1} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i u (k+r+1)}{\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right\} \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k+r+1 \right\} \right)^N. \end{aligned}$$

Учитывая (30) и лемму 3, отсюда получаем, что при выполнении условий леммы для любого фиксированного u

$$\psi_r(u) = e^{-u^2/2} \left(1 - Q(u) + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^N (1 + o(1)), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} Q(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp \left\{ \frac{i u (k+r+1)}{\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right\} - 1 \right) \\ &\times \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k+r+1 \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

С помощью леммы 1.3.4 [4], леммы 1 и соотношений $|e^{ix} - 1| < |x|$, (4), (14), (23), (31) находим, что при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |Q(u)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u|(k+r+1)}{\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k+r+1 \right\} \\ &\leq C_{24} \frac{|u|(r+1) \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = r+1 \right\}}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k r^{1/\tau}}{(r+k)^{1/\tau}} \\ &\leq C_{25} \frac{a|u|r\gamma}{(1-a)N^{3/2}} = C_{26} \frac{|u|r}{N^{3/2}}. \end{aligned}$$

Из (8) следует, что $\ln N/r \rightarrow -\ln a$. Тогда при любом фиксированном u выполнено соотношение $Q(u) = o(1/N)$. Отсюда и из (32) получаем утверждение леммы.

Лемма 7. При выполнении условий теоремы 1 для всех целых неотрицательных l равномерно относительно $u_N = (l - N\mathbf{E}\nu^{(1)})/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ в любом конечном фиксированном интервале

$$\mathbf{P} \{ \nu_r = l \} = \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} (1 + o(1)).$$

Доказательство. С помощью равенств

$$2\pi\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}} \mathbf{P} \{ \nu_r = l \} = \int_{-\pi\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}}^{\pi\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi_r(t) dt,$$

$$\sqrt{2\pi} e^{-u_N^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt$$

разность

$$R_N = 2\pi \left(\sqrt{N \mathbf{D}\nu^{(1)}} \mathbf{P} \{ \nu_r = l \} - \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

можно представить в виде суммы $R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-itu_N} \left(\psi_r(t) - e^{-t^2/2} \right) dt,$$

$$I_2 = - \int_{|t|>A} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int_{A<|t|\leq\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi_r(t) dt,$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}<|t|\leq\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi_r(t) dt,$$

положительные постоянные A , ε будут выбраны позднее.

В силу леммы 6 при выполнении условий леммы $I_1 \rightarrow 0$ для любого фиксированного A .

Для интеграла I_2 справедлива оценка (26), и его можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Оценим I_3 . Пусть $A < |t| \leq \varepsilon\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$. С помощью (23), (30), (31) находим, что

$$\left| \varphi^{(1)} \left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) \right| \leq e^{-C_{27}t^2/N}.$$

Учитывая лемму 3, нетрудно видеть, что

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{it(k+r+1)} \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k + r + 1 \right\} \right| \leq \frac{C_{28}}{N}. \quad (33)$$

Используя эти соотношения и лемму 3, получаем неравенство

$$|\psi_r(t)| \leq C_{29} e^{-C_{27}t^2} \left(1 + \frac{C_{28} e^{C_{27}t^2/N}}{N} \right)^N.$$

Отсюда и из соотношений (23), (31), $t^2/N \leq \varepsilon^2 \mathbf{D}\nu^{(1)}$ следует, что $|\psi_r(t)| \leq C_{30} e^{-C_{27}t^2}$. Тогда

$$|I_3| \leq C_{31} \int_A^{\infty} e^{-C_{27}t^2} dt,$$

и интеграл I_3 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

В области интегрирования I_4 справедливо неравенство $\left| \varphi^{(1)} \left(t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \right) \right| \leq e^{-C_{32}}$. С помощью этого соотношения, (33) и леммы 3 несложно показать, что $|\psi_r(t)| \leq C_{33} e^{-C_{32}N}$ и $I_4 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Из полученных оценок интегралов I_1 – I_4 получаем, что разность R_N можно сделать сколь угодно малой. Отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1

Из леммы 3 следует, что

$$(1 - P_{r+k})^N = \exp \left\{ -\frac{\gamma a^{k+1}}{1-a} \right\} (1 + o(1)). \quad (34)$$

Используя леммы 1.3.4 [4], 2, 5 и равенства (7), (15), находим, что

$$\mathbf{P} \{ \nu = N + n \} = \frac{N(1 + o(1))}{\sigma(\lambda)\sqrt{2\pi}(N + n)^{3/2}}. \quad (35)$$

Учитывая (31), из леммы 7 получаем соотношение

$$\mathbf{P} \{ \nu_r = N + n \} = \frac{N(1 + o(1))}{\sigma(\lambda)\sqrt{2\pi}(N + n)^{3/2}}.$$

Отсюда и из (10), (34), (35) следует утверждение теоремы.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
2. *Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л.* Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 1. С. 47–59. doi: 10.4213/dm320
3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
4. *Павлов Ю. Л.* Случайные леса. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 1996. 259 с.
5. *Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В.* О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512
6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 1. С. 97–112. doi: 10.4213/dm366
7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
8. *Чеплюкова И. А.* Возникновение гигантского дерева в случайном лесе // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 111–126. doi: 10.4213/dm408
9. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. Myllari T. Limit distributions for the number of leaves on a random forest // *Advances in Applied Probability*. 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922. doi: 10.1239/aap/1037990959

11. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 30.04.2020

REFERENCES

1. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters Neordho Publ., 1971. 438 p.

2. Kazimirov N. I., Pavlov Yu. L. A remark on Galton-Watson forests. *Discrete Math. Appl.* 2000. Vol. 10, iss. 1. P. 49–62. doi: 10.4213/dm320

3. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

4. Pavlov Yu. L. Random forests. Utrecht: VSP, 2000. 122 p.

5. Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V. On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *SB. MATH.* 2016. Vol. 207, no. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/SM8512

6. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Limit distributions of the number of vertices in strata of a simply generated forest. *Discrete Math. Appl.* 1999. Vol. 9, iss. 2. P. 137–154. doi: 10.4213/dm366

7. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

8. Cheplyukova I. A. The emergence of a giant tree in a random forest. *Discrete Math. Appl.* 1998. Vol. 8, iss. 1. P. 17–33. doi: 10.4213/dm408

9. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. Myllari T. Limit distributions for the number of leaves on a random forest. *Advances in Applied Probability*. 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922. doi: 10.1239/aap/1037990959

11. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received April 30, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Хворостянская Елена Владимировна

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: cher@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Khvorostyanskaya, Elena

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: cher@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

О МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ВЕРШИНЫ В УСЛОВНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ГРАФЕ

И. А. Чеплюкова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются условные конфигурационные графы со случайными одинаково распределенными степенями вершин при условии, что сумма степеней вершин не превосходит n . Распределение ξ степени любой вершины графа неизвестно и имеет только следующее ограничение при $k \rightarrow \infty$:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h},$$

где $d > 0$, $g > 1$, $h \geq 0$. Найдены предельные распределения максимальной степени вершины при стремлении к бесконечности числа вершин графа и n .

Ключевые слова: конфигурационный граф; предельное распределение; степень вершины.

I. A. Cheplyukova. ON THE MAXIMUM VERTEX DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

We consider configuration graphs under the condition that the sum of vertex degrees is bounded from above by n . The vertex degrees are independent identically distributed random variables. The distribution of the vertex degree ξ is unknown and has the only limiting condition that

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h},$$

where $k \rightarrow \infty$, $d > 0$, $g > 1$, $h \geq 0$. We obtained the limit distributions of the maximum vertex degree as the number of graph vertices and n tends to infinity.

Key words: configuration graph; the limit distribution; vertex degree.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию структуры конфигурационных графов посвящено множество работ (см., например, [15, 16]). Конфигурационная модель является одной из наиболее известных моделей, предназначенных для описания

структуры и прогнозирования динамики развития сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, транспортные, социальные сети и пр. Наблюдения за реальными сетями показали (см., например, [14, 15]), что все они обладают общими свойствами, которые должны быть отражены в моделях. Одно из важ-

нейших свойств такого рода состоит в том, что степени вершин можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, причем число вершин степени, не меньшей чем k , при $k \rightarrow \infty$ пропорционально $k^{-\tau}$, где τ – некоторый положительный параметр.

Процесс построения конфигурационного графа можно представить следующим образом. Сначала определяется степень каждой вершины в соответствии с заданным распределением вероятностей. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуредер [17], число которых равно степени данной вершины. Все вершины и полуредера различны. На следующем этапе построения происходит образование ребер: на каждом шаге выбираются по два ребра равновероятно и, соединившись, они образуют ребро. Если сумма степеней нечетна, то вводится вспомогательная вершина, степень которой равна 1. Очевидно, что при таком построении возможны появления петель и кратных ребер. В [17] было замечено, что эта вспомогательная вершина не оказывает влияния на асимптотическое поведение основных числовых характеристик графа. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать степени только основных вершин даже при появлении дополнительной вершины. В [17] предложено в качестве моделей сложных сетей использовать конфигурационные графы, в которых случайная величина ξ , равная степени любой вершины, имеет следующее распределение

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots, \tau > 0$.

В [3, 6, 7] рассматривались условные конфигурационные графы с распределением степеней вершин (1) и разными условиями на число ребер. Такие условные конфигурационные графы могут быть полезны при описании сетей, для которых можно оценить число связей. Главное внимание в этих работах уделяется изучению предельного поведения двух числовых характеристик: максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени. В последнее время появляются работы (см., например, [13]), в которых было замечено, что с развитием сетей распределение степеней вершин может меняться и даже носить случайный характер. В [4, 8] рассматриваются условные конфигурационные графы при условии, что сумма степеней вершин графа известна и равна n , а параметр τ распределения (1) является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$.

В данной работе изучаются конфигурационные графы, содержащие N вершин, степени $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с распределением, имеющим только следующее ограничение при $k \rightarrow \infty$:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \quad (2)$$

где $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$, $d > 0$, $g > 1$, $h \geq 0$. Далее мы будем предполагать, что $p_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$. В [5] впервые рассматривалось подмножество таких конфигурационных графов при условии, что сумма степеней вершин известна и равна n . Для них получены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при $n, N \rightarrow \infty$.

Пусть $\zeta_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$. Рассмотрим условные конфигурационные графы при условии, что $\zeta_N \leq n$. Для таких условных графов в [9] были получены предельные распределения числа вершин заданной степени при $n, N \rightarrow \infty$. Настоящая работа посвящена исследованию предельного поведения максимальной степени вершины графа при $n, N \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ случайные величины, равные, соответственно, степеням вершин с номерами $1, 2, \dots, N$ в таком условном графе. Очевидно, что эти случайные величины зависимы и для целых $k_1, k_2, \dots, k_N \geq 1$ таких, что $k_1 + k_2 + \dots + k_N \leq n$, выполняется равенство:

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \quad (3)$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N \leq n\}.$$

Это равенство означает, что для независимых случайных величин (ξ_1, \dots, ξ_N) и зависимых (η_1, \dots, η_N) выполнены условия аналога обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [11]. Сама обобщенная схема была введена и подробно изучена В. Ф. Колчиным (см., например, [1]).

Обозначим через $\eta_{(N)}$ случайную величину, равную максимальной степени вершины в рассматриваемом графе. Для этой характеристики степенной структуры графа ниже будут доказаны предельные теоремы при N и n , стремящихся к бесконечности. Основные результаты (теоремы 1 и 2) сформулированы во втором разделе, в третьем разделе получены вспомогательные утверждения (леммы 2–9), с помощью которых в последнем разделе доказываются теоремы 1 и 2.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем необходимые обозначения:

$$B_N = \begin{cases} \left(\frac{(g-1)^h N}{\ln^h N} \right)^{1/(g-1)}, & 1 < g < 3; \\ \sqrt{N \ln^{1-h} N}, & h = 3, 0 \leq h < 1; \\ \sqrt{N \ln \ln N}, & g = 3, h = 1; \\ \sigma \sqrt{N}, & g > 3 \text{ или} \\ & g = 3, h > 1, \end{cases}$$

$$m = \mathbf{E}\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1, \quad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} \Gamma(2-g)d(g-1)^{h-1} \cos(\pi(g-1)/2), & 1 < g < 2; \\ -\Gamma(3-g)(g-2)^{-1}d(g-1)^{h-1} \\ \quad \times \cos(\pi(g-1)/2), & 2 < g < 3, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x .

Обозначим через C, C_1, C_2, \dots некоторые положительные постоянные.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$,

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N} \right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

$0 < \gamma < \infty$, ε – некоторая положительная постоянная и выполнено одно из условий:

1. $1 < g < 2, n/B_N \rightarrow \infty$;
2. $g = 2, h \leq 1, (n - d \ln^{1-h} N(1 + \varepsilon)N)/B_N \rightarrow \infty$;
3. $g = 2, h > 1, (n - (m + \varepsilon)N)/B_N \rightarrow \infty$;
4. $g > 2, (n - mN)/B_N \geq -C > -\infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = e^{-\gamma}(1 + o(1)).$$

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty, 1 < g < 2$,

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N} \right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

$0 < \gamma < \infty, z = n/B_N \leq C_1 < \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{J_k(z)}{J_0(z)},$$

где

$$J_k(z) = \int_{-\infty}^z I_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$I_0(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем $g-1$ и характеристической функцией

$$\exp \left\{ -\alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \left(\frac{\pi}{2}(g-1) \right) \right) \right\},$$

$$I_k(x) = (2\pi)^{k/2} d^k \times$$

$$\int_{B_k(x)} (x_1 \dots x_k)^{-g} I_0(x-x_1-\dots-x_k) dx_1 \dots dx_k,$$

$$B_k(x) = \left\{ x_i \geq \left(\frac{d}{\gamma(g-1)} \right)^{1/(g-1)}, i = 1, \dots, k, \right. \\ \left. x_1 + \dots + x_k \leq x \right\}.$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_1 \leq r\},$$

где $k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, N$. Положим также

$$\zeta_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}.$$

В [12] показано, что для случайной величины $\eta_{(N)}$ следствием из равенства (3) является следующее утверждение.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} \leq n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}}.$$

Из леммы 1 следует, что для оценки $\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\}$ необходимо знать асимптотическое поведение сумм $\zeta_N, \zeta_N^{(r)}$ и P_r . Для суммы ζ_N будем использовать результаты статьи [9] (леммы 2–4), а исследование $\zeta_N^{(r)}$ и P_r будет приведено ниже в леммах 5–12.

$$\lambda = \begin{cases} 0, & 1 < g < 2; \\ m, & g > 2, \end{cases} \quad (5)$$

Лемма 2. Пусть $N \rightarrow \infty$ и выполнено одно из условий:

1. $1 < g < 3, g \neq 2$;
2. $g = 3, 0 \leq h \leq 1$.

Тогда распределение случайной величины $(\zeta_N - \lambda N)/B_N$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем $g - 1$ и характеристической функцией

$$\Psi_{g,h}(t) \quad (6)$$

$$= \begin{cases} \exp \left\{ -\alpha |t|^{g-1} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan(\pi(g-1)/2) \right) / (g-1)^h \right\}, & 1 < g < 3, g \neq 2; \\ \exp \{-dt^2/2\}, & g = 3, h = 1; \\ \exp \{-dt^2/((1-h)2^{2-h})\}, & g = 3, \\ & 0 \leq h < 1. \end{cases}$$

Лемма 3. Пусть $N \rightarrow \infty$, $g = 2$, $h > 1$. Тогда существует последовательность $q_1 = q_1(N) \sim d \ln^{1-h} N$ такая, что распределение случайной величины $(\zeta_N - (t + q_1)N)/B_N$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем 1 и характеристической функцией

$$\Psi(t) = \exp \left\{ -d \frac{\pi}{2} |t| \left(1 + i \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln |t| \right) \right\}. \quad (7)$$

Лемма 4. Пусть $N \rightarrow \infty$, $g = 2$, $h \leq 1$. Тогда существует последовательность $q_2 = q_2(N)$ такая, что $q_2 \rightarrow 0$ и распределение случайной величины $(\zeta_N - d(\ln N)^{1-h}(1 + q_2)N)/B_N$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем 1 и характеристической функцией (7).

Лемма 5. Пусть $N \rightarrow \infty$,

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N} \right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

где $0 < \gamma < \infty$. Тогда справедливо

$$NP_r \rightarrow \gamma.$$

Доказательство. Из (2) несложно получить, что

$$P_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k = \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1}} \sum_{y \geq 1} \frac{1}{(r+1)y^g \ln^h((r+1)y)}.$$

Приводя последнюю сумму к интегральной, находим, что

$$P_r = \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1}} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^g \ln^h((r+1)y)}$$

$$= \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1}} \left(\int_1^{(r+1)^\varepsilon} \frac{dy}{y^g \ln^h((r+1)y)} + \int_{(r+1)^\varepsilon}^{\infty} \frac{dy}{y^g \ln^h((r+1)y)} \right),$$

где выбор положительной ε будет ясен из дальнейшего. Ясно, что если $1 \leq y \leq (r+1)^\varepsilon$, то

$$(\ln((r+1)y))^{-1} = \left(\left(1 + \frac{\ln y}{\ln(r+1)} \right) \ln(r+1) \right)^{-1},$$

и последняя величина может быть сделана сколь угодно близкой к $1/\ln(r+1)$ выбором достаточно малого ε . Кроме того,

$$\int_{(r+1)^\varepsilon}^{\infty} \frac{dy}{y^g \ln^h((r+1)y)} < \frac{1}{\ln^h(r+1)} \int_{(r+1)^\varepsilon}^{\infty} \frac{dy}{y^g}.$$

Тогда

$$P_r = \frac{d(1+o(1))}{(r+1)^{g-1} \ln^h(r+1)} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^g} = \frac{d(1+o(1))}{(g-1)(r+1)^{g-1} \ln^h(r+1)}.$$

Отсюда и из условий этой леммы вытекает утверждение леммы 5. \square

Рассмотрим случайную величину $\tilde{\zeta}_N^{(r)}$. Обозначим

$$E(t, \gamma) = d \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{\infty} \exp\{ity\} y^{-g} dy. \quad (8)$$

Лемма 6. Пусть $N \rightarrow \infty$, $1 < g < 2$,

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N} \right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

$0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины $\tilde{\zeta}_N^{(r)}/B_N$ слабо сходится к распределению с плотностью

$$\tilde{g}_1(x) = e^{E(0, \gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(x),$$

где $I_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$, определены в формулировке теоремы 2.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}_r(t)$ характеристические функции случайных величин ξ_1 и $\tilde{\xi}_1^{(r)}$ соответственно. Тогда нетрудно получить, что при любом t

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \frac{\varphi(t) - \sum_{k>r} e^{itk} p_k}{1 - P_r}. \quad (9)$$

Пусть $\Psi_r(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $\tilde{\xi}_N^{(r)}/B_N$. Из леммы 2 и равенства (9) находим, что при любом фиксированном t

$$\begin{aligned} \Psi_r(t) &= (1 - P_r)^{-N} \left(\varphi(t/B_N) - \sum_{k>r} p_k \exp\{itk/B_N\} \right)^N \\ &= (1 - P_r)^{-N} \Psi_{g,h}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k>r} p_k \exp\left\{i \frac{t}{B_N} k\right\} \right)^N,$$

где $\Psi_{g,h}(t)$ определена в лемме 2 и, согласно (5) и (6), имеет вид

$$\begin{aligned} &\Psi_{g,h}(t) \\ &= \exp\left\{ \frac{-\alpha|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi}{2}(g-1)\right) \right) \right\}, \\ &\alpha = \Gamma(2-g)d(g-1)^{h-1} \cos(\pi(g-1)/2). \end{aligned}$$

Рассмотрим $\sum_{k>r} p_k \exp\{itk/B_N\}$. Пусть $y = k/B_N$. Тогда из (2) и (4) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k>r} p_k \exp\left\{i \frac{t}{B_N} k\right\} &= d \left(\frac{\ln^h N}{(g-1)^h N} \right)^{g/(g-1)} \\ &\times \sum_{y > \left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}} \exp\{ity\} \frac{1 + o(1)}{y^g} \\ &\times \ln^{-h} \left(y \left(\frac{(g-1)^h N}{\ln^h N} \right)^{1/(g-1)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, переходя от суммирования к интегрированию, находим, что

$$\sum_{k>r} p_k \exp\{itk/B_N\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d(1 + o(1))}{N} \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} \left(1 + \frac{(g-1) \ln y - \ln \ln^h N + h \ln(g-1)}{\ln N} \right)^{-h} dy \\ &= \frac{d(1 + o(1))}{N} \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} \left(1 + \frac{(g-1) \ln y - \ln \ln^h N + h \ln(g-1)}{\ln N} \right)^{-h} dy \\ &\quad + \frac{d(1 + o(1))}{N} \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} \left(1 + \frac{(g-1) \ln y - \ln \ln^h N + h \ln(g-1)}{\ln N} \right)^{-h} dy, \end{aligned} \quad (11)$$

где ε – некоторая положительная постоянная, выбор которой будет ясен из дальнейшего. Нетрудно показать, что с выбором некоторого ε справедливо

$$\begin{aligned} &\int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} \left(1 + \frac{(g-1) \ln y - \ln \ln^h N + h \ln(g-1)}{\ln N} \right)^{-h} dy \\ &= (1 + o(1)) \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} dy. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} \left(1 + \frac{(g-1) \ln y - \ln \ln^h N + h \ln(g-1)}{\ln N} \right)^{-h} dy \right| \\ &\leq \left| \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} dy \right| \\ &\leq \left| \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \cos\{ty\} \frac{1}{y^g} dy \right| + \left| \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \sin\{ty\} \frac{1}{y^g} dy \right| \leq 4 \frac{1}{N^{\varepsilon g}}, \end{aligned}$$

и, используя [10], нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} dy \right| \\ & \leq N^{-\varepsilon(g-1)} \left| \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \frac{1}{y} \cos(ty) dy \right. \\ & \quad \left. + i \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^{N^\varepsilon} \frac{1}{y} \sin(ty) dy \right| \\ & = N^{-\varepsilon(g-1)} \left| t \left(-ci \left(\frac{dt}{\gamma(g-1)} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - si \left(\frac{dt}{\gamma(g-1)} \right) \right) \right|, \end{aligned}$$

где $ci(x)$ и $si(x)$ обозначают интегральные косинус и синус:

$$\begin{aligned} ci(x) &= - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \\ si(x) &= - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $si(x)$ и $ci(x)$ не равны нулю одновременно, выбором некоторого ε интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^\infty \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} \left(1 \right. \\ & \quad \left. + \frac{(g-1) \ln y - \ln \ln^h N + h \ln(g-1)}{\ln N} \right)^{-h} dy \end{aligned}$$

можно сделать сколь угодно близким к интегралу

$$\int_{\left(\frac{d}{\gamma(g-1)}\right)^{1/(g-1)}}^\infty \exp\{ity\} \frac{1}{y^g} dy.$$

Отсюда и из соотношений (8), (10) и (11) получаем, что при любом фиксированном t

$$\begin{aligned} \Psi_r(t) &= (1 + o(1))(1 - P_r)^{-N} \Psi_{g,h}(t) \\ & \times \left(1 - (1 + o(1)) \frac{1}{N} E(t, \gamma) \right)^N. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя (8), нетрудно убедиться, что

$$P_r = \frac{1 + o(1)}{N} E(0, \gamma). \quad (13)$$

Из (8), (12) и (13) получаем, что

$$\begin{aligned} \Psi_r(t) &= \exp \left\{ -\alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - i \frac{t}{|t|} \tan \left(\frac{\pi}{2} (g-1) \right) \right) - E(t, \gamma) + E(0, \gamma) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (8) следует, что $E(t, \gamma)$ является преобразованием Фурье функции

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} y^{-g} d, & y \geq \left(\frac{d}{\gamma(g-1)} \right)^{1/(g-1)}; \\ 0, & y < \left(\frac{d}{\gamma(g-1)} \right)^{1/(g-1)}. \end{cases} \quad (15)$$

Раскладывая $\exp\{-E(t, \gamma)\}$ в ряд по степеням $E(t, \gamma)$, из (14) находим, что

$$\begin{aligned} \Psi_r(t) &= e^{E(0, \gamma)} \sum_{k=0}^\infty \exp \left\{ \frac{-\alpha |t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - i \frac{t}{|t|} \tan \left(\frac{\pi}{2} (g-1) \right) \right) \right\} \\ & \quad \times (-1)^k \frac{E^k(t, \gamma)}{k!} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Согласно формуле обращения плотность такого распределения имеет вид:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 + o(1)}{2\pi} e^{E(0, \gamma)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ itx - \frac{\alpha |t|^{g-1}}{(g-1)^h} \right. \\ & \quad \left. \times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \left(\frac{\pi}{2} (g-1) \right) \right) \right\} E^k(t, \gamma) dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ itx - \frac{\alpha |t|^{g-1}}{(g-1)^h} \right. \\ & \quad \left. \times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \left(\frac{\pi}{2} (g-1) \right) \right) \right\} E^k(t, \gamma) dt \end{aligned}$$

является плотностью суммы случайных величин $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{k+1}$, где ν_1 имеет плотность $f_{\nu_1}(x)$ устойчивого закона с показателем $g-1$ и характеристической функцией:

$$\exp \left\{ -\alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \left(\frac{\pi}{2} (g-1) \right) \right) \right\},$$

а случайные величины $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{k+1}$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $f(y)$, определенной в (15). Используя формулу свертки для k слагаемых (см., например, [2]), получаем, что $\Psi_r(u)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью:

$$\tilde{g}_1(x) = e^{E(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(x),$$

где $I_k(x), k = 0, 1, \dots$, определены в формулировке теоремы 2, что и завершает доказательство леммы 6. \square

Пусть

$$\tilde{E}(t, \gamma) = d \int_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} y^{-2} dy, \quad (16)$$

$\tilde{I}_0(x)$ означает плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp\left\{-\frac{\pi d|t|}{2} \left(1 + i \frac{t}{|t|} \ln |t|\right)\right\},$$

$$\tilde{I}_k(x) = (2\pi)^{k/2} d^k \times \quad (17)$$

$\int_{\tilde{B}_k(x)} (x_1 \dots x_k)^{-2} \tilde{I}_0(x - x_1 - \dots - x_k) dx_1 \dots dx_k,$

$$\tilde{B}_k(x) = \left\{x_i \geq \frac{d}{\gamma}, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k x_i \leq x\right\}.$$

Лемма 7. Пусть $N \rightarrow \infty, g = 2, h \leq 1, r = dN/(\gamma \ln^h N)(1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины $(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - d \ln^{1-h} N(1 + q_2(N))N)/B_N$, где стремящаяся к нулю последовательность $q_2(N)$ определена в лемме 4, слабо сходится к распределению с плотностью

$$\tilde{g}_2(x) = e^{E(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tilde{I}_k(x).$$

Доказательство. Обозначим через $\Psi_r^{(2)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - d \ln^{1-h} N(1 + q_2(N))N\right)/B_N.$$

Тогда из (4), (9) и леммы 4 находим, что для любого фиксированного t

$$\Psi_r^{(2)}(t) = (1 - P_r)^{-N} \Psi(t) \quad (18)$$

$$\times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k>r} p_k \exp\left\{i \frac{t \ln^h N}{N} k\right\}\right)^N,$$

где $\Psi(t)$ определено соотношением (7).

Рассмотрим $\sum_{k>r} p_k \exp\{itk(\ln N)^h/N\}$. Заменяя $y = k(\ln N)^h/N$ и переходя к интегрированию, получаем, что

$$\sum_{k>r} p_k \exp\left\{itk(\ln N)^h/N\right\} = \frac{d(1 + o(1))}{N}$$

$$\times \int_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^2} \left(1 + \frac{\ln y}{\ln N} - \frac{\ln \ln^h N}{\ln N}\right)^{-h} dy.$$

Несложно показать, что при $N \rightarrow \infty$ интеграл

$$\int_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^2} \left(1 + \frac{\ln y}{\ln N} - \frac{\ln \ln^h N}{\ln N}\right)^{-h} dy$$

сколь угодно близок к интегралу

$$\int_{d/\gamma}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{t^2} dy.$$

Отсюда и из (7), (13), (16)–(18) следует, что для любого фиксированного t

$$\Psi_r^{(2)}(t) = \exp\left\{-\frac{d\pi|t|}{2} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln |t|\right)\right\}$$

$$- \tilde{E}(t, \gamma) + \tilde{E}(0, \gamma)\} (1 + o(1)). \quad (19)$$

Раскладывая в ряд $\exp\{-\tilde{E}(t, \gamma)\}$ по степеням $\tilde{E}(t, \gamma)$, из (19) находим, что

$$\Psi_r^{(2)}(t) = e^{\tilde{E}(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{\frac{-d\pi|t|}{2} \left(1 + i \frac{t}{|t|} \ln |t|\right)\right\} (-1)^k \frac{\tilde{E}^k(t, \gamma)}{k!} (1 + o(1)).$$

Учитывая, что $\tilde{E}(t, \gamma)$ является преобразованием Фурье функции $f(y)$, заданной в (15) при $g = 2$, получаем, что согласно формуле обращения плотность такого распределения имеет вид:

$$g_1(x) = \frac{1 + o(1)}{2\pi} e^{\tilde{E}(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ itx - \frac{\pi d|t|}{2} \right. \\ \left. \times \left(1 + i \frac{t}{|t|} \ln |t| \right) \right\} \tilde{E}^k(t, \gamma) dt.$$

Из формулы обращения следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\pi d|t|}{2} \left(1 + i \frac{t}{|t|} \ln |t| \right) \right\} \tilde{E}^k(t, \gamma) dt$$

есть плотность суммы случайных величин $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{k+1}$, где ν_1 имеет плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp \left\{ -\frac{\pi d|t|}{2} \left(1 + i \frac{t}{|t|} \ln |t| \right) \right\},$$

а случайные величины $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{k+1}$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $f(x)$, определенной в (15) при $g = 2$. Используя формулу свертки для k слагаемых, получаем, что $\Psi_r^{(2)}(t)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью:

$$\tilde{g}_2(x) = e^{\tilde{E}(0, \gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tilde{I}_k(x),$$

где $\tilde{I}_0(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp \left\{ -\frac{\pi d|t|}{2} \left(1 + i \frac{t}{|t|} \ln |t| \right) \right\},$$

а $\tilde{I}_k(x), k = 1, 2, \dots$, заданы соотношениями (17), что и завершает доказательство леммы 7. \square

Лемма 8. Пусть $N \rightarrow \infty, g = 2, h > 1, r = dN/(\gamma \ln^h N) (1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины $(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - (m + q_1(N))N)/B_N$, где сходящаяся к нулю последовательность $q_1(N)$ определена в лемме 3, слабо сходится к распределению с плотностью $\tilde{g}_2(x)$, заданной в формулировке леммы 7.

Доказательство леммы 8 проводится аналогично доказательству леммы 7, при этом вместо леммы 4 применяется лемма 3.

Лемма 9. Пусть $N \rightarrow \infty, 2 < g < 3$,

$$r = \left(\frac{dN(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N} \right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

где $0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины $(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm)/B_N$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем $g-1$ и характеристической функцией

$$\exp \left\{ -\alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \left(\frac{\pi}{2}(g-1) \right) \right) \right\},$$

где α определено в (4).

Доказательство. В статье [9] при доказательстве леммы 2 показано, что в окрестности нуля

$$\ln \varphi(t) = imt + \frac{\alpha |t|^{g-1}}{(g-1)^h \ln^h |t|} \\ \times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi(g-1)}{2} \right) (1 + o(1)). \quad (20)$$

Из (9), (20) и леммы 5 находим, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \left(1 + \frac{\gamma(1 + o(1))}{N} \right) \left(\varphi(t) - \sum_{k>r} e^{itk} p_k \right).$$

Отсюда, используя равенство

$$e^{itk} = 1 + \delta(k), |\delta(k)| < kt, \quad (21)$$

соотношения (2) и (20), получаем, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = 1 + imt - \alpha \frac{|t|^{(g-1)}}{(g-1)^h} \ln^{-h} \frac{1}{|t|} \\ \times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi(g-1)}{2} \right) (1 + o(1)) + o(1/N).$$

Тогда для любого фиксированного t справедливо

$$\ln \tilde{\varphi}_r^N \left(t (\ln^h N / ((g-1)^h N))^{1/(g-1)} \right) \\ = itm \left(\frac{\ln^h N}{N^{2-g}(g-1)^h} \right)^{1/(g-1)} \\ - \alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi(g-1)}{2} \right) (1 + o(1)).$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы 9. \square

Лемма 10. Пусть $N \rightarrow \infty, g = 3, h < 1$

$$r = \left(\frac{dN2^{h-1}}{\gamma \ln N} \right)^{1/2} (1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty.$$

Тогда распределение случайной величины $(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm)/B_N$ слабо сходится к нормальному закону с характеристической функцией

$$\exp \left\{ -\frac{dt^2}{(1-h)2^{2-h}} \right\}.$$

Доказательство. В статье [9] при доказательстве леммы 2 показано, что в окрестности нуля

$$\begin{aligned} \ln \varphi(t) &= imt - \frac{dt^2}{(1-h)2} \ln^{1-h} \frac{1}{|t|} \\ &+ o\left(t^2 \ln^{1-h} \frac{1}{|t|}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда, из леммы 5 и соотношений (2) и (21) получаем, что

$$\begin{aligned} \ln \tilde{\varphi}_r(t) &= \left(\varphi(t) - P_r + O\left(\sum_{k>r} tkp_k\right) \right) \\ &\times (1 - P_r)^{-1} = 1 + imt \\ &- \frac{dt^2}{(1-h)2} \ln^{1-h} \frac{1}{|t|} + o\left(\frac{t}{N} + t^2 \ln^{1-h} \frac{1}{|t|}\right). \end{aligned}$$

Тогда при любом фиксированном t находим, что

$$\begin{aligned} \ln \tilde{\varphi}_r^N\left(t/\sqrt{N \ln^{1-h} N}\right) \\ = \frac{imt\sqrt{N}}{\ln^{(1-h)/2} N} - \frac{dt^2}{(1-h)2^{2-h}} + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (4) следует утверждение леммы 10. \square

Лемма 11. Пусть $N \rightarrow \infty, g = 3, h = 1$

$$r = \left(\frac{dN}{\gamma \ln N}\right)^{1/2} (1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty.$$

Тогда распределение случайной величины $(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm)/B_N$ слабо сходится к нормальному закону с характеристической функцией

$$\exp\left\{-\frac{dt^2}{2}\right\}.$$

Доказательство леммы 8 проводится аналогично доказательству леммы 10, при этом вместо равенства (22) мы используем соотношение, полученное в [9] при доказательстве леммы 2 для $g = 3, h = 1$:

$$\ln \varphi(t) = imt - \frac{dt^2}{2} \ln \ln \frac{1}{|t|} + o\left(t^2 \ln \ln \frac{1}{|t|}\right).$$

Лемма 12. Пусть $N \rightarrow \infty,$

$$r = \left(\frac{Nd(g-1)^{h-1}}{\gamma \ln^h N}\right)^{1/(g-1)} (1 + o(1)),$$

где $0 < \gamma < \infty$ и выполнено одно из условий:

1. $g > 3;$
2. $g = 3, h > 1.$

Тогда распределение случайной величины $(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Nm)/B_N$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. При выполнении условий леммы случайные величины ξ_i и $\tilde{\xi}_i$ имеют конечные математические ожидания и дисперсию. Следовательно, из леммы 2 и равенств (2), (4), (9), (21) нетрудно получить, что при $t \rightarrow 0$

$$\ln \tilde{\varphi}_r(t) = 1 + imt - \frac{t^2}{2}(\sigma^2 + m^2) + O\left(t^3 + \frac{t}{N}\right).$$

Тогда, используя (4), можно показать, что при любых фиксированных t

$$\ln \tilde{\varphi}_r^N(t/B_N) = \frac{itm\sqrt{N}}{\sigma} - \frac{t^2}{2} + o(1),$$

откуда и следует утверждение леммы 12. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Докажем теорему 1. Пусть выполнены условия 1 теоремы 1. Из лемм 1, 2 и 6 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \\ = (1 - P_r)^N \frac{\int_0^y \tilde{g}_1(x) dx}{\int_0^y g(x) dx} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (23)$$

где плотность $\tilde{g}_1(x)$ определена в лемме 6, $g(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем $g - 1$ и характеристической функцией

$$\exp\left\{-\alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi(g-1)}{2}\right)\right\},$$

$$y = n((g-1)^h N / \ln^h N)^{-1/(g-1)},$$

α определена в (4). Из (23), леммы 5 и условия $n/B_N \rightarrow \infty$ следует утверждение теоремы 1 при выполнении условия 1.

Пусть выполнены условия 2 теоремы 1. Из лемм 1, 4 и 7 находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \\ = (1 - P_r)^N \frac{\int_{-\infty}^y \tilde{g}_2(x) dx}{\int_{-\infty}^y g(x) dx} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (24)$$

где плотность $\tilde{g}_2(x)$ определена в лемме 7, $g(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем 1 и характеристической функцией

$$\exp \left\{ -d \frac{\pi}{2} |t| \left(1 + i \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln |t| \right) \right\},$$

$$y = \frac{n - d \ln^{1-h} N (1 - q_2(N)) N}{N / \ln^h N}.$$

Учитывая, что в этом случае $y \rightarrow \infty$, из (24) и леммы 5 получаем утверждение теоремы 1 при условии 2.

Пусть выполнены условия 3 теоремы 1. Из лемм 1, 3 и 8 следует справедливость (24), где

$$y = \frac{n - (m + q_1(N)) N}{N / \ln^h N}.$$

Учитывая, что при выполнении условия 3 теоремы 1 $y \rightarrow \infty$, из (4) и (24) следует утверждение теоремы 1 для этого случая.

Пусть выполнены условия 4 теоремы 1. Сначала рассмотрим случай, когда $2 < g < 3$. Тогда из лемм 1, 2 и 9 получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\}$$

$$= (1 - P_r)^N \frac{\int_y^\infty p(x) dx}{\int_{-\infty}^y p(x) dx} (1 + o(1)), \quad (25)$$

где $p(x)$ – плотность устойчивого закона с показателем $g - 1$ и характеристической функцией

$$\exp \left\{ -\alpha \frac{|t|^{g-1}}{(g-1)^h} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi(g-1)}{2} \right) \right\},$$

$$y = \frac{n - mN}{((g-1)^h N / \ln^h N)^{1/(g-1)}},$$

α задана в (4). Отсюда и из леммы 5 вытекает утверждение теоремы 1 при $2 < g < 3$. Аналогично этому нетрудно доказать утверждение теоремы 1 для случая $g = 3, h \leq 1$, при этом вместо леммы 9 используем лемму 10 при $h < 1$ и лемму 11 при $h = 1$.

Остается рассмотреть последний случай, когда $g > 3$ или $g = 3, h > 1$. Для оценки вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}$ можно использовать центральную предельную теорему. Тогда из лемм 1 и 12 следует равенство (25), где $p(x)$ – плотность стандартного нормального распределения и

$$y = (n - mN) / (\sigma \sqrt{N}).$$

Отсюда и из леммы 5 вытекает утверждение теоремы 1 и в этом случае. Теперь теорема 1 доказана полностью.

Если выполнены условия теоремы 2, то из лемм 1, 2 и 6 следует равенство (23). Тогда из (23) находим, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\}$$

$$= e^{-\gamma} \frac{\int_{-\infty}^z e^{E(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(x) dx}{\int_{-\infty}^z g(x) dx} (1 + o(1))$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\int_{-\infty}^z I_k(x) dx}{\int_{-\infty}^z g(x) dx} (1 + o(1)),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 209 с.
2. Манита А. Д. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: МГУ, 2001. 120 с.
3. Павлов Ю. Л. Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi: 10.4213/dm1104
4. Павлов Ю. Л. Об условных конфигурационных графах со случайными распределениями степеней вершин // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 62–72. doi: 10.17076/mat313
5. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
6. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512
7. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
8. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число ребер

// Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

9. Павлов Ю. Л., Челмокова И. А. Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. (В печати)

10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

11. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

12. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

13. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

14. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

15. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology // Comp. Comm. Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

16. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

17. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 19.02.2020

REFERENCES

1. Kolchin V. F. Random Mapping. New York: Springer, 1986.

2. Manita A. D. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow: MGU, 2001. 120 p.

3. Pavlov Yu. L. On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Math. Appl.* 2010. Vol. 20, iss. 5-6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031

4. Pavlov Yu. L. Ob uslovykh konfiguratsionnykh grafakh so sluchainymi raspredeleniyami stepeni verшин [On conditional configuration graphs with random distribution of vertex degrees]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 62–72. doi: 10.17076/mat313

5. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB. MATH.* 2018. Vol. 209, iss. 2. P. 258–275. doi: 10.1070/SM8832

6. Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V. On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *SB. MATH.* 2016. Vol. 207, no. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/SM8512

7. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

8. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. On the asymptotics of degree structure of configuration

graphs with bounded number of edges. *Discrete Math. Appl.* 2019. Vol. 29, iss. 4. P. 219–232. doi: 10.1515/dma-2019-0020

9. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Limit distributions of the number of a given degree in a configuration graph with bounded number of edges. *Theory of Probability and its Appl.* (In press)

10. Prudnikov A. P., Brychkov Iu. A., Marichev O. I. Integraly i riady. Elementarnye funktsii [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow: Nauka, 1981. 798 p.

11. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 1. P. 101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

12. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum cell load. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 3. P. 307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020

13. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks. *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

14. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 222 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

15. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the Internet topology. *Comp. Comm. Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

16. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

17. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks.

Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received February 19, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н., доцент
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПОДСТАНОВОК С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ЦИКЛОВ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Изучается схема n -размерных подстановок с k циклами по направлениям перечислительной комбинаторики. Это перечисление исходов схемы с определенной дисциплиной их нумерации, нахождение их числа, установление взаимно-однозначного соответствия видов исходов с их номерами, называемое задачей нумерации в прямой и обратной постановках, и моделирование исходов схемы.

Ключевые слова: подстановки; порционные добавления; циклы.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE PERMUTATIONS WITH A FIXED NUMBER OF CYCLES

The scheme of n -dimensional permutations with k cycles is studied in different areas of enumerative combinatorics. This includes direct enumeration of the outcomes of the scheme with a given discipline of their numbering, finding their numbers, establishing the one-to-one correspondence of the types of outcomes with their numbers, termed the direct and inverse numbering problem, and modelling of the outcomes of the scheme.

Key words: the permutations; portion; the cycles.

ВВЕДЕНИЕ

Подстановка заданного размера задается перестановкой элементов того же размера своей нижней строки, пространство элементарных исходов для которой состоит из всех равновероятных перестановок ее элементов. Все исходы нашей (исследуемой) схемы совпадают с исходами схемы перестановок и составляют ее часть, поэтому вероятность появления исходов нашей схемы среди всех исходов схемы подстановок определяется отношением соответствующих численностей их исходов. Пространство элементарных исходов нашей схемы составляют совокупности составов ее непустых циклов в заданном числе. Вероятностное распределение ее исходов будем определять.

Число подстановок размера n с k циклами известно, например, из [2] и выражается через числа Стирлинга 1-го рода $S(n, k)$ как $|S(n, k)|$. Здесь рассматриваются вопросы прямого перечисления подстановок заданного размера с фиксированным числом циклов, определение их числа, перечисление размеров циклов в них, нахождение вероятностного распределения исходов схемы и чисел циклов в случайных подстановках размера n , моделирование возможных исходов схемы с фиксированным числом циклов.

Определения и обозначения в схеме подстановок

Подстановка размера n задает последовательность взаимно-однозначных отображений всех n элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на се-

бя и записывается в виде двустрочного соответствия элементов отображения $(1\ 2\ \dots\ n)$ и $(i_1\ i_2\ \dots\ i_n)$ в матричной форме.

Здесь в верхней строке элементы упорядочены от 1 до n , а нижняя строка задает последовательные отображения элементов верхней строки в элементы, стоящие под ними в нижней строке, т. е. отображения: 1 в i_1 ($1 \rightarrow i_1$), 2 в i_2 и т. д., где $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i_k \neq i_m$ при $k \neq m$. Таким образом, подстановки можно задавать перестановками элементов ее нижней строки.

Цикл подстановки образует группа элементов, возвращающихся при данном отображении к исходному элементу.

Число участвующих в цикле элементов называется его размером, принимающим значения от 1 до n . (Сумма размеров всех циклов подстановки равна ее размеру n .)

Если размер цикла n , т. е. он единственный, то подстановку называют одноцикловой.

Цикловая структура подстановки задается вектором $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где α_i – число циклов размера i , $i = \overline{1, n}$; $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ – число циклов подстановки, а $\sum_{i=1}^n i\alpha_i = n$.

Цикловой группой будем называть номера элементов одного цикла в порядке их отображений, начиная с наименьшего номера элемента в цикле. Иногда бывает удобно представлять подстановку не в традиционной двустрочной форме, а в виде перечисления ее цикловых групп в порядке роста минимальных номеров в них и их размеров, а каждую – в порядке отображений элементов в ней. Например, при $n = 4$, $k = 2$ такая запись подстановки $(1,3),(2,4)$ будет соответствовать перестановке ее нижней строки $(3,4,1,2)$.

В [5] были решены задачи нахождения численностей подстановок по их заданной цикловой структуре, явного перечисления таких подстановок и моделирования их возможных значений.

Этапы перечисления подстановок фиксированного размера с заданным числом циклов

Отображение элементов подстановки задается перестановкой ее нижней строки (i_1, i_2, \dots, i_n) по ПРАВИЛУ: *каждый элемент i_1 перестановки в подстановке отображается в свой элемент перестановки с номером i_1* . Отсюда получаем АЛГОРИТМ** вычисления числа циклов подстановки по ее нижней строке-перестановке:

по перестановке выписываем ее элементы начиная с 1 и первого элемента перестановки (слева направо) и далее в порядке отображений до повтора 1 без ее включения – получаем

первый цикл, далее начинаем второй цикл с минимального элемента, не вошедшего в первый цикл (слева направо), и далее в порядке отображений до его повтора без включения – получаем второй цикл, и т. д. до последнего оставшегося элемента, а для подсчета числа циклов при каждом повторе элемента в цикле добавляем в счетчик единицу.

Приведем поясняющий пример. Пусть $n = 8$ и перестановка нижней строки есть последовательность: $(6,7,5,1,2,8,3,4)$. Тогда по АЛГОРИТМУ** и по ПРАВИЛУ из нее получаем подстановку с двумя циклами $(1,6,8,4)(2,7,3,5)$.

Комбинаторный анализ схемы построим на процедуре явного перечисления подстановок размера n с фиксированным числом циклов k , представленных своими цикловыми группами, соответствующее перечисление которых и будем здесь производить. Эта процедура будет состоять из двух этапов: деления всех элементов перестановки всеми способами на k непустых частей (циклов) без учета их порядка и перечисления для каждого результата такого деления всех допустимых исходов перестановок элементов внутри каждой части деления, приводящих к одноцикловой подстановке из элементов этой части.

Имея в виду математическую эквивалентность нашего деления совокупности элементов на части с размещением n различных частиц по k неразличимым ячейкам без пустых ячеек, при рассмотрении решения задачи первого этапа будем ссылаться на соответствующие результаты в терминах размещения частиц по ячейкам. Поэтому решение задачи первого этапа может использовать результаты [3], описывающие перечисление всех исходов схемы (без ограничения на отсутствие пустых ячеек), с отбраковкой исходов, не отвечающих данному ограничению. Это привело бы к анализу большого числа лишних исходов и к сложности дальнейших исследований схемы. В связи с этим предлагается провести прямое перечисление исходов с данным ограничением.

В [8] приведена процедура перечисления всех исходов схемы перестановок в определенном порядке с решением задачи нумерации для них, и известно утверждение, что число одноцикловых подстановок размера L , а значит, и представляющих их перестановок нижней строки, равно $(L - 1)!$.

Поэтому для решения задачи второго этапа кроме отбраковки исходов перестановок элементов каждой части деления, приводящих к > 1 циклу в них, с использованием утверждения о числе одноцикловых подстановок фикс-

сированного размера можно предложить прямое перечисление требуемых перестановок ее элементов по [3], начинающихся с минимального.

В завершение с каждым результатом первого этапа по конкретной цикловой структуре соответствующей подстановки, определяемой делением ее элементов на части (цикловые группы), нужно сопоставить все исходы второго этапа в виде требуемых перестановок элементов по каждой части деления, проводимого по результатам [4] и [6].

Построение процедуры перечисления первого этапа требует отдельного рассмотрения.

Определения, обозначения и связи основной и вспомогательных схем

Для краткости под различными элементами или частицами будем понимать их номера.

Схема A — основная схема подстановок размера n с ровно k циклами; вспомогательные схемы: схема D — схема деления n различных элементов на k непустых частей без учета порядка этих частей; схема D_j — схема D с j -й фиксацией k минимальных элементов в частях деления, где в качестве этих минимальных элементов варьируются все их наборы по схеме сочетаний; схема P — схема всех разных допустимых перестановок элементов в частях деления по схеме D , записывающих одноцикловые подстановки из них; схема C — схема сочетаний.

Схемы D и P являются вспомогательными для схемы A , схемы $\{D_j\}$ — для схемы D , а схема C — для схем $\{D_j\}$.

Схема P является схемой одновременных действий схем перестановок и подробно исследована в [6] и [8], а схема C — в [7]. Для анализа схемы A остается изучить схемы D и D_j .

Анализ схем будем производить на основе прямого перечисления ее исходов в терминах указанных выше размещений частиц по ячейкам. Для перечисления всех исходов схемы D будем объединять все исходы всех схем D_j , т. е. переборов всех размещений частиц с изученной в схеме сочетаний [7] с фиксацией их минимальных номеров в ячейках с последующим размещением остальных частиц при каждой такой фиксации. Начнем с рассмотрения вспомогательной схемы D_j .

1. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ D_j

1.1. Перечисление и число исходов схемы

Для выполнения условия отсутствия пустых ячеек случайным образом по схеме C сочетаний с C_{n-1}^{k-1} исходами возьмем j -й исход выбора нумерованных частиц ($j = 2,$

$3, \dots, C_{n-1}^{k-1}$), добавляя к нему частицу с номером 1, и принудительно разложим по всем k ячейкам по одной частице, считая их номера минимальными при размещении по ячейкам остальных частиц и расположив ячейки в порядке роста минимальных номеров выбранных частиц. Для таких выборов по схеме сочетаний в [4] решены задачи построения процедуры перечисления исходов и задача их нумерации. Далее размещаем по ячейкам всеми способами остальные $(n - k)$ частиц таким образом, чтобы не изменить выбранные минимальные номера частиц в ячейках. Состав каждой ячейки будем заключать в круглые скобки и перечислять номера входящих в них элементов в возрастающем порядке (а весь исход схемы будем заключать в фигурные скобки).

Пусть $T^{(j)} = (n_1, \dots, n_k)$ — возрастающая последовательность минимальных номеров частиц в k ячейках при их j -й фиксации, где всегда $n_1 = 1$. Это соответствует несущественности порядка частей (циклов) деления элементов подстановки. Будем размещать остальные $(n - k)$ частиц по k ячейкам так, чтобы выбранные минимальные в них не изменились. Для этого будем добавлять частицы порционно по одной в последовательно поединично растущие группы первых ячеек равновероятно по схеме размещения с повторением для каждой частицы по этим ячейкам. Тогда сначала в первую ячейку должны быть добавлены все частицы с номерами $< n_2$ в количестве $w_1^{(j)} = n_2 - n_1 - 1 = n_2 - 2$; потом в первые две ячейки — все частицы из остальных с номерами $< n_3$ в количестве $w_2^{(j)} = n_3 - n_2 - 1$; потом в первые три ячейки — все частицы из остальных с номерами $< n_4$ в количестве $w_3^{(j)} = n_4 - n_3 - 1$ и т. д., потом в первые $(k - 1)$ ячейки — все частицы из остальных с номерами $< n_k$ в количестве $w_{k-1}^{(j)} = n_k - n_{k-1} - 1$; тогда, наконец, во все ячейки — все остальные частицы с номерами до n в количестве $w_k^{(j)} = n - n_k$.

Таким образом, т. к. k частиц было размещено предварительно, будем порционно в указанных выше количествах размещать суммарное число $(n - k)$ частиц соответственно по одной, двум и т. д. k ячейкам. Проверяем, что сумма порционных добавлений частиц совпадает с $(n - k)$:

$$n_2 - 1 - 1 + n_3 - n_2 - 1 + n_4 - n_3 - 1 + \dots + n_k - n_{k-1} - 1 + n - n_k = n - k.$$

Будем представлять все порционные добавления в виде k -компонентных векторов соответ-

ствующих добавлений частиц в k ячеек, а итоговые векторы $\bar{w}^{(j)}$ добавлений во все ячейки при j -й фиксации частиц с минимальными номерами в них получают покомпонентным сложением векторов порционных добавлений в ячейки (циклы).

Теорема 1. Число N_{D_j} исходов схемы D_j вычисляется по формуле

$$N_{D_j} = \prod_{i=1}^k i^{w_i^{(j)}}. \quad (1)$$

Доказательство формулы (1) следует из принципа умножения для общего числа исходов в k схемах размещения частиц (по поединично растущим от начальной ячейки группам ячеек) в количествах найденных выше размеров, заданных вектором $\bar{w}^{(j)}$, последовательных порционных добавлений в них по схеме размещений с повторением, так что в 1-ю ячейку добавляется $w_1^{(j)}$ частиц числом способов $1^{w_1^{(j)}}$; в первые две – $w_2^{(j)}$ частиц числом способов $2^{w_2^{(j)}}$ и т. д.; во все ячейки – $w_k^{(j)}$ частиц числом способов $k^{w_k^{(j)}}$, откуда и следует формула (1).

Определим вид исхода схемы D_j при фиксированном наборе $T^{(j)}$ минимальных номеров частиц в ячейках как перечень наборов возрастающих номеров частиц в ячейках, перечисленных в порядке роста минимальных номеров в них; составы ячеек будем заключать в круглые скобки, а весь исход – в фигурные скобки.

Для перечисления всех исходов схемы методом графов будем строить процесс последовательного поединичного равновероятного добавления частиц с растущими номерами в ячейки с начальным заполнением по одной частице с минимальными выбранными номерами в них. Исходы заполнения ячеек на каждом шаге будем нумеровать в порядке добавления частицы в ячейки с растущими минимальными номерами.

Поясним процесс перечисления исходов схемы D_j на примере (рис. 1).

Пример 1. Пусть $n = 7$, $k = 3$, $T^{(j)} = (1, 3, 5)$.

Визуально имеем $N_{D_j} = 18$ исходов, что совпадает с результатом по (1): $N_{D_j} = 1 \cdot 2^1 \cdot 3^2 = 18$.

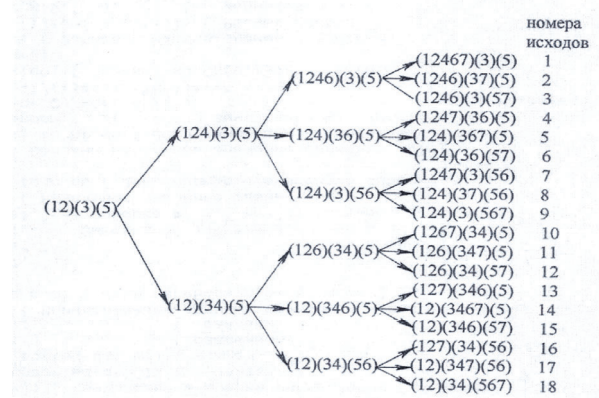


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы D_j примера 1

Fig. 1. The enumeration graph of outcomes of scheme D_j of example 1

1.2. Задача нумерации (ЗН) в схеме D_j

Пространство элементарных исходов схемы D_j состоит из всех k наборов составов из n различных элементов с заданной j -й фиксацией минимальных элементов этих составов.

Схема D_j представляет собой схему $(n - k)$ последовательных действий, изученную в [6] (с решенной задачей нумерации при известных числах их исходов), состоящих в порционном размещении по одной $(n - k)$ частиц (элементов) с размерами порций $w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \dots, w_k^{(j)}$, определенными в п. 1.1, по поединично растущим группам первых ячеек, расположенных по возрастанию минимальных номеров частиц в них так, что каждая частица размещается по ячейкам своей группы равновероятно по схеме размещений с повторением. Тогда число способов совершения этих действий есть $1^{w_1^{(j)}} 2^{w_2^{(j)}} \dots k^{w_k^{(j)}}$, где числа исходов этих действий $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n-k})$ есть $(1, 2, \dots, k)$, повторенные соответственно $1^{w_1^{(j)}}, 2^{w_2^{(j)}}, \dots, k^{w_k^{(j)}}$ раз, а итоговым исходом схемы D_j является объединение исходов действий, т. е. суммарных порционных составов номеров добавленных в ячейки частиц, и j -х фиксированных минимальных номеров частиц в k ячейках.

Для иллюстрации приведем числовой пример.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 для схемы D_j решается ЗН, т. е. пусть $n = 7$, $k = 3$, $T^{(j)} = (1, 3, 5)$. Тогда $w_1^{(j)} = 1, w_2^{(j)} = 1, w_3^{(j)} = 2$, откуда следует, что при числе действий $(n - k) = 4$ $V = (1, 2, 3, 3)$. Введем обозначения: N_*, R_* – соответствующие номер и вид итогового исхода схемы D_j ; $N^{(i)}, R^{(i)}$ –

соответствующие номер и вид исхода схемы D_j на i -й итерации – добавления i -й частицы ($i = \overline{1, n-k}$).

Прямая ЗН. Пусть дан $N_* = 5$. Требуется найти R_* .

Шаги решения по формулам (2) и (3) из [6] в обозначениях нашей схемы:

1) $N_* = N^{(4)} = 5$; $N^{(3)} = [(5 + 3 - 1)/3] = 2$; $N^{(2)} = [(2 + 3 - 1)/3] = 1$; $N^{(1)} = [(2 + 2 - 1)/2] = 1$ – номера исходов схемы по действиям;

2) $j_4 = N^{(4)} \bmod v_4 + 0 \cdot v_4 = 5 \bmod 3 + 0 \cdot 3 = 2$; аналогично $j_3 = 2 \bmod 3 + 0 \cdot 3 = 2$; $j_2 = 2 \bmod 2 + 1 \cdot 2 = 2$; $j_1 = 1 \bmod 1 + 1 \cdot 1 = 1$ – номера предшествующих исходов в пучках предыдущих итераций, т. е. полученный набор значений $\{j^{(i)}\} = (1, 1, 2, 2)$ задает номера частей деления (циклов) добавления растущих остальных $(n - k) = 4$ элементов, откуда получаем искомым вид исхода $R_* = (124), (367)(5)$, совпадающий с результатом по графу на рис. 1.

Обратная ЗН. Пусть дан $R_* = (124)(367)(5)$. Требуется найти N_* .

Шаги решения по формуле (4) из [8] в обозначениях нашей схемы:

1) по $R_* = R^{(4)} = (124)(367)(5)$ и $T^{(j)} = (1, 3, 5)$ с учетом добавления остальных элементов в порядке роста имеем $R^{(1)} = (12), (3)(5)$, $R^{(2)} = (124)(3)(5)$, $R^{(3)} = (124)(36)(5)$, $R^{(4)} = (124)(367)(5)$, откуда соответственно получаем номера частей (циклов) добавления элементов в порядке их роста $j_1 = 1$, $j_2 = 1$, $j_3 = 2$, $j_4 = 2$, которые являются номерами предшествующих искомому исходов итераций в пучках графа перечисления исходов схемы;

2) по (4) из [8] $N_* = N^{(4)} = (1 - 1)1 + (1 - 1)2 + (2 - 1)3 + 2 = 5$, что совпадает с результатом по графу на рис. 1.

2. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ D

2.1. Перечисление и число исходов схемы

Теорема 2. Число N_D исходов схемы D есть

$$N_D = \sum_{\{(C)\}} N_{D_j}, \quad (2)$$

где сумма берется по перечислению исходов схемы C , т. е. по всем C_{n-1}^{k-1} наборам $T^{(j)} = (1, n_2, \dots, n_k) \in (1, 2, \dots, n)$.

Доказательство. Схема D – это схема независимых ОД (см. [6]) схем $\{D_j\}$, $j = 1, 2, \dots, C_n^k$,

а ее исходы – объединение исходов всех схем D_j в порядке роста j , т. е. перечисление всех возможных составов k циклов исходной схемы A , откуда и следует (2).

2.2. Задача нумерации в схеме D

Схема D – это схема C_{n-1}^{k-1} независимых одновременных действий (см. [6]) итоговых порционных добавлений частиц в ячейки по схемам D_j , для которых в [6] задача нумерации решена при числах способов совершения этих действий, равных $\{N_{D_j}\}$, где $j = \overline{1, C_{n-1}^{k-1}}$.

3. КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ A

Исходы схемы A (в фигурных скобках) представляют все возможные наборы (в круглых скобках) k цикловых групп подстановки размера n , где порядок номеров в них имеет значение. Они отличаются (в терминологии подстановок) от исходов схемы D , где номера элементов цикловых групп (частиц в ячейках) перечислялись только в возрастающем порядке, всеми порядками их номеров, задающими возможные последовательные отображения внутри цикловых групп.

3.1. Перечисление и число исходов схемы

Для перечисления исходов схемы A по утверждению из введения нужно в перечислении исходов схемы D по схеме одновременных действий (см. [6]) произвести в каждой круглой скобке, описывающей состав цикловой группы, все перестановки последовательных отображений, начинающиеся с минимального номера.

Число N_A подстановок размера n с k циклами известно, и есть $N_A = |S(n, k)|$, где $S(n, k)$ – числа Стирлинга 1-го рода. Покажем, как число N_A можно вычислять по перечислению исходов схемы A ; предложим для этого два способа.

Первый способ (по прямому перечислению исходов схемы D)

Теорема 3. Число N_A исходов схемы A вычисляется по формуле

$$N_A = \sum_{\{(D)\}} \prod_{m=1}^k d_m!, \quad (3)$$

где суммирование проводится по перечислению исходов схемы D по размерам суммарных порционных добавлений элементов $\bar{d} = (d_1, \dots, d_k)$ в цикловые группы, где $(\sum_{m=1}^k d_m = n - k)$.

Доказательство. Все исходы схемы A делятся на N_D групп одинаковых составов элементов в k ненулевых частях (циклах), каждая из которых представляет собой одноцикловые подстановки из элементов своего состава в известном количестве факториала суммарного размера своего порционного добавления. Таким образом, число N_A вычисляется как сумма N_D слагаемых (по перечислению разных по составу делений совокупности n различных элементов на k ненулевых частей) произведений вариантов перестановок элементов каждой части этого деления, приводящих к одноцикловым подстановкам, т. е. произведений факториалов размеров суммарных порционных добавлений в них, что и доказывает формулу (3) с введением обозначений $\bar{d} = d_1, \dots, d_k$, $(\sum_{m=1}^k d_m = n - k)$ для этих размеров. (Они непосредственно вычисляются из видов исходов схемы N_D при их перечислении.)

Второй способ (по перечислению исходов схемы C) алгебраическим методом

Пусть по перечислению исходов схемы C (см. [7]) задан j -й набор $T^{(j)}$. Тогда при этой j -й фиксации на i -м шаге перечисления исходов схемы D_j (при размещении частиц по i ячейкам) перечисляющей производящей функцией всех размеров порционных добавлений d_1, \dots, d_i в ячейки-части $1, 2, \dots, i$ есть полином

$$P_{ij} = (a_1 + a_2 + \dots + a_i)^{r_i} = \sum_{d_1 + \dots + d_i = r_i} \frac{r_i!}{d_1! \dots d_i!} a_1^{d_1} \dots a_i^{d_i}, \quad (4)$$

в разложении по степеням переменных a_1, \dots, a_i , $i = 1, 2, \dots, k$ которого все наборы показателей их степеней соответственно совпадают с векторами размеров порционных добавлений в первые i циклов общего суммарного размера добавлений $r_i = n_{i+1} - n_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$, $r_k = n - n_k$ номеров элементов, а коэффициенты при $a_1^{d_1} \dots a_i^{d_i}$ дают кратность получения векторов размеров порционных добавлений. Для получения при данном j всех итоговых векторов из \bar{d} нужно по всем $i = 1, 2, \dots, k$ покомпонентно сложить все векторы размеров порционных добавлений во все циклы, перебирая их по схеме последовательных действий (см. [6]). Далее по всей совокупности этих итоговых векторов при всех $j = 1, 2, \dots, C_n^k$ определяется число N_A по формуле (3).

Перечислим порядок действий при вычислении числа N_A .

Первый способ

1. Фиксируем минимальные номера элементов подстановки из n номеров в k циклах T по схеме сочетаний C числом способов C_{n-1}^{k-1} , т. к. всегда $n_1 = 1$, и перечисляем все исходы этих фиксаций по [4].
2. Для каждой j -й фиксации ($j = 1, 2, \dots, C_{n-1}^{k-1}$) исхода схемы C перечисляем все исходы схемы D_j методом графов (см. рис. 1 для примера 1).
3. Объединяя результаты п. 2, получаем все исходы схемы D , вычисляем $\{N_{D_j}\}$.
4. Для всех исходов п. 3 непосредственно по перечислению вычисляем все итоговые векторы размеров порционных добавлений в k циклах — получаем все $\{\bar{d}\}$ по исходам схемы D .
5. По (3) вычисляем значение N_A .

Второй способ

1. Фиксируем минимальные номера элементов подстановки из n номеров в k циклах T по схеме сочетаний C числом способов C_{n-1}^{k-1} , т. к. всегда $n_1 = 1$, и перечисляем все исходы этих фиксаций по [7].
2. Для каждой j -й фиксации ($j = 1, 2, \dots, C_{n-1}^{k-1}$) исхода схемы C и всех $i = 1, 2, \dots, k$ рассматриваемых первых циклов вычисляем значения r_i и выписываем вид (4) для P_{ij} .
3. Из вида P_{ij} находим все векторы размеров порционных добавлений в первые i циклов.
4. Для получения всех итоговых векторов \bar{d} при каждом j складываем покомпонентно (компоненты соответствуют номерам переменных в полиноме P_{ij}) все со всеми при разных i , полученных в п. 3).
5. \bar{d} в схеме D получаем объединением результатов п. 4) по всем j .
6. По \bar{d} из п. 5) по (3) вычисляем N_A .

Приведем числовой пример и будем проводить расчеты по приведенному порядку действий **двух способов**.

Пример 3. Пусть $n = 4$, $k = 2$. Требуется найти число подстановок длины n с ровно k циклами, т. е. N_A .

1. $C_{n-1}^{k-1} = C_3^1 = 3$ — число вариантов фиксаций минимальных номеров в двух циклах: $n_1 = 1, n_2 = 2$ при $j = 1$; $n_1 = 1, n_2 = 3$ при $j = 2$ и $n_1 = 1, n_2 = 4$ при $j = 3$.

Решаем **первым способом**.

2. По (1) $N_{D_1} = 1^{2-1-1}2^{4-2} = 4$; $N_{D_2} = 1^{3-1-1}2^{4-3} = 2$; $N_{D_3} = 1^{4-1-1}2^{4-4} = 1$. Приведем графы перечисления исходов схем $\{D_j\}$ (рис. 2).

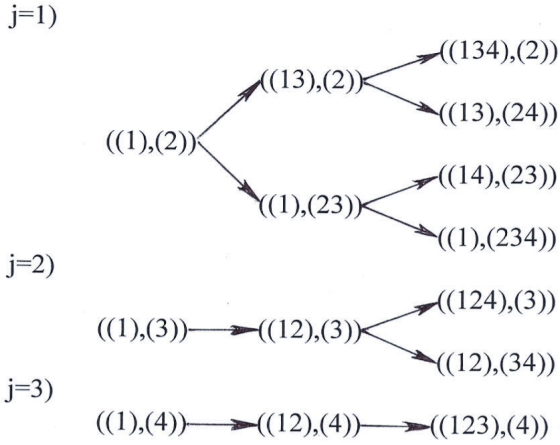


Рис. 2. Граф перечисления исходов схем D_j примера 3
Fig. 2. The enumeration graph of outcomes of schemes D_j of example 3

3. По рис. 2 (по процедуре порционного добавления частиц в ячейки из п. 1.1) имеем итоговые векторы размеров добавления при $j = 1 - (2,0), (1,1), (1,1), (0,2)$; при $j = 2 - (2,0), (1,1)$; при $j = 3 - (2,0)$.

4. По (3) $N_A = 2!0! + 1!1! + 1!1! + 0!2! + 2!0! + 1!1! + 2!0! = 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 = 11$.

Решаем **вторым способом**.

2 - 3. При $j = 1$ $T^{(1)} = (1, 2)$, $P_{11} = a_1^{r_1} = a^0$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (0);

$P_{12} = (a_1 + a_2)^{r_2} = (a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$, откуда имеем 4 вектора размеров порционного добавления (2;0), (1;1), (1;1), (0;2).

При $j = 2$ $T^{(2)} = (1, 3)$, $P_{21} = a_1^{r_1} = a^1$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (1);

$P_{22} = (a_1 + a_2)^{r_2} = (a_1 + a_2)^1 = a_1 + a_2$, откуда имеем 2 вектора размеров порционного добавления (1;0), (0;1).

При $j = 3$ $T = (1, 4)$, $P_{31} = a_1^{r_1} = a_1^2$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (2);

$P_{32} = (a_1 + a_2)^{r_2} = (a_1 + a_2)^0 = 1$, откуда имеем один вектор размеров порционного добавления (0;0).

4. Вычисляем итоговые векторы размеров порционных добавлений:

при $j = 1$ это векторы (2;0), (1;1), (1;1), (0;2);

при $j = 2$ это векторы (2;0), (1;1);

при $j = 3$ это вектор (2;0).

5. По (3) $N_A = 2!0! + 1!1! + 1!1! + 0!2! + 2!0! + 1!1! + 2!0! = 11$.

Проверим результат непосредственным подсчетом чисел циклов в подстановках размера 4 по их явному перечислению по п. 1.1.

Представим полный перечень исходов схемы перестановок размера $n = 4$: (4321), (3421), (3241), (3214), (4231), (2431), (2341), (2314), (4213), (2413), (2143), (2134), (4312), (3412), (3142), (3124), (4132), (1432), (1342), (1324), (4123), (1423), (1243), (1234). Считая их нижними строками подстановок, перечислим соответствующие им непосредственно вычисленные числа циклов: 2, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 4. Отсюда видим, что число подстановок размера 4 с двумя циклами равно 11, что совпадает с результатом теоретического расчета.

Замечание 1. Вероятностное распределение числа Z циклов в подстановке размера n определяется по формуле $P(Z = k) = |S(n, k)|/n!$, где $k = 1, 2, \dots, n$.

Выпишем по примеру 2 для $n = 4$ вероятностное распределение числа Z циклов, определяя вероятности каждого возможного размера циклов (от 1 до 4) делением их числа на $4! = 24$. $P(Z = 1) = 6/24$, $P(Z = 2) = 11/24$, $P(Z = 3) = 6/24$, $P(Z = 4) = 1/24$.

3.2. Задача нумерации в схеме A

Схема A — это обобщенная схема двух последовательных действий (см. [6]) с числом исходов первого действия, равным N_D , и числами исходов второго действия, равными числу всех перестановок во всех цикловых группах с первыми местами элементов с минимальными номерами, т. е. $\prod_{m=1}^k d_m!$ по каждому исходу схемы D. Таким образом, задача нумерации в схеме A теоретически принципиально решена на основании ее результатов для всех используемых здесь вспомогательных схем, исследованных в [4] и [6], и указанных связей этих схем со схемой A.

Для пояснения порядка действий при решении задачи нумерации в схеме A введем обозначения: $N^{(U)}$ и $R^{(U)}$ — соответственно номер и вид исхода с этим номером в схеме U (под U понимается любая из используемых здесь схем), \Rightarrow — знак следования. Тогда в этих обозначениях приведем решения прямой и обратной задач нумерации через известные аналогичные результаты задач нумерации всех используемых схем при заранее найденных размерах пучков графа перечисления исходов схемы A.

Прямая задача: по $N^{(A)}$ найти $R^{(A)}$.

Решение: по [4] и [6] $N^{(A)} \Rightarrow N^{(D)} \Rightarrow R^{(D)}$; $N^{(A)} \Rightarrow N^{(P)} \Rightarrow R^{(P)}$; заменяя порядки номеров в цикловых группах в $R^{(D)}$ на полученные в $R^{(P)}$, находим R_A .

Обратная задача: по $R^{(A)}$ найти $N^{(A)}$.

Решение: упорядочиванием по возрастанию номеров каждой цикловой группы в $R^{(A)}$ получаем $R^{(A)} \Rightarrow R^{(D)} \Rightarrow N^{(D)}$; из $R^{(A)} \Rightarrow N^{(P)}$. Теперь по [4] из $N^{(D)}$ и $N^{(P)} \Rightarrow N^{(A)}$. Однако в связи с двухэтапностью и с многодейственностью процедуры прямого перечисления перестановок заданного размера с заданным числом циклов явный результат задачи нумерации, следующей из этого перечисления, становится достаточно громоздким даже с учетом полученных ранее результатов решения для всех ее этапов. Поэтому здесь еще предлагается решать задачу нумерации численно, табличным путем, т. е. путем явного перечисления ее исходов с их табличной нумерацией всех исходов в порядке их получения при перечислении для заданных параметров схемы (размере подстановки и числе ее циклов) и хранить в памяти эту таблицу для дальнейших исследований.

3.3. Вероятностные распределения исходов схемы и числа исходов с k циклами в подстановке степени n

Все исходы схемы A представляют собой часть $n!$ равновероятных исходов всех n -мерных подстановок, поэтому вероятность исходов схемы A среди всех исходов подстановки равна $N_A/n!$.

С использованием числа $N_A = |S(n, k)|$ или формулы (3) получаем вероятностное распределение числа Z циклов в n -размерной подстановке $W = P(Z = k) = N_A/n!$, $k = \bar{1}, \bar{n}$.

Вместо исходов схемы n -мерных подстановок будем рассматривать задающую ее схему перестановок ее нижней строки, изученную в [8]. Будем удалять недопустимые состояния полного графа перечисления исходов этой схемы перестановок в нашей схеме – схеме A , которыми будем считать состояния всех траекторий, приводящих к подстановке с отличными от заданного числа k циклами. Вероятностное распределение исходов схемы A будем находить пропорциональным пересчетом вероятностей переходов по итерациям в каждом пучке среди оставшихся после описанного удаления траекторий, т. е. урезания недопустимых состояний, что означает пропорциональное перераспределение вероятностей итерационных

переходов среди всех остальных состояний в пучке, содержащем это состояние.

Распределение вероятностей исходов схемы A может быть получено алгоритмически в виде групп равновероятных исходов по каждой траектории одинаковых наборов вероятностей переходов по итерациям следующими шагами:

1) по методу графов (см. [9]) перечисляем все перестановки нижних строк подстановок;

2) для всех результатов п. 1) по АЛГОРИТМУ** (см. Введение) вычисляем числа циклов в соответствующих подстановках;

3) по результату п. 2) в графе п. 1) убираем все лишние траектории, ведущие к перестановкам, порождающим подстановки с числами циклов $\neq k$ с пересчетом по итерациям равных вероятностей переходов в каждом оставшемся пучке среди оставшихся состояний;

4) вычисляем вероятности всех итоговых исходов с k циклами по графу п. 3) перемножением вероятностей переходов в них по итерациям, т. е. по их траекториям.

Теперь приведем пояснительный пример вычисления вероятностного распределения исходов схемы.

Пример 4. Пусть $n = 4$, $k = 2$.

1) Запишем все исходы схемы перестановок в порядке их получения по МГ по итерациям через стрелочку, начиная с $i = 1$:

(1) \rightarrow (2, 1), (1, 2) \rightarrow (3, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (1, 2, 3) \rightarrow (4, 3, 2, 1), (3, 4, 2, 1), (3, 2, 4, 1), (3, 2, 1, 4), (4, 2, 3, 1), (2, 4, 3, 1), (2, 3, 4, 1), (2, 3, 1, 4), (4, 2, 1, 3), (2, 4, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (2, 1, 3, 4), (4, 3, 1, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 1, 4, 2), (3, 1, 2, 4), (4, 1, 3, 2), (1, 4, 3, 2), (1, 3, 4, 2), (1, 3, 2, 4), (4, 1, 2, 3), (1, 4, 2, 3), (1, 2, 4, 3), (1, 2, 3, 4);

2) числа циклов в подстановках с нижними строками результатов п.1) соответственно: 2, 1, 2, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 4, из них 12 исходов с $k = 2$;

3) убираем все лишние траектории в графе п.1), получаем граф:

(1) \rightarrow (2, 1), (1, 2) \rightarrow (3, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (1, 2, 3) \rightarrow (4, 3, 2, 1), (3, 2, 4, 1), (3, 2, 1, 4), (2, 4, 3, 1), (2, 3, 1, 4), (4, 2, 1, 3), (2, 1, 4, 3), (3, 4, 1, 2), (3, 1, 2, 4), (4, 1, 3, 2), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3). Здесь все исходы 3-й итерации, кроме первого (3,2,1) и последнего (1,2,3), порождают по 2 итоговых исхода нашей схемы с вероятностями переходов в них по 1/2, первый исход – 3 с вероятностью 1/3, а последний – 1 с вероятностью перехода, равной 1.

Отсюда из того, что вероятности переходов до 3-й итерации (включительно) не изменились и равны по итерациям, начиная с первой

1: $(1/2), (1/3)$, находим вероятности всех 12 исходов:

$$\begin{aligned} P(4, 3, 2, 1) &= P(3, 2, 4, 1) = P(3, 2, 1, 4) = \\ &= (1/2)(1/3)(1/3) = 1/18; \quad P(2, 4, 3, 1) = \\ P(2, 3, 1, 4) &= P(4, 2, 1, 3) = P(2, 1, 4, 3) = \\ P(3, 4, 1, 2) &= P(3, 1, 2, 4) = P(4, 1, 3, 2) = \\ P(1, 3, 4, 2) &= (1/2)(1/3)(1/2) = 1/12; \\ P(1, 4, 2, 3) &= (1/2)(1/3) = 1/6. \end{aligned}$$

Проверка на распределение: $3/18 + 8/12 + 1/6 = 1$.

3.4. Моделирование подстановок размера n с ровно k циклами

Рассмотрим АЛГОРИТМ моделирования исходов нашей схемы через исходы общей схемы перестановки по следующим шагам:

1) перечисляем с нумерацией все $n!$ равновероятных исходов схемы перестановок размера по алгоритму n , совпадающему с алгоритмом Кнута, приведенным, например, в [1] с доказанной там сложностью $O(n!)$;

2) вычисляем числа циклов подстановок, заданных всеми перестановками своих нижних строк, и фиксируем среди них номера исходов нашей схемы (с заданным числом циклов) и их общее число L и находим $p = L/n!$ (АЛГОРИТМ** вычисления числа циклов в подстановке, приведенный во Введении, имеет сложность $O(n)$) – получаем вектор \bar{C}_k номеров исходов перечисленных нижних строк подстановок с числом циклов k ;

3) разыгрываем номер исхода схемы п. 1);

4) проверяем его совпадение с номерами \bar{C}_k исходов нашей схемы (п. 2)) на «ДА» и «НЕТ» с вероятностями соответственно W и $(1 - W)$;

5) при «НЕТ» переходим к п. 3);

6) при «ДА» с вероятностью W по результату прямой ЗН для нашей схемы получаем смоделированный исход схемы.

Реализация последовательных действий 1-го и 2-го шагов составляет сложность $O(n \cdot n!)$; реализация последовательных действий 3-го и 4-го шагов составляет сложность $O(n!)$; число моделирований исходов схемы подстановок до получения M исходов нашей схемы имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами W, M как числа Z испытаний Бернулли до M -го успеха включительно (успех – получение исхода нашей схемы среди всех исходов схемы подстановок) с вероятностью каждого успеха W ; $P(Z = t) = C_{t-1}^{M-1} W^t (1-W)^{t-M}$ и средним, равным M/W . Поэтому оценка сложности в среднем для моделирования M исходов нашей схемы получается порядка $O(n \cdot n! M/W)$, откуда для моделирования одного исхода она имеет порядок $O(n \cdot n!/W)$.

3.5. Приближенное оценивание числа исходов схемы

Моделируем по 1.2.3 или [3] N_A исходов схемы перестановок размера n с $n!$ равновероятными исходами. Считая каждую смоделированную перестановку нижней строкой подстановки того же размера, а исходом моделирования – такое получение подстановки, для каждого исхода вычисляем число циклов и определяем среди смоделированных количество M исходов с k циклами. Тогда искомое число исходов нашей схемы подстановок с k циклами приближенно определяется методом пропорций по формуле

$$N \approx \frac{Mn!}{N_A} = \tilde{N}.$$

Исследуем качество полученной оценки \tilde{N} для N исходов нашей схемы, где M/N_A – наблюдаемая частота успеха опыта – появления ее исхода среди N_A исходов схемы перестановок. Число M можно представить в виде $M = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_A}$, где при $i = \overline{1, N_A}$ $\{X_i\}$ – случайные величины, имеющие распределение Бернулли с вероятностью успеха $p = N/n!$. Тогда по уточненной по неравенству Чебышева теореме Бернулли выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \gamma &= P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{n!}\right| < \varepsilon^*\right) \\ &= P\left(\left|\frac{Mn!}{N_A} - N\right| < \varepsilon^* n!\varepsilon\right) \\ &= P(|\tilde{N} - N| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{N_A(\varepsilon^*)^2} \geq 1 - \frac{(n!)^2}{4N_A\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

где для оценки \tilde{N} числа N исходов нашей схемы ε – ее точность, а $\gamma \geq 1 - \frac{(n!)^2}{4N_A\varepsilon^2}$ – оценка ее надежности γ с этой точностью. Для получения нетривиальной оценки для γ потребуем, чтобы $N_A > (n!)^2/4\varepsilon^2$.

Более точную оценку надежности γ с заданной точностью ε оценки \tilde{N} числа N исходов нашей схемы можно получить по следствию из теоремы Муавра – Лапласа из соотношений

$$\begin{aligned} \gamma &= P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{n!}\right| \leq \varepsilon^*\right) \\ &= P\left(\left|\frac{Mn!}{N_A} - N\right| \leq \varepsilon^* n!\varepsilon\right) \\ &= P(|\tilde{N} - N| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon^* \sqrt{N_A/p(1-p)}\right) \\ &\geq 2\Phi(2\varepsilon \sqrt{N_A/n!}), \end{aligned}$$

где $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^x \exp^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кнут Д.* Искусство программирования на ЭВМ. Т. 1. М.: Мир, 1976. 736 с.
2. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 287 с.
3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторное представление схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам // *Дискретная математика*. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 126–135. doi: 10.4213/dm1410
4. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2016. № 4. С. 25–27.
5. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ случайных подстановок заданных цикловых

REFERENCES

1. *Knuth D.* Iskusstvo programmirovaniya na EVM [The art of computer programming]. Moscow: Mir, 1976.
2. *Riordan D.* Vvedenie v kombinatornyi analiz [Introduction to combinatorial analysis]. Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1963. 287 p.
3. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornoe predstavlenie skhemy razmeshcheniya razlichimyykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Combinatorial representations for the scheme of allocations of distinguishable particles into indistinguishable cells]. *Diskretnaya matem. [Discrete Math. Appl.]*. 2017. Vol. 29, no. 1. P. 126–135. doi: 10.4213/dm1410
4. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz obobshchennoii skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of the sequential actions]. *Promyshlennyye ASU i kontroллery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 4. P. 25–27.
5. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz sluchainyykh podstanovok zadannykh tsiklovykh struktur [Combinatorial analysis of random permutations of given structures of cycle].

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: +79037411345

структур // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2017. № 11. С. 29–34.

6. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2016. № 2. С. 35–41.
7. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2015. № 8. С. 33–38.
8. *Энатская Н. Ю., Колчин А. В.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // *Труды КарНЦ РАН*. 2014. № 4. С. 80–86.
9. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2014. № 8. С. 15–21.

Поступила в редакцию 10.01.2020

Promyshlennyye ASU i kontroллery [Industrial ACS and Controllers]. 2017. No. 11. P. 29–34.

6. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy odnovremennykh i posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the schemes of simultaneous and sequential actions]. *Promyshlennyye ASU i kontroллery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 2. P. 35–41.
7. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of combination scheme]. *Promyshlennyye ASU i kontroллery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.
8. *Enatskaya N. Yu., Kolchin A. V.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 80–86.
9. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, and Diagnostics]. 2014. No. 8. P. 15–21.

Received January 10, 2020

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО РАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ БЕЗ ПУСТЫХ ЯЧЕЕК

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Задачи анализа схемы здесь состоят в построении процедуры перечисления исходов схемы, определении их числа, решении задачи нумерации для этих исходов и их моделировании с использованием полученных здесь же результатов аналогичных исследований той же схемы без ограничений.

Ключевые слова: различимые частицы; схема сочетаний; минимальные элементы в ячейках.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE SCHEME OF ALLOCATION OF DISTINGUISHABLE PARTICLES INTO DISTINGUISHABLE CELLS WITHOUT EMPTY CELLS

The problems of the scheme analysis here consist in arranging the procedure for enumerating the outcomes of the scheme, determining their number, solving the problem of numbering these outcomes, and their modelling using the results obtained here through similar studies of the same scheme but without restrictions.

Key words: distinguishable particles; combination scheme; minimal elements in cells.

ВВЕДЕНИЕ

Пространство элементарных исходов нашей схемы состоит из части равновероятных исходов схемы размещений с повторением. Причем каждый исход нашей схемы является исходом общей схемы размещений с повторением, поэтому вероятность появления исходов нашей схемы среди исходов схемы размещений с повторением равна отношению чисел исходов нашей схемы к числу ее исходов. Распределение вероятностей исходов нашей схемы будем определять.

Вероятностный анализ общей схемы представляет собой известную «классическую задачу о дробинках», состоящую в нахождении

вероятностного распределения числа пустых ячеек $\mu_0(r, n)$ при размещении r различимых частиц по n различимым ячейкам по схеме размещений с повторением [1].

Задачи комбинаторного анализа нашей схемы здесь состоят в построении процедуры перечисления исходов схемы, определении их числа, решении задачи нумерации (ЗН) для этих исходов и их моделировании с использованием полученных здесь же результатов аналогичных исследований той же общей схемы (без ограничения на отсутствие пустых ячеек).

Введем обозначения для заданных параметров схемы: n – число ячеек, r – число частиц. Число исходов нашей схемы N_A выра-

жаются через числа Стирлинга второго рода $\sigma(r, n)$ по формуле $N_A = n! \sigma(r, n)$.

В [1] в общей схеме получен закон распределения числа $\mu_0(r, n)$ пустых ячеек:

$$P(\mu_0(r, n) = k) = C_n^k (1 - k/n)^r P(\mu_0(r, n - k) = 0),$$

где

$$P(\mu_0(r, n) = 0) = \sum_{i=0}^n C_n^k (-1)^i (1 - i/n)^r,$$

откуда число исходов нашей схемы N_A вычисляется по формуле

$$N_A = n^r P(\mu_0(r, n) = 0) = \sum_{i=0}^n C_n^k (-1)^i (n - i)^r;$$

найлены моменты для $\mu_0(r, n)$, представим, в частности, выражения для его математического ожидания $M\mu_0(r, n)$ и дисперсии $D\mu_0(r, n)$:

$$M\mu_0(r, n) = n(1 - u/n)^r$$

$$D\mu_0(r, n) = n(n - 1)(1 - 2/n)^r + n(1 - 1/n)^r - n^2((1 - 1/n)^{2r}).$$

Комбинаторный анализ нашей исследуемой схемы A будет предварять проведение аналогичных исследований по направлениям перечисления и решения ЗН той же (общей) схемы без ограничений (схемы размещения с повторением – схема B), результаты которых будут использоваться. В ней при размещении r различных частиц по n различным ячейкам без ограничения числа частиц в ячейке известно число исходов $N_B = n^r$, а в перечислительной комбинаторике это одна из базовых схем. Естественная равновероятность исходов в ней соответствует равновероятности размещения частиц по ячейкам. Анализ схемы B , используемый здесь как вспомогательный, представляет отдельный интерес. В ней получено вероятностное распределение числа пустых ячеек из перечислительной процедуры ее исходов.

1. АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО РАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ – СХЕМЫ B

1.1. Вид исхода схемы и построение процесса их перечисления

Перечисление исходов схемы будем производить методом графов (см. [6]) последовательным поединичным добавлением частиц от 1 до r на каждом шаге их равновероятного

размещения по n ячейкам с графическим изображением этого процесса. Общее число исходов схемы на последнем r -м шаге должно быть равно N_B .

Исход i -го шага ($i = \overline{1, r}$) вида $R_*^{(i)}$ будем изображать n -мерным вектором $(s_{1_i}, \dots, s_{n_i})$, компоненты которого перечисляют через запятую номера элементов, попавших за i шагов в подряд идущие ячейки с номерами от 1 до n . В графе каждый исход будем заключать в круглые скобки. Если в j -й ячейке ($j = \overline{1, n}$) на i -м шаге более одной частицы, то номера этих частиц в j -й компоненте исхода будем перечислять через запятую в возрастающем порядке и заключать в круглые скобки. Исходы на каждом шаге процесса их перечисления будем нумеровать в порядке роста номера ячейки добавления частицы на этом шаге. Обозначаем $N_*^{(r)} = N_*$, $R_*^{(r)} = R_*$.

Приведем пример перечисления исходов схемы (рис. 1).

Пример 1. Пусть $n = 3$, $r = 3$. Число исходов схемы $N = 3^3 = 27$.

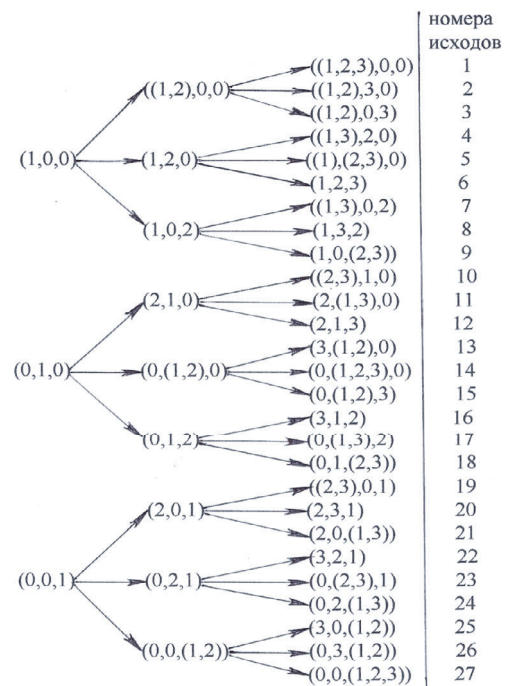


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы примера 1

Fig. 1. The enumeration graph of outcomes of scheme of example 1

1.2. Задача нумерации (ЗН) исходов схемы

Результаты прямой и обратной ЗН могут быть получены из [3] как частный случай оди-

наковых чисел n исходов каждого из последовательных действий. Приведем их в условиях и обозначениях исследуемой здесь схемы без ограничений в явном виде.

Прямая ЗН

Пусть дан номер исхода схемы $N_* = N_*^{(r)}$, требуется найти его вид R_* .

Шаги решения:

1) находим номера исходов траектории T графа к конечному исходу с данным номером, т. е. находим $\bar{N}_* = (N_*^{(1)}, \dots, N_*^{(r)})$ рекуррентно, начиная с $N_*^{(r-1)}$ до $N_*^{(1)}$ по формуле

$$N_*^{(i-1)} = \left[\frac{N_*^{(i)} + n - 1}{n} \right] \quad (1)$$

при $i = \overline{1, r}$, где $[Z]$ означает целую часть числа Z ;

2) находим номера исходов траектории T в пучках графа, т. е. находим $\bar{L} = (L_1, \dots, L_r)$ рекуррентно по формуле

$$L_i = N_*^{(i)} \bmod n + C_{n-v_i}^n, \quad (2)$$

где $v_i = N_*^{(i)} \bmod n$;

3) по результатам 2) выписываем искомый вид исхода, ставя каждое значение номера элемента i в R_* на место ее L_i -й компоненты.

Приведем числовой пример.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 дан номер исхода $N_* = N_*^{(3)} = 13$. Требуется найти его вид R_* . По графу на рис. 1 $R_* = (3, (12), 0)$. Найдем теперь R_* по алгоритму:

1) по (1) $N_*^{(2)} = [(13 + 3 - 1)/3] = 5$; $N_*^{(1)} = [(5 + 3 - 1)/3] = 2$;

2) по (2) $v_1 = 2 \bmod 3 = 2 \Rightarrow C_{n-v_1}^n = 0 \Rightarrow L_1 = 2 \bmod 3 = 2$,

$v_2 = 5 \bmod 3 = 2 \Rightarrow C_{n-v_2}^n = 0 \Rightarrow L_2 = 5 \bmod 3 = 2$,

$v_3 = 13 \bmod 3 = 1 \Rightarrow C_{n-v_3}^n = 0 \Rightarrow L_3 = 2 \bmod 3 = 1$;

3) из 2) в R_* 1 стоит во второй компоненте, 2 – во второй компоненте, 3 – в первой компоненте, откуда получаем $R_* = (3, (1, 2), 0)$, что совпадает с результатом по графу.

Обратная ЗН

Пусть дан вид исхода схемы $R_* = R_*^{(r)}$, требуется найти его номер N_* .

Шаги решения:

1) исходя из того, что L_i , $i = \overline{1, r}$ – номер компоненты в R_* , содержащей номер элемента i , из данного R_* получаем $\bar{L} = (L_1, \dots, L_r)$;

2) находим номера исходов траектории T по рекуррентной формуле при $(N_*^{(1)} = L_1)$

$$N_*^{(i)} = (N_*^{(i-1)} - 1)n + L_i \quad (3)$$

при $i = \overline{2, r}$, откуда получаем искомый номер исхода

$$N_*^{(r)} = (N_*^{(r-1)} - 1)n + L_r \text{ при } i = \overline{1, r}.$$

Приведем числовой пример.

Пример 3. Пусть в условиях примера 1 дан вид исхода $R_* = R_*^{(3)} = (3, (1, 2), 0)$. Требуется найти его номер N_* . По графу на рис. 1 $N_* = 13$. Найдем теперь N_* по алгоритму:

1) $\bar{L} = (2, 2, 1)$ – номера в пучках исходов траектории T , ведущей к исходу данного вида;

2) по (3) $N_*^{(1)} = 2$, $N_*^{(2)} = (2 - 1)3 + 2 = 5$, $N_*^{(3)} = N_* = (5 - 1)3 + 3 = 13$, что совпадает с результатом по графу.

1.3. Моделирование исходов схемы B

Для моделирования исхода схемы предлагается способ БМ, сложность которого будет определяться разыгрыванием случайного номера исхода схемы от 1 до n^r при равномерном распределении исходов и вычислением вида ее исхода по формулам (1) и (2) – результата решения прямой ЗН для нее, приводящий к линейной сложности.

2. АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО РАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ БЕЗ ПУСТЫХ ЯЧЕЕК – СХЕМЫ А

Будем считать, что необходимое условие для возможной реализации схемы на ее параметры $r \geq n$ выполнено, частицы пронумерованы числами от 1 до r , а ячейки – от 1 до n . Под выбором частиц и ячеек подразумеваем выбор их номеров, а под сравнением элементов понимаем сравнение их номеров.

2.1. Построение процесса перечисления исходов схемы и их число N_A

Перечисление исходов схемы можно производить методом графов (см. [6]) путем отбраковки по данному ограничению исходов схемы B . Для численных расчетов при заданных конкретных значениях параметров схемы это, в силу простоты процедуры отбраковки, вполне приемлемый способ представления всех исходов нашей схемы A . Однако кроме численного подсчета числа N_A исходов схемы такой подход связан с анализом лишних исходов и не дает общей формулы для N_A как функции от ее параметров. Поэтому наряду с первым способом будем строить процесс прямого перечисления исходов схемы A .

Прямое перечисление исходов схемы проводится в 3 этапа: 1-й состоит в фиксации всех составов минимальных номеров частиц в ячейках по схеме сочетаний [4] в возрастающем порядке; 2-й – в порционном добавлении остальных частиц в поединично растущие группы ячеек в порядке роста всех наборов фиксированных минимальных номеров в них на 1-м этапе, их сохраняющих по схеме размещения с повторением; 3-й – во всех перестановках, полученных на 2-м этапе заполнения всех ячеек. Здесь 1-й и 2-й этапы обеспечивают неповторяемость видов исходов схемы, а 3-й этап учитывает различимость ячеек.

Шаги прямого перечисления.

1) Из r частиц выбираем всеми способами по схеме сочетаний n частиц, перечисляем их в возрастающем порядке, в этом же порядке размещаем их по ячейкам с первой ячейки. Пусть это номера $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$.

2) Остальные $(r - n)$ частиц размещаем по всем ячейкам так, чтобы частицы, первоначально размещенные по одной в каждую ячейку в 1), были в них минимальными. Это значит, что в первой ячейке $r_1 = 1$ и обязательно находятся все частицы из остальных с номерами $< r_2$, в первых двух ячейках – равновероятно и обязательно все частицы из остальных с номерами $< r_3$, в первых трех – равновероятно и обязательно все частицы из остальных с номерами $< r_4$ и т. д., и, наконец, во всех ячейках – равновероятно все остальные частицы.

3) В каждом исходе 2) $n!$ способами по схеме перестановок [5] переставляем составы n ячеек. В результате получаем все исходы нашей схемы A .

По представленной логике прямого перебора исходов схемы A найдем их число, используя операцию суммы по перечислению всех исходов 1) схемы сочетаний с числом исходов C_{r-1}^{n-1} (без 1, которая находится в первой ячейке в 1)) по всем описанным добавлениям остальных частиц, сохраняющим первые размещенные по ячейкам в 1) частицы минимальными при каждом фиксированном исходе пункта 1): $\bar{r} = (1, r_2, \dots, r_n)$. Обозначим эту операцию по перечислению таких исходов в виде $\sum_{(C^*)}$ с перебором всех разных $\{\bar{r}\}$ и приведем формулу для N_A , отражающую перечисление исходов по всем описанным шагам:

$$N_A = n! \sum_{(C)} \left(\prod_{i=1}^{n-1} i^{r_{i+1} - r_i - 1} \right) n^{r - r_n}. \quad (4)$$

Замечание 1. Здесь первый и второй шаги прямого перечисления исходов представляют

перечисление исходов схемы (с теми же параметрами) размещения различных частиц по неразличимым ячейкам без пустых ячеек.

Пример 4. В условиях примера 1 (рис. 1) по графу среди $3^3 = 27$ исходов схемы B находим $N_A = 6$ исходов схемы A : $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$. В операции по перечислению исходов схемы сочетаний – один исход $(1, 2, 3)$, откуда по (4) получаем $N_A = 1^{2-1-1} 2^{3-2-1} 3! = 6$, т. е. результаты совпали с визуальными по графу.

По приведенной во Введении формуле из [1] $N_A = C_3^0(-1)^0 3^3 + C_3^1(-1)^1 2^3 + C_3^2(-1)^2 1^3 + C_3^3(-1)^3 0^3 = 27 - 24 + 3 - 0 = 6$, что совпадает с вышеполученным результатом.

б) Для пояснения вычисления числа N_A приведем еще пример с $n = 3$, $r = 4$ без графической иллюстрации, т. к. число исходов соответствующей схемы B велико и равно $3^4 = 81$. Здесь по перечислению (C) , очевидно, имеем 3 исхода: $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4)$, откуда по (4) получаем $N_A = 1^{2-1-1} 2^{3-2-1} 3^{4-3} 3! + 1^{2-1-1} 2^{4-2-1} 3^{4-4} 3! + 1^{3-1-1} 2^{4-3-1} 3^{4-4} 3! = 3!(3 + 2 + 1) = 36$.

По приведенной во Введении формуле из [1] $N_A = C_3^0(-1)^0 3^4 + C_3^1(-1)^1 2^4 + C_3^2(-1)^2 1^4 + C_3^3(-1)^3 0^4 = 81 - 48 + 3 - 0 = 36$, что совпадает с вышеполученным результатом.

Замечание 2. Если по схеме сочетаний с повторением без пустых ячеек (с числом ячеек n и числом частиц r) найти все наборы $\bar{m}^{(j)} = (m_1^{(j)}, \dots, m_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, C_{r-1}^{n-1}$ уровней заполнения ячеек, то для числа исходов нашей схемы N_A по схеме перестановок с повторением получаем новую формулу:

$$N_A = \sum_{(C^*)} \frac{r!}{\prod_{i=1}^n (m_i^{(j)})!}, \quad (5)$$

где сумма (C^*) берется по всем наборам (группам) $\{\bar{m}^{(j)}\}$.

В условиях примера 4 в случаях а) $n = 3$, $r = 3$ и б) $n = 3$, $r = 4$ вычислим по (5) число N_A исходов схемы и сравним с полученными там значениями:

а) при $(C^*) = \{(1, 1, 1)\}$ получаем $N_A = 3!/(1!)^3 = 6$;

б) при $(C^*) = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$ получаем $N_A = 3 \cdot 4! / 2!(1!)^2 = 36$. Полученные результаты совпали с ранее полученными в примере 4 по формуле (4).

Визуально эти результаты легко проверяются:

а) здесь $\bar{m}^{(j)} = (1, 1, 1)$ – это по составу ячеек есть $(1, 2, 3)$, что при всех их перестановках дает $3! = 6$ исходов;

б) здесь $\bar{m}^{(j)} = (1, 1, 2)$ – это по составу ячеек есть $(1, 2, (3, 4)), (1, 3, (2, 4)), (1, 4, (2, 3)), (2, 3, (1, 4)), (2, 4, (1, 3)), (3, 4, (1, 2))$, что при всех их перестановках дает по каждому $3! = 6$ вариантов, приводящих к их общему числу 36 исходов.

Замечание 3. Из замечания 1 следует, что из (4) $N_A/n!$ есть число исходов схемы (с теми же параметрами) размещения различных частиц по неразличимым ячейкам без пустых ячеек.

2.2. ЗН в схеме A

Схема A представляет собой схему последовательных действий приведенных выше этапов прямого перечисления ее исходов, для которой ЗН решена в [3] при решенных ЗН всех трех ее этапов. Для 1-го и 3-го этапов ЗН решены соответственно в [4] и [5]. Таким образом, решение ЗН нашей схемы A сводится к ее решению для 2-го этапа, т. е. для объединения действий схем $\{A_j\}$, состоящих в размещении r различных частиц по n неразличимым ячейкам с j -м n -мерным, упорядоченным по возрастанию набором минимальных номеров содержащихся в них частиц, где под j в схеме A_j понимается j -й результат 1-го этапа прямого перечисления исходов схемы A при $j = 1, C_{r-1}^{n-1}$. Решаем ЗН сначала в схеме A_j , а потом для 2-го этапа.

2.2.1. ЗН в схеме A_j

Схема A_j представляет собой схему n последовательных действий порционных добавлений остальных частиц в поединично растущие группы ячеек в порядке роста фиксированных минимальных номеров в них, их сохраняющих, а из [6] ЗН решена при известных размерах пучков этих n действий, которые достаточно найти для решения здесь ЗН.

При фиксированном \bar{r} приведем формулу для числа N_{A_j} исходов схемы A_j :

$$N_j = N_{A_j} = n^{r-r_n} \prod_{m=1}^{n-1} m^{r_{m+1}-r_m-1}. \quad (6)$$

Для наглядности приведем пример перечисления исходов схемы A_j .

Пример 5. Пусть $n = 3$, $\bar{r} = (1, 2, 5)$, а) $r = 5$; в) $r = 6$.

Приведем граф перечисления исходов схемы с пошаговым порционным добавлением частиц в поединично растущие группы ячеек, описанного выше. В условиях небольших значений параметров легко проверить правильность пошагового перечисления исходов схемы и сравнить с вычисленным по (6).

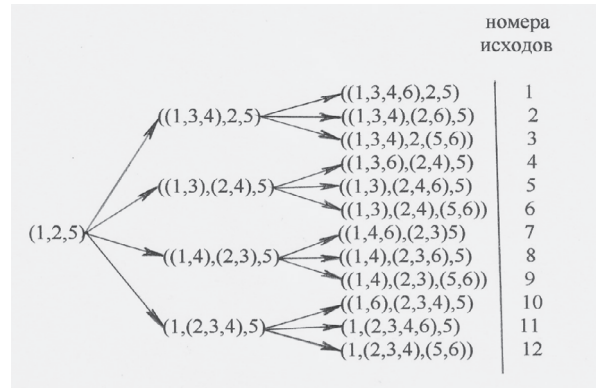


Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы примера 5

Fig. 2. The enumeration graph of outcomes of scheme of example 5

Тогда по (6) имеем в случае а) $N_{A_j} = 2^{5-2-1}3^{5-5} = 4$; а в случае в) $N_{A_j} = 2^{5-2-1}3^{6-5} = 12$, что совпадает с результатами чисел исходов итераций по графу на рис. 2.

Пусть в схеме A_j задан вектор $\bar{r} = (1, r_2, \dots, r_n)$. Тогда из логики прямого перечисления исходов схемы A_j следует, что размер пучков j -го из n последовательных действий схемы в графе их перечисления равен $i^{r_{i+1}-r_i-1}$, $i = 2, n-1$, при $i = 1$ размер пучка есть $r_2 - 2$, а при $i = n$ размер пучков есть n^{r-r_n} . Таким образом, по [3] считаем решенной ЗН в этой схеме, т. е. что установлено взаимнооднозначное соответствие между номером ее исхода N_{j*} и видом R_{j*} .

2.2.2. ЗН 2-го этапа перечисления исходов схемы A

Для краткости обозначим схему этого пункта схемой D.

Схема D представляет собой объединение C_{r-1}^{m-1} действий по схеме A_j по всем результатам первого этапа фиксации векторов \bar{r} с числами исходов из (6) N_j , $j = 1, C_{r-1}^{m-1}$ и решена в общем случае в [2].

Прямая ЗН. Пусть дан номер исхода $N_*^{(D)}$. Требуется найти его вид $R_*^{(D)}$.

Шаги решения:

1) находим номер j схемы A_j (j -го пучка схемы D), содержащий конечный с данным номером (искомый) исход в схеме D, по формуле

$$j = \delta + \max t : \left(\sum_{l=1}^t N_l = S \leq N_*^{(D)} \right),$$

где $\delta = 0$ при $S = N_*^{(D)}$ и $\delta = 1$ при $S < N_*^{(D)}$;

2) находим номер q искомого исхода в j -м пучке схемы D :

$$q = N_*^{(D)} - \sum_{l=1}^t N_l;$$

3) по номеру q в j -м пучке схемы D , т. е. в q -м исходе схемы A_j , в которой ЗН решена по результату прямой ЗН, находим искомым вид исхода $R_*^{(D)}$.

Обратная ЗН. Пусть дан вид исхода $R_*^{(D)}$. Требуется найти его номер $N_*^{(D)}$.

Шаги решения:

1) по виду исхода $R_*^{(D)}$ определяем номер j исхода схемы сочетаний 1-го этапа перечисления исходов схемы A , т. е. номер пучка j в схеме D ;

2) по решенной обратной ЗН в схеме A_j по данному виду исхода $R_*^{(D)}$ находим его номер q в схеме A_j , т. е. номер q в j -м пучке схемы D ;

3) по результатам 1) и 2) получаем $N_*^{(D)} = \sum_{l=1}^{j-1} N_l + q$.

ЗН схемы A , представляющей собой схему последовательных действий трех этапов перечисления ее исходов, решена в [3] при решенных ЗН всех этапов, что мы теперь имеем в схеме A , т. к. для 3-го этапа ЗН тоже решена в [5].

2.3. Распределение вероятностей числа пустых ячеек в общей схеме и распределение вероятностей исходов нашей схемы

Это распределение вероятностей получено в [1] и приведено во введении. Здесь оно будет представлено через $N_A = N_A(r, n)$.

По результату формулы (4) для $N_A(r, n)$ получаем вероятностное распределение для числа пустых ячеек μ_0 в общей схеме, т. е.

$$P(\mu_0 = k) = \frac{C_n^k N_A(r, n - k)}{n^r},$$

где n^r в знаменателе – число исходов общей схемы, а в числителе стоит число исходов общей схемы с k пустыми ячейками, получаемое C_r^k вариантами выбора k пустых ячеек и размещения в остальные $(n - k)$ ячеек r частиц без пустых ячеек (при $r \geq n - k = \bar{1}, n - \bar{1}$).

Вероятностное распределение исходов схемы A будем находить удалением недопустимых состояний в графе схемы B их перечисления по МГ, в котором исходы схемы равновероятны по п. 1.1. Все исходы схемы B являются допустимыми в схеме A при условии на число размещенных частиц $i : (r - i) \geq (n - 1)$, означающем достаточность числа остальных ча-

стиц для их размещения по всем пустым ячейкам при всех возможных вариантах после i -й итерации, т. е. до $i = i^* = r - n + 1$ (включительно), после которой часть исходов схемы B становятся недопустимыми для схемы A . Сформулируем ПРАВИЛА удаления недопустимых состояний с пропорциональным пересчетом вероятностей переходов в допустимые состояния схемы A следующей итерации:

1) все состояния допустимы и не удаляются до i^* -й итерации включительно;

2) состояния недопустимы и удаляются на итерациях $i > i^* = r - n + 1$, когда число пустых ячеек в них $> (r - i)$;

3) при числе пустых ячеек, равном $(r - i)$, на следующей итерации равновероятно размещаем частицу по всем пустым ячейкам;

4) удаление недопустимых состояний означает пропорциональное перераспределение вероятностей равновероятных переходов среди всех остальных состояний в пучке, содержащем это состояние.

Теперь приведем пояснительный пример вычисления вероятностного распределения исходов схемы A путем их пересчета из равновероятных исходов схемы B .

Пример 6. Пусть $n = 2, r = 3$.

Приведем в данном примере граф перечисления исходов схемы B (рис. 3).

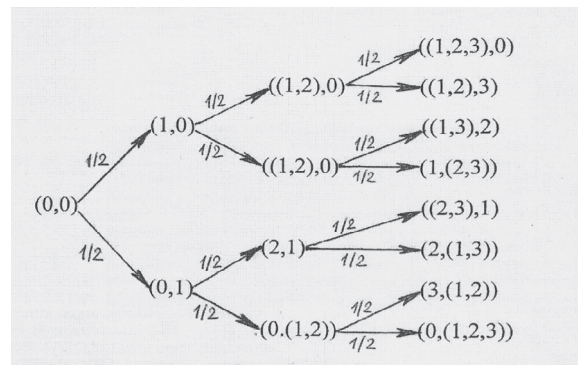


Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы B примера 6

Fig. 3. The enumeration graph of outcomes of scheme B of example 6

Удаляя по одному крайнему недопустимому итоговому исходу с их траекториями и пропорциональным пересчетом итерационных вероятностей оставшихся исходов, получим граф перечисления исходов в схеме A и по нему вычислим вероятности ее исходов:

$$P((1, 2), 3) = P(3, (1, 2)) = (1/2)^2 = 1/4, \text{ а вероятности остальных четырех исходов по } (1/2)^3 = 1/8.$$

Проверка на распределение вероятностей:
 $4(1/8) + 2(1/4) = 1$.

2.4. Моделирование исходов схемы A

Оценим сложность способа моделирования одного исхода схемы B через отбраковку исходов для схемы A по отсутствию в ее исходе $R_r = (n_1, \dots, n_r)$ хотя бы одного из номеров ячеек от 1 до n . Число таких исходов схемы B до первого исхода схемы A , т. е. длина серии исходов схемы B , впервые заканчивающейся исходом схемы A , распределено по геометрическому закону с вероятностью исхода схемы A , полученного в п. 2.3 при $k = 0$ по формуле для $P = P(\mu_0 = 0)$. Тогда с учетом этого сложность моделирования одного исхода схемы A возрастает по сравнению со схемой B в $1/P$ раз, сохраняя линейную сложность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.

REFERENCES

1. Kolchin V. F., Sevast'yanov B. A., Chistyakov V. P. Sluchainye razmeshcheniya [Random allocations]. Moscow: Nauka, 1976. 223 p.
2. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz obobshchennoi skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of the sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontroliery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 4. P. 25–27.
3. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhem odnovremennykh i posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the schemes of simultaneous and sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontroliery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 2. P. 35–41.

2. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 25–27.

3. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.

4. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

5. Энатская Н. Ю., Колчин А. В. Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.

6. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 8. С. 15–21.

Поступила в редакцию 09.01.2020

4. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontroliery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

5. Enatskaya N. Yu., Kolchin A. V. Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 80–86.

6. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, and Diagnostics]. 2014. No. 8. P. 15–21.

Received January 09, 2020

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталья Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: +79037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345

ЮБИЛЕИ И ДАТЫ

ЮРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ЗАЙКА (к 60-летию со дня рождения)



Юрий Васильевич Заика в 1982 г. окончил Ленинградский госуниверситет с красным дипломом (кафедра механики управляемого движения). Затем – аспирантуру под руководством профессора Н. Е. Кирина, заслуженного деятеля науки РФ, профессионала и Учителя, известного специалиста в области вычислительных методов теории оптимального управления. После защиты кандидатской диссертации в 1985 г. («Сопряженные задачи теории наблюдаемости динамических систем», 01.01.09 – математическая кибернетика) Ю. В. Заика работал в Московском авиационном институте (филиал «Восход», Байконур). Отмечен грамотой командования космодрома Байконур за успешную научную работу. С 1991 г. – доцент, затем профессор математического факультета Петрозаводского госуниверситета. Окончил докторантуру СПбГУ (под рук. чл.-корр. РАН В. И. Зубова, одного из признанных лидеров в области механики, теории устойчивости и управления). Докторскую диссертацию защитил в 1998 г. в Институте информати-

ки и автоматизации РАН («Интегральные операторы наблюдения и идентификации динамических систем», 05.13.16). Аттестат профессора по кафедре математического моделирования систем управления получил в 2002 г. С 1999 г. Ю. В. Заика работает заведующим (затем руководителем) лабораторией моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН. Традиционно тематика научных исследований лаборатории связана с моделированием и оптимизацией структуры и параметров энергетических, транспортных систем, а также с задачами математической физики и вычислительного материаловедения.

Научные интересы Ю. В. Заики: интегральные операторы наблюдения нелинейных динамических систем; оценивание функционалов на решениях систем с запаздыванием в условиях неопределенности; методы решения экстремальных задач в химической термодинамике; краевые задачи взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами с нелинейными динамическими граничными условиями и свободными подвижными границами раздела фаз; численное моделирование динамики газовой фазы почв. В настоящее время научные исследования сконцентрированы именно на последних из упомянутых задач, которые имеют большое теоретическое и практическое значение. Интерес к водороду вызван в основном перспективами экологически чистой энергетики (в отдаленной перспективе – термоядерной, достаточно упомянуть проект ITER) и технологическими проблемами безопасности хранения и транспортировки углеводородного сырья. Это особенно актуально для Северного региона Российской Федерации, в том числе и для Республики Карелия. Возникают, в частности, проблемы защиты конструкционных материалов от водородной коррозии. Вычислительное материаловедение позволяет существенно сократить время и материальные затраты на эксперимен-

тальные исследования, в особенности это касается экстремальных условий эксплуатации материалов в водородосодержащей среде. Помимо прямых задач моделирования возникает потребность в устойчивых вычислительных алгоритмах решения обратных задач параметрической идентификации моделей по экспериментальным данным. Это позволяет прогнозировать эксплуатационные свойства новых материалов в условиях всевозрастающих требований экологической безопасности.

Аналогичные (с математической точки зрения) задачи численного моделирования возникают при анализе динамики эмиссии/поглощения углекислого газа (и метана) лесными почвами и болотными экосистемами Восточной Финноскандии в условиях локальных (превалирующее общее мнение – глобальных) климатических изменений. Помимо текущего мониторинга ситуации необходима оценка параметров моделей с целью прогнозирования и предварительного анализа возможных сценариев развития экологических изменений с учетом антропогенных факторов.

Ю. В. Заика является автором более 150 научных работ, ряд из которых опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах: «Дифференциальные уравнения», «Известия РАН (Теория и системы управления)», «Математический сборник», «Математические заметки», «Математическое моделирование», «Журнал вычислительной математики и математической физики», «Журнал технической физики», «Фундаментальная и прикладная математика», «Заводская лаборатория», «Journal of Alloys and Compounds», «NATO Science Series (Mathematics, Physics and Chemistry)», «Обзор прикладной и промышленной математики», «Материаловедение», «International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences», «Applied Mathematical Modelling», «Advances in Materials Science and Applications», «International Journal of Hydrogen Energy» и др. Результаты докладывались на многочисленных российских и международных конференциях.

Ю. В. Заика ведет большую педагогическую работу. Под его руководством защищаются магистерские и кандидатские диссертации. Студенты имеют возможность работать в лаборатории, выполняя научные исследования по различным темам, выступать с докладами на представительных научных форумах (среди достижений – лучшие доклады в секции «Математическое моделирование» международных конференций «Ломоносов» в МГУ, пленарный доклад на форуме

«Всемирный день физики в МГУ», 2005–2007). Работы учеников отмечены также грантами Конкурсного центра фундаментального естествознания при СПбГУ (дипломный и кандидатский проекты), грантами Федеральной целевой программы «Интеграция», Российского фонда фундаментальных исследований («Мобильность молодых ученых»), Фонда содействия отечественной науке («Лучшие аспиранты РАН» и «Кандидаты наук РАН»), премией по поддержке талантливой молодежи Министерства образования и науки Российской Федерации (приоритетный национальный проект «Образование»). Ю. В. Заика – член Ученых советов КарНЦ РАН и ПетрГУ, диссертационного совета в ПетрГУ, неоднократно являлся председателем Государственной аттестационной комиссии на математическом и физико-техническом факультетах ПетрГУ.

В 2005–2006 гг. на базе ИПМИ КарНЦ РАН (Ю. В. Заика – сопредседатель Оргкомитета) организованы и проведены совместно с «Росатомом», Российским федеральным ядерным центром – ВНИИЭФ (г. Саров), СПбГУ и ПетрГУ международные школы молодых ученых «Взаимодействие водорода с конструкционными материалами: эксперимент и математическое моделирование». Лекторы – ведущие специалисты из России, США (Аргоннская и Сандийские национальные лаборатории), Норвегии. С тех пор Ю. В. Заика – член международного Программного комитета школы молодых ученых «Взаимодействие изотопов водорода с конструкционными материалами», которая с 2008 г. носит имя выдающегося специалиста в этой области А. А. Курдюмова. Ю. В. Заика является членом Американского математического общества, референтом журнала «Mathematical Review».

В 2005 г. Ю. В. Заика награжден Почетной грамотой КарНЦ РАН за значительный вклад в развитие фундаментальных и прикладных научных исследований. В 2006–2007 гг. отмечен грантом Фонда содействия отечественной науке в номинации «Доктора наук РАН». Государственные награды: в 2010 г. Ю. В. Заике присвоено звание «Заслуженный деятель науки Республики Карелия», а в 2016 г. он награжден Почетной грамотой ФАНО России.

В течение ряда лет Ю. В. Заика руководил проектами в рамках программы Отделения математических наук РАН «Вычислительные и информационные технологии решения больших задач» (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН), исследования поддерживались Российским фондом фундаментальных исследований.

С 2017 г. Ю. В. Заика является заместителем председателя Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук» по научно-организационной работе. За это время КарНЦ РАН реорганизован в мультидисциплинарный исследовательский центр, который отнесен к научным организациям первой (высшей) категории. Ю. В. Заика руководил рабочими группами по разработке Устава и коллективного договора, других нормативно-правовых документов. На этом посту он зарекомендовал себя как высококвалифицированный специалист, пользующийся заслуженным авторитетом у коллег, ответственно и эффективно решающий научные и организационные задачи.

Коллектив ФИЦ «Карельский научный центр РАН» поздравляет юбиляра и желает ему дальнейших творческих успехов.

*О. Н. Бахмет, член-корр. РАН, д. б. н.,
председатель КарНЦ РАН,*

*А. Н. Реттиева, д. ф.-м. н.,
зам. директора ИПМИ КарНЦ РАН*

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Ю. В. ЗАИКИ ЗА 10 ЛЕТ

2009. Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydrating // *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier. Vol. 33, no. 10. P. 3776–3791. (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

2010. Параметрическая идентификация модели водородопроницаемости по временам запаздывания // *Журнал технической физики*. Т. 80, вып. 3. С. 31–39. (Совместно с Е. П. Борматовой.)

2011. Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations // *Int. J. of Hydrogen Energy*, Elsevier. Vol. 36. P. 1295–1305. (Совместно с Е. П. Bormatova.)

Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface // *Int. Journal of Hydrogen Energy*, Elsevier. Vol. 36. P. 1239–1247. (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

Алгоритм минимизации энергии Гиббса: расчет химического равновесия // *Вычислительные технологии*. № 2. С. 45–54.

2012. Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface // *Mathematical Modelling* / Ed. by C. Brennan.

Nova Sci. Publishers, New York. P. 269–302. (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

Hydrogen-solid boundary-value problems with free phase transition interface // *Mathematical Modelling* / Ed. by C. Brennan. New York: Nova Sci. Publishers. P. 303–350. (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

2013. Интегральные операторы прогнозирования и идентификация моделей водородопроницаемости. Петрозаводск: КарНЦ РАН. 505 с.

2014. Modelling of hydrogen permeability of structural materials through protective coating defect // *Advances in Materials Science and Applications*. Vol. 3, iss. 2. P. 82–96. (Совместно с Е. К. Kostikova.)

Computer simulation of hydrogen thermodesorption // *Advances in Materials Science and Applications*. Vol. 3, iss. 3. P. 120–129. (Совместно с Е. К. Kostikova.)

Determination of effective recombination coefficient by thermodesorption method // *Int. J. of Hydrogen Energy*. Vol. 39, iss. 28. P. 15819–15826. (Совместно с Е. К. Kostikova.)

Моделирование термодесорбции и водородопроницаемости // *Компьютерные исследования и моделирование*. Т. 6, № 5. С. 679–703. (Совместно с Е. К. Костиковой.)

2015. Parametric identification of nonlinear model of hydrogen thermal desorption from structural materials // *Advances in Materials Science Research*. Nova Science Publishers, New York. Vol. 21. P. 175–194. (Совместно с Е. К. Kostikova.)

Modelling of discrete TDS-spectrum of hydrogen desorption // *Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 661. P. 012026. doi: 10.1088/1742-6596/661/1/012026 (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

Computer simulation of hydrogen permeability of structural materials through protective coating defect // *Journal of Physics: Conf. Series*. Vol. 661. P. 012027. doi: 10.1088/1742-6596/661/1/012027 (Совместно с Е. К. Kostikova.)

2016. Modelling of zirconium alloy hydrogenation // *Journal of Physics: Conf. Series*. IOP. Vol. 769, iss. 1. P. 012028. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012028 (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

Modelling of hydrogen thermal desorption spectrum in nonlinear dynamical boundary-value problem // *Journal of Physics: Conf. Series*. IOP Publishing. Vol. 769, iss. 1. P. 012024. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012024 (Совместно с Е. К. Kostikova.)

Моделирование водородопроницаемости сплавов для мембранного газоразделения // Компьютерные исследования и моделирование. Т. 8, № 1. С. 121–135. (Совместно с Н. И. Родченковой и Н. И. Сидоровым.)

2017. Численное моделирование спектра термодесорбции водорода // Матем. моделирование. Т. 29, № 4. С. 121–136. (Совместно с Е. К. Костиковой.)

Modelling of fast hydrogen permeability of alloys for membrane gas separation // Technical Physics. Vol. 62, no. 5. P. 669–676. doi: 10.1134/S1063784217050279 (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

Modelling of hydrogen permeability of membranes for high-purity hydrogen production // Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 929. P. 012039. doi: 10.1088/1742-6596/929/1/012039 (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

Functional differential equations of neutral type with integrable weak singularity: hydrogen thermal desorption model // Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 929. P. 012034. doi: 10.1088/1742-6596/929/1/012034 (Совместно с Е. К. Костиковой.)

Computer simulation of hydrogen thermal desorption by ODE-approximation // Int. J. of Hydrogen Energy. Vol. 42, iss. 1. P. 405–415. doi: 10.1016/j.ijhydene.2016.10.104 (Совместно с Е. К. Костиковой.)

2018. Computer simulation of hydrogen thermal desorption spectra and model parameters identification // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Nova Science Publishers, New York. P. 167–194. (Совместно с Е. К. Костиковой.)

Fast hydrogen permeability of structural materials: modelling and parameters estimation

// Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Nova Science Publishers, New York. P. 195–214. (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

Numerical modelling of free boundary dynamics in “metal-hydride” phase transition // Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1135. P. 012025. doi: 10.1088/1742-6596/1135/1/012025 (Совместно с N. I. Rodchenkova, K. V. Grudova.)

Estimation of hydrogen permeability parameters by the results of a ‘cascade’ penetration experiment // Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1038. P. 012042. doi: 10.1088/1742-6596/1038/1/012042 (Совместно с N. I. Rodchenkova.)

The inverse problem of identification of hydrogen permeability model // Advances in Math. Physics. Vol. 2018, article ID 4628346. 19 p. doi: 10.1155/2018/4628346 (Совместно с N. I. Rodchenkova, E. K. Kostikova.)

Aggregation of experiments for estimation of hydrogen permeability parameters // Int. J. of Hydrogen Energy. Vol. 43, iss. 17. P. 8333–8341. doi: 10.1016/j.ijhydene.2018.02.137 (Совместно с N. I. Sidorov, N. I. Rodchenkova.)

2019. Model of hydrogen diffusion in titanium with the formation of hydride phases // Journal of Physics: Conf. Series. Vol. 1400. P. 044036. IOP Publ. doi: 10.1088/1742-6596/1400/4/044036 (Совместно с Е. А. Денисов, N. I. Rodchenkova.)

Identification of hydrogen permeability parameters of membrane materials in an aggregated experiment // Int. J. of Hydrogen Energy. Vol. 45, iss. 12. P. 7433–7443. doi: 10.1016/j.ijhydene.2019.04.098 (Совместно с N. I. Sidorov, O. V. Fomkina.)

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учетом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редакционные коллегии серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляют за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкеты» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия «Анкеты» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Журнал имеет полноценную электронную версию на базе Open Journal System (OJS), позволяющую перевести предоставление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегией серий и рецензентами в электронный формат и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Редакционный совет журнала «Труды Карельского научного центра РАН» (Труды КарНЦ РАН) определил для себя в качестве одного из приоритетов полную открытость издания. Это означает, что пользователям на условиях свободного доступа разрешается: читать, скачивать, копировать, распространять, печатать, искать или находить полные тексты статей журнала по ссылке без предварительного разрешения от издателя и автора. Учредители журнала берут на себя все расходы по редакционно-издательской подготовке статей и их опубликованию.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru/>; <http://journals.krc.karelia.ru/>

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объем рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объем рисунков не должен превышать 1/4 объема статьи. Рукописи

большого объема (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в двух экземплярах, напечатанных на одной стороне листа формата А4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: *УДК* курсивом на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; инициалы, фамилии всех авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: **Введение. Материалы и методы. Результаты и обсуждение. Выводы** либо **Заключение. Литература**); благодарности и указание источников финансирования выполненных исследований; списки литературы: с библиографическими описаниями на языке и алфавите оригинала (**Литература**) и транслитерированный в латиницу с переводом названий русскоязычных источников на английский язык (**References**).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности, ученые звания, ученые степени авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень **КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ**. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на наклейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. Ссылки на литературу в тексте даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Заголовки таблиц, заголовки и содержание столбцов, строк, а также примечания приводятся на русском и английском языках. **Диаграммы и графики** не должны дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ приводятся на русском и английском языках, должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях, детали на рисунках следует обозначать цифрами или буквами, значение которых также приводится в подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5–2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления (http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.-2008). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

ТРАНСЛИТЕРИРОВАННЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (References). Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Описания русскоязычных работ указываются в латинской транслитерации, рядом в квадратных скобках помещается их перевод на английский язык. Выходные данные приводятся на английском языке (допускается транслитерация названия издательства). При наличии переводной версии источника можно указать ее библиографическое описание вместо транслитерированного. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала. Для составления списка рекомендуется использование бесплатных онлайн-сервисов транслитерации, вариант BSI.

Внимание! С 2015 года каждой статье, публикуемой в «Трудах Карельского научного центра РАН», редакцией присваивается уникальный идентификационный номер цифрового объекта (DOI) и статья включается в базу данных Crossref. **Обязательным условием является указание в списках литературы DOI для тех работ, у которых он есть.**

Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате .tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>. Статья в файле с расширением .pdf загружается на сайт журнала <http://journals.krc.karelia.ru>. Исходный файл с расширением .tex и необходимые рисунки загружаются на 4 шаге «Загрузка дополнительных файлов».

Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences
No. 7, 2020
“MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES”

TABLE OF CONTENTS

B. Z. Belashev, N. V. Krutskikh, A. A. Gerasimova. MAGNETIC STORMS AND PATTERN OF EMERGENCY AMBULANCE CALLS IN PETROZAVODSK	5
B. Z. Belashev, M. Yu. Nilov. GEORADAR DATA PROCESSING BY AN AUTOMATIC ALGORITHM	19
Ju. A. Dorofeeva. MANAGEMENT EFFECTS ON THE DYNAMICS OF OPINIONS IN A TEAM.	28
Yu. V. Zaika, O. N. Bakhmet. BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CO ₂ TRANSPORT IN SANDY FOREST SOILS.	34
Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. NUMERICAL MODELING OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION PEAKS	46
A. V. Ivanov. ON PROBABILITY MEASURES WITH A MAXIMUM OF QUANTIZATION DIMENSION	57
A. V. Ivanov. ON THE RELATION BETWEEN THE CLASSES OF FEDORCHUK AND ROSENTHAL COMPACTA	62
A. N. Kirillov, I. V. Danilova. DYNAMICS OF THE BIOLOGICAL WASTEWATER TREATMENT PROCESS UNDER VARIABLE POLLUTION INPUT FLOW: INVARIANT SETS AND STABILIZATION	67
M. M. Leri. ON CONDITIONS OF CONFIGURATION GRAPHS' CONNECTIVITY	72
Yu. L. Pavlov. ON THE ASYMPTOTICS OF THE DEGREE STRUCTURE OF CONDITIONAL INTERNET GRAPHS.	77
Yu. L. Pavlov. ON THE CONNECTIVITY CONDITION FOR AN INTERNET GRAPH WITH A VARIABLE PARAMETER OF THE VERTEX DEGREE DISTRIBUTION	84
E. V. Khvorostyanskaya. ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM TREE SIZE IN A GALTON-WATSON FOREST	89
I. A. Cheplyukova. ON THE MAXIMUM VERTEX DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH.	98
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE PERMUTATIONS WITH A FIXED NUMBER OF CYCLES	110
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE SCHEME OF ALLOCATION OF DISTINGUISHABLE PARTICLES INTO DISTINGUISHABLE CELLS WITHOUT EMPTY CELLS.	120
DATES AND ANNIVERSARIES	
Yuri V. Zaika (on the 60 th anniversary).	127
INSTRUCTIONS FOR AUTHORS	131

Научный журнал

**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**
№ 7, 2020

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению Ученого совета
Федерального исследовательского центра
«Карельский научный центр Российской академии наук»*

Выходит 12 раз в год

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Регистрационная запись ПИ № ФС 77-72429 от 28.02.2018 г.

Редактор А. И. Мокеева
Компьютерная верстка Г. О. Предтеченский

Подписано в печать 29.06.2020. Дата выхода 31.07.2020. Формат 60x84^{1/8}.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 11,2. Усл. печ. л. 15,8.
Тираж 100 экз. Заказ 611. Цена свободная

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50