

Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр  
Российской академии наук»

# **ТРУДЫ**

## **КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

№ 7, 2019

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Петрозаводск  
2019

Главный редактор  
А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; О. Н. БАХМЕТ (зам. главного редактора), член-корр. РАН, д. б. н.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; И. В. ДРОБЫШЕВ, доктор биологии (Швеция – Канада); Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; Х. ЙООСТЕН, доктор биологии, проф. (Германия); А. С. ИСАЕВ, академик РАН, д. б. н., проф.; А. М. КРЫШЕНЬ, д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; О. Л. КУЗНЕЦОВ, д. б. н.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; О. ОВАСКАЙНЕН, доктор математики, проф. (Финляндия); О. Н. ПУГАЧЕВ, академик РАН, д. б. н.; С. А. СУББОТИН, доктор биологии (США); Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; Т. Э. ХАНГ, доктор географии (Эстония); П. ХЁЛЬТТЯ, доктор геологии, проф. (Финляндия); К. ШАЕВСКИЙ, доктор математики, проф. (Польша); В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Редакционная коллегия серии  
«Математическое моделирование и информационные технологии»

В. А. ВАТУТИН, д. ф.-м. н., проф.; Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент;  
В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент.

*Издается с января 2009 г.*

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11  
Тел. (8142)762018; факс (8142)769600  
E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences

# **TRANSACTIONS**

**of the KARELIAN RESEARCH CENTRE  
of the RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES**

No. 7, 2019

**MATHEMATICAL MODELING  
AND INFORMATION TECHNOLOGIES**

Petrozavodsk  
2019

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; O. N. BAKHMET (Deputy Editor-in-Chief), RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); I. V. DROBYSHEV, PhD (Biol.) (Sweden – Canada); N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; T. E. HANG, PhD (Geog.) (Estonia); P. HÖLTTÄ, PhD (Geol.), Prof. (Finland); A. S. ISAEV, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; H. JOOSTEN, Dr. (Biol.), Prof. (Germany); A. M. KRYSHEN', DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; O. L. KUZNETSOV, DSc (Biol.); V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; O. OVASKAINEN, PhD (Math.), Prof. (Finland); O. N. PUGACHYOV, RAS Academician, DSc (Biol.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; S. A. SUBBOTIN, PhD (Biol.) (USA); D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); K. SZAJEWSKI, PhD (Math.), Prof. (Poland); A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Editorial Board of the “Mathematical Modeling and Information Technologies” Series

Yu. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.; V. A. VATUTIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.

*Published since January 2009*

*Monthly*

Editorial Office address: 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia  
Tel. (8142)762018; fax (8142)769600  
E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Full-text electronic version: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

УДК 515.12

## О ПОРЯДКЕ МЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ И ЕМКОСТНЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

А. В. Иванов<sup>1</sup>, О. В. Фомкина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

<sup>2</sup> Петрозаводский государственный университет, Россия

Показано, что в любом метрическом компакте  $X$  существует счетное замкнутое подмножество  $F$ , верхняя емкостная размерность  $\overline{\dim}_B F$  которого равна любому наперед заданному неотрицательному числу, не превосходящему верхней емкостной размерности  $X$ . Аналогичное утверждение доказано для верхнего порядка метрической аппроксимации  $\overline{ord}(\xi)$  максимальных сцепленных систем. А именно, для любого числа  $a$ , удовлетворяющего неравенствам  $0 \leq a \leq \overline{\dim}_B X$ , существует  $\xi \in \lambda(X)$ , для которой  $\overline{ord}(\xi) = a$  и  $supp(\xi) = X$ .

Ключевые слова: емкостная размерность; порядок метрической аппроксимации; суперрасширение.

### A. V. Ivanov, O. V. Fomkina. ON THE ORDER OF METRIC APPROXIMATION OF MAXIMAL LINKED SYSTEMS AND CAPACITARIAN DIMENSIONS

It is shown that in any metric compact space  $X$  there exists a countable closed subset  $F$  whose upper capacitarian dimension  $\overline{\dim}_B F$  is equal to any preassigned non-negative number not exceeding the upper capacitarian dimension of  $X$ . A similar assertion is proved for the upper order of the metric approximation  $\overline{ord}(\xi)$  of maximal linked systems. Namely, for any number  $a$  satisfying the inequalities  $0 \leq a \leq \overline{\dim}_B X$  there exists  $\xi \in \lambda(X)$  for which  $\overline{ord}(\xi) = a$  and  $supp(\xi) = X$ .

Key words: capacitarian dimension; order of metric approximation; superextension.

### ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию порядка метрической аппроксимации точек в пространствах вида  $\mathcal{F}(X)$ , где  $\mathcal{F}$  – метризуемый полунормальный функтор бесконечной степени, действующий в категории компактов. Понятие порядка метрической аппроксимации определено в [6]. Для каждого метрического компакта  $(X, \rho)$  в пространстве  $(\mathcal{F}(X), \rho_{\mathcal{F}})$

содержится растущая последовательность замкнутых подпространств  $\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : supp(\xi) \leq n\}$ , объединение которых всюду плотно в  $\mathcal{F}(X)$ . Точки  $\xi \in \mathcal{F}_n(X)$  мы считаем «простыми» элементами  $\mathcal{F}(X)$ , причем индекс  $n$  характеризует их «степень сложности». Для  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  и  $\varepsilon > 0$  число  $N(\xi, \varepsilon) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}$  есть наименьшая степень сложности  $\varepsilon$ -приближения  $\xi$ .

Если точка  $\xi$  не является простой, то число  $N(\xi, \varepsilon)$  неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Асимптотику этого возрастания характеризуют верхний и нижний порядки метрической аппроксимации  $\overline{ord}(\xi)$  и  $\underline{ord}(\xi)$  точки  $\xi$  (подробные определения приведены ниже). Если в качестве  $\mathcal{F}$  взять функтор экспоненты (экспонента  $\exp(X)$  – это пространство непустых замкнутых подмножеств компакта  $X$  с метрикой Хаусдорфа), то для всякого  $A \in \exp(X)$  верхний и нижний порядки метрической аппроксимации совпадают соответственно с верхней и нижней емкостными размерностями  $\dim_B A$  и  $\underline{\dim}_B A$  множества  $A$ .

Основное внимание в работе уделено исследованию порядка метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем (м.с.с.) – точек пространства  $\lambda(X)$ , где  $\lambda$  – функтор суперрасширения. Доказано (предложение 2), что порядок метрической аппроксимации м.с.с.  $\xi \in \lambda(X)$  не превосходит соответствующей емкостной размерности носителя  $\xi$ . При этом справедлива теорема 2, согласно которой из наличия в компакте  $X$  собственного замкнутого подмножества  $F$  заданной емкостной размерности следует существование м.с.с.  $\xi \in \lambda(X)$  с тем же значением соответствующего порядка метрической аппроксимации и носителем  $\xi$ , равным  $X$ . Этот результат мотивирует формулировку и доказательство теоремы 1 о промежуточных значениях верхней емкостной размерности. А именно, доказано, что в любом бесконечном метрическом компакте  $(X, \rho)$  для любого неотрицательного числа  $a < \overline{\dim}_B X$  существует счетное замкнутое подмножество  $F \subset X$  размерности  $\overline{\dim}_B F = a$ . Из теорем 1 и 2 вытекает аналогичное утверждение о промежуточных значениях верхнего порядка метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем с фиксированным носителем, равным  $X$  (теорема 3). При доказательстве указанных результатов существенную роль играет конструкция Е. В. Кашубы [1], позволяющая строить максимальные сцепленные системы с заданным носителем, и операция миксера  $\mu$  [7], которая тройку систем  $\xi_i \in \lambda(X)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , «смешивает» в м.с.с.  $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . В частности, для миксера  $\mu$  установлено неравенство:  $\overline{ord}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \leq \max_i \overline{ord}(\xi_i)$ .

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Суперрасширение, о котором пойдет речь ниже, является функториальной конструкцией общей топологии. Напомним (см. [4, 7.5.10]), что ковариантный функтор  $\mathcal{F}$ , действующий из категории *Comp* компактных ха-

усдорфовых пространств (компактов) и непрерывных отображений в ту же категорию, называется *полунормальным*, если  $\mathcal{F}$

- 1) сохраняет точку и пустое множество;
- 2) сохраняет мономорфизмы;
- 3) сохраняет пересечения;
- 4) непрерывен, то есть перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

В дальнейшем через  $\mathcal{F}$  мы будем обозначать полунормальный функтор и при этом считать дополнительно, что  $\mathcal{F}$  сохраняет вес всякого бесконечного компакта. Если  $A$  – замкнутое подмножество компакта  $X$ , то  $\mathcal{F}(A)$  естественно отождествляется с подпространством пространства  $\mathcal{F}(X)$ . Таким образом, можно считать, что  $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$ . Для каждой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  определен ее *носитель*  $\text{supp}(\xi)$  как наименьшее замкнутое подмножество  $A \subset X$ , для которого  $\xi \in \mathcal{F}(A)$ . Для  $n \in \mathbb{N}$  определено замкнутое подпространство

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : |\text{supp}(\xi)| \leq n\} \subset \mathcal{F}(X).$$

При этом  $\mathcal{F}_1(X)$  естественно гомеоморфно  $X$  (каждая точка  $x \in X$  отождествляется с единственной точкой пространства  $\mathcal{F}(\{x\})$ ). Таким образом, можно считать, что  $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$ .

Функтор  $\mathcal{F}$  имеет *бесконечную степень*, если для любого бесконечного компакта  $X$  и любого  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{F}_n(X) \neq \mathcal{F}(X)$ . В дальнейшем будем считать, что степень  $\mathcal{F}$  бесконечна. Для любого полунормального функтора  $\mathcal{F}$  и любого компакта  $X$  объединение  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$  всюду плотно в  $\mathcal{F}(X)$ . Доказательство всех перечисленных фактов можно найти в [4] и [5].

Функтор  $\mathcal{F}$  называется *метризуемым* (по В. В. Федорчуку [3]), если для всякой метрики  $\rho$  на метризуемом компакте  $X$  может быть указана совместимая с топологией метрика  $\rho_{\mathcal{F}}$  на  $\mathcal{F}(X)$  так, что выполнены следующие условия:

- 1) для любого изометрического вложения  $i : (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$  отображение  $\mathcal{F}(i) : (\mathcal{F}(X_1), (\rho_1)_{\mathcal{F}}) \rightarrow (\mathcal{F}(X_2), (\rho_2)_{\mathcal{F}})$  также является изометрическим вложением;
- 2)  $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$ ;
- 3)  $\text{diam}(\mathcal{F}(X)) = \text{diam}(X)$ .

При этом семейство метрик  $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$  по определению задает метризацию функтора  $\mathcal{F}$ . Всякий метризуемый функтор мы будем считать наделенным конкретной метризацией.

Итак, если  $\mathcal{F}$  – метризуемый функтор и  $(X, \rho)$  – метрический компакт, то  $(\mathcal{F}(X), \rho_{\mathcal{F}})$  – также метрический компакт, и в  $\mathcal{F}(X)$  имеется возрастающая последовательность замкнутых подмножеств

$$X = \mathcal{F}_1(X) \subset \dots \subset \mathcal{F}_n(X) \subset \dots \subset \mathcal{F}(X),$$

объединение которых всюду плотно в  $\mathcal{F}(X)$ . При этом точки  $\xi \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$  в определенном смысле «просты», ибо имеют конечный носитель (они «сгенерированы» функтором  $\mathcal{F}$  на конечном множестве), причем их «степень сложности» растет с ростом  $n$ . Любая точка  $\eta \in \mathcal{F}(X)$  является пределом последовательности «простых» точек. Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -приближение точки  $\eta$  «простой» точкой, причем наименьшая «степень сложности» такой простой точки есть число

$$N(\eta, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\eta, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

(В дальнейшем, если из контекста ясно, о каком функторе и компакте идет речь, мы будем использовать сокращенную запись  $N(\eta, \varepsilon)$ .) Если  $\eta \notin \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$ , то  $N(\eta, \varepsilon)$  неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Асимптотику этого возрастания характеризуют верхний и нижний порядки метрической аппроксимации  $\overline{ord}(\eta)$  и  $ord(\eta)$  точки  $\eta$  (см. [6]), которые определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \overline{ord}(\eta) &= \inf\{\alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\eta, \varepsilon) = 0\} \\ &= \sup\{\alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\eta, \varepsilon) = \infty\}, \\ ord(\eta) &= \inf\{\alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\eta, \varepsilon) = 0\} \\ &= \sup\{\alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\eta, \varepsilon) = \infty\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $0 \leq ord(\eta) \leq \overline{ord}(\eta) \leq \infty$ . Имеют место следующие равенства (см. [6]):

$$\begin{aligned} \overline{ord}(\eta) &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\eta, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}, \\ ord(\eta) &= \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\eta, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Справедливо также (см. [6])

**Предложение 1.** *Если последовательность  $\{\varepsilon_n > 0 : n \in \mathbb{N}\}$  монотонно сходится к нулю и существует  $c > 0$  такое, что  $\varepsilon_{n+1} \geq c \varepsilon_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то*

$$\begin{aligned} \overline{ord}(\eta) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\eta, \varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)}, \\ ord(\eta) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\eta, \varepsilon_n))}{\ln(1/\varepsilon_n)}. \end{aligned}$$

В частности, для  $\varepsilon_n = 1/n$  получаем

$$\begin{aligned} \overline{ord}(\eta) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\eta, 1/n))}{\ln n}, \\ ord(\eta) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\eta, 1/n))}{\ln n}. \end{aligned}$$

В некоторых случаях при рассмотрении порядка метрической аппроксимации (верхнего или нижнего) точки  $\eta$  бывает необходимо указывать объемлющее пространство, относительно которого этот порядок определяется. Тогда мы будем использовать расширенное обозначение:  $ord(\eta, \mathcal{F}(X))$ . Если  $A$  – замкнутое подмножество  $X$ ,  $\eta \in \mathcal{F}(A)$  и  $\varepsilon > 0$ , то

$$N(\eta, \varepsilon, \mathcal{F}(A)) \geq N(\eta, \varepsilon, \mathcal{F}(X)). \quad (1.1)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{ord}(\eta, \mathcal{F}(A)) &\geq \overline{ord}(\eta, \mathcal{F}(X)), \\ ord(\eta, \mathcal{F}(A)) &\geq ord(\eta, \mathcal{F}(X)). \end{aligned}$$

**Определение 1.** *Будем говорить, что порядок метрической аппроксимации для функтора  $\mathcal{F}$  сохраняется при переходе к подпространству, если для любого компакта  $X$ , любого его замкнутого подмножества  $A$  и любой точки  $\eta \in \mathcal{F}(A)$  выполняются равенства:*

$$\begin{aligned} \overline{ord}(\eta, \mathcal{F}(A)) &= \overline{ord}(\eta, \mathcal{F}(X)), \\ ord(\eta, \mathcal{F}(A)) &= ord(\eta, \mathcal{F}(X)). \end{aligned}$$

**Экспонента.** Примером метризуемого функтора является функтор экспоненты  $\text{exp}$ . Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт. Экспонентой  $\text{exp}(X)$  называется множество непустых замкнутых подмножеств  $X$ , наделенное топологией Вьеториса, с которой совместима метрика Хаусдорфа  $\rho_H$ . Расстояние  $\rho_H$  между  $F, G \in \text{exp}(X)$  определяется по формуле:

$$\rho_H(F, G) = \inf\{\varepsilon : F \subset B(G, \varepsilon), G \subset B(F, \varepsilon)\}.$$

(Здесь и ниже  $B(F, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$  и  $B(y, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$  – замкнутые  $\varepsilon$ -шары множества  $F$  и точки  $y$  соответственно.) Носитель  $\text{supp}(F)$  точки  $F \in \text{exp}(X)$  совпадает с  $F$ . Таким образом,  $\text{exp}_n(X) = \{F \in \text{exp}(X) : |F| \leq n\}$ . Для  $F \in \text{exp}(X)$  и  $\varepsilon > 0$  число  $N(F, \varepsilon)$  равно наименьшему количеству  $\varepsilon$ -шаров  $B(x, \varepsilon)$ , покрывающих множество  $F$ . Отсюда следует, что определенные выше порядки метрической аппроксимации для функтора  $\text{exp}$  совпадают с верхней и нижней емкостными размерностями  $\overline{\dim}_B F$  и  $\underline{\dim}_B F$  множества  $F$  (см. [2] и [6]). Эти размерности сохраняются при переходе к подпространству в смысле определения 1.

Известно, что емкостные размерности монотонны, то есть для любого замкнутого подмножества  $A \subset X$

$$\overline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B X, \quad \underline{\dim}_B A \leq \underline{\dim}_B X.$$

Для верхней емкостной размерности справедлива конечная теорема суммы, а именно,

для любого конечного семейства  $F_1, \dots, F_n$  замкнутых подмножеств  $X$  имеет место равенство (см. [2, гл. 2, теорема 6.2]):

$$\overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^n F_i \right) = \max_i \overline{\dim}_B F_i. \quad (1.2)$$

Заметим, что для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение неверно (см. [2, гл. 2, пример 6.2]).

**Суперрасширение.** Приведем необходимые сведения, касающиеся функтора суперрасширения  $\lambda$  (см. [4, гл. 7.4]). Семейство  $\xi$  замкнутых подмножеств компакта  $X$  называется *сцепленной системой*, если любые два элемента  $\xi$  имеют непустое пересечение. Множество всех максимальных (по включению) сцепленных систем (м.с.с.) компакта  $X$  обозначается через  $\lambda(X)$  и наделяется топологией, открытую предбазу которой образуют множества вида  $O(U) = \{\xi \in \lambda(X) : \exists F \in \xi : F \subset U\}$ , где  $U$  – произвольное открытое подмножество  $X$ . Для любого замкнутого подмножества  $A \subset X$  и любой м.с.с.  $\xi \in \lambda(A)$  существует единственная м.с.с.  $\xi' \in \lambda(X)$ , которая содержит  $\xi$ . Тем самым определено вложение  $\lambda(A) \subset \lambda(X)$ . Если  $F$  – минимальный по включению элемент м.с.с.  $\xi$ , то  $F \subset \text{supp}(\xi)$ . При этом носитель  $\text{supp}(\xi)$  равен замыканию объединения всех минимальных по включению элементов  $\xi$ .

Если  $(X, \rho)$  – метрический компакт, то топология  $\lambda(X)$  порождается метрикой  $\rho_\lambda$ , которая определяется по формуле:

$$\rho_\lambda(\xi, \eta) = \inf\{\varepsilon : \forall F \in \xi \exists B(F, \varepsilon) \in \eta\}.$$

Известно, что семейство метрик  $\rho_\lambda$  задает метризацию функтора  $\lambda$  (см. [3]). Таким образом, суперрасширение является метризуемым функтором и для него могут быть определены верхний и нижний порядки метрической аппроксимации всякой м.с.с.  $\xi \in \lambda(X)$ . Заметим, что  $\lambda_1(X) = \lambda_2(X) = X$ , поскольку не существует м.с.с.  $\xi$  с носителем ровно из двух точек. Однако при  $n \geq 2$  все включения  $\lambda_n(X) \subset \lambda_{n+1}(X)$  являются строгими.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два метода построения максимальных сцепленных систем.

**1. М.с.с.  $\xi(x, F)$ .** Пусть  $F$  – собственное замкнутое подмножество компакта  $X$ ,  $|F| > 1$  и  $x \notin F$ . Рассмотрим сцепленную систему

$$\xi' = \{\{x, y\} : y \in F\} \cup \{F\}.$$

Легко видеть, что  $\xi'$  содержится в единственной м.с.с. в  $X$ , которая по определению и есть

м.с.с.  $\xi(x, F)$ . Все элементы системы  $\xi'$  являются минимальными по включению элементами  $\xi(x, F)$  и

$$\text{supp}(\xi(x, F)) = F \cup \{x\}. \quad (1.3)$$

**2. М.с.с.  $\xi(A, B)$ .** Пусть  $A = \{x_n : n \in N\}$  и  $B = \{y_n : n \in N\}$  – две непересекающиеся последовательности, состоящие из попарно различных точек компакта  $X$ , причем  $[A] \cap [B] \neq \emptyset$  (здесь и ниже в подобном контексте квадратными скобками обозначается замыкание множества). Для  $i \in N$  положим

$$A_i = \{x_1, \dots, x_i, y_i\}, \quad B_i = \{y_1, \dots, y_i, x_{i+1}\}$$

и, следуя Е. В. Кашубе [1], рассмотрим в  $X$  сцепленную систему

$$\xi' = \{A_i : i \in N\} \cup \{B_i : i \in N\}.$$

Система  $\xi'$  единственным образом дополняется до м.с.с. в  $X$ , которую обозначим через  $\xi(A, B)$ . При этом множества  $A_i$  и  $B_i$ ,  $i \in N$ , являются минимальными по включению элементами  $\xi(A, B)$ . Следовательно,

$$[A] \cup [B] \subset \text{supp}(\xi(A, B)). \quad (1.4)$$

## ТЕОРЕМА О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ ВЕРХНЕЙ ЕМКОСТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**Утверждение 1.** Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт и  $\overline{\dim}_B X = a$ . Тогда существует точка  $x \in X$  такая, что  $\overline{\dim}_B(B(x, \varepsilon)) = a$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда для любой точки  $x \in X$  существует  $\varepsilon(x) > 0$  такое, что  $\overline{\dim}_B(B(x, \varepsilon(x))) < a$ . Из покрытия  $\{B(x, \varepsilon(x)) : x \in X\}$  компакта  $X$  выделим конечное подпокрытие  $B(x_1, \varepsilon(x_1)), \dots, B(x_n, \varepsilon(x_n))$ . В силу (1.2) получаем:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B X &= \overline{\dim}_B \left( \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon(x_i)) \right) \\ &= \max_i \overline{\dim}_B(B(x_i, \varepsilon(x_i))) < a. \end{aligned}$$

□

Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт,  $A$  – замкнутое подмножество  $X$  и  $\varepsilon > 0$ . Множество  $A$  называется  $\varepsilon$ -сетью в  $X$ , если  $B(A, \varepsilon) = X$ . Множество  $A$  будем называть  $\varepsilon$ -разреженным, если  $\rho(x, y) > \varepsilon$  для любых различных точек  $x, y \in A$ . В дальнейшем рассматриваются только конечные  $\varepsilon$ -сети.

**Утверждение 2.** В любом метрическом компакте  $(X, \rho)$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -разреженная  $\varepsilon$ -сеть.

*Доказательство.* Если  $\varepsilon$ -разреженное подмножество  $A \subset X$  не является  $\varepsilon$ -сетью, то  $X \setminus B(A, \varepsilon) \neq \emptyset$ , и множество  $A$  можно дополнить любой точкой  $p \in X \setminus B(A, \varepsilon)$  так, что  $A \cup \{p\}$  останется  $\varepsilon$ -разреженным. Поскольку в компакте бесконечных  $\varepsilon$ -разреженных подмножеств не существует, отсюда следует, что любое  $\varepsilon$ -разреженное подмножество можно дополнить до  $\varepsilon$ -разреженной  $\varepsilon$ -сети.  $\square$

**Теорема 1.** Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт и  $\overline{\dim}_B X = a$ . Тогда для любого числа  $b$  такого, что  $0 \leq b < a$ , существует замкнутое подмножество  $F_b \subset X$ , для которого  $\overline{\dim}_B F_b = b$ .

*Доказательство.* При  $b = 0$  утверждение теоремы тривиально, поэтому будем считать, что  $b$  удовлетворяет неравенствам:  $0 < b < a$ . Согласно утверждению 1 зафиксируем точку  $x \in X$  так, что  $\overline{\dim}_B(B(x, \varepsilon)) = a$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

Искомое множество  $F_b$  будем строить с помощью рекурсивного процесса.

Шаг 1. Рассмотрим множество  $B(x, 1)$ , и пусть  $k_1$  – наименьшее натуральное число, для которого

$$N(B(x_1, 1), 1/2^{k_1}) > 2^{bk_1}. \quad (2.2)$$

Поскольку  $\overline{\dim}_B(B(x, 1)) = a > b$  и в силу предложения 1 имеет место равенство

$$\overline{\dim}_B(B(x, 1)) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(B(x_1, 1), 1/2^k)}{\ln 2^k},$$

такое число  $k_1$  существует.

Пусть  $A_1$  –  $(1/2^{k_1})$ -разреженная  $(1/2^{k_1})$ -сеть в  $B(x, 1)$ . Тогда в силу (2.2)  $|A_1| > 2^{bk_1}$  и, следовательно, в  $A_1$  можно выделить подмножество  $Z_1$  мощности  $|Z_1| = [2^{bk_1}]$  (здесь  $[2^{bk_1}]$  – целая часть числа  $2^{bk_1}$ ) такое, что

$$Z_1 \cap B(x, 1/2^{k_1+2}) = \emptyset. \quad (2.3)$$

Шаг 2. Пусть  $k_2$  – наименьшее натуральное число, для которого

$$N(B(x, 1/2^{k_1+3}), 1/2^{k_2}) > 2^{bk_2}. \quad (2.4)$$

Поскольку  $N(B(x, 1/2^{k_1+3}), 1/2^{k_1+3}) = 1$ , в силу (2.4)  $k_2 > k_1 + 3$ . Пусть  $A_2$  –  $(1/2^{k_2})$ -разреженная  $(1/2^{k_2})$ -сеть в  $B(x, 1/2^{k_1+3})$ . Выделим в  $A_2$  подмножество  $Z_2$  такое, что  $|Z_1 \cup Z_2| = [2^{bk_2}]$  и

$$Z_2 \cap B(x, 1/2^{k_2+2}) = \emptyset. \quad (2.5)$$

Шаг  $n$ . Пусть  $k_n$  – наименьшее натуральное число, для которого

$$N(B(x, 1/2^{k_{n-1}+3}), 1/2^{k_n}) > 2^{bk_n}. \quad (2.6)$$

Как и выше,  $k_n > k_{n-1} + 3$ . Пусть  $A_n$  –  $(1/2^{k_n})$ -разреженная  $(1/2^{k_n})$ -сеть в  $B(x, 1/2^{k_{n-1}+3})$ ,  $Z_n \subset A_n$ ,  $|\cup_{i=1}^n Z_i| = [2^{bk_n}]$  и

$$Z_n \cap B(x, 1/2^{k_n+2}) = \emptyset. \quad (2.7)$$

В результате рекурсии мы получим последовательность попарно непересекающихся конечных множеств  $Z_n$  таких, что

- 1)  $D_n = \cup_{i=1}^n Z_i$  является  $(1/2^{k_n+1})$ -разреженным;
- 2)  $|D_n| = [2^{bk_n}]$ ;
- 3)  $Z_n \subset B(x, 1/2^{k_{n-1}+3})$ ;
- 4)  $Z_n \cap B(x, 1/2^{k_n+2}) = \emptyset$ .

При этом  $k_n > k_{n-1} + 3$ .

Положим  $F_b = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \cup \{x\}$ . В силу 3)  $F_b$  – замкнутое подмножество  $X$ . Покажем, что  $\overline{\dim}_B F_b = b$ .

Пусть  $A$  –  $(1/2^{k_n+3})$ -сеть в  $F_b$ . В силу 1), 3) и 4)  $D_n \subset A$ . Следовательно,

$$N(F_b, 1/2^{k_n+3}, \exp(F_b)) \geq |D_n| = [2^{bk_n}].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(F_b) &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(F_b, 1/2^{k_n+3}, \exp(F_b))}{\ln 2^{k_n+3}} \\ &\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln [2^{bk_n}]}{\ln 2^{k_n+3}} = b. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть натуральное число  $k$  удовлетворяет неравенствам:  $k_{n-1} < k < k_n$ . Тогда в силу (2.6)

$$N(B(x, 1/2^{k_{n-1}+3}), 1/2^k) \leq 2^{bk}. \quad (2.9)$$

В силу 3), 4) и (2.9) имеем:

$$\begin{aligned} &N(F_b, 1/2^k) \\ &\leq N(D_{n-1}, 1/2^k) + N(B(x, 1/2^{k_{n-1}+3}), 1/2^k) \\ &\leq |D_{n-1}| + 2^{bk} \leq [2^{bk_{n-1}}] + 2^{bk} < 2 \cdot 2^{bk}. \end{aligned}$$

При  $k = k_n$  имеет место неравенство  $N(F_b, 1/2^k) \leq |D_n| + 1$ . Следовательно, неравенство  $N(F_b, 1/2^k) \leq 2 \cdot 2^{bk}$  выполнено для любого  $k \geq k_1$ . Таким образом, в силу предложения 1

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(F_b) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(F_b, 1/2^k)}{\ln 2^k} \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 \cdot 2^{bk})}{\ln 2^k} = b. \end{aligned}$$

Откуда в силу (2.8) получаем, что  $\overline{\dim}_B(F_b) = b$ .  $\square$

**Замечание 1.** Построенное замкнутое подмножество  $F_b \subset X$  при  $0 < b < a$  является счетным и имеет единственную предельную точку  $x$ .

### Порядок метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем

**Предложение 2.** Для любой м.с.с.  $\xi \in \lambda(X)$

$$\begin{aligned} \overline{ord}(\xi) &\leq \overline{\dim}_B(\text{supp}(\xi)), \\ \underline{ord}(\xi) &\leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\xi)). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\xi \in \lambda(X)$  и  $\varepsilon > 0$ . Покажем, что

$$N(\xi, \varepsilon) \leq N(\text{supp}(\xi), \varepsilon). \quad (3.1)$$

Введем обозначения:  $F = \text{supp}(\xi)$ ,  $n = N(F, \varepsilon)$ . Пусть  $G \in \text{exp}(X)$ ,  $|G| = n$  и

$$\rho_H(G, F) \leq \varepsilon. \quad (3.2)$$

Для каждого  $A \in \xi$  определим множество  $H(A)$  по формуле:

$$H(A) = B(A, \varepsilon) \cap G.$$

Поскольку пересечение  $A \cap F$  непусто, из (3.2) следует, что  $H(A) \neq \emptyset$ . Рассмотрим систему  $\eta' = \{H(A) : A \in \xi\}$ . Эта система, состоящая из подмножеств конечного множества  $G$ , является сцепленной. В самом деле, для любых двух множеств  $A_1, A_2 \in \xi$  пересечение  $A_1 \cap A_2 \cap F$  непусто. Значит,

$$\emptyset \neq B(A_1 \cap A_2, \varepsilon) \cap G \subset H(A_1) \cap H(A_2).$$

Дополним систему  $\eta'$  до некоторой максимальной сцепленной системы в  $G$ , которую, в свою очередь, дополним до (единственной) максимальной сцепленной системы  $\eta$  в  $X$ . По построению для любого  $A \in \xi$   $B(A, \varepsilon) \cap G \in \eta$ , следовательно,  $B(A, \varepsilon)$  также является элементом  $\eta$ . Значит,  $\rho_\lambda(\xi, \eta) \leq \varepsilon$ . Кроме того,  $\text{supp}(\eta) \subset G$ ,  $|G| = n$ . Таким образом,  $N(\xi, \varepsilon) \leq n$ .

Из неравенства (3.1) сразу следует утверждение предложения.  $\square$

**Предложение 3.** Порядок метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем сохраняется при переходе к подпространству.

*Доказательство.* Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт,  $A$  – замкнутое подмножество  $X$ ,  $\xi \in \lambda(A)$  и  $\varepsilon > 0$ . В силу (1.1) имеем:

$$N(\xi, \varepsilon, \lambda(A)) \geq N(\xi, \varepsilon, \lambda(X)). \quad (3.3)$$

Пусть  $N(\xi, \varepsilon, \lambda(X)) = n$  и м.с.с.  $\eta \in \lambda_n(X)$  такова, что  $\rho_\lambda(\eta, \xi) \leq \varepsilon$ . Введем обозначения:  $\text{supp}(\xi) = F$ ,  $\text{supp}(\eta) = G$ . При этом  $F \subset A$ ,  $|G| = n$ .

Покажем, что

$$G \subset B(F, \varepsilon). \quad (3.4)$$

Рассмотрим систему

$$\gamma = \{B(\Phi, \varepsilon) \cap G : \Phi \in \xi, \Phi \subset F\}. \quad (3.5)$$

Поскольку  $B(\Phi, \varepsilon) \in \eta$  для любого  $\Phi \in \xi$ , система  $\gamma$  является сцепленной системой подмножеств множества  $\cup \gamma$ , которое содержится в  $G$ . Дополним  $\gamma$  до м.с.с.  $\gamma'$  в  $\cup \gamma$ , а систему  $\gamma'$  дополним до единственной м.с.с.  $\delta$  в  $X$ .

Покажем, что  $\rho_\lambda(\delta, \xi) \leq \varepsilon$ . Пусть  $\Phi \in \xi$ . Тогда пересечение  $\Phi \cap F = \Phi'$  также является элементом  $\xi$ . В силу определения системы  $\gamma$  (3.5)  $B(\Phi', \varepsilon) \cap (\cup \gamma) \in \gamma$ . Следовательно,  $B(\Phi, \varepsilon) \in \delta$ , что и требовалось.

Таким образом, если  $\cup \gamma \neq G$ , то  $\delta \in \lambda_{n-1}(X)$  и  $\rho_\lambda(\xi, \delta) \leq \varepsilon$ , что невозможно, поскольку  $n = N(\xi, \varepsilon, \lambda(X))$ . Значит,  $\cup \gamma = G$ . Но по определению системы  $\gamma$  имеет место включение  $\cup \gamma \subset B(F, \varepsilon)$ , откуда следует (3.4).

Для каждой точки  $x \in G$  выберем точку  $y(x) \in F$  так, что  $\rho(x, y(x)) \leq \varepsilon$ . Пусть  $H = \{y(x) : x \in F\}$ . Ясно, что  $|H| \leq n$  и  $H \subset B(G, \varepsilon)$ . Рассмотрим систему подмножеств

$$\beta = \{B(\Phi, \varepsilon) \cap H : \Phi \in \eta\}.$$

Легко проверить, что  $\beta$  – сцепленная система. Дополним  $\beta$  до м.с.с. в  $H$ , а полученную при этом систему дополним до м.с.с.  $\beta'$  в  $X$ . В силу определения  $\beta$  имеем  $\rho_\lambda(\beta', \eta) \leq \varepsilon$ . Следовательно,  $\rho_\lambda(\xi, \beta') \leq 2\varepsilon$ . Кроме того,  $\text{supp}(\beta') \subset H$ , и значит,  $\beta' \in \lambda_n(F) \subset \lambda_n(A)$ .

Таким образом, доказано неравенство:

$$N(\xi, 2\varepsilon, \lambda(A)) \leq N(\xi, \varepsilon, \lambda(X)). \quad (3.6)$$

Пусть  $k \in N$ . В силу (3.3) и (3.6) имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{\ln N(\xi, 1/k, \lambda(X))}{\ln k} &\leq \frac{\ln N(\xi, 1/k, \lambda(A))}{\ln k} \\ &\leq \frac{\ln N(\xi, 1/2k, \lambda(X))}{\ln k}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Во всех частях неравенств перейдем к верхнему пределу при  $k \rightarrow \infty$ . Пределы первой и второй дроби дадут соответственно  $\overline{ord}(\xi, \lambda(X))$  и  $\overline{ord}(\xi, \lambda(A))$ . Согласно предложению 1,

$$\overline{ord}(\xi, \lambda(X)) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\xi, 1/2k, \lambda(X))}{\ln 2k}$$

$$= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\xi, 1/2k, \lambda(X))}{\ln k}.$$

Таким образом, предел третьей дроби в неравенстве (3.7) также равен  $\overline{ord}(\xi, \lambda(X))$ . Следовательно,  $\overline{ord}(\xi, \lambda(X)) = \overline{ord}(\xi, \lambda(A))$ .

Равенство  $\overline{ord}(\xi, \lambda(X)) = \overline{ord}(\xi, \lambda(A))$  доказывается аналогично.  $\square$

**Предложение 4.** Для м.с.с.  $\xi(x, F)$ , где  $F$  – собственное замкнутое подмножество компакта  $(X, \rho)$ ,  $|F| > 1$  и  $x \notin F$ , справедлива равенства

$$\overline{ord} \xi(x, F) = \overline{\dim}_B(\text{supp}(\xi(x, F))) = \overline{\dim}_B(F),$$

$$\underline{ord} \xi(x, F) = \underline{\dim}_B(\text{supp}(\xi(x, F))) = \underline{\dim}_B(F).$$

*Доказательство.* Покажем, что при  $\varepsilon \leq \min(\rho(x, F), \text{diam}(F))/3$  имеет место равенство

$$N(\xi(x, F), \varepsilon) = N(F, \varepsilon) + 1, \quad (3.8)$$

из которого сразу следует утверждение предложения.

Прежде всего, заметим, что при указанных ограничениях на  $\varepsilon$

$$N(F \cup \{x\}, \varepsilon) = N(F, \varepsilon) + 1.$$

Поскольку  $\text{supp}(\xi(x, F)) = F \cup \{x\}$ , в силу предложения 2  $N(\xi(x, F), \varepsilon) \leq N(F, \varepsilon) + 1$ .

Остается доказать обратное неравенство. Пусть  $N(\xi(x, F), \varepsilon) = n$ , и м.с.с.  $\eta \in \lambda(X)$  такова, что  $\rho_\lambda(\xi(x, F), \eta) \leq \varepsilon$  и  $|\text{supp}(\eta)| = n$ . Тогда из  $F \in \xi(x, F)$  следует, что  $B(F, \varepsilon) \in \eta$ . Значит, множество  $G = B(F, \varepsilon) \cap \text{supp}(\eta)$  непусто и  $G \in \eta$ . Возьмем точки  $y_1, y_2 \in F$  так, что  $\rho(y_1, y_2) \geq 3\varepsilon$ . Множества  $B(\{x, y_1\}, \varepsilon)$  и  $B(\{x, y_2\}, \varepsilon)$  принадлежат  $\eta$ , следовательно, пересечение

$$B(\{x, y_1\}, \varepsilon) \cap B(\{x, y_2\}, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)$$

имеет общую точку с носителем  $\eta$ . Но  $B(x, \varepsilon) \cap B(F, \varepsilon) = \emptyset$ , следовательно,  $|G| < n$ . При этом  $B(G, \varepsilon) \in \xi(x, F)$ . Поскольку  $x \notin B(G, \varepsilon)$ , такое возможно лишь в том случае, если  $B(G, \varepsilon) \supset F$ . Вместе с включением  $G \subset B(F, \varepsilon)$  это дает неравенство  $\rho_H(F, G) \leq \varepsilon$ . Таким образом,  $N(F, \varepsilon) \leq n - 1$ . Равенство (3.8) доказано.  $\square$

С помощью предложения 4 нетрудно привести примеры максимальных сцепленных систем с различными значениями верхнего и нижнего порядка метрической аппроксимации. Пусть  $F$  – замкнутое подмножество отрезка  $[0, 1]$ , построенное в [2, гл. 2, пример 6.1], для которого  $0 < \underline{\dim}_B F < \overline{\dim}_B F < 1$ . Тогда  $\underline{ord} \xi(x, F) < \overline{ord} \xi(x, F)$  для любой точки  $x \notin F$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $A = \{x_n : n \in N\}$  и  $B = \{y_n : n \in N\}$  – дизъюнктные последовательности в компакте  $X$ , состоящие из попарно различных точек, такие, что  $\rho(x_{2n}, y_{2n}) \leq 1/2^n$ . Тогда  $\overline{ord} \xi(A, B) = 0$ .

*Доказательство.* Из условия следует, что  $[A] \cap [B] \neq \emptyset$ . Поэтому м.с.с.  $\xi(A, B)$  определена однозначно. Покажем, что  $N(\xi(A, B), 1/2^n) \leq 4n + 1$ . Зафиксируем  $n$  и рассмотрим сцепленную систему

$$\eta'(n) = \{A_i : i \leq 2n\} \cup \{B_i : i \leq 2n\}$$

$$\cup \{x_1, \dots, x_{2n+1}\}.$$

Тогда

$$\cup \eta'(n) = \{x_1, \dots, x_{2n+1}, y_1, \dots, y_{2n}\} = D,$$

$|D| = 4n + 1$ . Дополним  $\eta'(n)$  до максимальной сцепленной системы  $\eta(n) \in \lambda X$ . Легко проверить, что все множества, входящие в  $\eta'(n)$ , являются минимальными по включению элементами  $\eta(n)$ , любой элемент  $F \in \eta(n)$  содержит какое-либо множество из  $\eta'(n)$  и  $\text{supp}(\eta(n)) = D$ .

Покажем, что  $\rho_\lambda(\xi(A, B), \eta(n)) \leq 1/2^n$ . Для этого достаточно проверить, что для любого  $F \in \eta(n)$   $B(F, 1/2^n) \in \xi(A, B)$ . Если в  $F$  содержится множество  $A_i$  или  $B_i$  при  $i \leq 2n$ , то  $F \in \xi(A, B)$  и, следовательно,  $B(F, 1/2^n) \in \xi(A, B)$ . Если же  $F \supset \{x_1, \dots, x_{2n+1}\}$ , то  $B(F, 1/2^n) \ni y_{2n}$ , поскольку  $\rho(x_{2n}, y_{2n}) \leq 1/2^n$ . Следовательно, в таком случае  $A_{2n} \subset B(F, 1/2^n)$ , и тогда множество  $B(F, 1/2^n)$  также является элементом  $\xi(A, B)$ .

Итак,  $\rho_\lambda(\xi(A, B), \lambda_{4n+1}(X)) \leq 1/2^n$ . Значит,  $N(\xi(A, B), 1/2^n) \leq 4n + 1$ . В силу предложения 1 получаем

$$\begin{aligned} \overline{ord} \xi(A, B) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\xi(A, B), 1/2^n))}{\ln 2^n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4n + 1)}{n \ln 2} = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Пусть  $X$  – компакт. Миксером на  $\lambda(X)$  (см. [7]) называется отображение  $\mu : \lambda^3(X) \rightarrow \lambda(X)$ , определяемое по формуле:

$$\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 \cap \xi_2) \cup (\xi_1 \cap \xi_3) \cup (\xi_2 \cap \xi_3).$$

**Утверждение 4.**  $\text{supp}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \subset \bigcup_{i=1}^3 \text{supp}(\xi_i)$ .

*Доказательство.* Пусть  $F$  – минимальный по включению элемент  $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Будем считать для определенности, что  $F \in \xi_1 \cap \xi_2$ . В  $\xi_1$  существует минимальный по включению элемент  $F_1$ , лежащий в  $F$ . Аналогично в  $\xi_2$  существует минимальный по включению элемент  $F_2 \subset F$ . Имеем:  $F_1 \cup F_2 \in \xi_1 \cap \xi_2$  и

$F_1 \cup F_2 \subset F$ . Поскольку  $F$  – минимальный элемент  $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , отсюда следует, что  $F = F_1 \cup F_2$ . При этом  $F_i \subset \text{supp}(\xi_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Таким образом,

$$F \subset \bigcup_{i=1}^3 \text{supp}(\xi_i),$$

откуда сразу следует искомое включение.  $\square$

**Утверждение 5.** Если  $\rho_\lambda(\xi_i, \eta_i) \leq \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\xi_i, \eta_i \in \lambda(X)$ , то  $\rho_\lambda(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mu(\eta_1, \eta_2, \eta_3)) \leq \varepsilon$ .

*Доказательство.* Непосредственная проверка.  $\square$

**Предложение 5.** Пусть  $\xi_i \in \lambda(X)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда:

$$\overline{\text{ord}}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \leq \max_i \overline{\text{ord}}(\xi_i). \quad (3.9)$$

*Доказательство.* Для  $\varepsilon > 0$  введем обозначения:

$$n_i(\varepsilon) = N(\xi_i, \varepsilon), \quad i = 1, 2, 3.$$

Пусть  $\eta_i \in \lambda_{n_i(\varepsilon)}(X)$  и  $\rho_\lambda(\eta_i, \xi_i) \leq \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда в силу утверждений 4 и 5  $\rho_\lambda(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mu(\eta_1, \eta_2, \eta_3)) \leq \varepsilon$  и  $|\text{supp}(\mu(\eta_1, \eta_2, \eta_3))| \leq \sum_{i=1}^3 n_i(\varepsilon)$ . Следовательно,

$$n(\varepsilon) = N(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^3 n_i(\varepsilon). \quad (3.10)$$

Пусть для определенности

$$\overline{\text{ord}}(\xi_1) \geq \overline{\text{ord}}(\xi_i), \quad i = 2, 3. \quad (3.11)$$

Если  $\overline{\text{ord}}(\xi_1) = \infty$ , то утверждение предложения очевидно. Пусть

$$\overline{\text{ord}}(\xi_1) = a = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_1(1/k)}{\ln k}. \quad (3.12)$$

В силу (3.10) имеем

$$\begin{aligned} \overline{\text{ord}}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n(1/k)}{\ln k} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(n_1(1/k) + n_2(1/k) + n_3(1/k))}{\ln k}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В силу (3.11)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln n_i(1/k)}{\ln k} \leq a$ ,  $i = 2, 3$ . Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\max_i n_i(1/k))}{\ln k} = a. \quad (3.14)$$

Положим

$$b_k^j = \frac{n_j(1/k)}{\max_i n_i(1/k)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Ясно, что  $b_k^j \leq 1$ . В силу (3.14) имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(n_1(1/k) + n_2(1/k) + n_3(1/k))}{\ln k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\max_i n_i(1/k) \cdot \sum_{i=1}^3 b_k^i)}{\ln k} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\max_i n_i(1/k))}{\ln k} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{i=1}^3 b_k^i)}{\ln k} = a. \end{aligned}$$

Откуда в силу (3.12) и (3.13) следует утверждение предложения.  $\square$

**Замечание 2.** Неравенство (3.9) может быть строгим.

Возьмем м.с.с.  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \lambda(X)$  так, что  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$  и  $\overline{\text{ord}}(\xi) < \overline{\text{ord}}(\xi_3)$ . Тогда  $\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi$  и

$$\overline{\text{ord}}(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) < \max_i \overline{\text{ord}}(\xi_i).$$

**Теорема 2.** Пусть  $(X, \rho)$  – бесконечный метрический компакт и  $F$  – собственное замкнутое подмножество  $X$ . Тогда существует м.с.с.  $\xi \in \lambda(X)$ , для которой  $\overline{\text{ord}}(\xi) = \overline{\dim}_B F$ ,  $\underline{\text{ord}}(\xi) = \underline{\dim}_B F$  и  $\text{supp}(\xi) = X$ .

*Доказательство.* Пусть  $C$  – счетное всюду плотное подмножество в  $X$ . Разобьем  $C$  на два непересекающихся подмножества  $A = \{a_n : n \in N\}$  и  $B = \{b_n : n \in N\}$  так, что  $A$  и  $B$  состоят из попарно различных точек и для любого  $n \in N$  выполняется неравенство  $\rho(a_{2n}, b_{2n}) \leq 1/2^n$ . Тогда в силу утверждения 3 и (1.4) для системы  $\xi = \xi(A, B)$  получаем  $\overline{\text{ord}}(\xi) = \underline{\text{ord}}(\xi) = 0$  и  $\text{supp}(\xi) = [A] \cup [B] = X$ . Таким образом,  $\xi(A, B)$  – искомая система, если  $\overline{\dim}_B F = 0$ . Далее будем считать, что  $\overline{\dim}_B F > 0$  и, следовательно,  $F$  бесконечно.

Если разность  $X \setminus F$  состоит из единственной точки  $x$ , то в силу предложения 4 система  $\xi(x, F)$  является искомой.

Пусть  $|X \setminus F| \geq 2$ . Выберем в множестве  $X \setminus F$  две различные точки  $x$  и  $y$ . В  $X \setminus \{x, y\}$  возьмем счетное всюду плотное множество, которое, как и выше, разобьем на две дизъюнктные последовательности  $A = \{a_n : n \in N\}$  и  $B = \{b_n : n \in N\}$ , состоящие из попарно различных точек таких, что  $\rho(a_{2n}, b_{2n}) \leq 1/2^n$ . Рассмотрим м.с.с.  $\xi(A, B)$ , которая содержит множества  $A_n = \{a_1, \dots, a_n, b_n\}$ ,  $B_n = \{b_1, \dots, b_n, a_{n+1}\}$ ,  $n \in N$  в качестве минимальных элементов.

Положим  $\xi_1 = \xi(A, B)$ ,  $\xi_2 = \xi(x, F)$ ,  $\xi_3 = \xi(y, F)$ . Покажем, что система  $\xi = \mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  является искомой.

Пусть  $\overline{\dim}_B F = \alpha > 0$ . В силу предложения 4  $\text{ord}(\xi_i) = \alpha$  при  $i = 2, 3$ . Согласно утверждению 3  $\overline{\text{ord}}(\xi_1) = 0$ . Поэтому в силу предложения 5

$$\overline{\text{ord}}(\xi) \leq \alpha. \quad (3.15)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  таково, что множества  $B(x, 2\varepsilon)$ ,  $B(y, 2\varepsilon)$  и  $B(F, 2\varepsilon)$  попарно не пересекаются. Оценим снизу  $N(\xi, 1/k)$  при  $1/k < \varepsilon$ . Пусть  $\eta$  – м.с.с. с конечным носителем, для которой

$$\rho_\lambda(\eta, \xi) \leq 1/k. \quad (3.16)$$

По построению система  $\xi$  содержит все множества вида  $\{x, y, z\}$ , где  $z \in F$ . Следовательно, множество

$$B(\{x, y, z\}, 1/k) = B(x, 1/k) \cup B(y, 1/k) \cup B(z, 1/k)$$

принадлежит  $\eta$ . Рассмотрим минимальное по включению множество  $G \in \eta$  такое, что  $G \subset B(\{x, y, z\}, 1/k)$ . Покажем, что  $G \cap B(z, 1/k) \neq \emptyset$ .

Предположим противное. Тогда  $G \subset B(x, 1/k) \cup B(y, 1/k)$ . В силу (3.16)  $B(G, 1/k) \in \xi$  и  $B(G, 1/k) \subset B(x, 2/k) \cup B(y, 2/k)$ . Однако по построению  $\xi$  всякое множество, лежащее в этой системе, пересекает  $F$ . Таким образом, получено противоречие с выбором числа  $\varepsilon$ .

Итак, для любой точки  $z \in F$  существует  $G \subset \text{supp}(\eta)$  такое, что  $\rho(z, G) \leq 1/k$ , следовательно,  $|\text{supp}(\eta)| \geq N(F, 1/k)$ . Таким образом, доказано, что

$$N(\xi, 1/k) \geq N(F, 1/k). \quad (3.17)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\text{ord}}(\xi) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\xi, 1/k)}{\ln k} \\ &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(F, 1/k)}{\ln k} = \overline{\dim}_B F = \alpha. \end{aligned}$$

Поэтому в силу неравенства (3.15)  $\overline{\text{ord}}(\xi) = \alpha$ .

Из (3.17) следует, что

$$\text{ord}(\xi) \geq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(F, 1/k)}{\ln k} = \underline{\dim}_B F = \beta. \quad (3.18)$$

Оценим сверху число  $N(\xi, 1/2^n)$ . При доказательстве утверждения 3 для м.с.с.  $\xi(A, B)$  была построена система  $\eta(n) = \eta_1(n)$  с  $|\text{supp}(\eta(n))| = 4n + 1$ , для которой  $\rho_\lambda(\xi(A, B), \eta(n)) \leq 1/2^n$ . Пусть  $D(n)$  –  $(1/2^n)$ -сеть в  $F$ , содержащая  $N(F, 1/2^n, \exp(F))$  точек, и пусть  $\eta_2(n) = \xi(x, D(n))$ ,  $\eta_3(n) = \xi(y, D(n))$ . Тогда  $\rho_\lambda(\xi_i, \eta_i) \leq 1/2^n$ ,  $i = 2, 3$ . Следовательно,

$$\rho_\lambda(\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mu(\eta_1(n), \eta_2(n), \eta_3(n))) \leq 1/2^n.$$

При этом в силу утверждения 4 и (1.2)

$$\begin{aligned} &\text{supp}(\mu(\eta_1(n), \eta_2(n), \eta_3(n))) \\ &\subset \{x, y\} \cup D(n) \cup \text{supp}(\eta_1(n)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &|\text{supp}(\mu(\eta_1(n), \eta_2(n), \eta_3(n)))| \\ &\leq N(F, 1/2^n, \exp(F)) + 2 + 4n + 1. \end{aligned}$$

Итак,  $N(\xi, 1/2^n) \leq N(F, 1/2^n, \exp(F)) + 4n + 3$ . Таким образом, в силу предложения 1

$$\begin{aligned} &\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\xi, 1/2^n)}{\ln 2^n} \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(F, 1/2^n, \exp(F)) + 4n + 3)}{\ln 2^n} \\ &= \underline{\dim}_B F, \end{aligned}$$

что вместе с неравенством (3.18) дает равенство  $\text{ord}(\xi) = \underline{\dim}_B F$ .

Покажем, что  $\text{supp}(\xi) = X$ . Как уже было отмечено, для любой точки  $z \in F$  множество  $\{x, y, z\}$  является элементом  $\xi$ . При этом легко проверить, что  $\{x, y, z\}$  – минимальный по включению элемент  $\xi$ . Следовательно,  $\{x, y\} \cup F \subset \text{supp}(\xi)$ .

Пусть  $U = X \setminus (\{x, y\} \cup F)$ . Докажем, что

$$(A \cup B) \cap U \subset \text{supp}(\xi). \quad (3.19)$$

Пусть  $a_n \in (A \cup B) \cap U$ . Возможны следующие два случая:

1) Существует  $m \geq n$  такое, что множество  $A_m = \{a_1, \dots, a_m, b_m\}$  пересекается с  $F$ .

Поскольку  $A_m \in \xi_1 = \xi(A, B)$ , получаем, что  $\{x\} \cup A_n \in \xi_1 \cap \xi_2 \subset \xi$ .

Покажем, что  $\{x\} \cup A_m$  – минимальный по включению элемент  $\xi$ . Пусть  $H \in \xi$  и  $H \subset \{x\} \cup A_m$ . Тогда  $H \notin \xi_3$ , поскольку  $y \notin H$  и  $F \not\subset H$ . Следовательно,  $H \in \xi_1 \cap \xi_2$ . Таким образом,  $x \in H$ . Поскольку по построению  $x \notin A \cup B$ , множество  $H \setminus \{x\}$  является элементом  $\xi_1$ . При этом  $A_m$  – минимальный элемент  $\xi_1$ . Следовательно,  $H \setminus \{x\} = A_m$ , и значит,  $H = \{x\} \cup A_m$ , что и требовалось. Таким образом,  $a_n \in \text{supp}(\xi)$ .

2) Для любого  $m \geq n$   $A_m \cap F = \emptyset$ .

В этом случае выберем произвольно точку  $z \in F \setminus \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$  и рассмотрим множество  $A_n \cup \{x, z\}$ . Как и в случае 1), множество  $A_n \cup \{x, z\}$  лежит в системе  $\xi$  и является минимальным элементом этой системы. Следовательно,  $a_n \in A_n \cup \{x, z\} \subset \text{supp}(\xi)$ .

Итак, если  $a_n \in (A \cup B) \cap U$ , то  $a_n \in \text{supp}(\xi)$ . Легко видеть, что аналогичное утверждение верно и для точек  $b_n \in (A \cup B) \cap U$ . Включение (3.19) доказано.

Поскольку  $(A \cup B) \cap U$  всюду плотно в  $U$ , из (3.19) следует, что  $U \subset \text{supp}(\xi)$ .  $\square$

**Теорема 3.** Для любого бесконечного метрического компакта  $X$  и любого числа  $a$  такового, что  $0 \leq a \leq \overline{\dim}_B X$ , существует м.с.с.  $\xi_a \in \lambda(X)$ , для которой  $\text{ord}(\xi_a) = a$  и  $\text{supp}(\xi_a) = X$ .

*Доказательство.* При  $a < \overline{\dim}_B X$  утверждение теоремы сразу следует из теорем 1 и 2. Если  $a = \overline{\dim}_B X$ , то в качестве собственного подмножества  $F \subset X$  с  $\overline{\dim}_B F = a$  можно взять соответствующий  $\varepsilon$ -шар  $B(x, \varepsilon)$ , существование которого гарантирует утверждение 1, а затем снова применить теорему 2.  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вакулова (Кашуба) Е. В. О носителях максимальных сцепленных систем // Труды ПГУ. Математика. 2004. № 11. С. 3–8.
2. Песин Я. Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: ИКИ, 2013. 404 с.

## REFERENCES

1. Vakulova (Kashuba) E. V. On nositelyakh maksimal'nykh stseplennykh system [On the support of maximal linked systems]. *Tr. Petrozavodsk. gos. un-ta. Ser. Mat.* [Proceed. Petrozavodsk St. Univ. Ser. Math.]. 2004. No. 11. P. 3–8.
2. Pesin Y. B. Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications. The Univ. of Chicago Press, 1997. 397 p.
3. Fedorchuk V. V. Troiki beskonechnykh iteratsii metrizuemykh funkktorov [Triples of infinite iterates of metrizable functors]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Matem.* [Proceed. USSR Acad. Sci. Ser. Math.]. 1991. Vol. 36, no. 2. P. 411–433.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Иванов Александр Владимирович**  
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.  
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru  
тел.: +79217015441

**Фомкина Ольга Викторовна**  
студентка  
Институт математики и информационных технологий, Петрозаводский государственный университет  
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185035  
эл. почта: capmor17@gmail.com

3. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, № 2. С. 396–417.

4. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.

5. Fedorchuk V., Todorćević S. Cellularity of covariant functors // *Topology and its Applications*. 1997. Vol. 76. P. 125–150.

6. Ivanov A. V. On metric order in spaces of the form  $\mathcal{F}(X)$  // *Topology and its Applications*. 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

7. van Mill J., van de Vel M. On an internal property of absolute retracts // *Topology Proc.* 1979. Vol. 4. P. 193–200.

Поступила в редакцию 22.03.2019

4. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruksii [General topology. Main constructions]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1988. 252 p.

5. Fedorchuk V., Todorćević S. Cellularity of covariant functors. *Topology and its Applications*. 1997. Vol. 76. P. 125–150.

6. Ivanov A. V. On metric order in spaces of the form  $\mathcal{F}(X)$ . *Topology and its Applications*. 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

7. van Mill J., van de Vel M. On an internal property of absolute retracts. *Topology Proc.* 1979. Vol. 4. P. 193–200.

Received March 22, 2019

## CONTRIBUTORS:

**Ivanov, Aleksander**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru  
tel.: +79217015441

**Fomkina, Ol'ga**  
Petrozavodsk State University  
33 Lenin Ave., 185035 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: capmor17@gmail

УДК 517.977

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ С ПЕРЕМЕННЫМ СОСТАВОМ БИОМАССЫ

А. Н. Кириллов<sup>1</sup>, А. М. Сазонов<sup>1</sup>, Н. К. Брыксенкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

<sup>2</sup> *Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия*

Предлагается динамическая модель, описывающая процесс биологической очистки сточных вод с учетом изменчивости биосостава активного ила. При небольшом времени оборота биомассы в микрофлоре активного ила преобладают быстрорастущие виды, приспособленные к потреблению легкоокисляемых соединений. При этом медленно растущие группы, потребляющие трудноусвояемые соединения, не успевают закрепиться в реакторе, в результате чего эти соединения попадают в стоки не разлагаясь. Если время оборота биомассы достаточно велико, в очистной системе закрепляются медленно растущие группы. При этом увеличивается разнообразие закрепившихся видов биомассы. Для моделирования данного явления применен метод динамической декомпозиции, разработанный одним из авторов, позволяющий представить процесс последовательностью относительно простых моделей, сменяющих друг друга в зависимости от условий протекания процесса. Разработан метод стабилизации процесса биоочистки.

Ключевые слова: стабилизация; декомпозиция; биологическая очистка.

**A. N. Kirillov, A. M. Sazonov, N. K. Bryksenkova.  
STABILIZATION OF THE BIOLOGICAL WASTEWATER  
TREATMENT PROCESS WITH VARIABLE BIOMASS  
STRUCTURE**

A dynamical model describing the biological wastewater treatment process, taking into account the variability of the activated sludge biomass structure, is proposed. Where biomass turnover time is short, fast-growing microorganisms, consuming easily oxidizable substances, prevail in activated sludge. In such conditions, slow-growing microorganisms, consuming poorly digestible substances, do not get enough time to become part of the biomass. As a result, such substances are discharged undecomposed. If the biomass turnover time is sufficiently large, then slow-growing microorganisms get established in the digester, augmenting the diversity of species. A method of dynamical decomposition developed by one of the authors is applied to model the above phenomenon. This method permits to represent the process as a sequence of relatively simple models which follow one another according to the conditions of process behavior. A method for stabilization of the biological treatment process has been developed.

Key words: stabilization; decomposition; biological treatment.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача стабилизации процесса биологической очистки сточных вод имеет большое значение в проблеме охраны окружающей среды. Предложенная в [12] модель процесса очистки с помощью активного ила стимулировала использование математического моделирования в практике инженерных расчетов [11, 13, 14]. Процесс биоочистки сточных вод связан с различными аспектами биологического, физико-химического, технологического характера. Широкий спектр примесей в стоках, количество и состав которых нестационарны и труднопрогнозируемы, оказывает негативное влияние на возможности использования наиболее универсального метода очистки сточных вод, которым является в настоящее время метод очистки с помощью активного ила. Сточные воды представляют собой многокомпонентный субстрат-загрязнитель, в то время как активный ил состоит из многочисленных групп микроорганизмов. Указанные обстоятельства создают большие трудности при использовании методов математического моделирования с целью прогнозирования и управления процессом биоочистки.

В работах [2, 3] показано, что при небольшом времени оборота биомассы в микрофлоре активного ила преобладают быстрорастущие виды, приспособленные к потреблению легкоокисляемых соединений. При этом медленно растущие группы, специализирующиеся на потреблении трудноусвояемых соединений, вытесняются из реактора, в результате чего эти соединения попадают в стоки не разлагаясь. Напротив, если время оборота биомассы достаточно велико, в очистной системе закрепляются медленно растущие группы. При этом увеличивается разнообразие закрепившихся видов и идет процесс глубокой очистки. Отметим, что необоснованное увеличение времени пребывания биомассы в аэротенке уменьшает эффективность процесса очистки. Возникает проблема построения модели, учитывающей непостоянство видового состава сообщества микроорганизмов активного ила. В данной работе представлен подход, анонсированный в [4], к решению этой проблемы на основе предложенного автором метода динамической декомпозиции, суть которого состоит в возможности изменения размерности и структуры системы в процессе ее функционирования. В результате получается последовательность относительно простых моделей, сменяющих друг друга в зависимости от условий

протекания процесса. Для каждой модели решается задача управления процессом очистки на основе алгоритма  $T$ -стабилизации [7]. Отметим, что метод динамической декомпозиции для линейных систем рассмотрен в [8]. Предлагаемый подход позволяет повысить эффективность процесса биоочистки [1].

## МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ

Пусть система очистки состоит из аэротенка, отстойника и звена рециркуляции. Полагая, что  $i$ -й вид микроорганизмов окисляет  $i$ -й компонент загрязнителя. Будем считать, что с уменьшением номера  $i$  субстрат становится более трудноокисляемым. При этом скорость очистки описывается функцией Моно. В качестве базовой используется модель [5, 9, 10], задающая динамику подсистемы  $S_i$

$$\dot{x}_i = ua_{1i} + \frac{\mu_i s_i x_i}{k_i + s_i} - (b + u)x_i, \quad (1)$$

$$\dot{s}_i = ba_{2i} - \frac{\mu_i s_i x_i}{Y_i(k_i + s_i)} - (b + u)s_i,$$

где  $s_i$  – концентрация  $i$ -го вида субстрата-загрязнителя;  $x_i$  – концентрация  $i$ -го вида микроорганизмов;  $Y_i$  – коэффициент утилизации  $i$ -го вида субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов;  $k_i$  – константа полунасыщения;  $b, a_{2i}$  – скорость и концентрация соответственно субстрата  $i$ -го вида субстрата на входе;  $u, a_{1i}$  – скорость и концентрация соответственно  $i$ -го вида микроорганизмов в обратном потоке;  $\mu_i$  – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов  $i$ -го вида.

Управление процессом биоочистки осуществляется за счет изменения скорости  $u$  рециркулирующего потока. Пусть  $u_i > 0$  – постоянные, удовлетворяющие условию:  $u_i < u_{i+1}, i = 1, \dots, n$ . Будем считать, что для закрепления микроорганизмов  $i$ -го вида в аэротенке требуется, чтобы скорость рециркулирующего потока удовлетворяла неравенству  $u \leq u_i$ . Это значит, что с увеличением номера  $i$  уменьшается необходимость в присутствии медленно растущих микроорганизмов в аэротенке, что вызывается уменьшением количества трудноусвояемых видов субстрата. Иначе говоря, чем меньше  $i$ , тем труднее окисляется соединение вида  $i$ , что приводит к необходимости уменьшить скорость рециркуляции, т. е. увеличить время пребывания биомассы в аэротенке для увеличения в ней доли медленно растущих видов микроорганизмов, окисляющих трудноусвояемые соединения. Таким об-

разом, для того чтобы в системе присутствовали виды  $i_1, \dots, i_k$  микроорганизмов, достаточно подчинить  $u$  условию  $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$ , где  $i^* = \min(i_1, \dots, i_k)$ . При этом в аэротенке не будут присутствовать виды микроорганизмов с номерами, меньшими  $i^*$ , что позволит, помимо увеличения скорости процесса биоочистки, сделать этот процесс более экономным.

Таким образом, процесс биоочистки  $S$  – сложная система, в состав которой могут входить подсистемы  $S_i$ , динамика которых задается уравнениями (1). Далее для организации изменения состава системы  $S$  вводим функции  $y_i(t)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{y}_i = s_i - \bar{s}_i, \text{ если } S_i \subset S \quad (2)$$

$$\dot{y}_i = a_{2i} - \bar{a}_{2i}, \text{ если } S_i \not\subset S, \quad (3)$$

где  $\bar{s}_i, \bar{a}_i$  – заданные положительные постоянные. Переменная  $y_i(t)$  задает уровень накопления субстрата вида  $i$  в аэротенке. Изменение структуры системы  $S$  происходит следующим образом. Пусть  $\bar{y}_i$  – заданные постоянные.

### Увеличение размерности $S$

Пусть  $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$ . Тогда в состав  $S$  входят подсистемы с номерами, не меньшими  $i^*$ :  $S_{i^*}, S_{i^*+1}, \dots, S_n$ . Это значит, что  $y_i < \bar{y}_i$  при  $i = 1, \dots, i^* - 1$ . Если  $y_l(t^*) = \bar{y}_l$  в некоторый момент времени  $t = t^*$  для некоторого  $l \in \{1, \dots, i^* - 1\}$ , то в этот момент времени  $u$  принимает значение в промежутке  $(u_{l-1}, u_l)$ , и к системе  $S$  подключаются подсистемы  $S_l, S_{l+1}, \dots, S_{i^*-1}$ , для чего используется одна из процедур подключения, которые описаны в [6].

### Уменьшение размерности $S$

Пусть  $u_{i^*-1} < u < u_{i^*}$ . Если  $y_{i^*}(\bar{t}) = \bar{y}_{i^*}$  в некоторый момент времени  $t = \bar{t}$ , то в этот момент времени  $u$  принимает значение в промежутке  $(u_{i^*}, u_{i^*+1})$ , и от системы  $S$  отключается подсистема  $S_{i^*}$  [6].

**Замечание 1.** Изменение структуры системы в случае, когда динамика переменных эволюционного времени задается уравнениями (2), (3), происходит как при изменении концентрации загрязнений на выходе, что отражено в уравнении (2), так и при изменении концентраций загрязнений на входе, что отражено в уравнении (3). Таким образом, система управления достаточно чутко реагирует на изменение концентраций загрязнителей. Можно предложить модель, в которой используется только первое уравнение (3):  $\dot{y}_i = s_i - \bar{s}_i$ . Такая модель будет более грубой.

### Стабилизация

Пусть  $u_{j-1} < u < u_j$ . Это означает, что  $S = \{S_j, \dots, S_n\}$ . Рассмотрим следующую задачу: построить кусочно-постоянное управление, при котором выполняется ограничение

$$0 \leq s_i \leq \bar{s}_i, \quad i = j, j+1, \dots, n, \quad (4)$$

где  $\bar{s}_i$  – заданная положительная постоянная. Это естественное требование ограниченности концентрации загрязнений (субстрата) на выходе из аэротенка. Формально надо построить управление, при котором траектории систем (1) пересекают прямую  $s_i = \bar{s}_i$  в направлении убывания  $s_i$ . Для этого рассмотрим условие  $\dot{s}_i < 0$  при  $s_i = \bar{s}_i$ , которое равносильно неравенству

$$ba_{2i} - \frac{\mu_i x_i \bar{s}_i}{Y_i(k_i + \bar{s}_i)} - (b+u)\bar{s}_i < 0,$$

откуда получаем

$$u > b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right) - \frac{\mu_i x_i}{Y_i(k_i + \bar{s}_i)}. \quad (5)$$

Условие (5) выполняется при всех  $x_i > 0$ , если

$$u > b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right).$$

Если, например,  $x_i > \frac{Y_i(k_i + \bar{s}_i)}{\mu_i} b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right)$ , то условие (5) выполняется при всех  $u > 0$ . Тогда получаем следующий результат.

**Теорема 1.** Если существует управление  $u$  такое, что

$$u_{j-1} < u < u_j, \quad j \in \{2, \dots, n\}; \quad (6)$$

$$u > b\left(\frac{a_{2i}}{\bar{s}_i} - 1\right), \quad i = j, j+1, \dots, n, \quad (7)$$

то при этом постоянном  $u$ , начиная с некоторого момента времени, выполняются условия

$$0 \leq s_i \leq \bar{s}_i, \quad i = j, j+1, \dots, n.$$

Получим теперь оценку времени  $\tilde{t}$  попадания траектории системы при управлении, удовлетворяющем (6), (7), в область  $0 \leq s_i \leq \bar{s}_i, i = j, j+1, \dots, n$ .

**Теорема 2.** Пусть  $u$  удовлетворяет (6), (7), а также условию

$$\frac{ua_{1i} + bY_i a_{2i}}{b+u} \leq \bar{s}_i, \quad i = j, j+1, \dots, n.$$

Тогда

$$\tilde{t} \leq \max_i \frac{1}{b+u} \ln \left( \frac{z_{i0} - z_i^*}{Y_i \bar{s}_i - z_i^*} \right),$$

где  $z_i = x_i + Y_i s_i$ ,  $z_i^* = x_i^* + Y_i s_i^*$ ,  $z_{i0} = x_{i0} + Y_i s_{i0}$ ,  $(x_i^*, s_i^*)$  – состояние равновесия подсистемы  $S_i$ ,  $(x_{i0}, s_{i0})$  – начальная точка.

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{t}_i$  – время попадания траектории подсистемы  $S_i$  в область  $0 \leq s_i \leq \bar{s}_i$ . Очевидно,  $\tilde{t}_i$  не меньше времени попадания траектории в полосу, ограниченную прямыми  $x_i + Y_i s_i = D_i \equiv \frac{u a_{1i} + b Y_i a_{2i}}{b+u}$  и  $x_i + Y_i s_i = Y_i \bar{s}_i$ . Поскольку  $\dot{z}_i = -(b+u)(z_i - D_i)$ , то нетрудно получить  $z_i(t) = z_i^* + (z_{i0} - z_i^*)e^{-(b+u)t}$ ,  $z_i^* = D_i$ , откуда следует  $\tilde{t}_i = \frac{1}{b+u} \ln \left( \frac{z_{i0} - z_i^*}{Y_i \bar{s}_i - z_i^*} \right)$ , что приводит к заключению теоремы.  $\square$

**Замечание 2.** Рассмотрим еще одну задачу стабилизации процесса биоочистки. Пусть  $u_{j-1} < u < u_j$ , т. е. динамика системы задается уравнениями (1), где  $i = j, j+1, \dots, n$ . Умножив вторые уравнения этой системы на  $Y_i$  и сложив их, получим

$$\sum_{i=j}^n \dot{z}_i = -(b+u) \sum_{i=j}^n z_i + A, \quad (8)$$

где  $z_i = x_i + Y_i s_i$ ,  $A = \sum_{i=j}^n A_i$ ,  $A_i = u \sum_{i=j}^n a_{1i} + b \sum_{i=j}^n Y_i a_{2i}$ . Обозначив  $z = \sum_{i=j}^n z_i$ , из (6) получаем

$$\dot{z} = -(b+u)z + A. \quad (9)$$

Из (8) следует, что система (1) имеет асимптотически устойчивое инвариантное множество

$$z = \frac{A}{b+u},$$

являющееся гиперплоскостью в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2(n-j+1)}$  переменных  $((x_j, s_j), (x_{j+1}, s_{j+1}), \dots, (x_n, s_n))$ . Возникает задача: найти множество точек в  $\mathbb{R}^{2(n-j+1)}$ , которые можно стабилизировать или  $T$ -стабилизировать (т. е. стабилизировать за время, меньшее некоторого заданного) с помощью кусочно-постоянного управления  $u$ , удовлетворяющего условию  $u_{j-1} < u < u_j, j \in \{2, \dots, n\}$ . При этом  $T$ -стабилизирующее управление позволит увеличить возможности стабилизации с учетом, что структура системы может изменяться. Для решения этой задачи можно построить параллелепипед, две грани которого лежат на плоскостях, параллельных интегральной плоскости, а остальные грани перпендикулярны им. При этом стабилизируемая точка находится в центре параллелепипеда. Сначала кусочно-постоянное управление  $u$ , принимающее два значения из  $(u_{j-1}, u_j)$ , переводит траекторию в параллелепипед, а затем переключается на его гранях, перпендикулярных интегральной плоскости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к моделированию сложных систем с переменной структурой и размерностью используется в задаче управления процессом биологической очистки сточных вод. При этом данный метод позволяет рассмотреть двухуровневую задачу стабилизации. На верхнем уровне стабилизируется структура системы, а на нижнем – некоторая область фазовых состояний.

*Работа А. Н. Кириллова и А. М. Сазонова поддержана РФФИ (грант №18-01-00249).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аким Э. Л., Смирнов А. М., Смирнов М. Н. Современная концепция водопользования на предприятиях ЦБП // Целлюлоза. Бумага. Картон. 2006. № 6. С. 66–74.
2. Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 144 с.
3. Вавилин В. А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983. 185 с.
4. Кириллов А. Н. Динамическое моделирование и стабилизация процесса биологической очистки сточных вод // Целлюлоза. Бумага. Картон. 2008. № 5. С. 66.
5. Кириллов А. Н. Задачи стабилизации экологических систем // Обзорные прикладной и промышленной математики. 1994. Вып. 6. С. 883–892.
6. Кириллов А. Н. Метод динамической декомпозиции в моделировании систем со структурными изменениями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 1. С. 20–24.
7. Кириллов А. Н. Некоторые методы кусочно-постоянной стабилизации нелинейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление: Материалы 5-й науч.-техн. конф. 2008. № 5. С. 70–71.
8. Кириллов А. Н. Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер.10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2006. Вып. 4. С. 127–131.
9. Фурсова П. В., Левич А. П. Дифференциальные уравнения в моделировании сообществ микроорганизмов // Успехи современной биологии. 2006. № 2. С. 149–179.
10. Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environ. Tech. Letters. 1985. Vol. 6. P. 467–476. doi: 10.1080/09593338509384365
11. Dupont R., Sinkjaer O. Optimization of wastewater treatment plants by means

of computer models // *Water Sci. Tech.* 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186

12. *Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // *Water Research.* 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

13. *Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models // *Water Research.* 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

14. *Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D.* A dynamic model of the clarification-thickening process // *Water Research.* 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Поступила в редакцию 20.04.2019

## REFERENCES

1. *Akim E. L., Smirnov A. M., Smirnov M. N.* Sovremennaya kontseptsiya vodopol'zovaniya na predpriyatiyakh CBP [The modern conception of the water use at the pulp and paper enterprises]. *Tsellyuloza. Bumaga. Karton* [Cellulose. Paper. Cardboard]. 2006. No. 6. P. 66–74.

2. *Vavilin V. A.* Vremya oborota biomassy i destruktsiya organicheskogo veshchestva v sistemakh biologicheskoi ochistki [Turnover time of the biomass and organic substance destruction in the biological treatment systems]. Moscow: Nauka, 1986. 144 p.

3. *Vavilin V. A.* Nelineinye modeli biologicheskoi ochistki i protsessov samoochishcheniya v rekakh [Nonlinear models of the biological wastewater treatment and the processes of the self-purification in rivers]. Moscow: Nauka, 1983. 185 p.

4. *Kirillov A. N.* Dinamicheskoe modelirovanie i stabilizatsiya protsessa biologicheskoi ochistki stochnykh vod [Dynamical modeling and process stabilization of the biological wastewater treatment]. *Tsellyuloza. Bumaga. Karton* [Cellulose. Paper. Cardboard]. 2008. No. 5. P. 66.

5. *Kirillov A. N.* Zadachi stabilizatsii ekologicheskikh sistem [Problems of the ecological systems stabilization]. *Obozrenie priklad. i promyshlennoi matem.* [Appl. and Industrial Math. Reviews]. 1994. No. 6. P. 883–892.

6. *Kirillov A. N.* Metod dinamicheskoi dekompozitsii v modelirovanii sistem so strukturnymi izmeneniyami [The method of dynamical decomposition for variable structure systems modeling]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and Control Systems]. 2009. No. 1. P. 20–24.

7. *Kirillov A. N.* Nekotorye metody kusochno-postoyannoi stabilizatsii nelineinykh dinamicheskikh sistem [Some methods of the piecewise constant stabilization of the

nonlinear dynamical systems]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie: Mat. 5-i nauch.-tekhn. konf.* [Mechatronics, automation, control: Proceed. 5th sci. tech. conf.]. 2006. P. 70–71.

8. *Kirillov A. N.* Upravlenie mnogostadiinymi tekhnologicheskimi protsessami [The multistage technological processes control]. *Vestnik S.-Peterb. un-ta. Ser.10: Priklad. matem. Informatika. Protsessy upravleniya* [Vestnik SPbSU. Applied Math. Computer Sci. Control Processes]. 2006. Iss. 4. P. 127–131.

9. *Fursova P. V., Levich A. P.* Differentsial'nye uravneniya v modelirovanii soobshchestv mikroorganizmov [Differential equations in the modeling of the microorganism biocenoses]. *Uspekhi sovr. biol.* [Biol. Bull. Reviews]. 2006. No. 2. P. 149–179.

10. *Brune D.* Optimal control of the complete-mix activated sludge process. *Environ. Tech. Letters.* 1985. Vol. 6. P. 467–476. doi: 10.1080/09593338509384365

11. *Dupont R., Sinkjaer O.* Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models. *Water Sci. Tech.* 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 181–190. doi: 10.2166/wst.1994.0186

12. *Henze M., Grady Jr. C. P. L., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems. *Water Research.* 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

13. *Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B.* A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models. *Water Research.* 1997. Vol. 31. P. 590–606. doi: 10.1016/S0043-1354(96)00273-4

14. *Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D.* A dynamic model of the clarification-thickening process. *Water Research.* 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Received April 20, 2019

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Кириллов Александр Николаевич**  
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических  
исследований КарНЦ РАН, Федеральный  
исследовательский центр «Карельский  
научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: krllv1812@yandex.ru  
тел.: (8142) 763370

**Сазонов Александр Михайлович**  
аспирант  
Институт прикладных математических  
исследований КарНЦ РАН, Федеральный  
исследовательский центр «Карельский  
научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: sazonov@cs.karelia.ru

**Брыксенкова Наталия Константиновна**  
старший преподаватель, к. т. н.  
Петербургский государственный университет  
путей сообщения Императора Александра I  
Московский пр., 9, Санкт-Петербург,  
Россия, 190031  
эл. почта: bryksenkova33@gmail.com

## CONTRIBUTORS:

**Kirillov, Alexander**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: krllv1812@yandex.ru

**Sazonov, Alexander**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: sazonov@cs.karelia.ru

**Bryksenkova, Natalia**  
St. Petersburg State Transport University  
9 Moskovsky Pr., 190031  
Saint-Petersburg, Russia  
e-mail: bryksenkova33@gmail.com

УДК 519.2

## О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ РАЗВИТИЯ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ

А. В. Колчин, Б. Ф. Безродный

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Россия*

В настоящей статье предпринята попытка показать современное состояние исследований в области вероятностной комбинаторики, использующих так называемую обобщенную схему размещения. Приведен ряд предельных теорем для сумм независимых одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин, которые могут найти применение при использовании обобщенной схемы размещения. Рассмотрен эффект перехода распределений сумм независимых одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения, с одной решетки на другую. Даны несколько примеров сведения комбинаторных задач к обобщенным схемам размещения частиц по ячейкам.

Ключевые слова: вероятностный метод; обобщенная схема размещения; предельные теоремы теории вероятностей.

### A. V. Kolchin, B. F. Bezrodnyi. ON SOME ASPECTS OF DEVELOPMENT OF THE GENERALISED ALLOCATION SCHEME

In this paper we make an attempt to portray the current situation in the probabilistic combinatorics field where so-called generalised allocation scheme has been utilised. We offer a series of limit theorems for sums of independent identically distributed non-negative integer-valued random variables which are applicable when using generalised allocation schemes. We look at the phenomenon of the transition of the distribution of sums of independent identically distributed integer-valued random variables from one lattice to another in the context of the generalised allocation scheme, and give several examples on how to reduce a combinatorial problem to some kind of a generalised scheme of allocating particles to cells.

Key words: probabilistic method; generalised allocation scheme; limit theorems of probability theory.

---

*Статья посвящается памяти академика  
Академии криптографии Российской Федерации  
Валентина Федоровича Колчина*

#### ВЕРоятностный метод

Комбинаторика сыграла важную роль в начале развития теории вероятностей, и эти два

раздела математики продолжают развиваться в тесном взаимодействии. В настоящее время теория вероятностей, предлагая новые подходы к решению задач дискретной математики, как бы отдает долги комбинаторике. Среди этих новых подходов отметим хорошо развитые в теории вероятностей методы асимптотического анализа, которые успешно исполь-

зуются при решении сложных комбинаторных задач.

Комбинаторные задачи и методы занимают значительное место в исследованиях по теории вероятностей. Среди многочисленных работ в этой области можно выделить несколько направлений: комбинаторные задачи в теории случайных процессов, задачи, связанные со случайными отображениями и случайными графами, задачи размещения частиц по ячейкам.

Для решения широкого круга подобных комбинаторных задач весьма плодотворным оказывается *вероятностный подход* [1, 3, 13, 19]. Если распределение вероятностей задано на множестве рассматриваемых комбинаторных структур, то числовые характеристики этих структур можно рассматривать как случайные величины и анализировать их вероятностными методами. При таком вероятностном подходе мы автоматически ограничиваемся рассмотрением типичных структур, которые составляют основную массу рассматриваемого множества, и исключаем из рассмотрения небольшую долю структур с нестандартными свойствами.

Вероятностный подход, получивший в настоящее время широкое распространение в комбинаторике, впервые был использован в почти современном виде В. Л. Гончаровым, применившим его к изучению множества  $S_n$  всех подстановок степени  $n$  и серий в случайных  $(0, 1)$ -последовательностях. Среди тех, чьи труды развивались вероятностная комбинаторика в России, были С. Н. Бернштейн, Н. В. Смирнов, В. Е. Степанов, ее успехи тесно связаны с блестящей российской вероятностной школой, школой А. А. Маркова, П. Л. Чебышёва, А. М. Ляпунова, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, Ю. В. Прохорова.

При анализе случайных структур успешно применялись разнообразные вероятностные методы, в том числе метод моментов, пуассоновская и гауссовская аппроксимации, производящие функции и их анализ методом перевала, теоремы тауберова типа, теория мартигалов.

## ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ И ЕЕ РАЗВИТИЕ

В вероятностной комбинаторике находит успешное применение *обобщенная схема размещения*, позволяющая сводить ряд комбинаторных задач к задачам о суммах независимых случайных величин, классическому объекту изучения в теории вероятностей. Обобщенная схема размещения была введена в [9]

и заняла заметное место в асимптотических исследованиях в вероятностной комбинаторике. Свое название эта схема получила в связи с тем, что она является обобщением классической задачи о случайном размещении частиц по ячейкам [13]. Обобщенная схема размещения оказалась удобным средством исследования таких интереснейших процессов, как эволюция случайных графов, случайных лесов, систем линейных уравнений со случайными коэффициентами, случайных подстановок, в том числе в связи с построением и анализом вычислительных алгоритмов [6].

В настоящее время активные исследования асимптотического поведения различных комбинаторных объектов с использованием обобщенной схемы размещения ведутся, в частности, Ю. Л. Павловым в Карельском научном центре РАН [15], А. Н. Чупруновым в Казанском федеральном университете [16–18] и И. Фазекашем в Дебреценском университете [20–22].

Напомним, что в обобщенной схеме размещения частиц распределение заполнений ячеек представимо как условное распределение *независимых* случайных величин при условии, что их сумма принимает фиксированное значение. Пусть  $\eta_1, \dots, \eta_N$  — неотрицательные целочисленные случайные величины, рассматриваемые как некоторые числовые характеристики комбинаторной структуры из  $N$  компонент, состоящей из  $n$  элементов, такие, что  $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$ . Если существуют независимые случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_N$  такие, что совместное распределение  $\eta_1, \dots, \eta_N$  допускает представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_1, \dots, k_N$  — произвольные целые числа, то говорят, что  $\eta_1, \dots, \eta_N$  образуют обобщенную схему размещения с параметрами  $n$  и  $N$  и независимыми случайными величинами  $\xi_1, \dots, \xi_N$ . Случайные величины  $\eta_1, \dots, \eta_N$  интерпретируются как заполнения ячеек.

В [20] для обобщенной схемы размещения доказаны частичные аналоги закона повторного логарифма и усиленного закона больших чисел Ю. В. Прохорова.

В [18] рассматривается следующее расширение обобщенной схемы размещения. Пусть  $K$  — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от  $\xi_1, \dots, \xi_N$ . Рассмотрим случайные величины  $\eta_1, \dots, \eta_N$  с сов-

местным распределением

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathbf{M}^K \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = K\right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь предполагается, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = K(\omega)\} > 0$$

почти наверное.

В случае, когда случайная величина  $K$  постоянна,  $K = n$ , получаем обобщенную схему размещения. Поэтому схему (2) можно интерпретировать как обобщенную схему размещения *случайного числа*  $K$  частиц по  $N$  ячейкам. Ее частными случаями являются обобщенная схема размещения с неполным комплектом частиц и другие аналоги обобщенной схемы размещения.

В [21] исследуются расширения обобщенных схем размещения, где

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \geq n\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n\right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

иными словами, в  $N$  ячеек размещаются по крайней мере  $n$  частиц в схеме (3) и не более  $n$  частиц в схеме (4). Для этих схем получены усиленный закон больших чисел, нормальная и пуассоновская локальные предельные теоремы.

В [22] предлагается расширение обобщенной схемы размещения, где ячейки рассматриваются из некоторого отмеченного множества, включающее в себя как частные случаи «традиционную» обобщенную схему размещения и ее варианты, изученные в [16–18, 21], и начаты его исследования; доказан ряд предельных теорем.

В силу независимости случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_N$  изучение многих характеристик обобщенной схемы размещения сводится к задачам о суммах независимых случайных величин. В случае, когда распределения слагаемых одинаковы и фиксированы (не зависят от числа слагаемых), можно пользоваться хорошо

развитой теорией суммирования независимых случайных величин. Однако во многих приложениях обобщенной схемы возникает необходимость в *локальных предельных теоремах в схеме серий*. В таких случаях до недавнего времени не было исчерпывающего ответа на вопрос, справедлива ли локальная предельная теорема даже в случае сходимости к нормальному закону; для каждого конкретного случая приходилось проводить отдельное доказательство либо следуя доказательству локальной теоремы, предложенному Б. В. Гнеденко (см., например, [2, 15]), либо проверяя условия общих локальных теорем (см., например, [14]).

Пусть задана последовательность неотрицательных чисел  $b_0, b_1, b_2, \dots$ , таких, что радиус сходимости  $R$  ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!}$$

положителен. Введем целочисленную случайную величину  $\xi = \xi(\theta)$ , распределенную по следующему закону (см., например, [4, 11]):

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}. \quad (5)$$

Положим

$$\begin{aligned} m &= m(\theta) = \mathbf{M}\xi, & \sigma^2 &= \sigma^2(\theta) = \mathbf{D}\xi, \\ \beta &= \beta(\theta) = \mathbf{M}|\xi - m|^3. \end{aligned}$$

Заметим, что при  $|\theta| < R$  случайная величина  $\xi$  имеет все моменты.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые случайные величины, распределение которых совпадает с распределением (5) случайной величины  $\xi$ .

Распространенным случаем обобщенной схемы размещения является схема, тесно связанная с так называемой *канонической*, в которой выполнено либо

**условие**  $A_r$ , где  $r \geq 2$ :  $b_0 > 0$ , и  $b_1 = \dots = b_{r-1} = 0$ , но  $b_r > 0$ , причем максимальный шаг распределения (5) равен 1; либо

**условие**  $A_1$ :  $b_0, b_1 > 0$ ;

которая, очевидно, является частным случаем общей схемы. В *классической* схеме равновероятного размещения частиц по ячейкам выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1! \dots k_N! N^n},$$

и она также является частным случаем общей схемы (1), (5).

Если соотношение (1) справедливо при некотором  $\theta$ , то оно остается верным при всех

положительных  $\theta$  из области сходимости ряда  $B(\theta)$  (см., например, [11]). Для изучения характеристик обобщенной схемы размещения, как правило, требуются локальные предельные теоремы при всех значениях параметра  $\theta$ . Основные случаи возможных областей изменения  $N$  и  $\theta$  были рассмотрены в [4, 5, 7, 8].

Нашей целью является получение предельных теорем для сумм вида

$$S_N = \sum_{k=1}^N \xi_k$$

при  $N \rightarrow \infty$  и различных вариантах поведения параметра  $\theta = \theta(N)$ . Положим

$$P_N(n) = \mathbf{P}\{S_N = n\}.$$

Пусть  $F_N(x)$  — функция распределения суммы централизованных и нормированных случайных величин

$$S_N^* = \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{N}}.$$

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

В простейшем случае [4, 5] значения  $\theta$  отделены от 0 и не приближаются к значению радиуса сходимости  $B(\theta)$ .

Оказывается, что в доказательстве интегральной предельной теоремы о слабой сходимости распределений сумм  $S_N^*$  к стандартному нормальному закону не требуется выполнения каких-либо арифметических ограничений на последовательность  $b_0, b_1, \dots$

**Теорема 1.** Пусть  $N \rightarrow \infty$  и существуют постоянные  $\theta_0, \theta_1$ ,  $0 < \theta_0 < \theta_1 < R$ , такие, что параметр  $\theta = \theta(N) \in [\theta_0, \theta_1]$ . Тогда распределение  $S_N^*$  слабо сходится к стандартному нормальному закону, причем справедлива оценка

$$\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| \leq c \frac{\beta^*}{(\sigma^*)^3 \sqrt{N}},$$

где  $\Phi(x)$  — функция распределения стандартного нормального закона и

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \sigma(\theta) > 0, \\ \beta^* &= \max_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \beta(\theta), \end{aligned}$$

$\beta(\theta) = \mathbf{M}|\xi_1 - m|^3$ , а  $c$  — постоянная из неравенства Берри-Эссеена.

При  $N \rightarrow \infty$  и  $\theta \rightarrow 0$  происходит переход распределения  $S_N$  с одной решетки на другую [7, 8]. Этот эффект был впервые обнаружен в классической схеме размещения частиц по ячейкам в [12] для распределения числа ячеек, содержащих ровно одну частицу.

На решетке целых чисел имеет место сходимость к нормальному распределению.

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие  $A_r$ ,  $r \geq 1$ . Пусть  $N \rightarrow \infty$  и  $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$  так, что  $\theta^r N \rightarrow \infty$ . Тогда распределение суммы  $S_N^*$  слабо сходится к стандартному нормальному закону.

На решетке целых неотрицательных чисел с шагом  $r$  имеет место сходимость к распределению Пуассона.

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие  $A_r$ ,  $r \geq 1$ . Пусть  $N \rightarrow \infty$  и  $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$  так, что  $b_r N \theta^r / (r! b_0) \rightarrow \lambda$ , где  $\lambda > 0$  — некоторая постоянная. Тогда распределение суммы  $S_N/r$  слабо сходится к распределению Пуассона с параметром  $\lambda$ .

Согласно этой теореме, предельное распределение суммы  $S_N$  сосредоточено на решетке целых неотрицательных чисел с шагом  $r$ .

## ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Как уже отмечалось, при применении обобщенной схемы размещения особое значение имеют локальные предельные теоремы.

Напомним, что в простейшем случае [4, 5] значения  $\theta$  отделены от 0 и не приближаются к значению радиуса сходимости  $B(\theta)$ , тогда справедлива следующая локальная предельная теорема.

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие  $A_r$ ,  $r \geq 1$ , и пусть  $N \rightarrow \infty$  и существуют положительные постоянные  $\theta_0, \theta_1$ , такие, что параметр  $\theta = \theta(N)$  меняется так, что  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < R$ . Тогда равномерно относительно целых неотрицательных  $n$

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \rightarrow 0,$$

где  $z = (n - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$ .

Как было отмечено выше, при  $N \rightarrow \infty$  и  $\theta \rightarrow 0$  имеет место переход распределения  $S_N$  с одной решетки на другую. Именно, на решетке целых чисел имеет место сходимость к нормальному распределению, в то время как на решетке целых неотрицательных чисел с шагом  $r$  имеет место сходимость к распределению Пуассона.

Если  $N\theta^s \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ , то для  $S_N$  справедлива локальная предельная теорема о сходимости к нормальному распределению на решетке целых чисел.

**Теорема 5.** Пусть выполнено условие  $A_1$  и  $N \rightarrow \infty$ ,  $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ ,  $\theta N \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных  $n$ , где

$$z = (n - Nm)/(\sigma\sqrt{N}).$$

Если же  $N\theta^r \rightarrow \lambda r! b_0/b_r$ ,  $\lambda > 0$ , то для  $S_N$  справедлива теорема о сходимости к распределению Пуассона с параметром  $\lambda$  на решетке целых неотрицательных чисел с шагом  $r$ .

Пусть выполнено условие  $A_r$ ,  $r \geq 2$ , и пусть  $s$  — первое большее  $r$  число, для которого  $b_s > 0$ .

С привлечением производящих и характеристических функций случайной величины  $S_N$  в [8] доказана следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть  $N \rightarrow \infty$  и  $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$  так, что  $N\theta^s \rightarrow \infty$  и максимальный шаг решетки, на которой лежат  $0, r, s$ , равен единице. Тогда

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных  $n$ , где

$$z = (n - Nm)/(\sigma\sqrt{N}).$$

Таким образом, при промежуточных порядках стремления параметра  $\theta$  к нулю происходит переход распределения  $S_N$  с решетки целых неотрицательных чисел с шагом  $r$  на решетку всех целых неотрицательных чисел.

В [7] для описания деталей перехода был применен прямой анализ распределения  $S_N$ , основанный на ясных интуитивных соображениях.

**Теорема 7.** Пусть  $N \rightarrow \infty$  и  $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$  так, что  $Nb_s\theta^s/(s!b_0) \rightarrow \lambda$ , где  $\lambda > 0$  — некоторая постоянная, и максимальный шаг решетки, на которой лежат  $0, r, s$ , равен единице. Тогда

$$P_N(n) = \sum_{k \in L_t} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi N b_r \theta^r / (b_0 r!)}} \times \exp \left\{ \frac{(n - N b_r \theta^r / (b_0 r!))^2}{2 N b_r \theta^r / (b_0 r!)} \right\} (1 + o(1))$$

равномерно относительно  $n \in L_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, r - 1$ , таких, что величина  $(n - N b_r \theta^r / (b_0 r!)) / \sqrt{2 N b_r \theta^r / (b_0 r!)}$  лежит в любом фиксированном конечном интервале. Здесь

$$L_0 = \{0, r, 2r, \dots\},$$

$$L_1 = \{1, r + 1, 2r + 1, \dots\},$$

$$L_2 = \{2, r + 2, 2r + 2, \dots\}, \dots,$$

$$L_{r-1} = \{r - 1, 2r - 1, 3r - 1, \dots\};$$

ясно, что

$$\mathbf{N} = L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{r-1}.$$

В случае, когда значения параметра  $\theta$  приближаются к границе сходимости ряда  $B(\theta)$ , как можно показать на примерах, могут появляться и другие предельные распределения.

Некоторые из доказанных в [4] теорем, по видимому, могут быть получены путем проверки приведенных в [14] общих условий справедливости локальных теорем о сходимости к нормальному распределению, однако мы считаем, что наличие простых прямых доказательств является полезным для дальнейших исследований в этой области.

## НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В иллюстративных целях приведем несколько элементарных примеров сведения некоторых комбинаторных задач к обобщенным схемам размещения частиц по ячейкам.

### Случайные отображения

В случайном отображении  $\sigma = \left( \begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{smallmatrix} \right)$ , принимающем с равными вероятностями значения из множества  $\Sigma_n$ , случайные величины  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  независимы, и

$$\mathbf{P}\{\sigma_1 = s_1, \dots, \sigma_n = s_n\} = n^{-n} \quad (6)$$

для положительных целых  $s_1, \dots, s_n$ , не превосходящих  $n$ .

Обозначим через  $\eta_r$  кратность вершины  $r$  в случайном отображении  $\sigma$ ,  $r = 1, \dots, n$ . Величина  $\eta_r$  равна числу случайных величин  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , принявших значение  $r$ , так что для неотрицательных целых  $k_1, \dots, k_n$ ,  $k_1 + \dots + k_n = n$ , вероятность  $\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_n = k_n\}$  есть сумма вероятностей вида (6), где среди  $s_1, \dots, s_n$  найдется в точности  $k_r$  значений, равных  $r$ ,  $r = 1, \dots, n$ . Число слагаемых в этой сумме, очевидно, есть  $n!/(k_1! \dots k_n!)$ , следовательно,

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_n = k_n\} = \frac{n!}{k_1! \dots k_n! n^n}. \quad (7)$$

Таким образом, совместное распределение кратностей вершин  $\eta_1, \dots, \eta_n$  в случайном отображении является полиномиальным. Рассматривая вершины как ячейки, а дуги, входящие в эти вершины, как частицы, приходим к классической схеме размещения  $n$  частиц в  $n$  ячеек с полиномиальным распределением количеств  $\eta_1, \dots, \eta_n$  частиц в ячейках. Случайные величины  $\eta_1, \dots, \eta_n$  удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_n = k_n\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n \mid \xi_1 + \dots + \xi_n = n\}, \end{aligned}$$

где  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы и одинаково распределены по закону Пуассона.

Итак, число вершин  $\mu_r(n)$  в случайном отображении, имеющих кратность  $r$ , совпадает с числом ячеек, содержащих в точности  $r$  частиц в классической схеме размещения  $n$  частиц по  $n$  ячейкам.

### Выборка без возвращения

Пусть из урны, содержащей  $m$  шаров каждого из  $N$  цветов, случайным образом без возвращения извлекаются  $n$  шаров. Обозначим через  $\eta_i$  число извлеченных шаров  $i$ -го цвета,  $i = 1, \dots, N$ . Легко видеть, что для неотрицательных целых  $\eta_1, \dots, \eta_N$ , таких, что  $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$ , справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \frac{\binom{m}{n_1} \dots \binom{m}{n_N}}{\binom{mN}{n}}.$$

Если в обобщенной схеме размещения случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_N$  имеют биномиальное распределение, именно,

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k},$$

где  $k = 0, 1, \dots, m$ ,  $0 < p < 1$ , то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\} \\ &= \frac{\binom{m}{n_1} \dots \binom{m}{n_N}}{\binom{mN}{n}}, \end{aligned}$$

и распределение случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_N$  совпадает с условным распределением независимых случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_N$  при условии, что  $\xi_1 + \dots + \xi_N = n$ . Таким образом, величины  $\eta_1, \dots, \eta_N$  можно рассматривать как заполнения ячеек в обобщенной схеме размещения частиц, в которой случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_N$  распределены по биномиальному закону с параметрами  $Bi(m, p)$ .

### Разбиения числа на слагаемые

Рассмотрим все различные разбиения целого положительного числа  $n$  на  $N$  целочисленных слагаемых, не превосходящих некоторого  $r \geq 0$ . Число таких разбиений есть  $\binom{n-(r-1)N-1}{N-1}$ . На множестве этих разбиений зададим равномерное распределение, приписывая вероятность  $\binom{n-(r-1)N-1}{N-1}^{-1}$  каждому разбиению  $n = n_1 + \dots + n_N$ ,  $n_1, \dots, n_N \geq r$ . Тогда  $n$  можно представить в виде

$$n = \eta_1 + \dots + \eta_N,$$

где слагаемые  $\eta_1, \dots, \eta_N$  есть случайные величины; если  $n_1, \dots, n_N \geq r$ ,  $n_1 + \dots + n_N = n$ , то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} \\ &= \binom{n-(r-1)N-1}{N-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Для получения обобщенной схемы размещения, соответствующей этой комбинаторной задаче, достаточно взять геометрически распределенные случайные величины

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = p^{k-1} (1-p),$$

где  $k = r, r+1, \dots$ ,  $0 < p < 1$ . Действительно, как легко видеть,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\} \\ &= \binom{n-(r-1)N-1}{N-1}^{-1}, \end{aligned}$$

поскольку для геометрически распределенных слагаемых

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} \\ &= \binom{n-(r-1)N-1}{N-1} p^{n-Nr} (1-p)^N. \end{aligned}$$

### Леса из корневых деревьев

Рассмотрим множество  $\mathscr{W}_{n,N}$  всех лесов из  $N$  корневых деревьев; корни, и одновременно с ними сами деревья, занумеруем числами  $1, \dots, N$ , а оставшиеся  $n$  вершин занумеруем числами  $1, \dots, n$ . Число различных лесов в  $\mathscr{W}_{n,N}$  равно  $N(n+N)^{n-1}$ . Число лесов, в которых  $k$ -е дерево содержит  $n_k$  некорневых вершин,  $k = 1, \dots, N$ , равно

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_N!} (n_1 + 1)^{n_1-1} \dots (n_N + 1)^{n_N-1},$$

где множитель  $n!/(n_1! \dots n_N!)$  — число разбиений  $n$  вершин на  $N$  упорядоченных групп, а  $(n_k + 1)^{n_k-1}$  есть число деревьев, которые могут быть собраны из  $k$ -й группы вершин в каждом разбиении.

Зададим на  $\mathcal{W}_{n,N}$  равномерное распределение. Обозначим через  $\eta_k$  число некорневых вершин в  $k$ -м дереве в случайном лесе из  $\mathcal{W}_{n,N}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Для случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_N$  получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} \\ &= \frac{n!(n_1 + 1)^{n_1} \cdots (n_N + 1)^{n_N}}{N(n + N)^{n-1}(n_1 + 1)! \cdots (n_N + 1)!}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n_1, \dots, n_N$  — неотрицательные целые числа, такие, что  $n_1 + \dots + n_N = n$ .

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_N$ , такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{(k + 1)^k}{(k + 1)!} x^k e^{-\theta(x)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

где параметр  $x$  лежит в интервале  $0 < x \leq 1/e$ , а функция  $\theta(x)$  определена следующим образом:

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} x^k.$$

Из (9) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_N = n} \frac{(n_1 + 1)^{n_1} \cdots (n_N + 1)^{n_N}}{(n_1 + 1)! \cdots (n_N + 1)!} x^n e^{-N\theta(x)} \\ &= \frac{N(n + N)^{n-1}}{n!} x^n e^{-N\theta(x)}, \end{aligned}$$

так что для любого  $x$ ,  $0 < x \leq 1/e$ , и для любых неотрицательных целых  $n_1, \dots, n_N$ , таких, что  $n_1 + \dots + n_N = n$ , справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\} \\ &= \frac{n!(n_1 + 1)^{n_1} \cdots (n_N + 1)^{n_N}}{N(n + N)^{n-1}(n_1 + 1)! \cdots (n_N + 1)!}. \end{aligned} \quad (10)$$

Правые части (8) и (10) совпадают, и совместное распределение  $\eta_1, \dots, \eta_N$  совпадает с таковым у  $\xi_1, \dots, \xi_N$  при условии  $\xi_1 + \dots + \xi_N = n$ . Итак, для изучения размеров деревьев в случайном лесе можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам со случайными величинами  $\xi_1, \dots, \xi_N$  с распределением, задаваемым (9).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином, 2007. 320 с.
2. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 264 с.

3. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944. Т. 8, № 1. С. 3–48.

4. Колчин А. В. Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 4. С. 148–157. doi: 10.4213/dm224

5. Колчин А. В. Предельные теоремы в обобщенной схеме размещения // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, № 3. С. 432–435.

6. Колчин А. В., Безродный Б. Ф., Леева М. А. Обобщенная схема размещения: некоторые аспекты развития // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2018. Т. 25, № 2. С. 97–102.

7. Колчин А. В., Колчин В. Ф. Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 15–21. doi: 10.4213/dm962

8. Колчин А. В., Колчин В. Ф. О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 4. С. 113–127. doi: 10.4213/dm76

9. Колчин В. Ф. Один класс предельных теорем для условных распределений // Литовский матем. сборник. 1968. Т. 8, № 1. С. 111–126.

10. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

11. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 208 с.

12. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 222 с.

13. Колчин В. Ф., Чистяков В. П. Комбинаторные задачи теории вероятностей // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей, математическая статистика, теоретическая кибернетика. 1974. Т. 11. С. 5–45.

14. Мухин А. Б. Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36, № 4. С. 660–674.

15. Павлов Ю. Л. Случайные леса. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 1996. 258 с.

16. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

17. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дис-

кретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

18. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Об обобщенной схеме размещения со случайным числом частиц // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 2. С. 149–153. doi: 10.4213/dm1190

19. Эрдёш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976. 137 с.

20. Chuprunov A. N., Fazekas I. An inequality for moments and its applications to the generalized

allocation scheme // Publ. Math. Debrecen. 2010. Vol. 76, no. 3. P. 271–286.

21. Fazekas I., Porvázsnnyik B. A generalized allocation scheme // Annales Mathematicae & Informaticae. 2012. Vol. 39. P. 57–70.

22. Fazekas I., Porvázsnnyik B. Some limit theorems for generalized allocation schemes // Miskolc Math. Notes. 2015. Vol. 16, no. 2. P. 817–832. doi: 10.18514/MMN.2015.1461

Поступила в редакцию 09.04.2019

## REFERENCES

1. Alon N., Spencer J. H. The Probabilistic Method. New York: Wiley-Interscience, 2000. 305 p. doi: 10.1002/9780470277331

2. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Limit distributions of sums of independent random variables. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1954. 264+9 p.

3. Goncharov V. L. On the field of combinatory analysis. *American Math. Soc. Transl.* 1962. Vol. 19. P. 1–46. doi: 10.1090/trans2/019

4. Kolchin A. V. On limit theorems for the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2003. Vol. 13, iss. 6. P. 627–636. doi: 10.1515/15693920332273336

5. Kolchin A. V. Predel'nye teoremy v obobshchenoi skheme razmeshcheniya [Limit theorems in the generalised allocation scheme]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki* [Review Industrial Appl. Math.]. 2009. Vol. 16, no. 3. P. 432–435.

6. Kolchin A. V., Bezrodnyi B. F., Leeva M. A. Some aspects of evolution of the generalised allocation scheme. *Review Industrial Appl. Math.* 2018. Vol. 25, no. 1. P. 45–47.

7. Kolchin A. V., Kolchin V. F. On the transition of distributions of sums of random variables related to the generalised allocation scheme from one lattice to another. *Discrete Math. Appl.* 2007. Vol. 17, iss. 5. P. 455–461. doi: 10.1515/dma.2007.036

8. Kolchin A. V., Kolchin V. F. On transition of distributions of sums of independent identically distributed random variables from one lattice to another in the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2006. Vol. 16, iss. 6. P. 527–540. doi: 10.1515/156939206779218023

9. Kolchin V. F. A class of limit theorems for conditional distributions. *Liet. Mat. Rinkiny*s 1968. Vol. 8. P. 53–63.

10. Kolchin V. F. Random Graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

11. Kolchin V. F. Random Mappings. New York: Optimization Software, 1986. 216 p.

12. Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P. Random Allocations. New York: Winston, 1978. 262 p. doi: 10.1137/1022018

13. Kolchin V. F., Chistyakov V. P. Combinatorial problems of probability theory. *J. Soviet Math.* 1975. Vol. 4. P. 217–243. doi: 10.1007/BF01097183

14. Mukhin A. B. Local limit theorems for lattice random variables. *Theory Probab. Appl.* 1991. Vol. 36, no. 4. P. 698–713. doi: 10.1137/1136086

15. Pavlov Yu. L. Random Forests. Utrecht: VSP, 2000. 258 p.

16. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum cell load. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 3. P. 307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020

17. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 1. P. 101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

18. Chuprunov A. N., Fazekas I. On the generalised allocation scheme with a random number of particles. *Discrete Math. Appl.* 2012. Vol. 22, iss. 2. P. 235–240. doi: 10.1515/dma-2012-016

19. Erdős P., Spencer J. H. Probabilistic Methods in Combinatorics. New York: Academic Press, 1974. 106 p.

20. Chuprunov A. N., Fazekas I. An inequality for moments and its applications to the generalized allocation scheme. *Publ. Math. Debrecen.* 2010. Vol. 76. P. 271–286.

21. Fazekas I., Porvázsnnyik B. A generalized allocation scheme. *Annales Mathematicae & Informaticae.* 2012. Vol. 39. P. 57–70.

22. Fazekas I., Porvázsnnyik B. Some limit theorems for generalized allocation schemes. *Miskolc Math. Notes.* 2015. Vol. 16, no. 2. P. 817–832. doi: 10.18514/MMN.2015.1461

Received April 09, 2019

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

### **Колчин Андрей Валентинович**

доцент кафедры «Прикладная математика», к. ф.-м. н.  
Московский автомобильно-дорожный государственный  
технический университет (МАДИ)  
Ленинградский пр., 64, Москва, Россия, 125319  
эл. почта: [akolchin@madi.ru](mailto:akolchin@madi.ru)  
тел.: (499) 1514009

### **Безродный Борис Федорович**

зав. кафедрой «Прикладная математика», д. т. н.,  
проф.  
Московский автомобильно-дорожный государственный  
технический университет (МАДИ)  
Ленинградский пр., 64, Москва, Россия, 125319  
эл. почта: [math@madi.ru](mailto:math@madi.ru)  
тел.: (499) 1514009

## CONTRIBUTORS:

### **Kolchin, Andrei**

Moscow Automobile and Road Construction State  
Technical University (MADI)  
64 Leningradsky Av., 125319 Moscow, Russia  
e-mail: [akolchin@madi.ru](mailto:akolchin@madi.ru)  
tel.: (499) 1514009

### **Bezrodnyi, Boris**

Moscow Automobile and Road Construction State  
Technical University (MADI)  
64 Leningradsky Av., 125319 Moscow, Russia  
e-mail: [math@madi.ru](mailto:math@madi.ru)  
tel.: (499) 1514009

УДК 519.179.2 + 519.876.5

## ОБ АССОРТАТИВНОСТИ И КЛАСТЕРИЗАЦИИ СТЕПЕННОЙ МОДЕЛИ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ

М. М. Лери

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются случайные конфигурационные графы с распределением степеней вершин, являющимся дискретным степенным распределением. Параметр распределения либо принимает фиксированные значения, либо является случайным, имеющим либо равномерное, либо усеченное нормальное распределение на заданном интервале  $(a, b)$ . Посредством имитационного моделирования проводится анализ ассортативности и кластеризации рассматриваемых графов. Находятся оценки таких числовых структурных характеристик, как коэффициенты ассортативности и кластеризации. Проводится сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе данными для реальных сетей.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степенное распределение; ассортативность; кластеризация; имитационное моделирование.

### M. M. Leri. ON ASSORTATIVITY AND CLUSTERING OF A POWER-LAW CONFIGURATION GRAPH MODEL

The paper deals with configuration graphs with vertex degrees distributed independently according to the power law. The distribution parameter is either fixed or randomly distributed according to either uniform or truncated normal distribution on a predefined interval  $(a, b)$ . The assortativity and clustering of these graphs are studied by computer simulation. The estimates of numerical structural characteristics are found, such as the assortativity and clustering coefficients. The obtained results are compared with those known from the literature for real world complex networks.

Key words: configuration graph; power-law; assortativity; clustering; simulations.

### ВВЕДЕНИЕ

С появлением, быстрым развитием и усложнением структуры глобальных сетей исследование случайных графов, как моделей, широко применяемых для описания таких объектов, приобретает всевозрастающую популярность. Рассмотрение структуры и функционирования реальных телекоммуникационных сетей показало (см., например, [6, 7]), что случайные графы, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с общим законом распределения, хорошо подходят для

их описания. Однако с ростом размерности таких сетей стало понятно, что при построении их моделей недостаточно учитывать только распределение степеней вершин в соответствующем случайном графе, но также необходимо принимать в рассмотрение и другие не менее важные числовые характеристики графовой структуры, такие как ассортативность, кластеризация, модулярность, центральность и пр.

В настоящей работе рассматриваются случайные графы, распределение степеней вершин которых является дискретным анало-

гом распределения Парето. Обозначим через  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  степени вершин случайного графа размерности  $N$ , представляющие собой независимые случайные величины со следующим общим распределением [11]:

$$P\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $\tau > 1$  является параметром распределения. Рассматриваемые в большинстве работ графы (см., например, [5, 7, 11]) имеют фиксированный параметр  $\tau$ , однако с ростом размеров глобальных сетей все большее внимание исследователей стали привлекать модели случайных графов, у которых распределения степеней вершин либо меняются с ростом размерности графа, либо являются случайными (см., например, [2, 3]). Поэтому в настоящей работе рассматриваются случайные графы, степени вершин которых имеют распределение (1) как с фиксированным параметром  $\tau$ , так и с параметром  $\tau$ , имеющим либо равномерное, либо усеченное нормальное распределение на заданном интервале  $(a, b)$ , где  $1 < a < b < \infty$  [1]. Вследствие того, что параметр  $\tau$  выбирается отдельно для каждой вершины из заданного распределения (равномерного или усеченного нормального), можно говорить о том, что эволюция графа происходит в случайной среде. Также немаловажное значение имеет собственно формирование графа. В работе рассматривается так называемая конфигурационная модель случайного графа, впервые предложенная Б. Боллобашем в [4]. Степень вершины графа определяет различимые полуредра [11], занумерованные в произвольном порядке. Далее все полуредра соединяются между собой попарно и равновероятно, образуя ребра графа. Ясно, что при таком построении сумма степеней вершин должна быть четной, поэтому в противном случае к равновероятно выбранной вершине добавляется одно недостающее полуредра, тем самым увеличив степень этой вершины на 1. Конфигурационные графы могут иметь кратные ребра, циклы и петли.

## ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРУКТУРЫ

Наряду с рассмотрением распределения степеней узлов реальных сетей все большее внимание уделяется исследованиям других важных числовых характеристик сетевой структуры, отражающих как глобальные, так и локальные свойства сетей. В настоящей работе рассматриваются три таких характеристики: глобальный и локальный коэффициенты кластеризации графа, а также коэффициент ассортативности.

Коэффициент ассортативности  $A$  используется для оценки взаимозависимости между

степенями смежных вершин. В [10] было предложено использовать для этой цели коэффициент корреляции Пирсона. Таким образом, значение коэффициента  $A$  будет положительным в том случае, когда вершины с большими степенями соединяются ребрами в основном тоже с вершинами с большими степенями, и тогда граф считают «ассортативным». В противном случае значение  $A$  будет отрицательным и граф называют «дисассортативным». Для оценки степени кластеризации графа применяются соответствующие кластерные коэффициенты. В работе рассматриваются два таких коэффициента: глобальный кластерный коэффициент  $C_G$  [10]

$$C_G = \frac{3 \times \text{число треугольников}}{\text{число пар смежных ребер}}$$

и средний локальный кластерный коэффициент  $C_L$  [10]

$$C_L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i,$$

где

$$C_i = \frac{\text{число треугольников при вершине } i}{\text{число пар смежных ребер с центром в } i},$$

где «пара смежных ребер» означает, что вершина соединена ребрами с двумя другими вершинами [10]. Как уже было упомянуто выше, в конфигурационном графе могут быть петли и кратные ребра. При вычислении кластерных коэффициентов петли не учитываются, а кратное ребро считается за одно. Значение глобального кластерного коэффициента отражает вероятность того, что в равновероятно выбранной паре смежных ребер, имеющих общую вершину, другие концы ребер будут тоже соединены ребром.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Целью настоящей работы была оценка введенных выше структурных характеристик конфигурационных графов посредством методов имитационного моделирования и нахождения зависимостей этих характеристик от объема графа и параметра распределения степеней вершин. Как в случае фиксированного параметра  $\tau$  распределения (1), так и при случайном  $\tau$  (равномерно или нормально распределенном на заданном интервале  $(a, b)$ ) рассматривались графы размерности  $100 \leq N \leq 10000$  с шагом 500. В случае фиксированного  $\tau$  значения параметра изменялись от 1, 1 до 2, 5 с шагом 0, 1. На основе полученных статистических данных были построены следующие регрессионные зависимости: коэффициентов  $A$ ,

$C_G$  и  $C_L$  от  $N$  и  $\tau$  (рис. 1–3):

$$A = -0,581N^{-0,888+0,896/\tau}, \quad R^2 = 0,94,$$

$$C_G = 0,457N^{-1,215+1,091/\tau}, \quad R^2 = 0,93,$$

$$C_L = 0,394N^{-0,853+0,986/\tau}, \quad R^2 = 0,95.$$

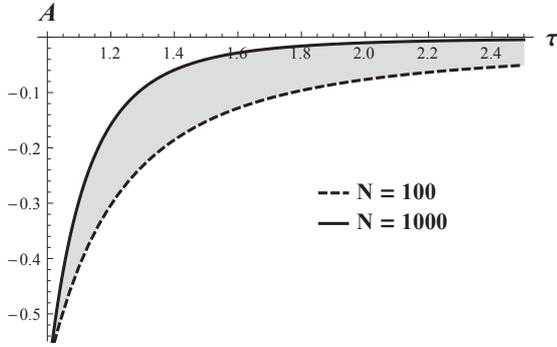


Рис. 1. Зависимость  $A$  от  $N$  и  $\tau$  для фиксированных значений  $\tau$

Fig. 1. Dependence of  $A$  on  $N$  and  $\tau$  for fixed  $\tau$

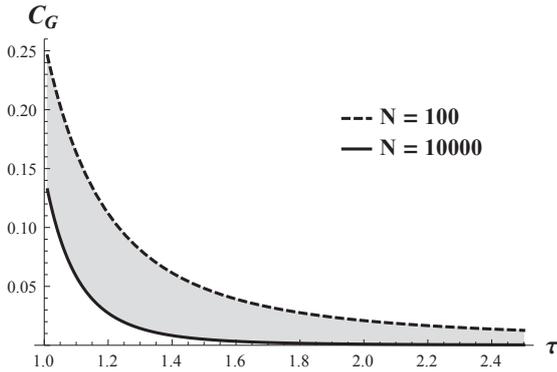


Рис. 2. Зависимость  $C_G$  от  $N$  и  $\tau$  для фиксированных значений  $\tau$

Fig. 2. Dependence of  $C_G$  on  $N$  and  $\tau$  for fixed  $\tau$

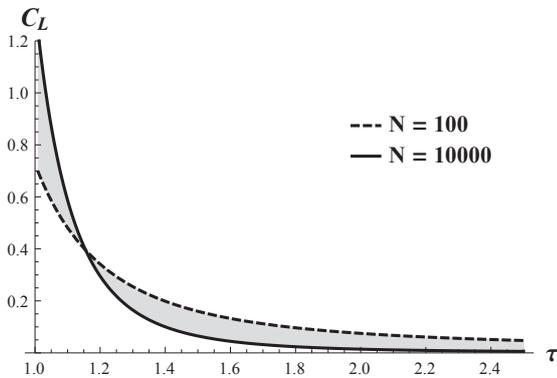


Рис. 3. Зависимость  $C_L$  от  $N$  и  $\tau$  для фиксированных значений  $\tau$

Fig. 3. Dependence of  $C_L$  on  $N$  and  $\tau$  for fixed  $\tau$

В случае, когда параметр  $\tau$  распределения (1) имел либо равномерное, либо усеченное нормальное распределение, рассматривались три интервала  $(a, b)$ :  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  и  $(1, 3)$ . Выбор интервалов, как и ранее [1, 8, 9], был основан на том, что конфигурационные графы с параметром  $\tau \in (1, 2)$  считаются наиболее подходящими для описания сложных сетей телекоммуникаций [5, 7, 11], графы с  $\tau \in (2, 3)$  показывают устойчивость к «лесному пожару» [8, 9], а интервал  $(1, 3)$  был выбран как обобщающий. По полученным результатам были построены следующие регрессионные модели зависимостей коэффициентов  $A$ ,  $C_G$  и  $C_L$  от  $N$  (обозначения  $\tau \sim \mathbf{U}(a, b)$  и  $\tau \sim \mathbf{N}(a, b)$  означают, что параметр  $\tau$  имеет соответственно равномерное или усеченное нормальное распределение на  $(a, b)$ ):

$$\tau \sim \mathbf{U}(1, 2) : \quad A = -0,54 \cdot N^{-0,16},$$

$$\tau \sim \mathbf{U}[2, 3] : \quad A = -0,38 \cdot N^{-0,41},$$

$$\tau \sim \mathbf{U}(1, 3) : \quad A = -0,23 \cdot N^{-0,10},$$

$$\tau \sim \mathbf{N}(1, 2) : \quad A = -0,24 \cdot N^{-0,12},$$

$$\tau \sim \mathbf{N}(2, 3) : \quad A = -0,31 \cdot N^{-0,39},$$

$$\tau \sim \mathbf{N}(1, 3) : \quad A = -0,18 \cdot N^{-0,18}.$$

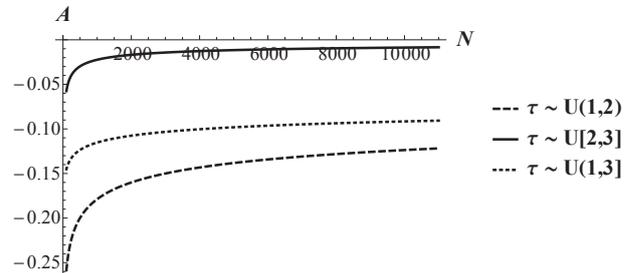


Рис. 4. Зависимость  $A$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{U}(a, b)$  для трех интервалов  $(a, b)$

Fig. 4. Dependence of  $A$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{U}(a, b)$  for the three intervals  $(a, b)$

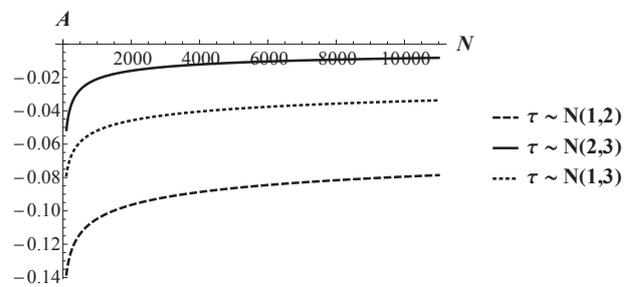


Рис. 5. Зависимость  $A$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{N}(a, b)$  для трех интервалов  $(a, b)$

Fig. 5. Dependence of  $A$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{N}(a, b)$  for the three intervals  $(a, b)$

Коэффициенты детерминации для всех моделей зависимости  $A$  от  $N$  были не менее 0,93.

Необходимо отметить, что коэффициент ассортативности  $A$  для всех рассмотренных видов конфигурационных графов является отрицательным, что означает, что данные графы можно использовать для моделирования только дисассортативных сетей. Заметим также (рис. 4 и 5), что самые большие по модулю значения коэффициент ассортативности принимает тогда, когда значения параметра  $\tau$  лежат в интервале (1, 2), а самые маленькие – в интервале (2, 3).

Для коэффициентов  $C_G$  и  $C_L$  были получены следующие их зависимости от  $N$ :

$$\begin{aligned} \tau \sim \mathbf{U}(1, 2) : & C_G = 0,41 \cdot N^{-0,38}, \\ \tau \sim \mathbf{U}[2, 3] : & C_G = 0,71 \cdot N^{-0,76}, \\ \tau \sim \mathbf{U}(1, 3) : & C_G = 0,21 \cdot N^{-0,31}, \\ \tau \sim \mathbf{N}(1, 2) : & C_G = 0,28 \cdot N^{-0,36}, \\ \tau \sim \mathbf{N}(2, 3) : & C_G = 0,11 \cdot N^{-0,58}, \\ \tau \sim \mathbf{N}(1, 3) : & C_G = 0,15 \cdot N^{-0,44}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \sim \mathbf{U}(1, 2) : & C_L = 0,20 \cdot N^{-0,10}, \\ \tau \sim \mathbf{U}[2, 3] : & C_L = 0,75 \cdot N^{-0,96}, \\ \tau \sim \mathbf{U}(1, 3) : & C_L = 0,11 \cdot N^{-0,05}, \\ \tau \sim \mathbf{N}(1, 2) : & C_L = 0,23 \cdot N^{-0,14}, \\ \tau \sim \mathbf{N}(2, 3) : & C_L = 0,14 \cdot N^{-0,71}, \\ \tau \sim \mathbf{N}(1, 3) : & C_L = 0,12 \cdot N^{-0,27} \end{aligned}$$

с коэффициентами детерминации  $R^2 \geq 0,92$  для всех моделей. Результаты показывают, что значения глобального кластерного коэффициента  $C_G$  при фиксированных  $\tau$  всегда меньше значений локального  $C_L$ . Однако, когда параметр  $\tau$  случаен и распределен равномерно или нормально на интервале (2, 3), значения коэффициента  $C_L$  оказываются меньше значений  $C_G$  (рис. 7 и 10). Кроме того, наибольшие значения оба коэффициента принимают в случае, когда значения параметра  $\tau$  лежат в интервале (1, 2), а при  $\tau \in (2, 3)$  коэффициенты  $C_G$  и  $C_L$  принимают самые маленькие значения.

Предложенные в этой работе модели могут быть использованы при моделировании реальных сетей, когда необходимо учесть не только распределение степеней вершин, но и другие числовые характеристики сети, такие как ее ассортативность и кластеризация.

Кроме того, сравнение полученных значений коэффициентов  $A$ ,  $C_G$  и  $C_L$  для конфигурационных графов со значениями, вычисленными для некоторых реальных сетей [10], по-

казало, что графы с параметром распределения степеней вершин  $1,02 \leq \tau \leq 1,17$  наилучшим образом подходят для моделирования сети Интернет (когда узлы сети – автономные системы), а для моделирования некоторых дисассортативных социальных сетей лучше использовать графы с  $2,2 \leq \tau \leq 2,6$ .

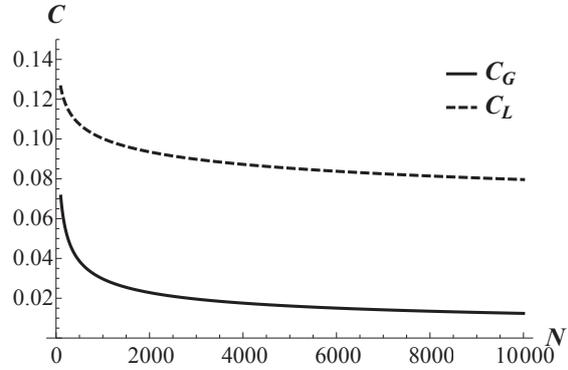


Рис. 6. Зависимости  $C_G$  и  $C_L$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{U}(1, 2)$   
Fig. 6. Dependencies of  $C_G$  and  $C_L$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{U}(1, 2)$

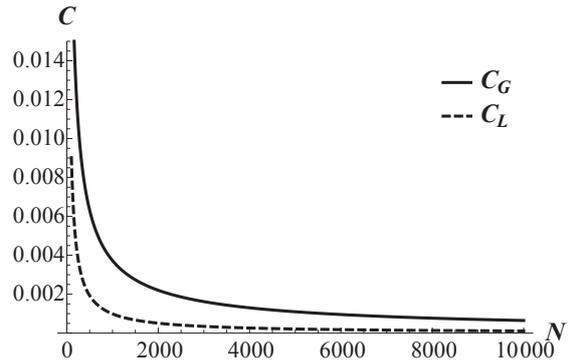


Рис. 7. Зависимости  $C_G$  и  $C_L$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{U}[2, 3]$   
Fig. 7. Dependencies of  $C_G$  and  $C_L$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{U}[2, 3]$

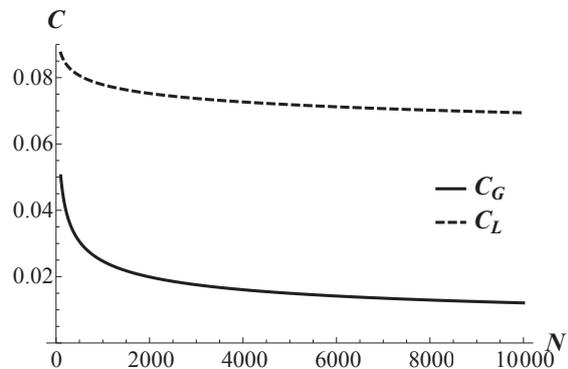


Рис. 8. Зависимости  $C_G$  и  $C_L$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{U}(1, 3)$   
Fig. 8. Dependencies of  $C_G$  and  $C_L$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{U}(1, 3)$

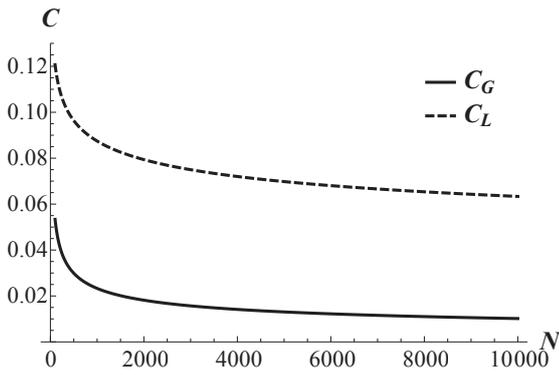


Рис. 9. Зависимости  $C_G$  и  $C_L$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{N}(1, 2)$   
 Fig. 9. Dependencies of  $C_G$  and  $C_L$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{N}(1, 2)$

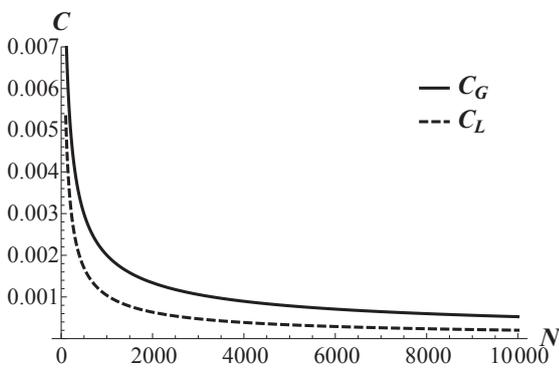


Рис. 10. Зависимости  $C_G$  и  $C_L$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{N}[2, 3]$   
 Fig. 10. Dependencies of  $C_G$  and  $C_L$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{N}[2, 3]$

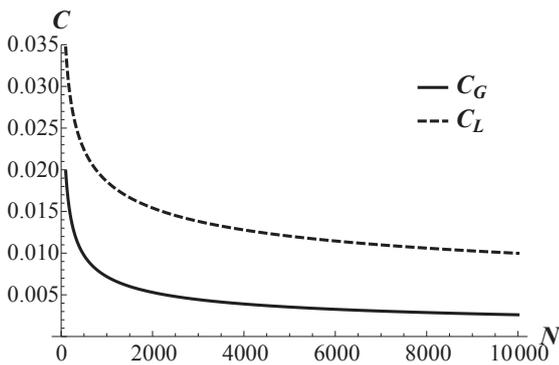


Рис. 11. Зависимости  $C_G$  и  $C_L$  от  $N$  при  $\tau \sim \mathbf{N}(1, 3)$   
 Fig. 11. Dependencies of  $C_G$  and  $C_L$  on  $N$  when  $\tau \sim \mathbf{N}(1, 3)$

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета

та на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Исследования выполнены на научном оборудовании Центра коллективного пользования Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лери М. М. Сравнение устойчивости конфигурационных графов в случайной среде // Труды КарНЦ РАН. 2018. № 7. С. 46–56. doi: 10.17076/mat817
2. Afanasyev V. I., Boinghoff C., Kersting G., Vatutin V. A. Limit theorems for weekly branching processes in random environment // J. Theoretical Probability. 2012. Vol. 25, iss. 3. P. 703–732. doi: 10.1007/s10959-010-0331-6
3. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86, iss. 24. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632
4. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Combin. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
5. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 221 p.
6. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology // Comp. Comm. Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
7. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p.
8. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs // Fundamenta Informaticae. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362
9. Leri M., Pavlov Yu. Random graphs' robustness in random environment // Austrian J. Stat. 2017. Vol. 46, iss. 3-4. P. 89–98. doi: 10.17713/ajs.v46i3-4.674
10. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks. // SIAM Rev. 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480
11. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 22.03.2019

## REFERENCES

1. Leri M. M. Sravnenie ustoichivosti konfiguratsionnykh grafov v sluchainoi srede [On comparing configuration graphs robustness in a random environment]. *Trudy KarNTs RAN*. [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 46–56. doi: 10.17076/mat817
2. Afanasyev V. I., Boinghoff C., Kersting G., Vatutin V. A. Limit theorems for weekly branching processes in random environment. *J. Theoretical Probability*. 2012. Vol. 25, iss. 3. P. 703–732. doi: 10.1007/s10959-010-0331-6
3. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86, iss. 24. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632
4. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combinatorics*. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
5. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 221 p.
6. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology. *Comp. Comm. Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
7. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p.
8. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs. *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362
9. Leri M., Pavlov Yu. Random graphs' robustness in random environment. *Austrian J. Stat.* 2017. Vol. 46, iss. 3-4. P. 89–98. doi: 10.17713/ajs.v46i3-4.674
10. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev.* 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480
11. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received March 22, 2019

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

### Лери Марина Муксумовна

научный сотрудник, к. т. н.  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: leri@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 781218

## CONTRIBUTOR:

### Leri, Marina

Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: leri@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

## О МАКСИМАЛЬНОЙ МОДУЛЯРНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы со случайными независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Эти степени равны числу полуребер вершин, занумерованных в произвольном порядке. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Такие модели можно использовать для адекватного описания топологии транспортных, электрических, социальных сетей и Интернета. Важной характеристикой структуры графа является модулярность. Это мера кластеризации графа в случае разделения вершин на группы (кластеры). Графы с высокой модулярностью обладают высокой плотностью ребер между вершинами внутри кластеров, но слабыми связями между вершинами разных кластеров. В статье обсуждаются понятие модулярности и его свойства в случайных конфигурационных графах. Максимальная модулярность графа используется для описания уровня его кластеризации и для нахождения наилучшего разделения вершин. Доказана предельная теорема для максимальной модулярности при стремлении числа вершин к бесконечности.

**Ключевые слова:** случайный конфигурационный граф; модулярность; предельная теорема.

### **Yu. L. Pavlov. ON THE MAXIMUM OF THE MODULARITY OF RANDOM CONFIGURATION GRAPHS**

Configuration graphs with random independent identically distributed vertex degrees are considered. The degrees are equal to the number of vertex semiedges that are numbered in an arbitrary order. The graph is constructed by joining all of semiedges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used to adequately describe the topology of transport, electricity, social networks and the Internet. An important characteristic of the structure of a graph is its modularity. It is a measure for graph clustering in the case vertices are divided into groups (clusters). Graphs with high modularity have dense edges between the vertices within clusters but sparse connections between vertices of different clusters. The notion of modularity and its properties in random configuration graphs are discussed. The maximum modularity of a graph is used to describe the level of graph clustering and to find the best division of vertices. The limit theorem for the maximum modularity as the number of vertices tends to infinity is proved.

**Key words:** configuration random graph; modularity; limit theorem.

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительное внимание исследователей привлечено к проблеме моделирования сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, социальные, телефонные, транспортные, электрические сети и т. д. Естественно, что такими моделями часто служат графы, в которых вершины интерпретируются как узлы сети, а ребра означают связи между узлами. Эти модели позволяют изучать структуру и динамику развития сетей. Одной из важных возникающих здесь задач является обнаружение групп (сообществ) узлов, тесно связанных между собой, но значительно слабее взаимодействующих с узлами из других сообществ. Понятно, что сети могут отличаться друг от друга количеством и составом групп. Более того, даже внутри одной сети возможны разные разбиения узлов на сообщества. В связи с этим в [8] была предложена мера качества разбиения сети на сообщества, получившая название модулярности. Естественно считать, что максимальное значение модулярности графа, моделирующего сеть, соответствует оптимальному разбиению узлов на сообщества, наилучшим образом характеризующему групповой состав сети. Далее группы вершин такого графа, моделирующие соответствующие сообщества сети, будем называть кластерами. Большое число работ, начиная с [8, 9], посвящено исследованию и разработке алгоритмов нахождения оптимальных разбиений вершин графов на кластеры, обеспечивающих максимальные значения модулярности. В следующем разделе статьи дается определение модулярности графа. Далее это определение переносится на случайные графы, и формулируется в виде теоремы основной результат. Доказательству этой теоремы посвящен последний раздел статьи.

## МОДУЛЯРНОСТЬ ГРАФА

Пусть граф  $G$  содержит  $N$  вершин. Обозначим  $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^N$  матрицу смежностей графа, где  $d_{ij}$  равно числу ребер, соединяющих вершины  $i$  и  $j$ . Мы рассматриваем графы, в которых могут быть кратные ребра и петли, что должно быть отражено в матрице  $D$ . Если число ребер, соединяющих вершины  $i$  и  $j$  ( $i \neq j$ ), равно  $s > 1$ , то  $d_{ij} = d_{ji} = s$ . Если вершина  $i$  имеет петли, то  $d_{ii}$  равно удвоенному числу петель этой вершины. Таким образом, хотя каждую петлю можно рассматривать как одно ребро, она дает вклад, равный двум, в степень вершины, т. е. в число ребер, инцидентных этой вершине. Это значит, что сумма элементов каждой строки матрицы смеж-

ностей равна степени соответствующей вершины.

Обозначим  $k_i$  степень вершины  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и пусть  $L$  равно числу ребер графа, тогда

$$\sum_{i=1}^N k_i = 2L. \quad (1)$$

Для описания процесса построения графа удобно использовать понятие полуребра, т. е. ребра, инцидентного данной вершине, но для которого смежная вершина еще не определена. Ясно, что степень каждой вершины равна числу выходящих из нее полуребер. Все полуребра различимы, например, занумерованы в произвольном порядке. Построение графа заключается в образовании ребер путем попарного соединения полуребер друг с другом в соответствии с некоторым правилом.

Если вершины графа образуют непересекающиеся кластеры, то можно оценить, насколько плотность связей внутри групп отличается от плотности межгрупповых связей. Идея измерения модулярности графа состоит в сравнении такой оценки с оценкой плотности связей в графе с теми же вершинами и их степенями, но при равновероятном соединении полуребер. Большая разница между такими оценками говорит о значительном отличии кластерной структуры рассматриваемого графа от структуры графа со случайным (равновероятным) образованием ребер.

В [8, 10] предложена следующая формула для вычисления модулярности  $Q$  графа с фиксированным разбиением вершин на кластеры:

$$Q = \frac{1}{2L} \sum_{i,j=1}^N \left( d_{ij} - \frac{k_i k_j}{2L} \right) \delta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\delta_{ij} = 1$ , если вершины  $i$  и  $j$  принадлежат одному кластеру, и  $\delta_{ij} = 0$  иначе.

Заметим, что  $Q = 0$ , если разбиения на кластеры нет, т. е. граф содержит единственный кластер, включающий все вершины. Заметим еще, что  $Q$  не превышает единицы. Так, например, если граф представляет собой совокупность кластеров, каждый из которых является паросочетанием с одним ребром, то, как следует из (2), с ростом числа таких паросочетаний модулярность неограниченно приближается к единице.

## МОДУЛЯРНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

Современными моделями сложных сетей в большинстве случаев являются случайные графы. Наиболее полно, по нашему мнению, соответствующая теория изложена в книге [6].

Вполне естественно, что представляет интерес задача изучения свойств модулярности в случайных графах. В предыдущем разделе обсуждалось понятие модулярности для фиксированного графа, но следует заметить, что интерпретации модулярности в фиксированных и случайных графах несколько отличаются. В последнем случае степени вершин могут быть случайными величинами и образование ребер также может происходить случайно. Поэтому, даже если зафиксировать степени вершин и составы кластеров, модулярность является случайной величиной и может принимать разные значения в зависимости от того, как образуются ребра. Отсюда следует, что область возможных значений модулярности зависит от выбора функций распределения степеней вершин и от алгоритмов образования ребер. Это позволяет при моделировании реальных сетей осуществлять выбор законов распределения и алгоритмов, наиболее подходящих для описания структуры моделируемой сети с помощью случайного графа. Данные о модулярности некоторых реальных сетей можно найти в литературе (см., например, [8, 10]).

В статье [5] свойства модулярности рассматривались для случайных графов Эрдеша–Реньи. Для них в [7] доказано несколько теорем о предельном поведении максимума модулярности при стремлении числа вершин к бесконечности. Хорошо известно (см., например, [6]), что случайные графы Эрдеша–Реньи не подходят для моделирования современных сложных сетей. Можно выделить два основных класса случайных графов, на основе которых строятся адекватные модели сетей коммуникаций. Это так называемые графы предпочтительного присоединения, идея которых была изложена в [2], и конфигурационные графы, введенные в [3]. Статья [11] содержит ряд результатов о максимальной модулярности регулярных графов и графов предпочтительного присоединения. Для их доказательства в некоторых случаях использовались также и свойства конфигурационных графов с фиксированными степенями вершин. Исследования многих авторов (см. [6]) показали, что сложные сети целесообразно моделировать с помощью конфигурационных графов, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, а ребра образованы путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом. Поскольку сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, в [12] предложено в случае нечетной суммы вводить в граф дополнительную вершину единичной

степени. При этом, согласно [12], появление такой вершины не влияет на асимптотические свойства графа, если число вершин стремится к бесконечности.

В настоящей статье, по-видимому, впервые рассматривается модулярность конфигурационных графов со случайными степенями вершин. Доказана теорема о предельном поведении максимальной модулярности таких графов. Доказательство теоремы приводится для случая четной суммы степеней вершин, но, как легко проверить, внося незначительные изменения в доказательство, утверждения теоремы остаются в силе и при появлении вспомогательной вершины в случае нечетной суммы степеней основных вершин.

### ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим конфигурационный граф  $G$  с  $N$  вершинами. Обозначим  $\xi_1, \dots, \xi_N$  случайные величины, равные степеням вершин  $1, \dots, N$ . Все они независимы и одинаково распределены. Пусть

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, k = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

при этом распределение (3) имеет конечное математическое ожидание

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k. \quad (4)$$

Введем производящую функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k. \quad (5)$$

Далее нам понадобится начинающийся с одной частицы вспомогательный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, в котором распределение числа прямых потомков начальной частицы совпадает с (3), но распределение случайной величины  $\mu$ , равной числу прямых потомков всех остальных частиц, задано следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\mu = k\} = \frac{(k+1)p_{k+1}}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Математическое ожидание  $\mu$  равно

$$M = \mathbf{E}\mu = \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k.$$

Обозначим  $g$  вероятность вырождения этого ветвящегося процесса. Рассмотрим множество  $\Lambda$  всех возможных разбиений вершин графа  $G$  на кластеры. Пусть  $Q_\lambda(G)$  означает модулярность графа  $G$  с разбиением  $\lambda \in \Lambda$ , а  $Q_\Lambda^*$

– максимальное значение модулярности среди всех возможных разбиений:

$$Q_{\Lambda}^*(G) = \max_{\lambda \in \Lambda} Q_{\lambda}(G).$$

В следующем разделе доказан такой результат.

**Теорема.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ . Тогда асимптотически почти наверное справедливы следующие утверждения.

1. Если  $M \leq 1$ , то  $Q_{\Lambda}^*(G) \rightarrow 1$ .
2. Если  $M > 1$ , то  $Q_{\Lambda}^*(G) \geq 1 - (1 - F(g))^2 + o(1)$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что если  $M \leq 1$ , то вспомогательный ветвящийся процесс является докритическим или критическим. В этом случае, как хорошо известно,  $g = 1$  и из (5) следует, что  $1 - F(g) = 0$ . Если же  $M > 1$ , то ветвящийся процесс надкритический, поэтому  $g < 1$  и  $1 - F(g) > 0$ . Пусть  $\lambda \in \Lambda$  – некоторое разложение вершин графа  $G$ , состоящее из  $l$  кластеров  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ . Обозначим  $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ . В рассматриваемой модели модулярность  $Q_{\lambda}(G)$ , в силу (2), примет вид:

$$Q_{\lambda}(G) = \frac{1}{\zeta_N} \sum_{i,j=1}^N \left( \alpha_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{\zeta_N} \right) \delta_{ij},$$

где  $\alpha_{ij}, i, j = 1, \dots, N$ , – случайные элементы матрицы смежностей. Это соотношение можно представить таким образом:

$$Q_{\lambda}(G) = \frac{2}{\zeta_N} \sum_{i=1}^l \beta(\lambda_i) - \frac{1}{\zeta_N^2} \sum_{i=1}^l \nu_i^2, \quad (6)$$

где  $\beta(\lambda_i)$  и  $\nu_i$  равны соответственно числу ребер и сумме степеней вершин кластера  $\lambda_i$ . Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^l \nu_i = \zeta_N.$$

Построим вариационный ряд, расположив  $\nu_1, \dots, \nu_l$  в неубывающем порядке, и пусть  $\nu_{(l-1)}$  и  $\nu_{(l)}$  являются последними двумя членами этого ряда. Допустим, без ограничения общности, что  $\nu_{(l)} = \nu_l$ . Следуя идее доказательств лемм 2.1 и 2.2 работы [7], находим, что

$$\sum_{i=1}^{l-1} \nu_i^2 \leq (\zeta_N - \nu_l) \nu_{(l-1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\zeta_N^2} \sum_{i=1}^l \nu_i^2 \leq \left( \frac{\nu_l}{\zeta_N} \right)^2 + \frac{\nu_{(l-1)}}{\zeta_N}. \quad (7)$$

Обозначим  $\Omega$  подмножество множества  $\Lambda$  всех возможных разбиений графа, состоящих только из связных компонент, и пусть  $Q_{\Omega}^*(G)$  означает максимальное значение модулярности среди всех таких разбиений. Обозначим  $\nu^{(1)}(\omega)$  и  $\nu^{(2)}(\omega)$  соответственно максимальную и вторую по величине суммы степеней вершин компонент связности разбиения  $\omega \in \Omega$ . Поскольку

$$2 \sum_{i=1}^l \beta(\lambda_i) = \zeta_N,$$

из (6) и (7) вытекает, что для любого  $\omega$

$$Q_{\Lambda}^*(G) \geq 1 - (\nu^{(1)}(\omega)/\zeta_N)^2 - \nu^{(2)}(\omega)/\zeta_N. \quad (8)$$

Степень каждой вершины графа  $G$  имеет конечное математическое ожидание  $m$ , поэтому из локальной предельной теоремы 4.2.1 [1] следует, с учетом теоремы 2.1.1 для выбора нормирующих постоянных, что при  $N \rightarrow \infty$

$$\zeta_N \sim mN. \quad (9)$$

Обозначим  $V^{(1)}$  и  $V^{(2)}$  соответственно максимальный объем (число вершин) и второй по величине объем компонент связности графа  $G$ . Пусть  $M < 1$ . Согласно теореме 3.3.2 [4]

$$V^{(1)} = O(\sqrt{N}). \quad (10)$$

Очевидно, что

$$Q_{\Lambda}^*(G) \geq Q_{\Omega}^*(G), \quad (11)$$

поэтому первое утверждение теоремы для случая  $M < 1$  следует из (8)–(11). Если  $M = 1$ , то, как показано в [12, стр. 74–75],

$$V^{(1)} = O(N^{2/3}),$$

следовательно, из (8), (9) и (11) получаем, что первое утверждение теоремы верно и для этого случая.

Пусть теперь  $M > 1$ . Тогда вспомогательный ветвящийся процесс является надкритическим и  $1 - F(g) > 0$ . В теореме 3.2.2 [4] показано, что в этом случае граф имеет единственную гигантскую компоненту связности, объем которой при  $N \rightarrow \infty$  эквивалентен  $(1 - F(g))N$ , при этом

$$V^{(2)} = O(\ln N).$$

Отсюда и из (8), (9), (11) легко следует и второе утверждение теоремы.  $\square$

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. Barabasi A.-L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. Vol. 286. P. 509–512. doi: 10.1126/science286.5499.509
3. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of regular graphs // *European. J. Combin.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
4. Durrett R. *Random Graph Dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 223 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594
5. Guimera R., Sales-Prado M., Amaral L. A. N. Modularity from fluctuation in random graphs and complex networks // *Physical Review E*70. 2004. 025101. doi: 10.1103/PhysRevE.70.025101
6. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. Vol. One. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

## REFERENCES

1. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters Neordhoff Publ., 1971. 438 p.
2. Barabasi A.-L., Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*. 1999. Vol. 286. P. 509–512. doi: 10.1126/science286.5499.509
3. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of regular graphs. *European. J. Combin.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
4. Durrett R. *Random Graph Dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 223 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594
5. Guimera R., Sales-Prado M., Amaral L. A. N. Modularity from fluctuation in random graphs and complex networks. *Physical Review E*70. 2004. 025101. doi: 10.1103/PhysRevE.70.025101
6. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. Volume One. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
7. McDiarmid C., Sherman F. Modularity of Erdos-Renyi random graphs. *29<sup>th</sup> International*

7. McDiarmid C., Sherman F. Modularity of Erdos-Renyi random graphs // *29<sup>th</sup> Int. conf. on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis and Algorithms*. LIPIcs. 2018. Vol. 110. P. 31.1–31.18. doi: 10.4230/LIPIcs.AofA.2018.31

8. Newman M. E. J., Girvan M. Finding and evaluating community structure in networks // *Physical Review E*69. 2004. 026113. doi: 10.1103/PhysRevE.69.026113

9. Newman M. E. J. Fast algorithm for detecting community structure in networks // *Physical Review E*69. 2004. 066133. doi: 10.1103/PhysRevE.69.066133

10. Newman M. E. J. Modularity and community structure in networks // *PNAS*. 2006. Vol. 103, iss. 23. P. 8577–8582. doi: 10.1073/pnas.0602103

11. Prokhorenkova L., Pralat P., Raigorodskii A. V. Modularity in several random graph models // *Electronic Notes in Discrete Math*. 2017. Vol. 61. P. 941–953. doi: 10.1016/j.endm.2017.07.058

12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 12.01.2019

*Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis and Algorithms*. LIPIcs. 2018. Vol. 110. P. 31.1–31.18. doi: 10.4230/LIPIcs.AofA.2018.31

8. Newman M. E. J., Girvan M. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*69. 2004. 026113. doi: 10.1103/PhysRevE.69.026113

9. Newman M.E.J. Fast algorithm for detecting community structure in networks. *Physical Review E*69. 2004. 066133. doi: 10.1103/PhysRevE.69.066133

10. Newman M. E. J. Modularity and community structure in networks. *PNAS*. 2006. Vol. 103, iss. 23. P. 8577–8582. doi: 10.1073/pnas.0602103

11. Prokhorenkova L., Pralat P., Raigorodskii A. V. Modularity in several random graph models. *Electronic Notes in Discrete Math*. 2017. Vol. 61. P. 941–953. doi: 10.1016/j.endm.2017.07.058

12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received January 12, 2019

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:**

**Павлов Юрий Леонидович**  
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 781218

**CONTRIBUTOR:**

**Pavlov, Yury**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 781218

УДК 519.6:539.2

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ ГИДРИДООБРАЗОВАНИЯ В ОБОЛОЧКЕ ИЗ ЦИРКОНИЕВОГО СПЛАВА

Н. И. Родченкова<sup>1</sup>, К. В. Грудова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

<sup>2</sup> *Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. В зависимости от уровня содержания водорода и температуры водород может находиться в циркониевых сплавах в виде твердого раствора или в виде гидридов. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками образования и развития трещин. Проблема состоит в моделировании динамики свободной границы фазового перехода и оценке распределений концентраций в гидриде и в сплаве. В статье представлены математическая модель гидрирования циркониевого сплава с учетом фазового перехода (гидридообразования) и итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи со свободной границей раздела фаз на основе неявных разностных схем.

Ключевые слова: гидрирование; нелинейные краевые задачи со свободной границей; разностные схемы; численное моделирование.

**N. I. Rodchenkova, K. V. Grudova. MODELING OF THE MOVEMENT OF THE FREE BOUNDARY OF HYDRIDE FORMATION IN A CYLINDRICAL SHELL MADE OF A ZIRCONIUM ALLOY**

One of the most important requirements for the materials (zirconium alloys) used in the reactor active zone is low hydrogen absorptivity, since hydrogen-induced embrittlement may cause zirconium cladding damage. Depending on the hydrogen content and operation temperature, hydrogen may be present in zirconium alloys as a solid solution or as hydrides. Hydrides have the greatest embrittlement effect on alloys as they can initiate and enlarge cracks. The problem is to model the dynamics of the moving boundary of phase transition and to estimate the concentration distribution in the hydride and the solution. This paper presents a mathematical model of zirconium alloy hydrogenation taking into account the phase transition (hydride formation) and the iterative computational algorithm for solving the nonlinear boundary-value problem with free phase boundary based on implicit difference schemes.

Key words: hydrogenation; nonlinear boundary-value problems with free phase boundary; difference schemes; numerical simulation.

## ВВЕДЕНИЕ

Общие проблемы водородной энергетики и водородного материаловедения обстоятельно изложены в монографиях [1, 2, 4–6, 8, 9, 12]. Некоторые модели дегидрирования и водородопроницаемости, связанные с тематикой данной статьи, исследованы в [11, 13–15]. Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. В зависимости от уровня содержания водорода и температуры водород может находиться в циркониевых сплавах в виде твердого раствора или в виде гидридов. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками образования трещин.

При разработке математической модели гидрирования авторы следовали работам [7, 10]. Проблема состоит в моделировании динамики свободной границы фазового перехода и оценке распределений концентраций в гидриде и в сплаве. В статье представлены корректировка математической модели гидрирования, поставленной в [3], для полого цилиндрического образца циркониевого сплава с учетом фазового перехода (гидридообразования) и итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи со свободной границей раздела фаз на основе неявных разностных схем.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРИРОВАНИЯ

Вначале кратко опишем условия эксперимента (подробнее см. [10]). Внешняя поверхность полой цилиндрической оболочки из сплава  $Zr-1Nb$  шлифуется, внутренняя поверхность практически водородонепроницаема, основаниями пренебрегаем; температура образца  $T$  и давление газообразного водорода  $p$  поддерживаются постоянными (предпринимаются специальные меры охлаждения).

Выделим тонкий объемный слой у внешней поверхности, в котором при относительно большом давлении напуска ( $p \approx 2$  атм) распределение  $H$  можно считать равномерным. Только с некоторой начальной глубины (радиуса)  $\rho_0$  начинает ощущаться диффузионное сопротивление. Когда концентрация растворенного атомарного водорода достигает определенного предела, начинается образование зародышей гидридной фазы, и этот слой отно-

сительно быстро преобразуется в начальную корку гидрида. Этот переходный процесс «от зародышей к корке» в приповерхностном объеме считаем практически мгновенным в масштабе времени последующего медленного движения фронта гидрирования на заметную глубину. Дальнейший перенос водорода в образец уже осуществляется сквозь растущий слой гидрида со значительно меньшей скоростью.

Обозначим:  $R$  – внешний радиус полого цилиндра;  $r_0$  – внутренний радиус;  $(R - \rho_0)$  – толщина слоя, в который водород абсорбируется относительно легко и еще не ощущается диффузионное сопротивление (будущая начальная корка гидрида);  $u(t)$  – концентрация  $H$  в  $(R - \rho_0)$ -слое ( $1_H/\text{см}^3$ );  $Q$  – концентрация, по достижении которой локально решетка перестраивается и возникают зародыши гидридной фазы;  $u_m = u_{\max}$  – принципиально возможная концентрация (пресыщенный раствор),  $Q < u_{\max}$ ;  $Q_h$  – концентрация атомов водорода в гидридной фазе (химически связанный водород, образующий гидрид как вещество);  $c(t, r)$  – концентрация растворенного  $H$  в  $(\rho_0 - r_0)$ -слое;  $\mu$  – газокинетическая константа. Температура цилиндра и давление напуска постоянны ( $T = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$ ).

Согласно кинетической теории газов плотность  $J_p$  падающего на поверхность потока частиц (в данном случае молекул  $H_2$ ) связана с давлением  $p$  по формуле Герца–Кнудсена:

$$J_p = p/\sqrt{2\pi mkT}$$

( $k$  – постоянная Больцмана,  $m$  – масса молекулы  $H_2$ ). В контексте эксперимента удобно в качестве единиц измерения выбрать [ $r, \rho, R$ ] = см, [ $p$ ] = торр. Тогда численно получаем зависимость

$$J_p = \mu p, \quad \mu(T) \approx 2.474 \cdot 10^{22} / \sqrt{T}$$

( $[\mu] = 1_{H_2}/(\text{торр см}^2 \text{ с})$ ,  $[T] = \text{К}$ , под корнем безразмерное численное значение). Поскольку диффундирует атомарный водород, то для единообразия подсчет будем вести в атомах  $H$ :  $J_p = 2\mu p$ . Только малая часть  $H$  окажется в абсорбированном состоянии:  $J_{\text{abs}} = 2\mu s p$  ( $s \ll 1$ ). Множитель  $s$  имеет смысл доли налетающих  $H$ , которые оказались в приповерхностном объеме. Объединяем более элементарные стадии физадсорбции, диссоциации и растворения в одну:  $s$  – эффективный коэффициент абсорбции.

### Этап I: растворение $H$ в $Zr-1Nb$

Для диффузионного слоя толщиной  $(\rho_0 - r_0)$  имеем стандартную краевую задачу:

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r}, \quad r \in (r_0, \rho_0), \quad (1)$$

$$c(0, r) = 0, \quad r \in [r_0, \rho_0],$$

$$c|_{\rho_0} = u(t), \quad \partial_r c|_{r_0} = 0. \quad (2)$$

Граничное условие  $c(t, \rho_0) = u(t)$  отражает непрерывность распределения  $H$  в сплаве, а  $\partial_r c(t, r_0) = 0$  – непроницаемость внутренней поверхности цилиндра  $r = r_0$ . Здесь и в дальнейшем считаем, что коэффициенты подчиняются закону Аррениуса по температуре, в частности  $D = D_0 \exp\{-E_D/[RT]\}$ . В течение одного эксперимента  $T = \text{const}$ .

Для концентрации  $u(t)$  запишем ОДУ, исходя из баланса потоков:

$$\begin{aligned} & \left[ 2\mu sp \left[ 1 - \frac{u}{u_m} \right]^2 - bu^2 \right] 2\pi RH \\ & + D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{\rho_0} 2\pi \rho_0 H = [\pi R^2 H - \pi \rho_0^2 H] \frac{du}{dt}, \\ & 2\mu sp \left[ 1 - \frac{u}{u_m} \right]^2 - bu^2 + D \frac{\rho_0}{R} \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{\rho_0} \\ & = \frac{R^2 - \rho_0^2}{2R} \cdot \frac{du}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Содержательный смысл: за 1 с через  $1 \text{ см}^2$  абсорбировалось за счет давления  $2\mu sp$  атомов  $H$  (множитель  $[1 - u/u_m]^{-2}$  – для торможения роста  $u(t)$  – вероятность диссоциативно абсорбировать уменьшается с ростом  $u$ ), но есть встречный поток десорбции  $bu^2$  ( $b$  – эффективный коэффициент рекомбинации) и диффузионный отток. Рассогласование плотностей этих потоков идет на накопление атомов водорода в  $(R - \rho_0)$ -слое  $([R^2 - \rho_0^2][2R]^{-1} \dot{u})$ . Уравнение (3) нужно рассматривать совместно с (1)–(2), поскольку  $u(t)$  определяет граничную концентрацию в (2). При небольшом  $p$  (без образования гидрида) в равновесии (когда производные равны нулю) имеем

$$\begin{aligned} & 2\mu sp [1 - \bar{u}u_m^{-1}]^2 - b\bar{u}^2 = 0 \\ & \Rightarrow \bar{u} = \Gamma \sqrt{p} (1 + \Gamma u_m^{-1} \sqrt{p})^{-1}, \quad \Gamma \equiv \sqrt{2\mu sb^{-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, когда  $u_m$  велико, динамика (3) в статике согласуется с законом Сивертса  $\bar{u} \propto \sqrt{p}$ ,  $\Gamma$  – коэффициент растворимости. Подчеркнем, что речь – о растворенном атомарном диффузионно подвижном водороде. В эксперименте «насыщение-дегазация» учитывается общее поглощение водорода, включая

обратимый захват и гидридные фазы – коэффициент  $\Gamma$  может иметь другой смысл и численное значение. Технически нетрудно учесть обратимый захват  $H$  в  $(\rho_0 - r_0)$ -слое дефектами материала, но в рассматриваемой задаче считаем ловушки второстепенным фактором.

### Этап II: гидридообразование и движение границы фазового перехода

По достижении концентрации  $u(t)$  порогового уровня  $Q = Q(T)$  происходит образование зародышей гидрида ( $\delta$ -фазы). Дальнейшее поступление абсорбированного атомарного водорода расходуется на рост зародышей до образования сплошной корки гидрида (с концентрацией  $Q_h > Q$  химически связанного водорода) и поддержание уровня  $c(t, \rho_0) = Q$  в  $\alpha$ -фазе раствора. При этом с входной стороны (внешней поверхности) зародыши растут и смыкаются быстрее, общая концентрация водорода уже начинает превышать уровень  $Q_h$  за счет дополнительного растворения в гидриде. Когда приток к границе гидридного микрослоя  $r = \rho_0$  начинает превышать отток в сплав  $Zr-1Nb$ , появляется «движущая сила», и граница фазового перехода начинает смещаться, слой гидрида растет.

Считаем, что этот переходный процесс относительно быстрый. Разумеется, речь не о строгой последовательности описанных процессов, а о преимущественных стадиях. Детальное уточнение представляет самостоятельный интерес. Но для задачи моделирования динамики границы фазового перехода описание начальных данных имеет скорее смысл технической процедуры организации начальных вычислений, поскольку на длительных временах проявляется эффект сглаживания, характерный для диффузионных дифференциальных уравнений.

За новый отсчет времени ( $t = 0$ ) удобно принять момент, когда в  $(R - \rho_0)$ -слое достигается концентрация  $u(t) = Q$ . Быстро образуется корка гидрида с концентрацией  $Q_h$ . К этому моменту  $c(0, r) = \varphi(r)$  (распределение растворенного водорода в  $\alpha$ -фазе с предыдущего этапа),  $\varphi(\rho_0) = Q$ ,  $(R - \rho_0)$ -слой уже гидридный и сквозь него диффундирует растворенный  $H$ . Речь о диффузионно подвижном атомарном водороде в отличие от химически связанного (гидрид является новым «самостоятельным» материалом). Обозначим концентрацию диффундирующих атомов  $H$  в гидриде через  $v(t, r)$ . Общая концентрация равна  $Q_h + v(t, r)$ .

В плане второстепенного уточнения можно для диффузионного уравнения (1) незначительное время продолжить вычисления с гра-

ничными условиями  $c(t, \rho_0) = Q$ ,  $\partial_r c(t, r_0) = 0$  (пока зерна срастаются в корку), чтобы «подправить» распределение  $\varphi(r)$ . Далее подобные переходные процессы не учитываем.

В цилиндре с растущей коркой гидрида ( $r = \rho(t)$  – граница раздела фаз,  $\rho(0) = \rho_0$ ) запишем диффузионные уравнения:

$$\frac{1}{D_*} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \in (\rho(t), R), \quad (4)$$

$$v(0, r) = 0, \quad r \in [\rho_0, R],$$

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial c}{\partial r}, \quad r \in (r_0, \rho(t)), \quad (5)$$

$$c(0, r) = \varphi(r), \quad r \in [r_0, \rho_0].$$

Здесь  $D_*$  – коэффициент диффузии  $H$  в новом материале (гидриде). Граничные условия на «входе-выходе» запишем аналогично I:

$$2\mu s_* p \left[ 1 - \frac{v(t, R)}{v_{\max}} \right]^2 - b_* v^2(t, R) = -D_* \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_R,$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r_0} = 0.$$

В гидриде градиент концентрации возникает практически сразу, поскольку диффундировать сквозь  $\delta$ -фазу значительно труднее. Нет «накопительного» слоя (аналога  $(R - \rho_0)$ -слоя на этапе I). Когда баланс «приток-отток» станет положительным, граница раздела фаз  $r = \rho(t)$  станет подвижной и для «склейки» диффузионных уравнений потребуются дополнительные условия на стыке  $r = \rho(t)$ .

Начнем с уравнения типа уравнения Стефана, описывающего динамику движения свободной границы раздела фаз:

$$\begin{aligned} & [v(t, \rho(t)) + Q_h - c(t, \rho(t))] dV \\ &= -D_* \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{\rho(t)} 2\pi \rho H \Delta t + D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{\rho(t)} 2\pi \rho H \Delta t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV &= H[\pi \rho^2(t) - \pi \rho^2(t + \Delta t)] \\ &= -H\pi 2\rho \dot{\rho} \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [v(t, \rho(t)) + Q_h - c(t, \rho(t))] \dot{\rho}(t) \\ &= D_* \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{\rho(t)} - D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{\rho(t)}. \end{aligned}$$

Появляется разрыв концентраций:

$$v(t, \rho) + Q_h > Q_h > c(t, \rho), \quad \rho = \rho(t).$$

При этом концентрация  $v(t, \rho)$  должна быть пренебрежимо малой (нет существенного «сопротивления» со стороны  $Zr$ -сплава). Принимаем  $v(t, \rho(t)) = 0$ . Поступающий поток из

$\delta$ -фазы практически полностью уходит на формирование нового слоя гидрида (сдвиг границы  $r = \rho(t)$ ) и в раствор. При  $c(t, \rho) < Q$  тонкий слой гидрида на границе раздела фаз становится неустойчивым и частично распадается, поэтому полагаем  $c(t, \rho) = Q$ .

Таким образом, принимаем следующие условия на свободной границе раздела фаз:

$$v(t, \rho(t)) = 0, \quad c(t, \rho(t)) = Q, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$[Q_h - c|_{\rho}] \dot{\rho} = -D_* \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{\rho} + D \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{\rho}, \quad t \geq t_s > 0. \quad (7)$$

Подчеркнем, что уравнение Стефана (7) «подключается» к модели, когда правая часть (баланс потоков) станет положительной. Так, условно выбран  $t = 0$ . До этого момента краевые задачи в слоях решаются численно независимо при  $\rho = \rho_0$ . Фронт движется ( $t \geq t_s$ ) с общей концентрацией  $Q_h$  в сторону  $r = r_0$ . В пределе имеем  $\rho(t) \rightarrow r_0$  ( $t \gg 1$ ). Уровень  $c(t, r)$  выравнивается, не превышая значение  $Q$ . Тонким «остаточным» слоем  $Zr - 1Nb$  в расчетах уже можно пренебречь.

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОДЕЛИ: ПЕРЕХОД К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ

**Этап I.** Сделаем замену времени  $t = (R - r_0)^2 D^{-1} t'$ , где  $(R - r_0)^2 D^{-1}$  – характерное время диффузии, и замену независимой переменной  $r = r_0 + z[\rho_0 - r_0]$ ,  $\hat{c}(t', z) = c(t(t'), r(z))$ . Введем соответствующую нормировку концентраций и оставим прежнее обозначение для функции  $\hat{c}$ :  $\hat{c} := \hat{c}/\bar{u}$ ,  $\hat{u} := u/\bar{u}$ ,  $\bar{u} = \sqrt{2\mu s p/b}$ .

Краевая задача (1)–(3) после замены переменных примет следующую форму:

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t'} = d_1 \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2} + d_2(z) \frac{\partial \hat{c}}{\partial z}, \quad z \in (0, 1), \quad (8)$$

$$d_1 \equiv \frac{(R - r_0)^2}{(\rho_0 - r_0)^2}, \quad d_2(z) = \frac{d_1(\rho_0 - r_0)}{r_0 + z(\rho_0 - r_0)},$$

$$\hat{c}(0, z) = 0, \quad z \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \hat{c}(t', 1) = \hat{u}(t'), \quad (9)$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt'} = \frac{2\mu s p}{\bar{u}} \frac{2R(R - r_0)^2}{D(R^2 - \rho_0^2)} \cdot [1 - \hat{u}]^2$$

$$- b\bar{u} \frac{2R(R - r_0)^2}{D(R^2 - \rho_0^2)} \cdot \hat{u}^2$$

$$+ \frac{2\rho_0}{\rho_0 - r_0} \frac{(R - r_0)^2}{R^2 - \rho_0^2} \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad \hat{u}(0) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что вследствие равенства сомножителей при  $[1 - \hat{u}]^2$  и  $\hat{u}^2$  уравнение (10) можно переписать в виде

$$\frac{d\hat{u}}{dt'} = d_3(1 - 2\hat{u}) + d_4 \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=1}, \quad \hat{u}(0) = 0, \quad (11)$$

$$d_3 \equiv \frac{2b\bar{u}}{D} \cdot \frac{R(R - r_0)^2}{R^2 - \rho_0^2}, \quad d_4 \equiv d_3 \frac{D}{b\bar{u}} \cdot \frac{\rho_0}{R(\rho_0 - r_0)}.$$

**Этап II.** Сделаем замену времени  $t = \frac{(R-r_0)^2}{\sqrt{DD_*}} t'$  и пространственной переменной в слоях гидрида и раствора:

$$(4): \quad r = \rho(t') + y[R - \rho(t')], \quad v \rightarrow \hat{v}(t', y);$$

$$(5): \quad r = r_0 + z[\rho(t') - r_0], \quad c \rightarrow \hat{c}(t', z).$$

Введем соответствующие нормировки и оставим прежние обозначения для функций  $\hat{v} := \hat{v}/\bar{v}$ ,  $\hat{c} := \hat{c}/\bar{u}$ ,  $\bar{v} = \sqrt{2\mu s_* p/b_*}$ ,  $\bar{u} = \sqrt{2\mu s p/b}$ .

Дополнительно введем функцию

$$\lambda(t') \equiv \frac{\dot{\rho}(t')}{\rho(t')} = \frac{d}{dt'} \ln \rho(t'),$$

где точка означает дифференцирование по  $t'$ .

Краевая задача (4)–(7) после замены переменных принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t'} &= \sqrt{\frac{D_*}{D}} \left( \frac{R - r_0}{R - \rho} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \\ &+ \left[ \frac{\lambda(t')(1 - y)}{1 - R\rho^{-1}} + \sqrt{\frac{D_*}{D}} \frac{(R - r_0)^2 (R - \rho)^{-1}}{\rho + y(R - \rho)} \right] \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$y \in (0, 1), \quad \hat{v}(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad \hat{v}(t', 0) = 0,$$

$$d_* [1 - 2\hat{v}(t', 1)] = - \left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right|_1, \quad d_* \equiv \frac{b_* \bar{v} [R - \rho(t')]}{D_*}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{c}}{\partial t'} &= \sqrt{\frac{D}{D_*}} \left( \frac{R - r_0}{\rho - r_0} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2} \\ &+ \left[ \frac{\lambda(t')z}{1 - r_0\rho^{-1}} + \sqrt{\frac{D}{D_*}} \frac{(R - r_0)^2 (\rho - r_0)^{-1}}{r_0 + z(\rho - r_0)} \right] \frac{\partial \hat{c}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\hat{c}(0, z) = \psi(z), \quad z \in [0, 1], \quad \hat{c}(t', 1) = \frac{Q}{\bar{u}}, \quad \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_0 = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{Q_h}{\bar{u}} - \hat{c}(t', 1) \right] \lambda(t') &= - \sqrt{\frac{D_*}{D}} \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \frac{(R - r_0)^2}{\rho(R - \rho)} \cdot \left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right|_0 \\ &+ \sqrt{\frac{D}{D_*}} \frac{(R - r_0)^2}{\rho(\rho - r_0)} \cdot \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=1} \quad (t' \geq t'_s). \end{aligned} \quad (16)$$

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

### Этап I: растворение $H$ в $Zr-1Nb$

Следуя технике разностных схем, введем сетку  $\{z_m = mh_z, m = 0, 1, \dots, M\}$  ( $h_z = 1/M$ ) по пространственной переменной и сетку по времени  $\{t'_n = nh_{t'}, n = 0, 1, \dots\}$ . Обозначим через  $\{\hat{C}_m^n\}$ ,  $\{\hat{U}^n\}$  приближенные значения концентраций в  $(\rho_0 - r_0)$ -слое ( $\hat{c}(t'_n, z_m)$ ) и в  $(R - \rho_0)$ -слое ( $\hat{u}(t'_n)$ ) соответственно. Рассмотрим неявную схему для уравнения (8) и неявный метод Эйлера для ОДУ (11):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_m^{n+1} - \hat{C}_m^n}{h_{t'}} &= d_1 \frac{\hat{C}_{m-1}^{n+1} - 2\hat{C}_m^{n+1} + \hat{C}_{m+1}^{n+1}}{h_z^2} \\ &+ d_2(z_m) \frac{\hat{C}_{m+1}^{n+1} - \hat{C}_{m-1}^{n+1}}{2h_z}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{U}^{n+1} - \hat{U}^n}{h_{t'}} &= d_3 (1 - 2\hat{U}^{n+1}) \\ &+ d_4 \frac{\hat{C}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{C}_M^{n+1}}{2h_z}. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим переход с  $n$ -го на  $(n+1)$ -й слой по времени ( $n \geq 0$ ,  $0 < m < M$ ):  $w_1 \equiv h_z^2 h_{t'}^{-1} d_1^{-1}$ ,  $w_2(z_m) \equiv 0.5 h_z d_2(z_m) d_1^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} [1 - w_2(z_m)] \hat{C}_{m-1}^{n+1} - [w_1 + 2] \hat{C}_m^{n+1} \\ + [1 + w_2(z_m)] \hat{C}_{m+1}^{n+1} + w_1 \hat{C}_m^n = 0. \end{aligned}$$

Значения в начальный момент времени известны:  $\hat{C}_m^0 = \hat{U}^0 = 0$  ( $0 \leq m \leq M$ ). Следуя методу прогонки (алгоритм Томаса), ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на  $(n+1)$ -м слое по времени в виде

$$\hat{C}_m^{n+1} = \alpha_{m+1} \hat{C}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

Прогоночные коэффициенты следующие: ( $m = 1, \dots, M-1$ ),

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1 + w_2(z_m)}{2 + w_1 + (w_2(z_m) - 1)\alpha_m}, \\ \beta_{m+1} &= \frac{(1 - w_2(z_m))\beta_m + w_1 \hat{C}_m^n}{2 + w_1 + (w_2(z_m) - 1)\alpha_m}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для нахождения начальных коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  воспользуемся следующими соображениями. Подсчитаем предварительно значения  $\hat{C}_{1,2}^{n+1}$  по явной разностной схеме (в равенстве (17) справа заменяем  $n+1$  на  $n$ ). Рассмотрим первое краевое условие непроницаемости при  $z = 0$  в (9). Используя разностную

аппроксимацию  $\partial_z \hat{c}|_{z=0} \approx [-3\hat{C}_0^{n+1} + 4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1}]/2h_z = 0$ , получаем выражение  $\hat{C}_0^{n+1} = f_1(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1}) = (4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1})/3$ . Зная численное значение  $\hat{C}_0^{n+1}$  и выражение  $\hat{C}_0^{n+1} = \alpha_1 \hat{C}_1^{n+1} + \beta_1$ , получаем  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \hat{C}_0^{n+1}$ . По  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  вычисляем оставшиеся коэффициенты  $\alpha_m, \beta_m, m = 2, \dots, M$  по формулам (19).

Ближайшая цель – найти значение  $\hat{C}_M^{n+1}$ , необходимое для реализации обратного метода прогонки. Рассмотрим разностную аппроксимацию уравнения (11):

$$\frac{\hat{U}^{n+1} - \hat{U}^n}{h_{t'}} = d_3(1 - 2\hat{U}^{n+1}) + d_4 \frac{\hat{C}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{C}_M^{n+1}}{2h_z}.$$

Используя соотношение  $\hat{C}_m^{n+1} = \alpha_{m+1}\hat{C}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}$  при  $M-2, M-1$  и второе условие (9) ( $\hat{U}^{n+1} = \hat{C}_M^{n+1}$ ), получаем  $\hat{C}_M^{n+1} = A_1 A_2^{-1}$ ,

$$A_1 = 2h_z[\hat{U}^n + h_{t'} d_3] + h_{t'} d_4[(\alpha_{M-1} - 4)\beta_M + \beta_{M-1}],$$

$$A_2 = 2h_z[1 + 2h_{t'} d_3] - h_{t'} d_4[(\alpha_{M-1} - 4)\alpha_M + 3].$$

Следующий этап: с текущими приближениями значений  $\hat{C}_0^{n+1}, \hat{C}_M^{n+1}$  решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций  $\hat{C}_{1,2}^{n+1}$  (и остальные значения  $\hat{C}_m^{n+1}$  для  $m = 3, \dots, M-1$ ). Далее снова пользуемся формулой  $\hat{C}_0^{n+1} = f_1(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1})$ . После этого корректируем значения прогночных коэффициентов (19), определяем  $\hat{C}_M^{n+1}$  по приведенной выше формуле и повторяем вычисления (возвращаясь к началу абзаца) до установления граничных значений  $\hat{C}_{0,M}^{n+1}$  (обычно 2-3 итерации). Критерием окончания вычислений на этапе I выбрано условие  $\hat{U}^{n+1} \geq Q/\bar{u} = 0,98$ .

Результат окончания I этапа: образовался гидридный слой толщины  $(R - \rho_0)$  с концентрацией химически связанного водорода  $Q_h$ , а в слое раствора толщины  $(\rho_0 - r_0)$  имеется распределение концентрации растворенного водорода  $\varphi(r)$ ,  $\varphi(\rho_0) = Q$ .

## Этап II: гидридообразование и движение границы фазового перехода

Начальное распределение  $\psi(z)$  ( $\varphi(r)$ ) определяется первым этапом. Формально можно забыть о физическом смысле функции  $\rho(t')$  как границы раздела фаз и рассматривать ее

как функциональный параметр. По решению  $\rho(t')$  (зная  $\lambda(t')$ ) определяются коэффициенты модели. Поэтому вычислительный алгоритм основан на неявных разностных схемах и носит итерационный характер. Итерации будут связаны с уточнением значения  $\lambda(t')$  на каждом временном слое.

Введем следующие сетки:  $\{y_m = mh_y, m = 0, 1, \dots, M\}$ ,  $h_y = 1/M$  – шаг по пространственной переменной  $y$ ;  $\{z_k = kh_z, k = 0, 1, \dots, K\}$ ,  $h_z = 1/K$  – шаг по пространственной переменной  $z$ ;  $\{t'_n = nh_{t'}, n = 0, 1, \dots\}$ ,  $h_{t'}$  – шаг по времени  $t'$ . Обозначим через  $\{\hat{V}_m^n\}$ ,  $\{\hat{C}_k^m\}$  приближенные значения концентраций в гидридном  $(R - \rho(t'))$ -слое  $(\hat{v}(t'_n, y_m))$  и в  $(\rho(t') - r_0)$ -слое раствора  $(\hat{c}(t'_n, z_k))$ .

### 1. Начальный этап: переход с нулевого на первый слой и нахождение $\lambda > 0$

При  $\rho = \rho_0$  будем рассматривать последовательно и независимо две краевые задачи: сначала для гидридного слоя, потом для слоя раствора в сплаве  $Zr - 1Nb$ . Граница раздела фаз на данном этапе неподвижна, полагаем в (12), (14)  $\lambda = 0$  ( $\dot{\rho} = 0$ ). Опишем алгоритм перехода с нулевого на первый слой по  $t'$ .

#### 1.1 Гидридный слой

Рассмотрим краевую задачу (12)–(13) при  $\lambda = 0, \rho = \rho_0$ :

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t'} = d_1 \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + d_2(y) \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad y \in (0, 1), \quad (20)$$

$$d_1 \equiv \sqrt{\frac{D_*}{D}} \left( \frac{R - r_0}{R - \rho_0} \right)^2, \quad d_2(y) = \frac{d_1(R - \rho_0)}{\rho_0 + y(R - \rho_0)},$$

$$\hat{v}(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad \hat{v}(t', 0) = 0,$$

$$d_*[1 - 2\hat{v}(t', 1)] = -\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \Big|_1, \quad d_* \equiv \frac{b_* \bar{v} [R - \rho_0]}{D_*}. \quad (21)$$

Для уравнения диффузии (20) рассмотрим неявную разностную схему на первом слое:  $m = 1, \dots, M-1$ ,

$$\frac{\hat{V}_m^1 - \hat{V}_m^0}{h_{t'}} = d_1 \cdot \frac{\hat{V}_{m-1}^1 - 2\hat{V}_m^1 + \hat{V}_{m+1}^1}{h_y^2} + d_2(y_m) \cdot \frac{\hat{V}_{m+1}^1 - \hat{V}_{m-1}^1}{2h_y}. \quad (22)$$

Рассмотрим уравнения перехода с нулевого на первый слой по времени ( $0 < m < M$ ):  $w_1 \equiv h_y^2 h_{t'}^{-1} d_1^{-1}$ ,  $w_2(y_m) \equiv 0.5 h_y d_2(y_m) d_1^{-1}$ ,

$$[1 - w_2(y_m)] \hat{V}_{m-1}^1 - [2 + w_1] \hat{V}_m^1 + [1 + w_2(y_m)] \hat{V}_{m+1}^1 + w_1 \hat{V}_m^0 = 0.$$

Начальные данные:  $\hat{V}_m^0 \equiv 0$  ( $0 \leq m \leq M$ ). Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки в виде  $\hat{V}_m^1 = \alpha_{m+1}\hat{V}_{m+1}^1 + \beta_{m+1}$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ . Прогоночные коэффициенты ( $m = 1, \dots, M-1$ ):

$$\alpha_{m+1} = \frac{1 + w_2(y_m)}{2 + w_1 + (w_2(y_m) - 1)\alpha_m},$$

$$\beta_{m+1} = \frac{(1 - w_2(y_m))\beta_m + w_1 \hat{V}_m^0}{2 + w_1 + (w_2(y_m) - 1)\alpha_m}. \quad (23)$$

Для нахождения начальных коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  воспользуемся краевым условием  $\hat{v}(t', 0) = 0$ . Зная значение  $\hat{V}_0^1 = 0$  и выражение  $\hat{V}_0^1 = \alpha_1\hat{V}_1^1 + \beta_1$ , получаем  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \hat{V}_0^1 = 0$ . По  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  вычисляем оставшиеся прогоночные коэффициенты  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $m = 2, \dots, M$ , по формулам (23).

Теперь найдем значение  $\hat{V}_M^1$ , необходимое для реализации прогонки. На первом слое по  $t'$  аппроксимируем производную

$$\left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right|_{y=1} \approx \frac{\hat{V}_{M-2}^1 - 4\hat{V}_{M-1}^1 + 3\hat{V}_M^1}{2h_y}$$

и подставляем вместо  $\hat{V}_{M-2, M-1}^1$  выражения  $\hat{V}_k^1 = \alpha_{k+1}\hat{V}_{k+1}^1 + \beta_{k+1}$  при соответствующих  $k$ . Рассмотрим краевое условие (21):

$$d_* [1 - 2\hat{V}_M^1] = -\frac{\alpha_{M-1}\alpha_M\hat{V}_M^1 + \alpha_{M-1}\beta_M}{2h_y} + \frac{\beta_{M-1} - 4(\alpha_M\hat{V}_M^1 + \beta_M) + 3\hat{V}_M^1}{2h_y}.$$

В итоге получаем:

$$\hat{V}_M^1 = \frac{(4 - \alpha_{M-1})\beta_M - \beta_{M-1} - 2h_y d_*}{(\alpha_{M-1} - 4)\alpha_M + 3 - 2h_y d_*}.$$

Используя  $\hat{V}_M^1$ , решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и находим значения концентрации  $\hat{V}_m^1$ ,  $m = 1, \dots, M-1$ .

## 1.2 Слой раствора $Zr-1Nb$

Переходим к краевой задаче (14)–(15), возвращаясь к предыдущему слою ( $t'_0 = 0$ ):  $\lambda_0 = 0$ ,

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t'} = d_1 \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2} + d_2(z) \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial z}, \quad z \in (0, 1) \quad (24)$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{D}{D_*}} \left( \frac{R - r_0}{\rho_0 - r_0} \right)^2, \quad d_2(z) = \frac{d_1(\rho_0 - r_0)}{r_0 + z(\rho_0 - r_0)},$$

$$\hat{c}(0, z) = \psi(z), \quad \hat{c}(t', 1) = \frac{Q}{\bar{u}}, \quad \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (25)$$

Для уравнения (24) рассмотрим неявную схему на первом слое:  $k = 1, \dots, K-1$ ,

$$\frac{\hat{C}_k^1 - \hat{C}_k^0}{h_{t'}} = d_1 \cdot \frac{\hat{C}_{k-1}^1 - 2\hat{C}_k^1 + \hat{C}_{k+1}^1}{h_z^2} + d_2(z_k) \cdot \frac{\hat{C}_{k+1}^1 - \hat{C}_{k-1}^1}{2h_z}. \quad (26)$$

Уравнения перехода с нулевого на первый слой по времени ( $0 < k < K$ ):  $w_1 \equiv h_z^2 h_{t'}^{-1} d_1^{-1}$ ,  $w_2(z_k) \equiv 0.5 h_z d_2(z_k) d_1^{-1}$ ,

$$[1 - w_2(z_k)]\hat{C}_{k-1}^1 - [2 + w_1]\hat{C}_k^1 + [1 + w_2(z_k)]\hat{C}_{k+1}^1 + w_1\hat{C}_k^0 = 0.$$

Начальные данные:  $\hat{C}_k^0 = \psi(z_k)$  ( $0 \leq k \leq K$ ). Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки в виде  $\hat{C}_k^1 = \alpha_{k+1}\hat{C}_{k+1}^1 + \beta_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ . Прогоночные коэффициенты ( $k = 1, \dots, K-1$ ):

$$\alpha_{k+1} = \frac{1 + w_2(z_k)}{2 + w_1 + (w_2(z_k) - 1)\alpha_k},$$

$$\beta_{k+1} = \frac{(1 - w_2(z_k))\beta_k + w_1 \hat{C}_k^0}{2 + w_1 + (w_2(z_k) - 1)\alpha_k}. \quad (27)$$

Для нахождения начальных коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  подсчитаем предварительно значения  $\hat{C}_{1,2}^1$  по явной разностной схеме (в равенстве (26) справа заменяем 1 на 0). Рассмотрим краевое условие непроницаемости при  $z = 0$  в (25). Используя разностную аппроксимацию  $\partial_z \hat{c}|_{z=0} \approx [-3\hat{C}_0^1 + 4\hat{C}_1^1 - \hat{C}_2^1]/2h_z = 0$ , получаем выражение  $\hat{C}_0^1 = f_1(\hat{C}_1^1, \hat{C}_2^1) = (4\hat{C}_1^1 - \hat{C}_2^1)/3$ . Зная численное значение  $\hat{C}_0^1$  и выражение  $\hat{C}_0^1 = \alpha_1\hat{C}_1^1 + \beta_1$ , получаем  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \hat{C}_0^1$ . По  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  вычисляем оставшиеся прогоночные коэффициенты  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $k = 2, \dots, K$  по формулам (27).

Значение  $\hat{C}_K^1$ , необходимое для реализации прогонки, находим из краевого условия при  $z = 1$  в (25):  $\hat{C}_K^1 = Q/\bar{u}$ .

С текущими приближениями значений  $\hat{C}_0^1$ ,  $\hat{C}_K^1$  решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций  $C_{1,2}^1$  (и остальные значения  $C_K^1$  для  $k = 3, \dots, K-1$ ). После этого возвращаемся к уточнению  $\hat{C}_0^1 = f_1(\hat{C}_1^1, \hat{C}_2^1)$ , корректируем значения прогоночных коэффициентов (27) и повторяем вычисления (возвращаясь к началу

абзаца) до установления граничных значений  $\hat{C}_{0,K}^1$  (обычно 2-3 итерации).

### 1.3 Нахождение $\lambda_0 > 0$

После указанных вычислений аппроксимируем производные на первом слое

$$\partial_y \hat{v}|_{y=0} \approx [-3\hat{V}_0^1 + 4\hat{V}_1^1 - \hat{V}_2^1]/2h_y,$$

$$\partial_z \hat{c}|_{z=1} \approx [\hat{C}_{K-2}^1 - 4\hat{C}_{K-1}^1 + 3\hat{C}_K^1]/2h_z$$

и подставляем их в граничное условие (16):

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{Q_h}{\bar{u}} - \hat{C}_K^1 \right] \lambda_0 \\ &= -\sqrt{\frac{D_*}{D}} \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \frac{(R-r_0)^2}{\rho_0(R-\rho_0)} \cdot \frac{-3\hat{V}_0^1 + 4\hat{V}_1^1 - \hat{V}_2^1}{2h_y} \\ &+ \sqrt{\frac{D}{D_*}} \frac{(R-r_0)^2}{\rho_0(\rho_0-r_0)} \cdot \frac{\hat{C}_{K-2}^1 - 4\hat{C}_{K-1}^1 + 3\hat{C}_K^1}{2h_z}. \end{aligned}$$

Отсюда находим приближение  $\lambda_0$ . На данном начальном этапе возможны два варианта.

1.  $\lambda_0 \leq 0$  (на начальном этапе распределение  $\hat{v}$  практически нулевое по сравнению с распределением  $\hat{c}$  и линейная комбинация градиентов в (16) неположительна). По физическому смыслу задачи полагаем  $\lambda_0 = 0$  и возвращаемся в начало излагаемого алгоритма (пункт 1.1), используя в качестве начальных данных текущие распределения концентраций  $\hat{V}_m^0 = \hat{V}_m^1$ ,  $m = 0, \dots, M$ ,  $\hat{C}_k^0 = \hat{C}_k^1$ ,  $k = 0, \dots, K$ .

2.  $\lambda_0 > 0$ . Принимаем это число в качестве уточненного значения  $\lambda_0$  и завершаем итерации. Далее вычисляем  $\dot{\rho}(0) = \lambda_0 \rho_0$  и в силу

$$\begin{aligned} \lambda(t'_0) &= \frac{d}{dt'} \ln \rho(t')|_{t'_0} \\ \Rightarrow \ln(\rho(t'_0 + \Delta t')) &\approx \ln \rho(t'_0) + \lambda(t'_0) \cdot \Delta t' \end{aligned}$$

определяем  $\ln \rho(t'_1)$ ,  $t'_1 = t'_0 + \Delta t'$ . По значению  $\ln \rho(t'_1)$  находим  $\rho(t'_1)$  и переходим к пункту 2, используя в качестве начальных данных распределения  $\hat{V}_m^1$ ,  $m = 0, \dots, M$ ,  $\hat{C}_k^1$ ,  $k = 0, \dots, K$ .

### 2. Переход от $n$ -го к $(n+1)$ -му слою по $t'$

Опишем алгоритм нахождения распределений на  $(n+1)$ -м слое ( $n > 1$ )  $\hat{v}(t'_{n+1}, y)$  [ $\hat{V}_m^{n+1}$ ,  $m = 0, \dots, M$ ],  $\hat{c}(t'_{n+1}, z)$  [ $\hat{C}_k^{n+1}$ ,  $k = 0, \dots, K$ ], зная распределения с предыдущего слоя по времени  $\hat{v}(t'_n, y)$ ,  $\hat{c}(t'_n, z)$ . Рассмотрим последовательно два слоя материала: сначала гидридный, затем слой сплава  $Zr-1Nb$ .

Начальное приближение  $\lambda(t'_n) \approx \lambda(t'_{n-1})$  берется с предыдущего временного слоя. Параметр  $\lambda(t'_n)$  и распределения  $\hat{v}(t'_{n+1}, y)$ ,

$\hat{c}(t'_{n+1}, z)$  подлежат итерационному уточнению, значение  $\rho(t'_n)$  известно.

### 2.1 Гидридный слой

Для уравнения диффузии (12) в безразмерной форме

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t'} = d_1(t') \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + d_2(t', y) \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad y \in (0, 1),$$

$$\begin{aligned} d_1(t') &\equiv \sqrt{\frac{D_*}{D}} \left[ \frac{R-r_0}{R-\rho(t')} \right]^2, \quad d_2(t', y) \\ &= \frac{\lambda(t')(1-y)}{1-R\rho^{-1}(t')} + \sqrt{\frac{D_*}{D}} \frac{(R-r_0)^2(R-\rho(t'))^{-1}}{\rho(t') + y(R-\rho(t'))} \end{aligned}$$

рассмотрим неявную разностную схему на  $(n+1)$ -м слое:  $m = 1, \dots, M-1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{V}_m^{n+1} - \hat{V}_m^n}{h_{t'}} &= d_1(t'_n) \cdot \frac{\hat{V}_{m-1}^{n+1} - 2\hat{V}_m^{n+1} + \hat{V}_{m+1}^{n+1}}{h_y^2} \\ &+ d_2(t'_n, y_m) \cdot \frac{\hat{V}_{m+1}^{n+1} - \hat{V}_{m-1}^{n+1}}{2h_y}. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассмотрим уравнения перехода с  $n$ -го на  $(n+1)$ -й слой по времени ( $n \geq 1$ ,  $0 < m < M$ ):

$$w_1(t'_n) \equiv h_y^2 h_{t'}^{-1} d_1^{-1}(t'_n),$$

$$w_2(t'_n, y_m) \equiv 0.5 h_y d_2(t'_n, y_m) d_1^{-1}(t'_n),$$

$$\begin{aligned} & [1 - w_2(t'_n, y_m)] \hat{V}_{m-1}^{n+1} - [2 + w_1(t'_n)] \hat{V}_m^{n+1} \\ & + [1 + w_2(t'_n, y_m)] \hat{V}_{m+1}^{n+1} + w_1 \hat{V}_m^n = 0. \end{aligned}$$

Начальные данные  $\hat{V}_m^1$  берутся из пункта 1.3. Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки в виде  $\hat{V}_m^{n+1} = \alpha_{m+1} \hat{V}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ . Прогоночные коэффициенты ( $m = 1, \dots, M-1$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1 + w_2(t'_n, y_m)}{2 + w_1(t'_n) + (w_2(t'_n, y_m) - 1)\alpha_m}, \\ \beta_{m+1} &= \frac{(1 - w_2(t'_n, y_m))\beta_m + w_1(t'_n) \hat{V}_m^n}{2 + w_1(t'_n) + (w_2(t'_n, y_m) - 1)\alpha_m}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для нахождения начальных коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  воспользуемся краевым условием  $\hat{v}(t', 0) = 0$ . Зная значение  $\hat{V}_0^{n+1} = 0$  и выражение  $\hat{V}_0^{n+1} = \alpha_1 \hat{V}_1^{n+1} + \beta_1$ , получаем  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \hat{V}_0^{n+1} = 0$ . По  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  вычисляем оставшиеся прогоночные коэффициенты  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $m = 2, \dots, M$ , по формулам (29).

Теперь найдем значение  $\hat{V}_M^{n+1}$ , необходимое для реализации прогонки. На  $(n+1)$ -м слое по  $t'$  аппроксимируем производную

$$\left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right|_{y=1} \approx \frac{\hat{V}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{V}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{V}_M^{n+1}}{2h_y}$$

и подставляем вместо  $\hat{V}_{M-2, M-1}^{n+1}$  выражения  $\hat{V}_k^{n+1} = \alpha_{k+1} \hat{V}_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}$  при соответствующих  $k$ . Рассмотрим краевое условие (13):

$$d_* [1 - 2\hat{V}_M^{n+1}] = -\frac{\alpha_{M-1} \alpha_M \hat{V}_M^{n+1} + \alpha_{M-1} \beta_M}{2h_y} + \frac{\beta_{M-1} - 4(\alpha_M \hat{V}_M^{n+1} + \beta_M) + 3\hat{V}_M^{n+1}}{2h_y}.$$

В итоге получаем:

$$\hat{V}_M^{n+1} = \frac{(4 - \alpha_{M-1})\beta_M - \beta_{M-1} - 2h_y d_*(t'_n)}{(\alpha_{M-1} - 4)\alpha_M + 3 - 2h_y d_*(t'_n)}.$$

Используя  $\hat{V}_M^{n+1}$ , решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и находим значения концентрации  $\hat{V}_m^{n+1}$ ,  $m = 1, \dots, M - 1$ .

## 2.2 Слой раствора $Zr-1Nb$

Переходим к краевой задаче (14)–(15), возвращаясь к предыдущему слою ( $t' = t'_n$ ).

Для уравнения диффузии (14) в безразмерной форме

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t'} = d_1(t') \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2} + d_2(t', z) \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial z}, \quad z \in (0, 1),$$

$$d_1(t') = \sqrt{\frac{D}{D_*}} \left( \frac{R - r_0}{\rho(t') - r_0} \right)^2, \quad d_2(t', z) = \frac{\lambda(t')z}{1 - r_0 \rho^{-1}(t')} + \sqrt{\frac{D}{D_*}} \frac{(R - r_0)^2 (\rho(t') - r_0)^{-1}}{r_0 + z(\rho(t') - r_0)}$$

рассмотрим неявную разностную схему на  $(n+1)$ -м слое:  $k = 1, \dots, K - 1$ ,

$$\frac{\hat{C}_k^{n+1} - \hat{C}_k^n}{h_{t'}} = d_1(t'_n) \cdot \frac{\hat{C}_{k-1}^{n+1} - 2\hat{C}_k^{n+1} + \hat{C}_{k+1}^{n+1}}{h_z^2} + d_2(t'_n, z_k) \cdot \frac{\hat{C}_{k+1}^{n+1} - \hat{C}_{k-1}^{n+1}}{2h_z}. \quad (30)$$

Рассмотрим уравнения перехода с  $n$ -го слоя по  $t'$  на  $(n+1)$ -й слой ( $n \geq 1$ ,  $0 < k < K$ ):

$$w_1(t'_n) \equiv h_z^2 h_{t'}^{-1} d_1^{-1}(t'_n), \\ w_2(t'_n, z_k) \equiv 0.5 h_z d_2(t'_n, z_k) d_1^{-1}(t'_n),$$

$$[1 - w_2(t'_n, z_k)] \hat{C}_{k-1}^{n+1} - [2 + w_1(t'_n)] \hat{C}_k^{n+1} + [1 + w_2(t'_n, z_k)] \hat{C}_{k+1}^{n+1} + w_1(t'_n) \hat{C}_k^n = 0.$$

Ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на  $(n+1)$ -м слое в виде  $\hat{C}_k^{n+1} =$

$\alpha_{k+1} \hat{C}_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, K - 1$ . Прогоночные коэффициенты ( $k = 1, 2, \dots, K - 1$ ):

$$\alpha_{k+1} = \frac{1 + w_2(t'_n, z_k)}{2 + w_1(t'_n) + (w_2(t'_n, z_k) - 1)\alpha_k}, \\ \beta_{k+1} = \frac{(1 - w_2(t'_n, z_k))\beta_k + w_1(t'_n) \hat{C}_k^n}{2 + w_1(t'_n) + (w_2(t'_n, z_k) - 1)\alpha_k}. \quad (31)$$

Для нахождения начальных коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  подсчитаем предварительно значения  $\hat{C}_{1,2}^{n+1}$  по явной разностной схеме (в равенстве (30) справа заменяем  $n+1$  на  $n$ ). Рассмотрим краевое условие непроницаемости при  $z = 0$  в (15). Используя разностную аппроксимацию  $\partial_z \hat{c}|_{z=0} \approx [-3\hat{C}_0^{n+1} + 4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1}]/2h_z = 0$ , получаем выражение  $\hat{C}_0^{n+1} = f_1(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1}) = (4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1})/3$ . Зная численное значение  $\hat{C}_0^{n+1}$  и выражение  $\hat{C}_0^{n+1} = \alpha_1 \hat{C}_1^{n+1} + \beta_1$ , получаем  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = \hat{C}_0^{n+1}$ . По  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  вычисляем оставшиеся прогоночные коэффициенты  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $k = 2, \dots, K$  по формулам (31).

Значение  $\hat{C}_K^{n+1}$ , необходимое для реализации прогонки, находим из краевого условия при  $z = 1$  в (15):  $\hat{C}_K^{n+1} = Q/\bar{u}$ .

С текущими приближениями значений  $\hat{C}_0^{n+1}$ ,  $\hat{C}_K^{n+1}$  решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций  $C_{1,2}^{n+1}$  (и остальные значения  $C_K^{n+1}$  для  $k = 3, \dots, K - 1$ ). После этого возвращаемся к уточнению  $\hat{C}_0^{n+1} = f_1(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1})$ , корректируем значения прогоночных коэффициентов (31) и повторяем вычисления (возвращаясь к началу абзаца) до установления граничных значений  $\hat{C}_{0,K}^{n+1}$  (обычно 2-3 итерации).

## 2.3 Итерационное уточнение $\lambda(t'_n)$

После указанных вычислений аппроксимируем производные на  $(n+1)$ -м слое

$$\partial_y \hat{v}|_{y=0} \approx [-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}]/2h_y, \\ \partial_z \hat{c}|_{z=1} \approx [\hat{C}_{K-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{K-1}^{n+1} + 3\hat{C}_K^{n+1}]/2h_z$$

и подставляем их в граничное условие (16):

$$\left[ \frac{Qh}{\bar{u}} - \hat{C}_K^{n+1} \right] \lambda(t'_n) = -\sqrt{\frac{D}{D_*}} \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \frac{(R - r_0)^2}{\rho(t'_n)(R - \rho)} \cdot \frac{-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}}{2h_y} + \sqrt{\frac{D}{D_*}} \frac{(R - r_0)^2 \hat{C}_{K-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{K-1}^{n+1} + 3\hat{C}_K^{n+1}}{\rho(\rho - r_0) 2h_z}.$$

Отсюда находим новое приближение  $\lambda(t'_n) > 0$  и возвращаемся в начало излагаемого алгоритма (пункт 2.1). Через несколько итераций получаем установившееся значение  $\lambda(t'_n)$ .

Далее вычисляем значение производной  $\dot{\rho}(t'_n) = \lambda(t'_n)\rho(t'_n)$  и в силу

$$\lambda(t'_n) = \frac{d}{dt'} \ln \rho(t')|_{t'_n}$$

$$\Rightarrow \ln(\rho(t'_n + \Delta t')) \approx \ln \rho(t'_n) + \lambda(t'_n) \cdot \Delta t'$$

определяем  $\ln \rho(t'_{n+1})$ ,  $t'_{n+1} = t'_n + \Delta t'$ . По значению  $\ln \rho(t'_{n+1})$  находим  $\rho(t'_{n+1})$  и переходим к слою  $t'_{n+2}$ , приняв в качестве начального приближения  $\lambda(t'_{n+1}) \approx \lambda(t'_n)$ . Далее уточняем значение  $\lambda(t'_{n+1})$  и распределения  $\hat{v}(t'_{n+2}, y)$ ,  $\hat{c}(t'_{n+2}, z)$  по изложенной схеме (пп. 2.1–2.3).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное (гидридное) охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки.

При проведении экспериментальных исследований практически невозможно определить распределение водорода в материале в зависимости от времени, поскольку атомарный растворенный водород является чрезвычайно подвижной фазой внедрения.

В статье представлена модель гидрирования цилиндрической оболочки из циркониевого сплава, учитывающая динамику абсорбционно-десорбционных процессов и движение свободной границы раздела фаз (гидрид-металл). На основе неявных разностных схем разработан итерационный вычислительный алгоритм решения краевой задачи.

*Финансирование исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований, Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Взаимодействие водорода с металлами* / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.
2. *Водород в металлах* / Ред. Г. Алефельд, И. Фёлькль. М.: Мир, 1981. Т. 1, 2. 506, 430 с.
3. *Заика Ю. В., Родченкова Н. И., Грудова К. В.* Численное моделирование динамики свободной границы гидридообразования // Труды КарНЦ РАН. 2018. № 7. С. 14–24. doi: 10.17076/mat843
4. *Изотопы водорода. Фундаментальные и прикладные исследования* / Ред. А. А. Юхимчук. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 697 с.
5. *Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярмо С. С.* Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.
6. *Черданцев Ю. П., Чернов И. П., Тюрин Ю. И.* Методы исследования систем металл–водород. Томск: ТПУ, 2008. 286 с.
7. *Denisov E. A., Kompaniets M. V., Kompaniets T. N., Bobkova I. S.* Peculiarities of hydrogen permeation through Zr–1%Nb alloy and evaluation of terminal solid solubility // Journal of Nuclear Materials. 2016. Vol. 472. P. 13–19. doi: 10.1016/j.jnucmat.2016.01.022
8. *Handbook of hydrogen storage: new materials for future energy storage* / Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.
9. *Lototskiyy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review // International Journal of Hydrogen Energy. 2014. Vol. 39, iss. 11. P. 5818–5851. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.01.158
10. *Pushilina N. S., Kudiiarov V. N., Laptev R. S., Lider A. M., Teresov A. D.* Microstructure changes in Zr–1Nb alloy after pulsed electron beam surface modification and hydrogenation // Surface and Coatings Technology. 2015. Vol. 284. P. 63–68. doi: 10.1016/j.surfcoat.2015.07.082
11. *Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V.* Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface // International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121
12. *The hydrogen economy* / Eds. M. Ball, M. Wietschel. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 646 p.
13. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations // International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1295–1305. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.07.099
14. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: Diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol. 33, iss. 10. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018
15. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface // Mathematical Modelling. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

Поступила в редакцию 03.06.2019

## REFERENCES

1. *Vzaimodeistvie vodoroda s metallami* [Interactions of hydrogen with metals]. Moscow: Nauka, 1987. 296 p.
2. *Vodorod v metallakh* [Hydrogen in metals]. Moscow: Mir, 1981. Vol. 1, 2. 506, 403 p.
3. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I., Grudova K. V.* Chislennoe modelirovanie dinamiki svobodnoi granitsy gidridobrazovaniya [Numerical simulation of the dynamics of the free boundary of hydride formation]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 14–24. doi: 10.17076/mat843
4. *Izotopy vodoroda. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya* [Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies]. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. 697 p.
5. *Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarko S. S.* Pronitsaemost' vodoroda cherez metally [Hydrogen permeability through metals]. Moscow: MIFI, 2008. 144 p.
6. *Cherdantsev Yu. P., Chernov I. P., Tyurin Yu. I.* Metody issledovaniya sistem metall-vodorod [Methods of studying metal-hydrogen systems]. Tomsk: TPU, 2008. 286 p.
7. *Denisov E. A., Kompaniets M. V., Kompaniets T. N., Bobkova I. S.* Peculiarities of hydrogen permeation through Zr–1%Nb alloy and evaluation of terminal solid solubility. *Journal of Nuclear Materials*. 2016. Vol. 472. P. 13–19. doi: 10.1016/j.jnucmat.2016.01.022
8. *Handbook of hydrogen storage: new materials for future energy storage*. Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.
9. *Lototskiy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, iss. 11. P. 5818–5851. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.01.158
10. *Pushilina N. S., Kudiiarov V. N., Laptev R. S., Lider A. M., Teresov A. D.* Microstructure changes in Zr–Nb alloy after pulsed electron beam surface modification and hydrogenation. *Surface and Coatings Technology*. 2015. Vol. 284. P. 63–68. doi: 10.1016/j.surfcoat.2015.07.082
11. *Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V.* Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121
12. *The hydrogen economy*. Eds. M. Ball, M. Wietschel. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 646 p.
13. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1295–1305. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.07.099
14. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: Diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding. *Applied Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 33, iss. 10. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018
15. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface. *Mathematical Modelling*. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

Received June 06, 2019

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Родченкова Наталья Ивановна**  
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических  
исследований КарНЦ РАН,  
Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: nirodchenkova@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 766312

**Грудова Ксения Васильевна**  
младший научный сотрудник  
Отдел комплексных научных  
исследований КарНЦ РАН,  
Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: grudova@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 766312

## CONTRIBUTORS:

**Rodchenkova, Natalia**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: nirodchenkova@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 766312

**Grudova, Kseniia**  
Department of Multidisciplinary Scientific Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: grudova@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 766312

УДК 519.237.7

## ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ МОДЕЛЕЙ СТРУКТУРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛАТЕНТНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

С. В. Стафеев

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

В статье получены условия почти всюду локальной идентифицируемости для одного класса моделей структурных уравнений с латентными переменными.

Ключевые слова: структурные уравнения; латентные переменные; идентифицируемость.

### S. V. Stafeev. IDENTIFIABILITY OF STRUCTURAL EQUATION MODELS WITH LATENT VARIABLES

In this paper the problem of identifiability of structural equation models with latent variables is considered. The conditions of the almost everywhere local identifiability for such models are obtained.

Key words: structural equations; latent variables; identifiability.

#### МОДЕЛЬ

Пусть  $G = (V, E)$  – смешанный граф с множеством вершин  $V = \{1, \dots, n\}$  и множеством ребер  $E$ . Множество ребер  $E$  графа  $G$  состоит из ориентированных ( $i \rightarrow j$ ) и двуориентированных ( $i \leftrightarrow j$ ) ребер.

Рассмотрим следующую, связанную с графом  $G$ , систему структурных уравнений с латентными переменными [2]:

$$X = B^t X + \Lambda^t H + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $X = (X_1, \dots, X_n)^t$  – вектор наблюдаемых случайных величин с матрицей ковариаций  $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ;  $H = (H_1, \dots, H_k)^t$  – вектор независимых нормально распределенных латентных (скрытых) случайных величин с  $\mathbf{M}(H_j) = 0$ , и  $\mathbf{M}(H_j)^2 = 1$ ;  $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ;  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , причем  $b_{ij} = 0$ , если  $i \rightarrow j \notin E$ . Вектор остатков  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^t$  имеет нормальное

распределение с нулевым вектором математических ожиданий и неизвестной положительно определенной матрицей ковариаций  $\Omega = (\omega_{ij})$ , причем  $\omega_{ij} = 0$ , если  $i \leftrightarrow j \notin E$ . Мы будем предполагать, что векторы  $H$  и  $\varepsilon$  являются независимыми.

Таким образом, с помощью графа  $G$  постулируются некоторые нули в матрицах  $B$  и  $\Omega$ . Вектор параметров  $\theta = (\Lambda, B, \Omega)$  модели (1) состоит из матрицы  $\Lambda$  и ненулевых элементов матриц  $B$  и  $\Omega$ . Пусть  $\mathbf{PD}_V$  – множество  $n \times n$  симметричных положительно определенных матриц,  $\mathbf{B}_G$  – множество матриц, для которых матрица  $I - B$  обратима. Определим параметрическое множество модели (1):  $\Omega_G =$

$$\{\theta : \Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}, B \in \mathbf{B}_G, \Omega \in \mathbf{PD}_V\}.$$

Пусть  $\theta \in \Omega_G$ . Тогда матрица ковариаций наблюдаемых случайных величин имеет вид:

$$\Sigma = \Sigma(\theta) = (I - B)^{-t}(\Omega + \Lambda\Lambda^t)(I - B)^{-1}. \quad (2)$$

Пусть  $\mathbf{M}_G$  – множество всех матриц, допускающих разложение (2). Таким образом, граф  $G$  задает следующее семейство нормальных распределений:

$$\mathbb{N}_G = \{N(0, \Sigma) : \Sigma \in \mathbf{M}_G\}. \quad (3)$$

### УСЛОВИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Одной из наиболее важных проблем, связанных с моделями, содержащими латентные переменные (в частности, с моделью (1)), является проблема параметрической идентифицируемости [4, 6]. Данная проблема заключается в ответе на вопрос о возможности однозначного определения неизвестных параметров модели по совместному распределению наблюдаемых случайных величин.

Рассмотрим вероятностно-статистическую модель  $\mathcal{M}(\Theta)$ , заданную семейством распределений  $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ .

**Определение 1.** [6] Модель  $\mathcal{M}(\Theta)$  называется идентифицируемой, если любым различным  $\theta \in \Theta$  и  $\theta' \in \Theta$  соответствуют различные распределения  $\mathbb{P}_\theta$  и  $\mathbb{P}_{\theta'}$ .

Модель  $\mathcal{M}(\Theta)$  называется локально идентифицируемой, для любого  $\theta \in \Theta$  найдется конечное число таких  $\theta' \in \Theta$ ,  $\theta' \notin \theta$ , что  $\mathbb{P}_{\theta'} = \mathbb{P}_\theta$ .

**Определение 2.** [6] Модель  $\mathcal{M}(\Theta)$  называется почти всюду (п.в.) идентифицируемой (п.в. локально идентифицируемой), если она является идентифицируемой (локально идентифицируемой) при  $\theta \in \Theta' \subseteq \Theta$ , а множество  $\Theta \setminus \Theta'$  имеет меру нуль.

В нашем случае модель задается семейством распределений (3). Легко видеть, что матрица  $\Lambda$  модели (1) может быть определена только с точностью до ортогонального преобразования. Поэтому целесообразно считать, что модель (1) идентифицируема, если по матрице  $\Sigma$  матрица  $\Lambda$  определяется с точностью до ортогонального преобразования, а элементы матриц  $\Omega$  и  $B$  определяются однозначно. Для того чтобы оставаться в рамках определений 1 и 2, будем считать матрицы  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  различимыми, если не существует такой ортогональной матрицы  $Q$ , что  $\Lambda' = Q\Lambda$ . Таким образом, модель (1) называется идентифицируемой, если любым различным  $\theta \in \Theta_G$  и  $\theta' \in \Theta_G$  соответствуют различные матрицы ковариаций  $\Sigma(\theta)$  и  $\Sigma(\theta')$ .

В работе [4] получены достаточные условия п.в. локальной параметрической идентифицируемости модели (1) в случае, когда  $G$  является простым ациклическим графом (т. е. гра-

фом, в котором любые две различные вершины могут быть соединены только одним ребром и он не содержит ориентированных циклов) и  $k = 1$ . В данной работе получены достаточные условия п.в. локальной идентифицируемости для произвольного  $k$ .

Пусть  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  – дополнительный к  $G$  граф. Образует граф  $\mathcal{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ , где  $\mathbf{V} = \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k\}$ , а  $\mathbf{E} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) | \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k), \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k), (i_s, j_l) \in \bar{E}, s, l = 1, \dots, k\}$ . (Заметим, что граф  $\mathcal{G}$  использовался в работе [1] для решения вопроса об идентифицируемости модели факторного анализа с зависимыми остатками.)

**Теорема 1.** Пусть  $G$  – простой ациклический граф. Модель (1) будет п.в. локально идентифицируемой при  $\theta \in \Theta_G$ , если граф  $\mathcal{G}$  содержит подграф  $\mathcal{G}' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ , каждая компонента связности которого содержит нечетный простой цикл и  $\cup_{\mathbf{i} \in \mathbf{V}'} \mathbf{i} = V$ .

*Доказательство.* Соотношение (2) задает отображение

$$\varphi : \Theta_G \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (4)$$

Пусть  $s$  – число ребер графа  $G$ . Элементы матрицы  $\Lambda$  по матрице  $\Lambda \Lambda^t$ , максимальный ранг которой равен  $k$ , восстанавливаются с точностью до ортогонального преобразования, поэтому матрица Якоби  $J(\theta)$  отображения  $\varphi$  имеет ранг, меньший или равный  $R = s + n + nk - \frac{1}{2}k(k-1)$ . Нетрудно показать, что модель будет локально идентифицируемой в некоторой окрестности  $\theta^* \in \Theta$ , если ранг матрицы  $J(\theta^*)$  равен  $R$ .

Так как элементы матрицы  $J(\theta)$  являются полиномами относительно параметров модели, то ее ранг будет почти всюду при  $\theta \in \Theta$  максимален [4, 6]. (Максимальный ранг матрицы  $J(\theta)$  называют размерностью модели.) Поэтому, если мы покажем, что существует такое  $\theta^* \in \Theta$ , что ранг матрицы Якоби  $J(\theta^*)$  равен  $R$ , теорема будет доказана.

Произведем невырожденную замену параметров:

$$A = (I - B)^{-t} \Lambda. \quad (5)$$

Соотношение (2) принимает следующий вид:

$$\Sigma = (I - B)^{-t} \Omega (I - B)^{-1} + AA^t. \quad (6)$$

Очевидно, что ранг матриц Якоби отображений, заданных соотношениями (2) и (6), совпадает. Далее находим матрицу Якоби отображения (6).

Используя свойства матричных производных, мы получаем:

- для  $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$

$$(\sigma_{sl})'_{a_{ij}} = \begin{cases} 2a_{ij}, & \text{если } s = l = i; \\ a_{sj}, & \text{если } l = i, s \neq i; \\ a_{lj}, & \text{если } l \neq i, s = i; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

- для  $i \leftrightarrow j \in E$

$$\Sigma'_{\omega_{ij}} = (I - B)^{-1}(\Omega'_{\omega_{ij}})(I - B)^{-t};$$

- для  $i \leftarrow j \in E$

$$\begin{aligned} \Sigma'_{b_{ij}} &= [(I - B)^{-1}]'_{b_{ij}}(\Omega)(I - B)^{-t} \\ &+ (I - B)^{-1}(\Omega)[(I - B)^{-t}]'_{b_{ij}} \\ &- (I - B)^{-1}(I - B)'_{b_{ij}}(I - B)^{-1}(\Omega)(I - B)^{-t} \\ &- (I - B)^{-1}(\Omega)(I - B)^{-t}(I - B^t)'_{b_{ij}}(I - B)^{-t} \\ &= (I - B)^{-1}B'_{b_{ij}}\Sigma + \Sigma(B^t)'_{b_{ij}}(I - B)^{-t}. \end{aligned}$$

Выберем  $\theta^* \in \Theta$ , при котором:  $b_{ij} = 0$ ,  $i \leftarrow j \in E$ ,  $\omega_{ij} = 0$ ,  $i \leftrightarrow j \in E$ ,  $\omega_{jj} = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Для  $r, l = 1, \dots, n$ , мы получаем:

- для  $i \leftrightarrow j \in E$

$$(\sigma_{rl})'_{\omega_{ij}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = r, j = l \text{ или} \\ & i = l, j = r, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

- для  $i \leftarrow j \in E$

$$(\sigma_{rl})'_{b_{ij}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = r, j = l \text{ или} \\ & i = l, j = k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $C = AA^t$  и  $E_U = \{i - j : (i, j) \in E, (i, i), i = 1, \dots, n\}$ . Обозначим:

$$\mathbf{c}'_{ij} = \frac{\partial c_{ij}}{\partial a}, \sigma'_{ij} = \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \omega}, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial b} \right\}.$$

Образуем матрицы:

$$M_{11} = (\mathbf{c}'_{ij})_{i-j \in E_U}, M_{21} = (\mathbf{c}'_{ij})_{i-j \in \bar{E}},$$

$$M_{12} = (\sigma'_{ij})_{i-j \in E_U}, M_{22} = (\sigma'_{ij})_{i-j \in \bar{E}}.$$

Легко видеть, что матрица  $J(\theta^*)$  с помощью перестановки строк и столбцов может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

где матрица  $M_{12}$  – единичная матрица, а  $M_{22}$  – матрица, все элементы которой равны нулю.

Очевидно матрица  $J(\theta^*)$  имеет ранг  $R$ , если ранг матрицы  $M_{21}$  равен  $nk - \frac{1}{2}k(k-1)$ . Предположим, что любые  $k$  строк матрицы  $A$  линейно независимы. (Заметим, что это условие выполняется п.в. при  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ .) Применяя результат работы [1], получаем, что если граф  $\mathcal{G}$  содержит компоненту связности

$\mathcal{G}' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$  с нечетным простым циклом и  $\cup_{i \in \mathbf{V}'} i = V$ , то все элементы матрицы  $C$  однозначно восстанавливаются по множеству элементов  $\{c_{ij}, i - j \in \bar{E}\}$ . Отсюда следует, что ранг матрицы  $M_{21}$  п.в. при  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  равен  $nk - \frac{1}{2}k(k-1)$ . Теорема доказана.

Предположим, что  $\bar{G}$  – полный граф, содержащий не менее  $2k+1$  вершин. Тогда очевидно, что граф  $\mathcal{G}$  является связным. Граф  $\bar{G}$  также содержит нечетный цикл длины  $2k+1$ :

$$\mathbf{i}_1 - \dots - \mathbf{i}_{2k+1} - \mathbf{i}_1, \text{ где} \\ \mathbf{i}_l = \{(2(k-m) + l + 3) \bmod (2k+1), \\ l = 1, \dots, 2k+1\}.$$

Таким образом, в этом случае условия теоремы выполнены. Например, для случая  $k=3$  цикл длины 7 будет:

$$(1, 6, 4) - (2, 7, 5) - (3, 1, 6) - (4, 2, 7) - (5, 3, 1) - (6, 4, 2) - (7, 5, 3) - (1, 6, 4).$$

Верна следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $n \geq 4k+1$ . Если  $G$  является лесом, в котором нет вершины с не менее чем с  $n-k$  смежными вершинами, то модель (1) п.в. локально идентифицируема при  $\theta \in \Theta$ .

*Доказательство.* Ввиду того что лес является двудольным графом, множество вершин графа  $G$  можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств  $V^1$  и  $V^2$  несоединенных между собой вершин. Пусть (для определенности) множество  $V^1$  содержит не менее  $2k+1$  вершин. Индуцированный подграф графа  $\bar{G}$  с множеством вершин  $V^1$  является связным и содержит нечетный цикл.

Если любая вершина множества  $V^2$  дополнительного графа  $\bar{G}$  соединена ребрами с более чем  $k$  вершинами множества  $V^1$ , то нетрудно показать, что условия теоремы 1 выполнены. Предположим, что некоторая вершина  $i_1 \in V^2$  соединена ребрами с менее чем  $k$  вершинами множества  $V^1$ . Тогда, как легко видеть, любая вершина множества  $V^2 \setminus i_1$  соединена с не менее чем  $k$  вершинами множества  $V^1$ , так как в противном случае граф  $G$  имел бы неориентированные циклы. Таким образом, и в этом случае условия теоремы 1 выполнены. Теорема доказана.

## СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ НЕЗАВИСИМОСТИ

С помощью смешанного графа  $G$  удобно представлять условные независимости среди случайных величин множества  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Введем необходимые определения [6].

**Определение 3.** Простая цепь, принадлежащая графу  $G$ , содержит тупиковую вершину  $k$ , если она содержит один из подграфов:  
 $i_1 \rightarrow k \leftarrow i_2$ ,  $i_1 \rightarrow k \leftrightarrow i_2$ ,  $i_1 \leftrightarrow k \leftarrow i_2$ ,  
 $i_1 \leftrightarrow k \leftrightarrow i_2$ .

**Определение 4.** Вершины  $i$  и  $j$  называются  $d$ -связанными множеством вершин  $S \subseteq V$ , если граф  $G$  содержит такую простую цепь, соединяющую  $i$  и  $j$ , у которой все тупиковые вершины принадлежат  $S$ , а не тупиковые не принадлежат. Вершины  $i$  и  $j$  называются  $d$ -отделимыми множеством вершин  $S$ , если они не являются  $d$ -связанными.

Из  $d$ -отделимости вершин  $i$  и  $j$  множеством вершин  $S$  следует условная независимость соответствующих случайных величин  $X_i$  и  $X_j$  при данном  $X_S = \{X_s, s \in S\}$  [6].

Определим граф  $\hat{G} = (V, \hat{E})$ , где множество ребер  $\hat{E}$  состоит из всех ребер множества  $\bar{E}$ , кроме таких ребер  $i - j \in \bar{E}$ , для которых найдется простая цепь графа  $G$ , которая соединяет  $i$  и  $j$  и содержит только тупиковые вершины. Очевидно, что  $i$  и  $j$  будут  $d$ -отделимы множеством  $V \setminus \{i, j\}$ , при  $i - j \in \hat{E}$ . В случае нормального распределения с матрицей ковариаций  $\Sigma$  это будет равносильно равенству нулю соответствующих элементов матрицы  $\Sigma^{-1}$ .

Определим граф  $G = (\mathbf{V}, E)$ , где  $\mathbf{V} = \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k\}$ , а  $E = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) | \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k), \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k), (i_s, j_l) \in \hat{E}, s, l = 1, \dots, k\}$ .

Очевидно, что граф  $G$  является подграфом графа  $\mathcal{G}$ .

В следующей теореме сформулированы достаточные условия п.в. идентифицируемости модели (1).

**Теорема 3.** Пусть  $G$  – простой ациклический граф. Модель (1) будет п.в. идентифицируемой при  $\theta \in \Theta$ , если граф  $G$  содержит компоненту связности  $G' = ((\mathbf{V}', E'))$  с нечетным простым циклом и  $\cup_{\mathbf{i} \in \mathbf{V}'} \mathbf{i} = V$ .

*Доказательство.* Пусть  $\Sigma_G = (I - B)^{-t} \Omega (I - B)^{-1}$ . Из определения графа  $\hat{G} = (V, \hat{E})$  следует, что для элементов матрицы  $\Sigma_G^{-1} = (\sigma_G^{ij})$  выполнено следующее условие.

$$\sigma_G^{ij} = 0, \quad \text{если } i - j \in \hat{E}. \quad (7)$$

Легко видеть, что из (6) следует

$$\Sigma^{-1} = \Sigma_G^{-1} - \Sigma_G^{-1} A (I_k + A^t \Sigma_G^{-1} A) A^t \Sigma_G^{-1}. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что каждый  $(k+1) \times (k+1)$  минор матрицы  $D = \Sigma_G^{-1} A (I_k + A^t \Sigma_G^{-1} A) A^t \Sigma_G^{-1}$  равен нулю, а при предположении, что любые  $k$  строк матрицы  $A$  линейно независимы, каждый  $k \times k$  минор матрицы  $D$  не равен нулю. Теперь, используя результат работы [1] и соотношение (8), можно показать, что множество элементов матрицы  $D$  п.в. однозначно выражается через множество элементов  $\{d_{ij}, i - j \in \hat{E}\}$ . Таким образом, по матрице  $\Sigma$  мы можем однозначно восстановить элементы матрицы  $\Sigma_G$ . В [3] показано, что по  $\Sigma_G$  параметры  $\{B, \Omega\}$  п.в. определяются однозначно. Используя (6), мы однозначно определяем  $AA^t$ , а значит, (с помощью (5)) и матрицу  $\Lambda \Lambda^t$ . Таким образом, матрица  $\Lambda$  определена с точностью до ортогонального преобразования. Теорема доказана.

*Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стафеев С. В. Об условиях глобальной идентифицируемости для моделей факторного анализа // Труды КарНЦ РАН. 2011. № 2. С. 111–114.
2. Boollen K. A. Structural equations with latent variables. New York: John Wiley and Sons, 1990.
3. Carlos B., Pearl J. A new identification condition for recursive models with correlated errors // Struct. Equ. Model. 2002. Vol. 9, no. 4. P. 459–474.
4. Drton M. Algebraic problems in structural equation modeling // The 50<sup>th</sup> Anniv. of Grobner Bases, Mathematical Society of Japan. Tokyo, Japan, 2018. P. 35–86. doi: 10.2969/aspm/07710035.
5. Leung D., Drton M., Hara H. Identifiability of directed Gaussian graphical models with one latent source // Electron. J. Statist. 2016. Vol. 10, no. 1. P. 394–422. doi: 10.1214/16-EJS1111.
6. Maathuis M., Drton M., Lauritzen S., Wainwright M. (Eds) Handbook of Graphical Models. Chapman & Hall/CRC., 2018. 536 p.

Поступила в редакцию 17.05.2019

## REFERENCES

1. *Stafeev S. V.* Ob usloviyakh global'noi identifikatsionnosti dlya modeli faktornogo analiza [On global identifiability conditions of factor analysis models]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2011. No. 2. P. 111–114.
2. *Boollen K. A.* Structural equations with latent variables. New York: John Wiley and Sons, 1990.
3. *Carlos B., Pearl J.* A new identification condition for recursive models with correlated errors. *Struct. Equ. Model.* 2002. Vol. 9, no. 4. P. 459–474.
4. *Drton M.* Algebraic problems in structural equation modeling. *The 50<sup>th</sup> Anniv. of Grobner Bases, Mathematical Society of Japan.* Tokyo, Japan, 2018. P. 35–86. doi: 10.2969/aspm/07710035.
5. *Leung D., Drton M., Hara H.* Identifiability of directed Gaussian graphical models with one latent source. *Electron. J. Statist.* 2016. Vol. 10, no. 1. P. 394–422. doi: 10.1214/16-EJS1111.
6. *Maathuis M., Drton M., Lauritzen S., Wainwright M. (Eds)* Handbook of Graphical Models. Chapman & Hall/CRC., 2018. 536 p.

Received May 17, 2019

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Стафеев Сергей Вячеславович**  
младший научный сотрудник, к. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: stafeev@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 763370

## CONTRIBUTOR:

**Stafeev, Sergei**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: stafeev@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 763370

УДК 519.179.4

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВТОРЫХ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ

Е. В. Хворостянская

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы, содержащие  $N$  вершин, занумерованных числами от 1 до  $N$ , степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Вторая степень  $\eta^{(2)}$  вершины  $A$  конфигурационного графа равна сумме степеней вершин, смежных с вершиной  $A$ , без учета ребер, идущих к  $A$ . При  $N \rightarrow \infty$  для графов, степени вершин которых подчиняются закону Пуассона, найден вид производящей функции и распределение случайной величины  $\eta^{(2)}$ . Также при  $N \rightarrow \infty$  получен вид производящей функции случайной величины  $\eta^{(2)}$  для графов с распределением степеней вершин  $p_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , таким, что  $p_k \sim d / (k^g (\ln k)^h)$ ,  $h \geq 0$ ,  $g > 7/3$ ,  $d > 0$ , при  $k \rightarrow \infty$ .

Ключевые слова: конфигурационный граф; вторая степень вершины; производящая функция; предельное распределение.

### E. V. Khvorostyanskaya. ON THE DISTRIBUTION OF THE SECOND DEGREES OF CONFIGURATION GRAPHS VERTICES

The object is configuration graphs with  $N$  vertices, numbered from 1 to  $N$ , whose vertex degrees are independent identically distributed random variables. The second degree  $\eta^{(2)}$  of an arbitrary vertex  $A$  of a configuration graph is equal to the sum of the degrees of the vertices adjacent to the vertex  $A$  excluding the edges going to  $A$ . As  $N \rightarrow \infty$ , the form of the generating function and the distribution of the random variable  $\eta^{(2)}$  are found for graphs whose vertex degrees have the Poisson distribution. Also, as  $N \rightarrow \infty$ , the form of the generating function of a random variable  $\eta^{(2)}$  is obtained for graphs with the vertex degree distribution  $p_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , such that  $p_k \sim d / (k^g (\ln k)^h)$ ,  $h \geq 0$ ,  $g > 7/3$ ,  $d > 0$ , as  $k \rightarrow \infty$ .

Key words: configuration graph; second degree of vertex; generating function; limit distribution.

В последние годы значительное внимание уделяется исследованию различных характеристик конфигурационных графов, введенных в работе [7]. Такие графы удобно использовать в качестве моделей сложных коммуникационных сетей. Степени вершин конфигурацион-

ного графа рассматриваются как независимые одинаково распределенные случайные величины с дискретным распределением. Под степенью вершины понимается число инцидентных ей полуредер, т. е. ребер, для которых еще не определены инцидентные им вторые вершины.

После определения степеней вершин полуребра равновероятно соединяются, образуя ребра. В случае, когда сумма степеней всех вершин нечетна, добавляется еще одна вершина степени 1, что не влияет на асимптотические свойства графа. Из построения графа следует, что он может содержать петли и кратные ребра. При неограниченном росте числа вершин графа и различных условиях на число ребер и распределение степеней вершин в ряде работ получены предельные распределения различных характеристик конфигурационных графов, в частности, максимальной степени вершины, числа вершин заданной степени [2–6, 8]. В настоящее время интерес представляет также изучение других свойств конфигурационных графов, таких как кластерный коэффициент и коэффициент ассортативности [1, 10], модулярность, вторые, третьи и т. д. степени вершин. В работах [9, 12] рассматривались вторые степени вершин графов предпочтительного присоединения и были получены асимптотические распределения вторых степеней для моделей Боллобаша–Риордана и Бакли–Остгуса.

Под *второй степенью* произвольной вершины  $A$  конфигурационного графа будем понимать случайную величину  $\eta^{(2)}$ , равную сумме степеней вершин, смежных с вершиной  $A$ , без учета ребер, идущих к  $A$ . В работе [11] для конфигурационных графов рассматривается задача о среднем числе вторых соседей вершины, т. е. среднем числе вершин, находящихся в двух шагах от заданной вершины. Вопрос о распределении числа вторых соседей не изучался. Ясно, что при наличии петель и кратных ребер вторая степень вершины графа может отличаться от числа вторых соседей этой вершины.

Далее рассматриваются конфигурационные графы, содержащие  $N$  вершин, занумерованных числами от 1 до  $N$ . Нас интересует предельное распределение второй степени вершины графа при  $N \rightarrow \infty$ .

Пусть независимые случайные величины  $\eta_1, \dots, \eta_N$ , равные степеням вершин конфигурационного графа, имеют распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ :

$$p_k = \mathbf{P} \{ \eta_i = k \} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$i = 1, \dots, N$ . Обозначим через  $F(z)$  производящую функцию случайной величины  $\eta^{(2)}$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** При  $N \rightarrow \infty$  асимптотически достоверно (а.д.)

$$F(z) = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} s_k(\lambda) z^k, \quad (2)$$

$$\mathbf{P} \{ \eta^{(2)} = 0 \} = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)}, \quad (3)$$

$$\mathbf{P} \{ \eta^{(2)} = k \} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} s_k(\lambda), \quad k \geq 1,$$

где

$$s_1(\lambda) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}}, \quad (4)$$

$$s_k = \lambda e^{-\lambda} \frac{ds_{k-1}(\lambda)}{d(\lambda e^{-\lambda})}, \quad k \geq 2.$$

В работе [3] рассматривались конфигурационные графы, степени вершин  $\eta_1, \dots, \eta_N$  которых имеют распределение

$$p_k = \mathbf{P} \{ \eta_i = k \}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$i = 1, \dots, N$ , такое, что при  $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \quad h \geq 0, \quad g \geq 1, \quad h + g > 1, \quad d > 0, \quad (6)$$

т.е. о распределении степеней вершин известно лишь свойство (6). В качестве примера такого распределения можно рассмотреть степенное распределение со случайным параметром [3]. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** При  $N \rightarrow \infty$  для производящей функции  $F(z)$  второй степени вершины конфигурационного графа с распределением степеней вершин (5), (6) при  $g > 7/3$  а.д. выполнено равенство

$$F(z) = F_{\eta_1} \left( \frac{F'_{\eta_1}(z)}{F'_{\eta_1}(1)} \right),$$

где

$$F_{\eta_1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad F'_{\eta_1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}.$$

*Доказательство теоремы 1.* Обозначим через  $\xi_1, \xi_2, \dots$  случайные величины, равные степеням смежных с  $A$  вершин без учета ребер, идущих к вершине  $A$ . Известно [11], что

$$\mathbf{P} \{ \xi_i = k \} = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$  – распределение степеней вершин конфигурационного графа.

Покажем, что случайно выбранная вершина  $A$  графа асимптотически достоверно не имеет петель и кратных ребер. Обозначим  $L = \eta_1 + \dots + \eta_N$  сумму степеней всех вершин графа. По закону больших чисел имеет место равенство  $L = \lambda N(1 + o(1))$ . Используя это соотношение и (1), а также учитывая, что число конфигурационных графов с  $L$  полуредрами равно  $(L-1)!!$ , несложно показать, что

$$\mathbf{P} \{ \text{вершина } A \text{ не имеет петель} \} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L-3)!!}{(L-1)!!} \binom{k}{2} p_k \rightarrow 1, \quad (8)$$

$$\mathbf{P} \{ \text{вершина } A \text{ не имеет кратных ребер} \} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (N-1) \frac{(L-5)!!}{(L-1)!!} \binom{k}{2} p_k \rightarrow 1. \quad (9)$$

Таким образом, произвольно выбранная вершина  $A$  графа а.д. не имеет петель и кратных ребер. Следовательно, подграф, содержащий вершину  $A$  и смежные с ней вершины, можно рассматривать как реализацию двух поколений ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, начинающегося с одной частицы. При этом распределение числа прямых потомков начальной частицы задается (1), а число прямых потомков частиц первого поколения имеет распределение (7), где  $p_k$  заданы в (1). Легко видеть, что вторая степень  $\eta^{(2)}$  вершины  $A$  соответствует случайной величине  $\mu(2)$ , равной числу частиц второго поколения ветвящегося процесса. Тогда производящая функция  $F(z)$  случайной величины  $\eta^{(2)}$  равна  $F(z) = \mathbf{E}z^{\mu(2)}$ . Отсюда и из (7) получаем, что

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \mu(2) = k \} z^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \eta_1 = i \} \mathbf{P} \{ \xi_1 + \dots + \xi_i = k \} \right) z^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left( \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j} \right)^i, \end{aligned}$$

т. е. выполнено равенство

$$F(z) = F_{\eta_1} \left( \frac{F'_{\eta_1}(z)}{F'_{\eta_1}(1)} \right), \quad (10)$$

где  $F_{\eta_1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$  – производящая функция случайной величины  $\eta_1$ .

Используя (1), (10), находим, что

$$F(z) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{\lambda(z-1)}}. \quad (11)$$

Разложим функцию  $e^{\lambda e^{\lambda(z-1)}}$  в ряд по степеням  $z$ :

$$\begin{aligned} e^{\lambda e^{\lambda(z-1)}} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\lambda})^i}{i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda z)^k}{k!} \\ &= e^{\lambda e^{-\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)^{k-1} (\lambda e^{-\lambda})^{i+1}}{i!}. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим

$$s_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)^{k-1} (\lambda e^{-\lambda})^{i+1}}{i!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно видеть, что выполнены соотношения (4), и из (11), (12) следует (2). Используя формулу обращения для производящих функций, из (2) получаем равенства (3). Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Через  $C_1, C_2, \dots$  будем обозначать некоторые положительные постоянные. Используя (6), несложно показать, что для максимальной степени  $\xi_{(N)}$  вершины графа при  $N \rightarrow \infty$  выполнены соотношения:  
при  $h = 0$

$$\mathbf{P} \{ \xi_{(N)} < AN^{(g-1)^{-1}} \} \geq \exp \left\{ -\frac{C_1}{A^{g-1}} \right\}$$

и выбором достаточно большого  $A$  вероятность  $\mathbf{P} \{ \xi_{(N)} < AN^{(g-1)^{-1}} \}$  можно сделать сколь угодно близкой к 1;  
при  $h > 0$

$$\mathbf{P} \{ \xi_{(N)} < N^{(g-1)^{-1}} \} \geq \exp \left\{ -\frac{C_2}{(\ln N)^h} \right\} \rightarrow 1.$$

Используя эти соотношения, (6) и неравенство  $L \geq N$ , где  $L$  – сумма степеней всех вершин, можно показать, что при  $g = 2$ ,  $h > 0$  и при  $g > 2$  выполнено соотношение (8), а при  $g > 7/3$  справедливо (9). Аналогично доказательству теоремы 1 получаем утверждение теоремы 2.

*Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Ю. Л. О кластеризации условного конфигурационного графа // Труды КарНЦ РАН. 2018. № 7. С. 62–67. doi: 10.17076/mat768
2. Павлов Ю. Л. Предельные распределения числа вершин заданной степени условного конфигурационного графа // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 73–80. doi: 10.17076/mat356
3. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
4. Павлов Ю. Л., Феклистова Е. В. О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 2. С. 58–70. doi: 10.4213/dm1369
5. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512
6. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число ребер // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

## REFERENCES

1. Pavlov Yu. L. O klasterizatsii uslovnogo konfiguratsionnogo grafa [On clustering of conditional configuration graphs]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 62–67. doi: 10.17076/mat768
2. Pavlov Yu. L. Predel'nye raspredelenija chisla vershin zadannoi stepeni uslovnogo konfiguratsionnogo grafa [Limit distributions of the number of vertices with given degree in a conditional configuration graph]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 73–80. doi: 10.17076/mat356
3. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB. MATH.* 2018. Vol. 209, no. 2. P. 258–275. doi: 10.4213/sm8832
4. Pavlov Yu. L., Feklistova E. V. On limit behavior of maximum vertex degree in a conditional configuration graph near critical points. *Discrete Math. Appl.* 2017. Vol. 27, iss. 4. P. 213–222. doi: 10.1515/dma-2017-0023
5. Khvorostyanskaya E. V., Pavlov Yu. L. On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *SB. MATH.* 2016. Vol. 207, no. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/SM8512
6. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with bounded number of edges. *Discrete Math. Appl.* 2018. Vol. 30, iss. 1. P. 77–94. doi: 10.4213/dm1445
7. Bollobás B. A probabilistic proof of an asymptotic formula of the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
8. Cheplyukova I. A., Pavlov Yu. L. Limit distributions of vertex degrees in a conditional configuration graph. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 140–148. doi: 10.17076/mat769
9. Kupavskii A., Ostroumova L., Shabanov D., Tetali P. The distribution of second degrees in the Buckley–Osthus random graph model. *Internet Mathematics.* 2013. Vol. 9, iss. 4. P. 297–335. doi: 10.1080/15427951.2012.727375
10. Leri M., Pavlov Yu. Degree-degree dependencies and clustering in configuration graphs. *18<sup>th</sup> Int. 2018 summer conf. on probability and statistics (ISCPs'18)*. Sofia, Inst. Math. Inform. BAS. 2018. P. 43–47.
11. Newman M. E. J. Random graphs as models of networks. In *Handbook of Graphs and Networks*.

Поступила в редакцию 06.05.2019

S. Bornholdt and H. G. Schuster (eds.), Berlin: Wiley–VCH, 2003.

12. *Ostroumova L., Grechnikov E.* The distribution of second degrees in the

Bollobás–Riordan random graph model. *Moscow J. Combinatorics and Number Theory*. 2012. Vol. 2, no. 2. P. 85–110.

*Received May 06, 2019*

#### **СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:**

**Хворостянская Елена Владимировна**

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.

Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»

ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910

эл. почта: cher@krc.karelia.ru

тел.: (8142) 781218

#### **CONTRIBUTOR:**

**Khvorostyanskaya, Elena**

Institute of Applied Mathematical Research,

Karelian Research Centre,

Russian Academy of Sciences

11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,

Karelia, Russia

e-mail: cher@krc.karelia.ru

tel.: (8142) 781218

УДК 519.115:519.2

## КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ДЕЛЕНИЯ СОВОКУПНОСТИ РАЗЛИЧИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЧАСТИ ЗАДАННЫХ РАЗМЕРОВ БЕЗ УЧЕТА ИХ ПОРЯДКА

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Решаются задачи прямого перечисления исходов схемы, нахождения их числа, задачи их нумерации и моделирования.

Ключевые слова: деление совокупности на части; задача нумерации; моделирование.

**N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF  
THE SCHEME OF DIVISION OF A POPULATION OF  
DISTINGUISHABLE ELEMENTS INTO PARTS OF GIVEN  
SIZES IRRESPECTIVE OF THEIR ORDER**

The problems of a direct enumeration of the outcomes of the scheme, finding their number, problems of their numbering and modeling are solved.

Key words: division of a population into parts; enumeration problem; modeling.

### ВВЕДЕНИЕ

Изучается схема деления совокупности различных элементов на части заданных размеров без учета их порядка. Решаются задачи явного перечисления всех исходов схемы, их нумерации во взаимно-однозначном соответствии с видом и моделирования. В качестве вспомогательной изучается по тем же направлениям частная схема деления совокупности различных элементов на равные части без учета их порядка.

Рассматривается схема, близкая к классической схеме перестановок с повторением, возникающей при делении  $n$  различных элементов на  $k$  различных частей (групп) (в данном ниже порядке перечисления их размеров),

численностями  $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ , что соответствует схеме размещений  $n$  различных частиц по  $k$  различным ячейкам с соответственно заданными уровнями их заполнения:  $n_1, n_2, \dots, n_k$ ,  $(\sum_{i=1}^k n_i = n)$ ,  $n_i \geq 0$ .

Для дальнейшего введем обозначения:  $s$  – число разных размеров заданных частей деления совокупности  $\bar{n}$ ;  $t$  – максимальный размер части деления,  $\mu_i$  – число частей размера  $i$ ;  $i = 1, 2, \dots, t$ .

В рассматриваемой здесь близкой схеме важен лишь состав частей деления совокупности без учета их порядка, что соответствует схеме размещения  $n$  различных частиц по  $k$  различным ячейкам с заданными уровнями их

заполнения, перечисленными в возрастающем порядке:  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , ( $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ),  $n_i \geq 0$ .

Таким образом, рассматриваемая схема соответствует классической схеме перестановок с повторением с укрупненными исходами, полученными путем объединения ее исходов с одинаковыми составами частей деления.

В [1] для схемы перестановок с повторением были решены все задачи, поставленные здесь для данной схемы, для которой, называемой там схемой  $B$  или близкой, были приведены лишь программные алгоритмические пересчеты полученных для схемы перестановок с повторением результатов. В данной работе проводится прямой комбинаторный анализ данной схемы с получением для нее аналитических результатов.

Для краткости и удобства сравнения классической схемы (перестановок с повторением) с данной в дальнейшем будем называть первую схемой  $A$ , а исследуемую – просто схемой (как основной исследуемой) или схемой  $B$  так же, как они были названы в [1].

Анализ схемы будем строить на двухэтапном рассмотрении перечисления ее исходов, в котором сначала будем всеми способами делить совокупность всех ее  $n$  различных элементов на  $s$  частей ( $s$  – число разных данных размеров частей в  $\bar{n}$ ) пусть разных суммарных размеров одинаковых исходных частей деления по схеме  $A$  в порядке роста этих частей, потом каждую из этих  $s$  частей – всеми способами на соответствующие равные части составляющих их исходных размеров деления совокупности по изучаемой схеме  $B$  в порядке роста минимальных элементов в них, т. е. без учета их порядка. Тогда в результате второго этапа получим все исходы изучаемой схемы  $B$ .

Для проведения основных, определенных в названии статьи исследований схемы  $B$  введем дополнительные обозначения всех используемых здесь схем, перечислим их и будем отдельно рассматривать неизученные ранее схемы: схема  $A$ , исследованная в [1], схема  $C_{i_r}$ , частная по отношению к схеме  $B$  с делением совокупности  $i_r \mu_{i_r}$  различных элементов на  $\mu_{i_r}$  равных частей размера  $i_r \in \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ ,  $1 \leq i_r \leq s$ , и схема  $S$  реализации принципа «каждый с каждым», подразумевающего все комбинации исходов одновременных действий (см. [2]) схем  $C_{i_r}$  по всем частям деления схемы  $A$  – первого этапа вышеописанной процедуры прямого перечисления исходов схемы  $B$ .

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 1.1. Комбинаторный анализ схемы $C_{i_r}$

#### 1.1.1. Численность, вид и перечисление исходов схемы $C_{i_r}$

При заданном размере  $i_r$  частей деления совокупности различных  $i_r \mu_{i_r}$  элементов будем записывать исход в фигурных скобках в виде наборов номеров элементов каждой части деления через запятую в круглых скобках в порядке роста минимальных номеров входящих в них элементов.

С учетом этой формы записи исходов прямое их перечисление будем конструировать последовательным перебором номеров элементов в круглых скобках. Тогда номера элементов в первых круглых скобках должны начинаться с 1, а остальные  $(i_r - 1)$  номеров могут быть набраны  $e_{1r} = C_{i_r \mu_{i_r} - 1}^{i_r - 1}$  способами по схеме сочетаний, для которой из [3] известна процедура их перечисления; номера элементов во вторых круглых скобках должны начинаться с минимального номера из номеров, не вошедших в первую скобку элементов, а остальные  $(i_r - 1)$  номеров могут быть набраны  $e_{2r} = C_{(\mu_{i_r} - 1)i_r - 1}^{i_r - 1}$  способами и т. д., аналогично получаем, что номера элементов  $(\mu_{i_r} - 1)$ -й круглой скобки начинаются с минимального номера элемента, не вошедшего в предыдущие круглые скобки, а остальные  $(i_r - 1)$  номеров могут быть набраны  $e_{(\mu_{i_r} - 1)r} = C_{2i_r - 1}^{i_r - 1}$  способами, в последнюю  $\mu_{i_r}$ -ю круглую скобку войдут оставшиеся  $i_r$  номеров элементов.

Из процедуры перечисления исходов схемы  $C_{i_r}$  следует явная формула числа всех ее исходов  $N_{C_{i_r}}$ :

$$N_{C_{i_r}} = \prod_{j=0}^{\mu_{i_r} - 1} C_{i_r(\mu_{i_r} - j) - 1}^{i_r - 1} = \prod_{j=1}^{\mu_{i_r} - 1} e_{jr}. \quad (1)$$

**Замечание 1.** Число исходов в схеме  $C_{i_r}$ , очевидно, можно получить и из числа исходов с теми же параметрами в схеме  $A$ , уменьшив его в  $\mu_{i_r}!$  раз, т. е.

$$N_{C_{i_r}} = (i_r \mu_{i_r})! / (i_r!)^{\mu_{i_r}} \mu_{i_r}!$$

Изобразим на рис. 1 процедуру произведенного перебора всех исходов схемы соответствующим графом пошагового перебора комбинаций составов круглых скобок, добавляя на каждом шаге по одной. Ветвление графа происходит в виде пучков дуг, выходящих из каждого состояния (набора всех предыдущих круглых скобок) в количестве комбинаций с результатами вариантов набора следующей круглой скобки.

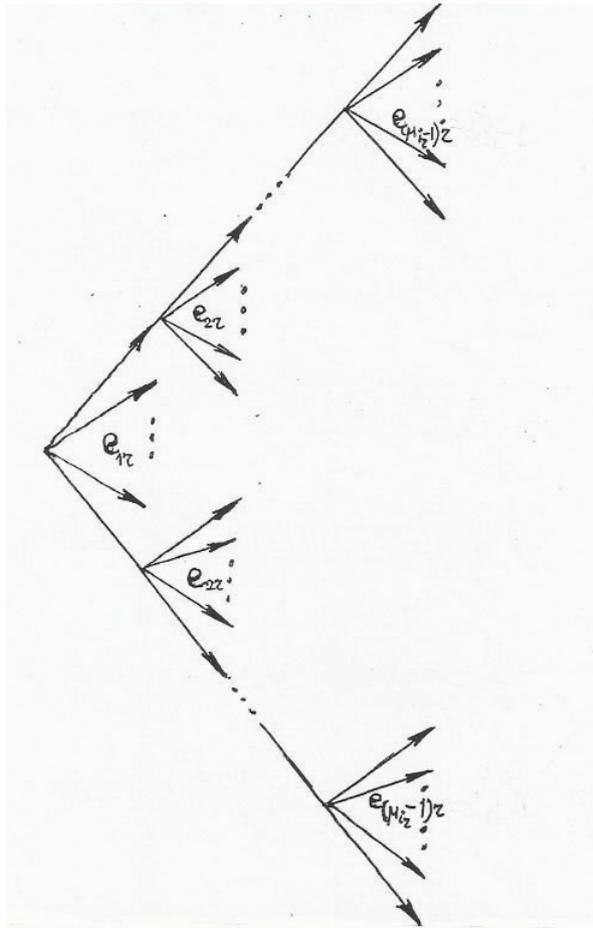


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы  $C_{i_r}$ .  
 Fig. 1. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme  $C_{i_r}$ .

На рис. 1 и в дальнейшем обозначаем через  $m_{i+1} = e_{i_r}$  число вариантов формирования  $i$ -й круглой скобки, т. е. размер пучка из каждого состояния на  $i$ -м шаге,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ , оставив обозначение  $m_1$  для числа исходов предшествующей схеме  $A$ .

### 1.1.2. Задача нумерации в схеме $C_{i_r}$

Схема  $C_{i_r}$  совпадает со схемой последовательных действий, для которой в [2] задача нумерации решена при выборе из совокупности  $\mu_{i_r}$  наборов подряд идущих круглых скобок в исходе схемы  $C_{i_r}$ , содержащих по  $i_r$  элементов численностями вариантов таких наборов, или размеров пучков, т. е.  $\bar{n}^* = (n_1^* = m_2 = e_{1r}, n_2^* = m_3 = e_{2r}, \dots, n_r^* = m_{\mu_{i_r}+1} = 1)$ . (Оставляем обозначение  $m_1$  для числа исходов используемой первой схемы  $A$ ).

Приведем численный пример решения задачи нумерации в схеме  $C_{i_r}$ .

**Пример 1.** Пусть в схеме  $C_{i_r}$   $n = 6$ ;  $\bar{n} = \{2, 2, 2\}$ . Тогда  $k = 3, n_1^* = 5, n_2^* = 3, n_3^* = 1$ ,

и граф перечисления всех состояний по шагам будет иметь вид, представленный на рис. 2:

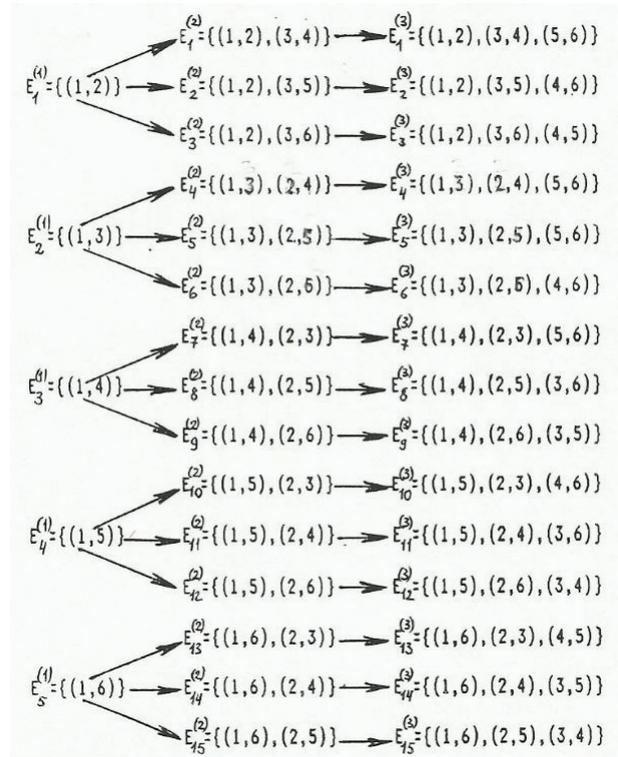


Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы  $C_{i_r}$  в примере 1

Fig. 2. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme  $C_{i_r}$  in example 1

Будем решать задачу нумерации в прямой и обратной постановках по найденным аналитическим формулам [2], сопоставляя результаты с визуально представленными на рис. 2 в графе.

Предварительно для числа исходов схемы  $N_{C_{i_r}}$  проверим на примере формулу (1):  $N_{C_{i_r}} = C_5^1 C_3^1 C_1^1 = 15$ , что и подтверждается по рис. 2.

а) Прямая задача нумерации. Пусть по данному  $N^{(3)} = 11$  требуется найти его вид  $R^{(3)}$ .

По графу (рис. 2) имеем вид  $R^{(C)} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$ . Найдем его с использованием формул (2) и (3) [2], где под  $n_i$  понимались размеры пучков, которые здесь обозначены через  $n_i^*$ , вычисленные выше:

$$N^{(3)} = 11, N^{(2)} = [(11 + 1 - 1)/1] = 11, N^{(1)} = [(11 + 3 - 1)/3] = 4;$$

$$v_3 = 11 \bmod 1 = 0, v_2 = 11 \bmod 3 = 2, v_1 = 4 \bmod 5 = 4;$$

$$j_1 = N^{(1)} = 4, j_2 = 2, j_3 = 1.$$

Далее по схеме сочетаний [3] номеру  $j_1 = 4$  соответствует исход (1, 5); потом из оставших-

ся элементов с номерами 2, 3, 4, 6 номеру  $j_2 = 2$  соответствует исход (2, 4), а оставшиеся элементы с номерами 3, 6 образуют исход (3, 6), из которых получаем вид окончательного исхода схемы  $R^{(3)} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$ , совпадающий с видом исхода по графу (рис. 2).

б) Обратная задача нумерации. Пусть по данному виду исхода  $R^{(3)} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$  требуется найти его номер  $N^{(3)}$ .

По данному  $R^{(3)}$  имеем составы круглых скобок, т. е. исходов  $\bar{n}^*$  соответствующих схем сочетаний  $C_5^1 = 5$ ,  $C_3^1 = 3$ ,  $C_1^1 = 1$ , откуда по [3] известны их номера  $(j_1, j_2, j_3) = (4, 2, 1)$ . Тогда по [2] для номеров исходов на каждом шаге в графе перечисления исходов схемы  $C_{i_r}$  в решении обратной задачи получаем:  $N^1 = 4$ ,  $N^2 = (4 - 1)3 + 2 = 11$ ,  $N^{(3)} = (11 - 1)1 + 1 = 11$ , что совпадает с результатом по графу (рис. 2).

## 1.2. Численности исходов вспомогательных схем $A, C_{i_r}, S$

Численности перечисленных в заголовке схем  $m_1 = N_A, m_{r+1} = N_{C_{i_r}}, N_S$  находятся из их вышеописанного комбинаторного смысла по формулам:

$$N_A = m_1 = \frac{n!}{\prod_{r=1}^s (i_r \mu_{i_r})!}, \quad (2)$$

формула (1) для  $N_{C_{i_r}} = m_{r+1}$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$  получена выше,

$$\begin{aligned} N_S &= \prod_{r=1}^s m_{r+1} = \prod_{r=1}^s N_{C_{i_r}} = \\ &= \prod_{r=1}^s (i_r \mu_{i_r})! / (i_r!)^{\mu_{i_r}} \mu_{i_r}!. \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. Комбинаторный анализ схемы $B$

### 2.1. Вид исходов схемы

Параметры схемы можно задавать в виде перечня заданных размеров частей деления совокупности на части в возрастающем порядке  $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$  или вектором их вторых маркировок  $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ , где  $t$  – максимальный заданный размер части деления совокупности,  $\mu_i$  – число заданных частей деления размера  $i$ ,  $i = \overline{1, t}$ ;  $\sum_{i=1}^t i \mu_i = n$ .

Исходы схемы будем задавать в фигурных скобках последовательностью составов частей в порядке увеличения их размеров, а элементы внутри каждой части будем перечислять по возрастанию номеров входящих в них элементов. Части одинакового размера будем писать

в порядке роста минимальных номеров входящих в них элементов. Составы частей заключаем в круглые скобки. (Тогда указанное упорядочение скобок и номеров элементов в каждой скобке означает соответственно неразличимость частей и несущественность порядка элементов в каждой части и устанавливается для удобства сравнения исходов схемы.) Приведем пример записи параметров и исхода схемы.

**Пример 2.** Пусть  $n = 10$ ,  $\bar{n} = (3, 3, 4)$  или  $\bar{\mu} = (0, 0, 2, 1)$  и элементы имеют номера от 0 до 9. Тогда один из исходов схемы  $B$  будем записывать в виде  $\{(0, 7, 8), (2, 3, 5), (1, 4, 6, 9)\}$ , который совпадает с одним из исходов схемы  $A$  при том же  $\bar{n}$ , т. к. в  $\bar{n}$  размеры частей перечисляются здесь в неубывающем порядке.

Для сравнения исходов данной схемы ( $B$ ) с исходами схемы  $A$  дадим их вид в схеме  $A$ : будем их задавать в фигурных скобках последовательностью составов частей (ячеек) в заданном порядке в форме возрастающих номеров попавших в них элементов (частиц), заключенных в круглые скобки. (Указанное упорядочение номеров элементов в каждой скобке означает несущественность их порядка в каждой части и устанавливается для удобства сравнения исходов схемы.) Приведем пример записи исхода схемы  $A$ .

**Пример 3.** Пусть  $n = 10$ ,  $\bar{n} = (4, 3, 3)$  и элементы имеют номера от 0 до 9. Тогда один из требуемых исходов будем записывать в виде  $\{(1, 4, 6, 9), (2, 3, 5)(0, 7, 8)\}$ , которому соответствует не совпадающий с ним по записи исход схемы  $B$  примера 2, т. к. в схеме  $A$  в  $\bar{n}$  размеры частей перечислены здесь в невозрастающем порядке.

### 2.2. Число исходов схемы

Числа исходов  $N_A$  схемы  $A$  и схемы  $S$  соответственно представлены формулами (2) и (3), откуда в исследуемой схеме  $B$  (как в схеме двух последовательных действий из [2])  $N_B = N_A N_S$  или в явном виде

$$N_B = \frac{n!}{\prod_{r=1}^s (i_r \mu_{i_r})!} \prod_{r=1}^s \prod_{j=0}^{\mu_{i_r}-1} C_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}^{i_r-1}, \quad (4)$$

откуда с учетом формулы замечания 1 для  $N_{C_{i_r}}$  и (3) получаем более простую формулу для  $N_B$ :

$$N_B = \frac{n!}{\prod_{r=1}^s (i_r!)^{\mu_{i_r}} \mu_{i_r}!}.$$

### 2.3. Перечисление исходов схемы

В [1] дан алгоритм перечисления исходов схемы, использующий перечень исходов схемы

А путем их перезаписи в форме исходов схемы  $B$  с отбраковкой повторяющихся. В результате получается трудноформализуемый и поэтому неудобный для дальнейшего анализа порядок перечисления исходов схемы  $B$ .

Предлагается процедура прямого перечисления исходов схемы, задающая закономерности упорядочения ее исходов. Она состоит в перечислении исходов двух последовательных действий схем  $A$  и  $S$ , состоящем из одновременного действия  $s$  схем типа  $C_{i_r}$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$ . Таким образом, по [2] перечисление исходов схемы  $B$  совпадает с изученным в [2] в схеме  $(s + 1)$  последовательных действий, первым из которых является действие схемы  $A$ , а остальные  $s$  – относятся к последовательным действиям объединенных с поединичным добавлением действия схем  $C_{i_r}$ , начиная с  $r = 1$  и до  $r = s$ , где вектор численностей этих действий  $\bar{M} = (M_1, \dots, M_{s+1})$  при  $M_1 = m_1, M_2 = m_2, M_3 = m_2 m_3, \dots, M_{s+1} = m_2 m_3 \dots m_{s+1}$ .

Для сопоставления значений исходных параметров схемы  $B$  с введенными по процедуре их прямого перечисления приведем соотношение между ними

$$\sum_{r=1}^s \mu_{i_r} = k; \quad \sum_{r=1}^s i_r \mu_{i_r} = n; \quad \prod_{r=1}^s (i_r!)^{\mu_{i_r}} = \prod_{i=1}^k n_i! \quad (5)$$

#### 2.4. Задача нумерации

Как объяснено в п. 2.3, схема  $B$  представляет собой схему  $(s + 1)$  последовательных действий с вычисленными в п. 2.2 числами исходов  $M_1, M_2, \dots, M_{s+1}$ . Задача нумерации для этого случая решена в [2]. Для выписывания решения задачи нумерации в нашем случае остается подставить значения чисел  $M_1, M_2, \dots, M_{s+1}$  в приведенные в [2] соответствующие формулы с учетом (5).

**Замечание 2.** По решенным задачам нумерации для составляющих схему и определяющих ее исход (по замечанию 1 из [2]) последних (со 2-го до  $(s + 1)$ -го) одновременных действий, по их номерам внутри каждого действия виды исходов всех последовательных действий будем считать известными как полученные объединением результатов входящих в них одновременных действий (в круглых скобках) в порядке их получения.

#### Прямая задача нумерации

Пусть заданы параметры схемы  $B$  вектором  $\bar{n}$  и номер  $N^{(s+1)}$  ее исхода. Требуется определить его вид  $R^{(s+1)}$ .

Сформулируем задачу в терминах эквивалентной решенной задачи в схеме последова-

тельных действий ([2]) с учетом (5): производится  $(s + 1)$  последовательных действий с известными числами всех возможных исходов каждого действия  $M_1, M_2, \dots, M_{s+1}$ . По данному номеру исхода схемы  $N^{(s+1)}$  найти его вид  $R^{(s+1)}$ . Однако проще после действия по схеме  $A$  (по замечанию 4 [2]) рассматривать решение задачи нумерации как объединенный результат ОД в терминах их параметров ( $m_i$  вместо  $M_i$ ), т. к. параметры пучковой структуры графов перечисления исходов схем ОД и ПД совпадают (см. [2]).

Для этого сначала будем находить номера исходов  $N^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , приводящих к конечному исходу с данным номером, по шагам по формулам:

$$N^{(i-1)} = \left\lfloor \frac{N^{(i)} + m_i - 1}{m_i} \right\rfloor, \quad (6)$$

где  $[Z]$  – целая часть числа  $Z$ , и  $i = s + 1, s, \dots, 1$ .

Далее будем определять номера в пучках на каждом шаге по найденным в (6) номерам исходов в шагах процесса с обозначением:  $N^{(i)} \bmod m_i = v_i$  из соотношения при любом целом  $T \geq 0$

$$j_i = v_i + C_{T-v_i}^T m_i. \quad (7)$$

Отсюда в соответствии с замечанием 2 по результатам решенной прямой задачи нумерации для результатов формулы (7) получаем искомым вид исхода  $R^{(s+1)}$  объединением известных исходов схем  $\{C_{i_r}\}$  по принятой в п.1 форме.

#### Обратная задача нумерации

Пусть дан вид исхода  $R^{(s+1)}$ . Нужно найти его номер  $N^{(s+1)}$ .

Снова, как и при решении прямой задачи, сформулируем обратную задачу в терминах эквивалентной решенной в схеме последовательных действий ([2]) с учетом (5): производится  $(s + 1)$  последовательных действий с известными числами всех возможных исходов каждого действия  $M_1, M_2, \dots, M_{s+1}$ . По данному виду исхода схемы  $R^{(s+1)}$  найти его номер  $N^{(s+1)}$ .

Для решения задачи применяем соответствующую формулу вычисления искомого номера  $N^{(s+1)}$  из [2], исходя из структуры графа перечисления исходов схемы (см. рис. 1), где  $j_i$  – (как и раньше) номер исхода в  $j$ -м пучке на  $i$ -м шаге или номер  $j$ -го исхода в  $i$ -м действии находится из заданного вида  $R^{(s+1)}$  делением объединенного заданного исхода на  $s$  введенных выше частей в схеме  $A$  с использованием

результата решения для каждой из них обратной задачи нумерации, т. е. приведением данного исхода схемы к траекторному виду (см. [1]). Тогда при  $i = 1, 2, \dots, s + 1$

$$N^{(s+1)} = \sum_{l=1}^s (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^{s+1} m_i + j_{s+1}. \quad (8)$$

**Пример 4.** Решим задачу нумерации в схеме  $B$  при  $n = 5$ ,  $\bar{n} = (1, 2, 2)$ , откуда вычисляем значения  $s = 2$ ,  $m_1 = 5!/1!4! = 5$ ,  $m_2 = C_3^2 = 3$ ,  $m_3 = C_1^1 = 1$ , и предварительно строим граф прямого перечисления всех ее исходов для проверки результатов решения задачи нумерации по приведенным формулам, а это значит (по замечанию 2), что приведенные на графе виды исходов всех последовательных действий будем считать известными.

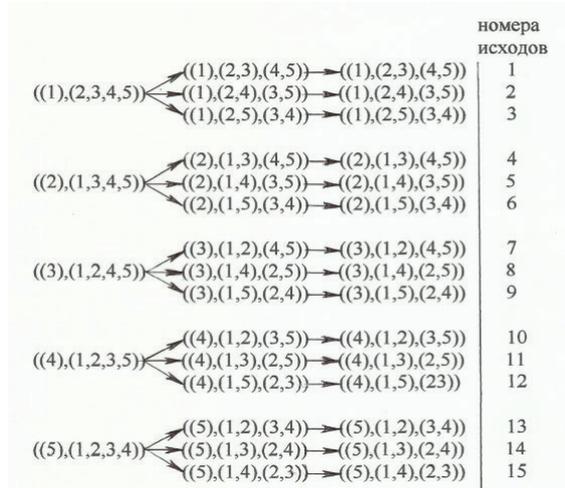


Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы  $B$  примера 4

Fig. 3. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme  $B$  in example 4.

### Прямая задача нумерации

Дан номер исхода схемы  $N^{(3)} = 11$ . Найти вид исхода  $R^{(3)}$  по (6), (7).

Решение.  $N^{(2)} = [(11 + 3 - 1)/3] = 4$ ,  $N^{(1)} = [(4 + 1 - 1)/1] = 4$ ;  $v_3 = 11 \bmod 3 = 2$ ,  $v_2 = 4 \bmod 1 = 0$ ,  $v_1 = 4 \bmod 5 = 4$ ;  $j_3 = 2$ ,  $j_2 = 1$ ,  $j_1 = 4$ , откуда (по замечанию 2) им соответствуют в исходе  $R^{(3)}$  первая круглая скобка – (4), вторая – (1,3), третья – (2,5). В объединении это дает искомым исход  $R^{(3)} = \{(4), (1, 3), (2, 5)\}$ , совпадающий с результатом по графу на рис. 3.

### Обратная задача нумерации

Дан вид исхода схемы  $R^{(3)} = \{(4), (1, 3), (2, 5)\}$ . Найти номер исхода  $N^{(3)}$  по (8).

По результатам решения задачи нумерации для исходов составляющих схем, а именно исхода (4) для схемы  $A$  и исходов (13) и (25) для схем  $C_1$  и  $C_2$ , получаем их соответствующие номера, которые в схеме  $B$  являются номерами пучков в графе перечисления исходов схемы  $B$ , т. е.  $j_1 = 4$ ,  $j_2 = 1$ ,  $j_3 = 2$ . Тогда по (8) находим  $N^{(3)} = (4 - 1) \cdot 1 \cdot 3 + (1 - 1) \cdot 3 + 2 = 11$ , что совпадает с результатом по графу на рис. 3.

### 2.5 Вероятностное распределение исходов схемы

По третьей из формул (5) выражение для  $N_B$  представляется в виде

$$N_B = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i! \prod_{r=1}^s (\mu_{i_r})!},$$

из которого следует, что каждый исход схемы  $B$  соответствует  $\prod_{r=1}^s (\mu_{i_r})!$  равновероятным исходам схемы  $A$ , откуда исходы схемы  $B$  тоже равновероятны с вероятностью каждого  $1/N_B$ .

### 2.6. Моделирование исходов схемы

**Первый способ** Шаги моделирования:

- 1) моделируем исход схемы  $A$  по [1];
- 2) записываем результат п.1) в установленной форме для исходов схемы  $B$ .

**Второй способ (быстрое моделирование)** Шаги моделирования:

- 1) делим отрезок  $[0, 1]$  на  $N_B$  частей;
- 2) генерируем одно случайное число;
- 3) находим номер подотрезка попадания случайного числа и считаем его номером исхода схемы  $N^{(k)}$  в перечне всех исходов;
- 4) по результату решения задачи нумерации находим по номеру  $N^{(k)}$  вид исхода  $R^{(k)}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 2. С. 19–22.
2. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.
3. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

Поступила в редакцию 20.01.2019

## REFERENCES

1. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok s povtoreniem i blizkoi skhemy [Combinatorial analysis of the permutation scheme with repetition and the close scheme]. *Promyshlennye ASU i kontroliery* [Industrial ACS and controllers]. 2017. No. 2. P. 19–22.
2. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyy analiz skhemy odnovremennykh i posledovatel'nykh

deiystvii [Combinatorial analysis of the scheme of simultaneous and sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontroliery* [Industrial ACS and controllers]. 2016. No. 2. P. 35–41.

3. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyy analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontroliery* [Industrial ACS and controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

*Received January 20, 2019*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**  
доцент Департамента прикладной  
математики, к. ф.-м. н.  
Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Московский институт  
электроники и математики  
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458  
эл. почта: nat1943@mail.ru  
тел.: +79037411345

## CONTRIBUTOR:

**Enatskaya, Natalia**  
National Research University  
Higher School of Economics,  
Moscow Institute of Electronics and Mathematics  
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia  
e-mail: nat1943@mail.ru  
tel.: +79037411345

УДК 519.115:519.2

## КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ НЕПУСТЫХ ЯЧЕЕК

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Изучается схема размещения  $r$  различных частиц по  $n$  неразличимым ячейкам с  $k$  непустыми ячейками по направлениям перечислительной комбинаторики. Это – перечисление исходов схемы с определенной дисциплиной их нумерации, нахождение их числа, установление взаимно-однозначного соответствия видов исходов с их номерами, называемое задачей нумерации в прямой и обратной постановках, и моделирование исходов схемы.

Ключевые слова: минимальные номера частиц в ячейках; порционные добавления.

### N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS IN THE SCHEME OF ALLOCATION OF DISTINGUISHABLE PARTICLES INTO INDISTINGUISHABLE CELLS WITH A GIVEN NUMBER OF NON-EMPTY CELLS

The scheme of allocating  $r$  distinguishable particles into  $n$  indistinguishable cells with  $k$  non-empty cells is studied along the directions of enumerative combinatorics. They are the direct enumeration of the outcomes of the scheme with a particular discipline of their numbering, finding their numbers, establishing a one-to-one correspondence of the types of outcomes with their numbers, also known as numbering problem in direct and inverse statements, and modeling of outcomes of the scheme.

Key words: minimum numbers of particles on cells; portion additions.

### ВВЕДЕНИЕ

Представляемую схему можно интерпретировать как размещение  $r$  различных частиц по  $k$  неразличимым ячейкам без пустых ячеек (аналогичная схема без ограничений изучалась в [3]) или как разбиение множества  $r$  различных элементов на  $k \leq n$  подмножеств, соответствующих  $k$  непустым ячейкам исходной схемы, где  $k = 1, \min(n, r)$ . Числа исходов нашей схемы при каждом  $k$  есть числа Стирлин-

га второго рода  $S_2(k, n)$ . Производящая функция числа таких разбиений приведена Эйлером, а пентагональная теорема Эйлера позволяет вычислять числа разбиений при помощи деления формальных степенных рядов. Харди и Рамануджан получили асимптотическую формулу для функции разбиений множества.

В фундаментальном труде Дж. Эндрюса «Теория разбиений» (см. [9]) объектом исследования является разбиение натурального

числа, т. е. его представление в виде суммы неубывающих натуральных чисел, множество разбиений которого взаимно однозначно соответствует множеству разбиений множества неразличимых элементов, что не совпадает с рассматриваемой в нашей статье схемой.

Здесь же кратко упоминается задача о разбиении множества с различимыми элементами. При обсуждении вычислительных аспектов нахождения разбиений идеи приведенных алгоритмов состоят в применении производящих функций, ускоряющих получение результатов об исходах, установлении лексикографического порядка нумерации исходов перечисления, их представлении в виде различных диаграмм и вычисления таблиц для функций разбиения, использования техники Мак-Магона с доработкой Кнута, устанавливающей взаимно-однозначное соответствие перечисления разбиений с некоторыми топологическими последовательностями, нахождение которых легче, чем всех исходов схемы.

В книге Т. Mansour «Combinatorics of Set Partitions» [1] представлена реперспектива методов разбиения множеств, в том числе метод производящих функций, метод ядра, метод декомпозиции, метод генерации дерева, вычисление таблиц функций разбиения.

В статье М. Орлова [2] обсуждается алгоритмическая итерационная процедура перечисления исходов в схеме разбиений в предложенной автором форме и порядке их записи, а под итерациями понимаются шаги алгоритма пересчета от данного итогового исхода схемы к соседним: предыдущему и последующему.

На основании просмотренной литературы по близкой тематике замечаем, что предлагаемый алгоритмический подход не совпадает с ранее применяемыми в подобной ситуации. Его новизна в доасимптотической области изменения параметров схемы состоит в новом подходе к решению задач перечислительной комбинаторики, на основе которого введены новые направления исследований, дающих новые возможности использования результатов анализа комбинаторных схем. Суть этого подхода прежде всего состоит в том, что он опирается на процедуру прямого перечисления нумерованных исходов итерационного случайного процесса поединичного последовательного добавления элементов в схему до заданного числа.

Новизна работы – в выборе базового перечислительного подхода к анализу схемы, направлений, методов, результатов и возможностей их использования для дальнейших исследований:

а) компактного хранения информации об исходах схемы при аналитическом решении прямой задачи нумерации (нахождении вида исхода по его номеру);

б) быстрого моделирования исходов схемы путем разыгрывания его номера по аналитическому результату прямой задачи нумерации;

в) введения и учета дополнительных ограничений в схеме;

г) получения вероятностного распределения исходов схемы для решения вероятностных задач.

## 1. ПРЯМОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ И ЧИСЛО ИСХОДОВ СХЕМЫ $A$

Схемой  $A$  будем называть исследуемую схему.

В соответствии со схемой разные виды ее исходов определяются наборами их составов без учета порядка этих наборов. Поэтому для удобства сравнения исходов договоримся составы непустых перечислять в порядке роста минимальных номеров частиц в них, а пустые ставить в конец. Наборы номеров частиц в ячейках будем перечислять в порядке их возрастания.

Задача перечисления исходов схемы сводится к перечислению всех способов деления  $r$  различных элементов (частиц) на  $k$  непустых частей (ячеек) без учета их порядка.

Бесповторность деления всех элементов на  $k$  частей достигается введением условия фиксации всех возможных наборов  $\{T_j\}$  минимальных номеров элементов в них. (Для краткости будем называть частицы с минимальными номерами в  $k$  частях деления  $n$  элементов минимальными элементами). При установленном порядке перечисления элемент 1 всегда будет минимальным в первой части. Поэтому число фиксаций минимальных элементов в других частях деления по схеме сочетаний есть  $C_{r-1}^{k-1}$ . Остальные элементы будем добавлять в  $k$  частей так, чтобы сохранить в них минимальность фиксированных ранее номеров, что достигается путем их определенного порционного добавления в поединично растущие группы частей, начиная с первой. Объясним это на примере  $j$ -й фиксации минимальных элементов в частях ( $j = 1, \overline{C_r^k}$ ) в виде  $M_j = (r_1, \dots, r_k)$ , где  $r_1 = 1$ ,  $j = 1, \overline{C_r^k}$ . Далее будем добавлять в части всеми способами остальные  $(r - k)$  элементов с заданными минимальными. Составы частей будем разделять запятыми и перечислять номера входящих в них элементов в возрастающем порядке (а весь исход схемы будем заключать в круглые скобки). Тогда в первой части кроме 1 обязательно

есть номера элементов, меньших  $r_2$ , число таких элементов  $w_1 = (r_2 - r_1 - 1) = (r_2 - 2)$ ; в первых двух частях кроме выбранных элементов с номерами 1 и  $r_2$  обязательно должны быть все элементы с номерами, меньшими  $r_3$ , число таких элементов  $w_2 = (r_3 - r_2 - 1)$ ; в первых трех частях обязательно должны быть все элементы с номерами, меньшими  $r_4$ , число таких элементов  $w_3 = (r_4 - r_3 - 1)$  и т. д. до  $(k - 1)$ -й части включительно; в  $k$  частях обязательно должны быть все элементы с номерами, меньшими  $r$ , число таких элементов  $w_k = (r - r_k)$ . Таким образом, т. к.  $k$  минимальных элементов было размещено в частях предварительно, будем порционно в указанных выше их количествах размещать суммарное число  $(r - k)$  элементов соответственно по одной, двум и т. д. до  $k$  указанным выше частям. Проверяем, что сумма порционных добавлений частей совпадает с  $(r - k)$ :

$$r_2 - 1 - 1 + r_2 - r_1 - 1 + r_3 - r_2 - 1 + \dots + r_k - r_{k-1} - 1 + r - r_k = r - k. \quad (1)$$

Будем представлять все порционные добавления в виде  $k$ -компонентных векторов соответствующих добавлений элементов в  $k$  частей, перечисление всех вариантов которых производится по схеме размещений с повторением, а итоговые векторы добавлений во все части к фиксированным минимальными элементами в них получаются покомпонентным объединением векторов порционных добавлений в части. Вектор размеров указанных порционных добавлений  $\vec{W}_j = (w_1, \dots, w_k)$  при каждой  $j$ -й фиксации минимальных элементов в частях получается покомпонентным сложением количеств всех порционных добавлений в них.

Число  $N_j$  исходов формирования  $k$  частей при  $j$ -й фиксации минимальных элементов в них вычисляется из процедуры их перечисления по формуле

$$N_j = \prod_{i=1}^k i^{w_i}. \quad (1)$$

В исходе схемы  $A_j^*$  – формирования  $k$  непустых частей при фиксированном наборе  $M_j$  минимальных номеров элементов в частях к каждому набору вектора добавлений в части добавляются соответствующие минимальные элементы из  $M_j$ .

Тогда все  $N$  исходов схемы  $A$  будут получаться путем объединения всех исходов всех  $C_{r-1}^{k-1}$  схем  $A_j^*$  с добавлением в конце  $(n - k)$  нулей, соответствующих пустым ячейкам, а чис-

ло  $N$  исходов схемы  $A$  будем получать по формуле

$$N = \sum_{\{(C)\}} N_j, \quad (2)$$

где суммирование производится по перечислению всех исходов схемы сочетаний фиксаций минимальных элементов в  $k$  частях деления  $r$  элементов (номеров частиц).

Для перечисления всех исходов схемы  $A_j^*$  методом графов будем строить процесс последовательного поединичного равновероятного добавления элементов с растущими номерами в указанные выше группы частей с начальным заполнением по одному минимальному в них. Исходы заполнения частей на каждом шаге будем нумеровать в порядке добавления элементов в части с растущими минимальными элементами (номерами).

Поясним процесс перечисления и вычисления числа исходов схемы  $A_j^*$  на примере.

**Пример 1.** Пусть  $r = 8$ ,  $k = 4$ ,  $M_j = (1, 3, 6, 8)$ .

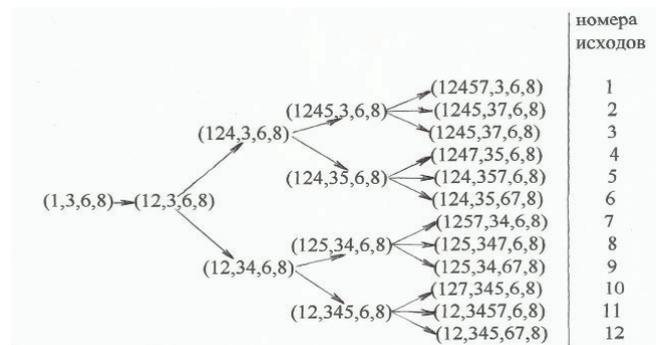


Рис. 1. Граф перечисления фрагмента исходов схемы примера 1

Fig. 1. The graph of enumeration of a fragment of the outcomes of the scheme in example 1

Визуально имеем  $N_j = 12$  исходов, что совпадает с результатом по (1):  $N_j = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^1 = 12$ .

Приведем пример перечисления всех  $N$  исходов схемы  $A$  методом графов со сравнением их числа по формуле (2) с использованием формулы (1).

**Пример 2.** Пусть  $n = 2$ ,  $r = 4$ ,  $k = 2$ . Перечислим все пары минимальных элементов в частях по схеме сочетаний в количестве  $C_3^1 = 3$  – это:  $T_1 = (1, 2)$ ,  $T_2 = (1, 3)$ ,  $T_3 = (1, 4)$ , откуда  $W_1 = (0, 2)$ ,  $W_2 = (1, 1)$ ,  $W_3 = (2, 0)$ . Для каждой пары построим граф поединичных допустимых порционных добавлений остальных элементов, как в примере 1.

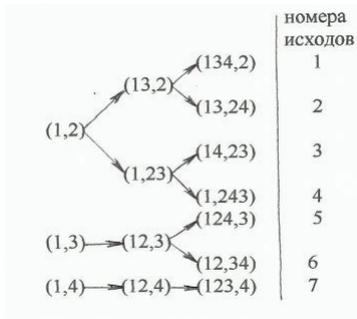


Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы примера 2

Fig. 2. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme in example 2

Визуально имеем  $N = 7$  исходов схемы  $A$ , а по формулам (1) и (2)  $N = 1^0 2^2 + 1^1 2^1 + 1^2 2^0 = 7$ , т. е. результаты совпадают.

## 2. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ (ЗН)

### 2.1. Пучковая структура графа перечисления исходов схемы

Изучаемая схема  $A$  представляет собой обобщенную схему последовательных действий (ПД) схемы сочетаний (фиксации минимальных элементов – минимальных номеров частиц в  $k$  непустых ячейках) и схем размещений с повторением (определенных выше порционных добавлений в  $k$  ячеек с фиксированными минимальными элементами), зависящих от исходов схемы сочетаний. ЗН для обобщенной схемы ПД решена в [4] при известных результатах всех составляющих ее схем. ЗН для схемы сочетаний решена в [5], а для ее решения в объединенной схеме, состоящей из описанных ранее схем размещений с повторением, зависящих от исходов схемы сочетаний фиксации минимальных элементов в заданном числе  $k$  непустых ячеек, требуется информация о пучковой структуре графа перечисления исходов, т. е. о последовательностях размеров пучков в порядке перечисления исходов схемы на каждом шаге. Будем собирать ее по фрагментам пучковой структуры графа перечисления исходов схемы  $A$  при каждом  $j$ -м наборе минимальных элементов в  $k$  ячейках с известным вектором  $W_j = (w_1, \dots, w_k)$  из логики перечисления и порядка нумерации ее исходов по следующему ПРАВИЛУ – (\*): **первая ненулевая компонента  $w_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  вектора  $W_j$  означает группу последовательных пучков, начинающихся с пучка размера  $i$  на  $w_i$  шагов того же размера  $i$ .** Теперь, объединяя такую информацию по всем фрагментам нашей схемы по шагам перечисления, получаем полную картину пошаговой пучковой

структуры графа перечисления исходов схемы.

Приведем поясняющие примеры определения пучковой структуры графа перечисления исходов схемы.

**Пример 3.** Пусть  $r = 5$ ,  $n = k = 2$ . Очевидно,  $T_1 = (1, 2)$ ;  $T_2 = (1, 3)$ ;  $T_3 = (1, 4)$ ;  $T_4 = (1, 5)$ . Отсюда следует, что  $W_1 = (0, 3)$ ;  $W_2 = (1, 2)$ ;  $W_3 = (2, 1)$ ;  $W_4 = (3, 0)$ . Тогда по (\*) последовательно пофрагментно получаем следующие пошаговые пучковые структуры  $((2)(2, 2)(2, 2, 2))$ ;  $((1)(2)(2, 2))$ ;  $((1)(11)(2))$ ;  $((1)(1)(1))$ . Собирая их теперь по шагам, имеем следующие пошаговые пучковые структуры графа перечисления всех исходов схемы  $A$ : 1-й шаг –  $(2, 1, 1, 1)$ ; 2-й шаг –  $(2, 2, 2, 1, 1)$ ; 3-й шаг –  $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$ . По пучковой структуре последнего шага, суммируя размеры пучков, получаем число исходов схемы  $N = 7 \cdot 2 + 1 = 15$ . Все полученные здесь результаты можно проверить визуально по графу перечисления исходов схемы.

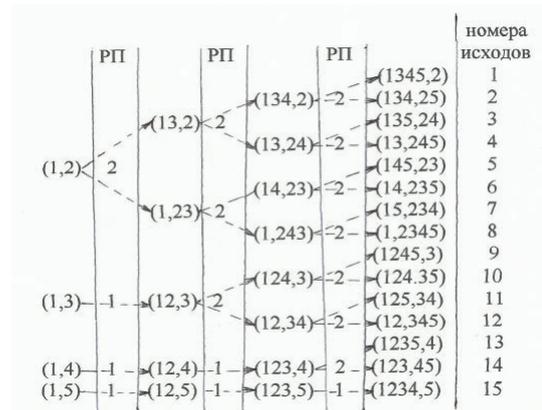


Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы и размеров пучков (РП) примера 3

Fig. 3. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme and sizes of bunches (SB) in example 3

(Под шагом понимается добавление одного элемента – частицы в схему.)

**Пример 4.** Пусть  $r = 5$ ,  $n = k = 3$ . Очевидно,  $T_1 = (1, 2, 3)$ ;  $T_2 = (1, 2, 4)$ ;  $T_3 = (1, 2, 5)$ ;  $T_4 = (1, 3, 4)$ ;  $T_5 = (1, 3, 5)$ ;  $T_6 = (1, 4, 5)$ . Отсюда следует, что  $W_1 = (0, 0, 2)$ ;  $W_2 = (0, 1, 1)$ ;  $W_3 = (0, 2, 0)$ ;  $W_4 = (1, 0, 1)$ ;  $W_5 = (1, 1, 0)$ ;  $W_6 = (2, 0, 0)$ . Тогда по (\*) последовательно пофрагментно получаем следующие пошаговые пучковые структуры  $((3)(333))$ ;  $((2)(33))$ ;  $((2)(22))$ ;  $((1)(3))$ ;  $((1)(2))$ ;  $((1)(1))$ . Собирая их теперь по шагам, имеем следующие пошаговые пучковые струк-

туры графа перечисления всех исходов схемы А: 1-й шаг – (3, 2, 2, 1, 1); 2-й шаг – (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 1). По пучковой структуре последнего шага, суммируя размеры пучков, получаем число исходов схемы  $N = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 25$ . Все полученные здесь результаты можно проверить визуально по графу перечисления исходов схемы.

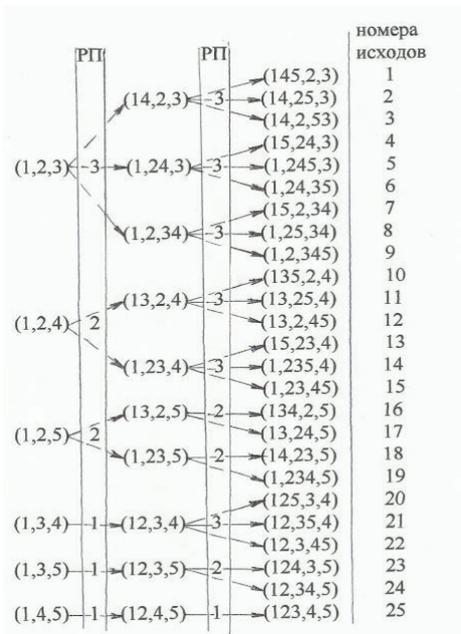


Рис. 4. Граф перечисления исходов схемы и размеров пучков (РП) примера 3  
 Fig. 4. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme and sizes of bunches (SB) in example 3

**Замечание 1.** При  $k < n$  и  $k = n$  числа исходов нашей схемы совпадают, т. к. ячейки неразличимы.

## 2.2. Решение ЗН

Из решенной в п. 2.1 задачи нахождения пошаговой пучковой структуры графа перечисления исходов схемы при каждом  $j$ -м наборе минимальных номеров частиц в  $k$  непустых ячейках  $M_j$  будем считать ее известной на каждом шаге.

Введем еще некоторые необходимые обозначения:  $N_*$  – номер исхода;  $R_*$  – вид исхода схемы;  $T = (N_*^{(0)}, N_*^{(1)}, \dots, N_*^{(k)})$  – траектория от начала – 0-го шага – исхода схемы сочетаний, до  $(n - k)$ -го – последнего добавления частицы в непустые ячейки, где  $N_*^{(i)}$  – номер исхода  $i$ -го шага от начала до данного состояния,  $i = \overline{0, (n - k)}$ ;  $N^{(i)}$  – число исходов  $i$ -го шага схемы, тогда  $N = N^{(n-k)}$  – число исходов схемы;  $Q^{(i)} = (q_1^{(i)}, \dots, q_{N^{(i-1)}}^{(i)})$  – пучковая структура графа перечисления исходов

схемы на  $i$ -м шаге;  $\bar{n} = (n^{(0)}, n^{(1)}, \dots, n^{(k)})$  – номера исходов в пучках, через которые проходит траектория в графе перечисления ее исходов от начала до данного исхода схемы;  $(n - k)$  номеров порционно добавляемых частиц в непустые ячейки назовем ДОБАВЛЯЕМЫМИ  $C_j = c_1, \dots, c_{n-k}$ , перечисленными в порядке возрастания.

Для решения ЗН будет использована очевидная из логики перечисления и порядка нумерации исходов схемы ЗАКОНОМЕРНОСТЬ – (\*\*\*) связи номеров в пучках графа перечисления и ее видов: на  $i$ -м шаге перечисления исходов добавляется  $i$ -я в порядке роста из добавляемых из  $(n - k)$  в непустые ячейки номеров частиц в  $n_i$ -ю ячейку пучка.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы  $N_*$ , требуется найти его вид  $R_*$ .

### Шаги решения:

1) находим  $T = (N_*^{(0)}, N_*^{(1)}, \dots, N_*^{(k)})$  при  $i = \overline{0, k}$ , где  $i = 0$  – номер шага фиксации минимальных элементов в  $k$  частях, по формулам

$$N_*^{(i-1)} = \delta + \max t : \left( \sum_{l=1}^t q_l^{(i)} = A_t \leq N_*^{(i)} \right), \quad (3)$$

где  $\delta = 0$  при  $A_t = N_*^{(i)}$ , и  $\delta = 1$  при  $A_t < N_*^{(i)}$ ;  
 2) находим  $\bar{n} = (n^{(0)}, n^{(1)}, \dots, n^{(k)})$  по формулам

$$n^{(i)} = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{i-1}-1} q_l^{(i)}; \quad (4)$$

3) из значения  $n^{(0)}$  по результату решенной в схеме сочетаний [5] прямой ЗН находим  $M_j$  – фиксированный набор минимальных элементов в  $k$  непустых ячейках;

4) по  $M_j$  из 3) находим  $C_j$ ;

5) по (\*\*\*) последовательно пошагово добавляем элементы (номера частиц) в порядке их перечисления в  $C_j$ ; на  $k$ -м шаге с добавлением в конце  $(n - k)$  нулей получаем искомый вид  $R_*$  исхода схемы с данным номером  $N_*$ .

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R_*$ , требуется найти его номер  $N_*$ .

### Шаги решения:

1) по данному  $R_*$  находим  $M_j = (r_1, \dots, r_k)$ ;

2) по виду  $M_j$  из 1) и [5] по решенной прямой ЗН в схеме сочетаний получаем, что  $j = n^{(0)} = 2$ ;

3) по  $M_j$  находим  $C_j$ ;

4) по (\*\*\*) , начиная с первого шага поединичного порционного добавления элементов из

$C_j$  в порядке их роста, фиксируя их номера в пучках, получаем  $\bar{n} = (n^{(0)}, n^{(1)}, \dots, n^{(k)})$ ;

5) по  $\bar{n}$  из 4) вычисляем номера исходов схемы в  $T$  по формулам при  $i = \overline{1, k}$  в порядке поединичного роста  $i$

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} q_l^{(i)} + n^{(i)}, \quad (5)$$

тогда при  $i = k$  получаем искомым номер исхода схемы данного вида  $R_*$ .

**Замечание 2.** При очевидном по логике нумерации последнем исходе  $R_* = (r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_n) = (\{\omega\}, r - k + 2, r - k + 3, \dots, r, 0, \dots, 0)$ , где  $\{\omega\} = r_1 = \{1, 2, \dots, r - k + 1\}$ , число  $N$  исходов нашей схемы определяется из результата решения обратной задачи нумерации по формуле (5) при  $i = r - k$ .

Приведем числовой пример решения прямой и обратной ЗН.

**Пример 5.** Пусть, как в примере 4,  $r = 5$ ,  $n = k = 3$ . Для наглядности и контроля результатов решения прямой и обратной ЗН по данным алгоритмам обращаемся к графу перечисления всех исходов схемы на рис. 4. Из примера 4 и графа получены пошаговые пучковые структуры графа:  $Q^{(1)} = (3, 2, 2, 1, 1)$ ;  $Q^{(2)} = (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 1)$ , которые используются в алгоритмах решения ЗН.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы  $N_* = 14$ . Найти его вид  $R_*$ .

#### Шаги решения:

1) по (3) и известных  $Q^{(1)}$  и  $Q^{(2)}$  получаем из  $N_*^{(2)} = N_* = 14$ :  $N_*^{(1)} = 5$ , т. к. из  $Q^{(2)}$   $3 + 3 + 3 + 3 = 12 < 14$  следует, что  $t = 4$ ,  $\delta = 1$ , а  $N_*^{(0)} = 2$ , т. к. из  $Q^{(1)}$   $3 + 2 = 5 = 5$  следует, что  $t = 2$ , а  $\delta = 0$ , откуда  $T = (2, 5, 14)$ ;

2) по результату 1), (4) и известных  $Q^{(1)}$  и  $Q^{(2)}$  получаем:  $n^{(2)} = 14 - 12 = 2$ ,  $n^{(1)} = 5 - 3 = 2$ ,  $n^{(0)} = 2 - 0 = 2$ ;

3) по  $n^{(0)} = 2$  из [5] получаем  $M_2 = (1, 2, 4)$ ;

4) по  $M_2$  получаем  $C_2 = (3, 5)$ ;

5) из  $C_2$ , добавляя их пошагово по (\*\*\*) в ячейки, получаем  $(1, 23, 4) \rightarrow (1, 235, 4)$ , где последнее добавление приводит к искомому виду исхода схемы  $R_*$ , совпадающего с визуальным из графа на рис. 4.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R_* = (1, 235, 4)$ . Найти его номер  $R_*$ .

#### Шаги решения:

1) из данного вида  $R_*$  находим  $M_j = (1, 2, 4)$ ;

2) по  $M_j = (1, 2, 4)$  из [5] получаем  $j = n^{(0)} = 2$ ;

3) по  $M_2$  получаем  $C_2 = (3, 5)$ ;

4) находя места номеров из  $C_2$  из 3) в порядке их перечисления в данном виде исхода  $R_*$ , по (\*\*\*) получаем  $\bar{n} = (2, 2, 2)$ ;

5) по формулам (5) из результата 4) и  $Q^{(1)}, Q^{(2)}$  вычисляем  $N_*^{(0)} = 2$ ,  $N_*^{(1)} = 3 + 2 = 5$ ,  $N_*^{(2)} = N_* = 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$ , совпадающим с визуальным из графа на рис. 4.

### 3. ВЕРОЯТНОСТИ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Размещение  $r$  различных частиц по  $n$  неразличимым ячейкам с  $k$  непустыми ячейками эквивалентно размещению по  $k$  неразличимым ячейкам  $r$  различных частиц без пустых ячеек.

Для определения вероятностного распределения исходов схемы предложим следующий АЛГОРИТМ:

1) найдем по последовательным итерациям методом графов (МГ) (см. [7]) все  $L$  итоговых вариантов деления с их вероятностями числа  $r$  на  $k$  ненулевых слагаемых, что соответствует в исходах итераций всем вариантам упорядоченных по возрастанию уровней заполнения  $k$  неразличимых ячеек при размещении по ним  $r$  неразличимых частиц без пустых ячеек, т. е. с предварительным размещением по одной частице в ячейку, получим для каждого  $s$ -го варианта набор уровней  $\bar{m}^{(s)} = (m_1^{(s)}, \dots, m_k^{(s)})$ , ( $s = \overline{1, L}$ ) с вероятностью  $p_1^{(s)}$ ;

2) для каждого  $\bar{m}^{(s)}$  проводим маркировку по уровням заполнения, т. е. вычисляем  $\bar{\mu}^{(s)} = (\mu_1^{(s)}, \dots, \mu_{r-k+1}^{(s)})$ , где  $\mu_j^{(s)}$  ( $j = \overline{1, r - k + 1}$ ) – число ячеек с уровнем заполнения  $j$ ;

3) для каждого  $\bar{m}^{(s)}$  в соответствии со схемой  $B$  из [6] выписываем размер (число ее исходов)  $G^{(s)}$  и вероятности  $\{p_2^{(s)}\}$  группы всех ее равновероятных исходов деления совокупности на части заданных размеров без учета порядка частей как величину, обратную числу ее исходов,  $G^{(s)} = r! / \prod_{i=1}^k m_i^{(s)}! \prod_{j=1}^{r-k+1} \mu_j^{(s)}!$ , следующую из формулы (2) статьи [6] в наших обозначениях, т. е.

$$p_2^{(s)} = \frac{\prod_{i=1}^k m_i^{(s)}! \prod_{j=1}^{r-k+1} \mu_j^{(s)}!}{r!}.$$

Таким образом, распределение вероятностей исходов схемы представляет собой  $L$  групп размерами  $\{G^{(s)}\}$  (с вероятностью  $s$ -й группы  $p_1^{(s)}$ ) равновероятных исходов с вероятностью каждого исхода  $p_1^{(s)} p_2^{(s)}$ .

Приведем числовой пример нахождения вероятностей исходов схемы.

**Пример 6.** Пусть в условиях примера 4  $r = 5$ ,  $k = 3$ . Реализуем шаги АЛГОРИТМА, где исходы итераций заданы в виде упорядоченных по возрастанию уровней заполнения ячеек с их вероятностями вида  $P(\cdot, \cdot, \cdot)$ :

1) МГ по итерациям дает: первая –  $P(1, 1, 1) = 1$ , вторая –  $P(1, 1, 2) = 1$ , третья –  $P(1, 1, 3) = 1/3$ ,  $P(1, 2, 2) = 2/3$ , откуда получаем  $\{\bar{m}\} = ((1, 1, 3), (1, 2, 2))$ ,  $L = 2$ ;

2)  $\bar{\mu}_1^{(s)} = (2, 0, 1)$ ,  $\bar{\mu}_2^{(s)} = (1, 2, 0)$ ;

3)  $G^{(1)} = 5!/1!1!3!2!0!1! = 10$  исходов размещений частиц с вектором уровней заполнения  $(1, 1, 3)$ , каждый с вероятностью  $p^{(1)} = 1/10$ , и  $G^{(2)} = 5!/1!2!2!1!2!0! = 15$  исходов размещений частиц с вектором уровней заполнения  $(1, 2, 2)$ , каждый с вероятностью  $p^{(2)} = 1/15$ . (Суммарное число исходов схемы – 25 – совпадает с результатом примера 4.)

Таким образом, распределение исходов схемы имеет следующий вид: все 10 исходов первой группы имеют вероятности по  $(1/3) \cdot (1/10) = 1/30$ , а все 15 исходов второй – по  $(2/3) \cdot (1/15) = 2/45$ . (Проверка на распределение:  $(1/30) \cdot 10 + (2/45) \cdot 15 = 1$ .)

**Замечание 3.** Здесь найдено вероятностное распределение исходов в схеме, отличающейся от исходной схемы введением ограничения, приводящего к неповторному перечислению того же набора исходов и состоящему в упорядочении перечисления среди частей деления совокупности совпадающих размеров по возрастанию минимальных элементов в них. Определение вероятности каждого из исходов в схеме производится по ее полному графу перечисления исходов (без ограничений) суммированием вероятностей всех траекторий итерационных переходов к нему.

## REFERENCES

1. Mansour T. Kombinatornye razbieniya [Combinatorics of set partition]. Boca Raton: CRC Press, 2012. 600 p.
2. Orlov M. Effektivnoe razbienie [Efficient generation of set partitions]. *Tech. Report*. 2002.
3. Enatskaya N. Yu. Combinatorial representations for the scheme of allocations of distinguishable particles into indistinguishable cells. *Discrete Math. Appl.* Vol. 28, iss. 4. 2018. P. 223–230. doi: 10.1515/dma-2018-0020
4. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz obobshchennoi skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme

## 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

По результату решения прямой ЗН и полученному в п. 3 распределению исходов схемы можно проводить быстрое моделирование ее исхода по одному случайному числу, разыгрывая ее номер методом маркировки (см. [8]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mansour T. Комбинаторные разбиения. Boca Raton: CRC Press, 2012. 600 с.
2. Орлов М. Эффективные разбиения // *Tech. Report*. 2002.
3. Энатская Н. Ю. Комбинаторное представление схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам // *Дискретная математика*. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 126–135. doi: 10.4213/dm1410
4. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2016. № 4. С. 25–27.
5. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2015. № 8. С. 33–38.
6. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы // *Промышленные АСУ и контроллеры*. 2017. № 2. С. 19–22.
7. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В. Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // *Труды КарНЦ РАН*. 2014. № 4. С. 143–154.
8. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.
9. Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.

Поступила в редакцию 20.01.2019

of the sequential actions]. *Promyshlennyye ASU i kontroллery* [Industrial ASU and Controllers]. 2016. No. 4. P. 25–27.

5. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennyye ASU i kontroллery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

6. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy perestанovok s povtoreniem i blizkoi skhemy [Combinatorial analysis of the permutation scheme with repetition and the close scheme]. *Promyshlennyye ASU i kontroллery* [Industrial ACS and Controllers]. 2017. No. 2. P. 19–22.

7. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V.* Analiz skhemy razmeshcheniya nerazlichimyykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Analysis of a scheme of allocating indistinguishable particles to indistinguishable cells]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 143–154.

8. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

9. *Andrews G.* Teoria razbieni [The theory of partitions]. Moscow: Nauka, 1982. 256 p.

*Received January 20, 2019*

#### **СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:**

**Энатская Наталия Юрьевна**  
доцент Департамента прикладной  
математики, к. ф.-м. н.  
Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Московский институт  
электроники и математики  
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458  
эл. почта: nat1943@mail.ru  
тел.: +79037411345

#### **CONTRIBUTOR:**

**Enatskaya, Natalia**  
National Research University  
Higher School of Economics,  
Moscow Institute of Electronics and Mathematics  
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia  
e-mail: nat1943@mail.ru  
tel.: +79037411345

## ХРОНИКА

### ПЕРВЫЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР SMARTY – STOCHASTIC MODELING AND APPLIED RESEARCH OF TECHNOLOGY

(Петрозаводск, 21–25 сентября 2018 г.)

С 21 по 25 сентября 2018 г. в ИПМИ КарНЦ РАН прошел Первый международный семинар по стохастическому моделированию и прикладным исследованиям технологических систем SMARTY. Организаторами семинара выступили ИПМИ КарНЦ РАН и Петрозаводский государственный университет. Достаточно широкая тематика позволила в рамках семинара объединить специалистов, работающих над теоретическими, алгоритмическими и методологическими аспектами теории массового обслуживания, стохастического моделирования и теории игр.



Основной акцент в программе семинара был сделан на приложениях указанных методов к широкому спектру технических систем, в первую очередь – систем высокопроизводительных и распределенных вычислений. Участники семинара представили современные результаты исследований в рамках двух основных тематик: стохастические модели систем параллельных вычислений, теоретико-игровые методы в теории очередей и анализе технических систем. Наиболее многочислен-

ная «команда» исследователей из Петрозаводска радушно принимала гостей семинара из Нидерландов, Индии, Израиля.

Петрозаводск был выбран местом проведения семинара не случайно. В КарНЦ РАН высокопроизводительные системы представлены вычислительным кластером, на котором решают свои задачи ученые из ИПМИ, ИВПС, ПетрГУ и других научных организаций. ЦКП КарНЦ РАН «Центр высокопроизводительной обработки данных» обслуживает также систему распределенных вычислений Desktop Grid на базе платформы BOINC. На ней проводятся крупные международные вычислительные эксперименты, среди которых наиболее активный – российский проект RakeSearch. Тематика семинара объединяет исследования многих ученых ИПМИ КарНЦ РАН. Дружелюбная атмосфера и прекрасная природа осенней Карелии послужили «катализатором» плодотворного взаимодействия ученых.



21 сентября, первый день работы семинара, был посвящен студентам и молодым исследователям, работающим в области теории мас-

сового обслуживания и приложениям теории игр к системам обслуживания. Следует особо отметить вызвавшие живой интерес обзорные лекции проф. Райна Нобеля (Rein Nobel, Vrije Universiteit Amsterdam, the Netherlands) по марковским процессам принятия решений и проф. Ачюты Кришнамурти (Achyutha Krishnamoorthy, CMS College Kottayam, India) по распределениям фазового типа, образованным цепью Маркова второго порядка, прошедшие в рамках «студенческого дня». Вторая половина дня стала своеобразным мастер-классом, в ходе которого студенты и молодые исследователи имели возможность представить свои работы и получить комментарии ведущих специалистов.

Для привлечения широкой аудитории слушателей семинар был представлен в социальных медиа (группа в социальной сети ВКонтакте и YouTube канал SMARTY Karelia). «Живая» трансляция выступлений и организация удаленных докладов в режиме видеоконференции позволили преодолеть ограничения физического присутствия и увеличить число участников. В течение трех рабочих дней семинара представлены 28 приглашенных и секционных докладов. В качестве рабочего языка был выбран английский, что позволило активно вовлечь в обсуждение всех участников семинара SMARTY.

Среди материальных результатов семинара можно отметить опубликованный сборник трудов семинара на платформе CEUR (<http://ceur-ws.org/Vol-2278/>, индексируется в Scopus), видеозаписи пленарных докладов, лекций и выступлений участников на канале YouTube, а также Соглашение о взаимопонимании между ИПМИ КарНЦ РАН и CMS College, Kottayam.



Успех семинара стал возможен благодаря неравнодушию и личному участию членов локального оргкомитета Т. Е. Морозовой, Р. С. Некрасовой, А. В. Бородиной, Н. Ю. Световой, О. В. Лукашенко, И. В. Пешковой и многих других.

*А. С. Румянцев, Н. Н. Никитина*

## Х МЕЖДУНАРОДНАЯ ПЕТРОЗАВОДСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ» (ВМДМ-2019)

(Петрозаводск, 22–26 мая 2019 г.)

С 22 по 26 мая 2019 года в Карельском научном центре РАН проходила традиционная международная Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике». Это была юбилейная, уже десятая конференция. Первая состоялась в 1983 году и имела статус всесоюзной, а начиная с третьей, проведенной в 1992 г., Петрозаводские конференции стали международными. У истоков этого мероприятия стояли выдающиеся математики: академик АН СССР Ю. В. Прохоров, члены-корреспонденты АН СССР В. Я. Козлов, который в то время был членом президиума Карельского филиала АН СССР, и Б. А. Севастьянов. Главным организатором и бессменным лидером конференций был профессор В. Ф. Колчин, чей вклад в развитие математики в Карелии трудно переоценить. К сожалению, в 2016 г. Валентин Федорович ушел из жизни, и десятая конференция прошла уже без него. Одним из важнейших достижений Петрозаводских конференций было создание в 1989 г. журнала «Дискретная математика», главным редактором которого с 2008 г. был В. Ф. Колчин. В настоящее время это один из ведущих математических журналов России, он входит в базы научных публикаций Web of Science и Scopus. Петрозаводские конференции начиная с 1988 г. проводились один раз в четыре года, но в 2016 г. было принято решение сократить этот срок, и десятая конференция состоялась в 2019 году.

Организаторами юбилейной конференции выступили Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН и Московский физико-технический институт (университет), который также стал спонсором мероприятия. Сопредседателями программно-

го комитета были А. М. Зубков, заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН, А. М. Райгородский, заведующий кафедрой дискретной математики Московского физико-технического института, директор физ.-тех. школы прикладной математики и кибернетики МФТИ, руководитель отдела теоретических и прикладных исследований компании Яндекс, и В. В. Мазалов, директор Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН.

В состав программного комитета вошли В. А. Ватулин (Москва), G. O. H. Katona (Будапешт, Венгрия), А. В. Косточка (Иллинойс, США), Е. В. Морозов (Петрозаводск), Ю. Л. Павлов (Петрозаводск), Л. А. Петросян (Санкт-Петербург), K. Szajowski (Вроцлав, Польша), А. Н. Тихомиров (Сыктывкар), Ю. С. Харин (Минск, Белоруссия).

В конференции приняли участие 60 человек, более половины которых – молодые ученые. Всего состоялось 48 докладов, в том числе 12 пленарных. Работа проходила в восьми секциях. Научная программа включала основные сформировавшиеся к настоящему времени направления развития вероятностных методов в дискретной математике: вероятностные и статистические задачи о дискретных объектах, случайные графы и гиперграфы, комбинаторные методы в исследованиях сети Интернет, задачи защиты информации, прикладная статистика, статистическое и имитационное моделирование, теория игр, стохастические оптимизационные задачи.

В пленарных докладах затрагивались следующие вопросы. Доклад G. O. H. Katona был посвящен доминирующим числам двудольных графов. В докладе А. М. Зубкова рассматри-



вались предельные теоремы, связанные с алгоритмами выбора случайных элементов групп. Лекция М. Simonovits была полностью посвящена экстремальной теории графов. Актуальные задачи о раскрасках случайных графов и гиперграфов обсуждались в докладах А. М. Райгородского и Д. А. Шабанова. Локальные предельные теоремы для выборочных ковариационных матриц содержались в докладе А. Н. Тихомирова. Задачи, затронутые Г. А. Кабатяньским, связаны с защитой информации. Д. Н. Запорожец рассказал о некоторых проблемах вычисления среднего угла случайных многогранников. В докладе А. А. Полянского рассматривались вопросы описания некоторых специальных множеств векторов. Выступление В. В. Мазалова было посвящено исследованию сетей коммуникаций с помощью

методов теории игр. А. Н. Реттеева рассказала о динамических многокритериальных играх со случайными горизонтами и их применениях в экономике и экологии. В докладе Ю. Л. Павлова обсуждалась кластерная структура случайных конфигурационных графов.

К началу конференции были изданы расширенные тезисы докладов. В электронном виде эти тезисы находятся по адресу: [http://resources.krc.karelia.ru/math/doc/conf/tezisy\\_a5\\_pechat.pdf](http://resources.krc.karelia.ru/math/doc/conf/tezisy_a5_pechat.pdf). На закрытии мероприятия принято решение продолжить традицию проведения Петрозаводских конференций, расширить тематику и состав участников, привлекая больше ученых не только из России, но и из ближнего и дальнего зарубежья.

*М. М. Лери, Ю. Л. Павлов*

## ЮБИЛЕИ И ДАТЫ

### ЮРИЙ ЛЕОНИДОВИЧ ПАВЛОВ (к 70-летию со дня рождения)



Юрий Леонидович Павлов родился 18 марта 1949 г. в Ленинграде. После окончания средней школы № 9 г. Петрозаводска поступил на физико-математический факультет Петрозаводского государственного университета, который окончил в 1971 г. По распределению приступил к работе в Карельском филиале Академии наук СССР (в настоящее время Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»), в котором работает уже 48 лет. В 1978 г. окончил аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и защитил кандидатскую диссертацию по специальности «теория вероятностей и математическая статистика». Начав работу в должности старшего лаборанта, Юрий Леонидович с 1986 г. и по настоящее время руководит лабораторией теории вероятностей и компьютерной статистики (ранее – математического моделирования). С 2015 г. Ю. Л. Павлов работает в должности главного научного сотрудника Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН. В 1996 г. защитил доктор-

скую диссертацию по теме «Случайные леса». В 1999 г. ему присвоено звание профессора по кафедре и звание «Заслуженный деятель науки Республики Карелия», в 2006 г. – почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», в 2008 г. – звание профессора по специальности «Теория вероятностей и математическая статистика».

Ю. Л. Павлов является ведущим специалистом в области теории вероятностей и математической статистики. Основные направления его деятельности связаны с исследованиями различных классов случайных объектов и предельного поведения их различных характеристик, ветвящихся процессов и прикладной статистики, им впервые было введено понятие случайного леса. Полученные результаты направлены на развитие методов теории вероятностей, математической и прикладной статистики, теории графов, математического моделирования. Они использовались при решении различных практических задач биологии, экологии, медицины, сельского хозяйства и общественных наук совместно с сотрудниками других институтов КарНЦ РАН и ПетрГУ. Юрий Леонидович является одним из разработчиков системы «Статистик-Консультант», предназначенной для статистического анализа данных. В последние годы значительное внимание уделяет новому направлению исследований – разработке методов исследования случайных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций.

Научные исследования Ю. Л. Павлова были неоднократно поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований, Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН, зарубежными грантами (Финляндия, Германия, Австрия), в 2003–2007 гг. он входил в состав участников ведущей научной школы РФ под руководством академика Ю. В. Прохорова, был руководителем подпроекта федеральной целевой программы «Интеграция», в рам-

ках которой им был создан филиал кафедры алгебры и теории вероятностей математического факультета Петрозаводского государственного университета в Институте прикладных математических исследований.

Ю. Л. Павлов входит в состав оргкомитетов международных конференций, на протяжении многих лет он является одним из главных организаторов традиционных Петрозаводских конференций «Вероятностные методы в дискретной математике», Российско-финского симпозиума по дискретной математике (2014, 2017), Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. Был членом программного комитета международных конференций «Компьютерный анализ данных и моделирование» (Минск, 2007, 2010). Является заместителем ответственного редактора серии «Математическое моделирование и информационные технологии» «Труды Карельского научного центра РАН».

Научную работу Ю. Л. Павлов успешно сочетает с преподавательской деятельностью: ведет ряд курсов и спецкурсов в Петрозаводском государственном университете, руководит выпускными работами бакалавров и магистерскими диссертациями, осуществляет научное руководство аспирантами. Неоднократно был председателем ГАК физико-технического факультета ПетрГУ. Является членом Ученого совета КарНЦ РАН, членом докторского диссертационного совета ПетрГУ. Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций:

1. Чеплюкова И. А. Предельные теоремы для лесов Гальтона-Ватсона (2000 г., Москва);
2. Казимиров Н. И. Леса Гальтона-Ватсона и случайные подстановки (2003 г., Петрозаводск);
3. Myllari T. Studies in the Theory of Random Fjrests (2004 г., Finland)
4. Черепанова (Хворостянская) Е. В. Предельные теоремы для некоторых случайных комбинаторных структур (2004 г., Петрозаводск);
5. Лери М. М. Исследование и разработка правил выбора методов анализа данных для интеллектуализированных систем прикладной статистики (2006 г., Петрозаводск);
6. Чистяков С. П. Метод минимизации эмпирического риска при индуктивном по-

строении баз знаний (2006 г., Петрозаводск);

7. Стафеев С. В. Идентифицируемость и обучение гауссовских графовых моделей с латентными переменными (2008 г., Петрозаводск).

Результаты исследований Ю. Л. Павлова представлены в более чем 200 печатных работах. Юрий Леонидович является автором трех монографий.

За успешную научную, научно-организационную и педагогическую деятельность Юрий Леонидович награжден Почетной грамотой РАН (2011 г.), Почетными грамотами КарНЦ РАН (2004, 2009, 2019 гг.), Почетной грамотой РАН и Профсоюза работников РАН (2004 г.).

Юрий Леонидович пользуется большим уважением у сотрудников нашего и других институтов КарНЦ РАН, его отличает огромная трудоспособность, высокая ответственность, доброжелательность по отношению к сотрудникам, отзывчивость, порядочность. Его знают как азартного игрока в бридж и в то же время как поклонника классической музыки.

Коллектив Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН сердечно поздравляет юбиляра с 70-летием, желает здоровья и дальнейших творческих успехов.

*Сотрудники лаборатории ТВиКС*

#### СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Ю. Л. ПАВЛОВА

**1975.** К условиям непрерывности нелинейных операторов в полуупорядоченных счетно-нормированных пространствах // Вопросы математики и механики. Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Т. XX. Петрозаводск: ПетрГУ. С. 8–12. (Совместно с В. В. Мосягиным.)

**1977.** Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе // Математический сборник. Т. 103(145), № 3(7). С. 392–403.

Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе // Теория вероятностей и ее применения. Т. 22, вып. 3. С. 523–533.

**1979.** Один случай предельного распределения максимального объема дерева в случайном лесе // Математические заметки. Т. 25, № 5. С. 751–760.

**1981.** Предельные распределения одной характеристики случайного отображения

// Теория вероятностей и ее применения. Т. 26, вып. 4. С. 841–847.

**1983.** Предельные распределения высоты случайного леса // Теория вероятностей и ее применения. Т. 28, вып. 3. С. 449–457.

**1986.** О случайных отображениях с ограничениями на число циклов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Т. 177. С. 122–132.

Модель распределения численности паразитов // Доклады АН СССР. Т. 289, № 3. С. 746–748. (Совместно с Е. П. Иешко.)

**1988.** О распределениях числа вершин в слоях случайного леса // Теория вероятностей и ее применения. Т. 33, вып. 1. С. 105–114.

**1992.** Некоторые свойства плоских деревьев с висячим корнем // Дискретная математика. Т. 4, вып. 2. С. 61–65.

**1993.** Статистик-консультант. Руководство пользователя. Петрозаводск: Тандем. 142 с. (Совместно с А. Я. Хенинен.)

**1994.** Предельные распределения высоты случайного леса из плоских корневых деревьев // Дискретная математика. Т. 6, вып. 1. С. 137–154.

«Статистик-консультант», или Еще один довод в пользу неизбежного // Мир ПК. Вып. 6. С. 92–94. (Совместно с А. Я. Хенинен.)

**1995.** Проблема усиления гипотез регрессионного анализа // Заводская лаборатория. № 1. С. 53–55. (Совместно с А. Я. Хенинен.)

Предельные распределения максимального объема дерева в случайном лесе // Дискретная математика. Т. 7, вып. 3. С. 19–32.

**1996.** Случайные леса. Петрозаводск: КарНЦ РАН. 259 с.

Предельные распределения числа деревьев заданного объема в случайном лесе // Дискретная математика. Т. 8, вып. 2. С. 31–47.

**1999.** Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса // Дискретная математика. Т. 11, вып. 1. С. 97–112. (Совместно с И. А. Чеплюковой.)

Случайный лес. Энциклопедия «Вероятность и статистика». М.: БРЭ. С. 604–605.

**2000.** Random Forests. Utrecht: VSP. 128 p. Одно замечание о лесах Гальтона-Ватсона // Дискретная математика. Т. 12, вып. 1. С. 47–59. (Совместно с Н. И. Казимировым.)

**2002.** Предельные распределения максимального объема дерева в случайном рекурсивном лесе // Дискретная математика. Т. 14, вып. 1. С. 60–74. (Совместно с Е. А. Лосевой.)

Предельные распределения числа пар в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика. Т. 14, вып. 3. С. 149–159. (Совместно с Е. В. Черепановой.)

**2004.** Предельные теоремы для объемов деревьев непомеченного графа случайного отображения // Дискретная математика. Т. 16, вып. 3. С. 63–75.

**2005.** Предельные теоремы для объемов деревьев в случайном непомеченном лесе // Дискретная математика. Т. 17, вып. 2. С. 70–86.

**2006.** Limit distributions of the number of vertices of a given out-degree in a random forest // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 138, no. 1. P. 5424–5433 (Совместно с Т. Myllari.)

**2007.** Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. Т. 19, вып. 3. С. 22–34.

**2008.** Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. (Совместно с И. А. Чеплюковой.)

**2009.** О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. Т. 21, вып. 3. С. 14–23.

**2011.** Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. Т. 22, вып. 3. С. 20–33.

**2012.** Предельные распределения числа вершин заданной степени в лесе случайного отображения с известным числом циклов // Дискретная математика. Т. 24, вып. 1. С. 132–139. (Совместно с Т. Б. Мюллари.)

**2013.** Предельные распределения числа петель случайного конфигурационного графа // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Т. 282. С. 212–230. (Совместно с М. М. Степановым.)

Одна задача биологии и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. Т. 25, вып. 4. С. 88–102.

Случайные графы. Петрозаводск: ПетрГУ. 82 с.

**2014.** Power-law random graph's robustness: link saving and forest fire model // Austrian Journal of Statistics. Vol. 43, no. 4. P. 229–236. (Совместно с М. М. Лери.)

О максимальном объеме дерева в лесе Гальтона-Ватсона с ограниченным числом вершин // Дискретная математика. Т. 26, вып. 3. С. 90–100. (Совместно с Е. В. Хворостянской.)

**2016.** О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. Т. 207, № 3. С. 93–110. (Совместно с Е. В. Хворостянской.)

Forest fire models on configuration graphs // *Fundamenta Informaticae*. Vol. 145, no. 3. P. 313–322. (Совместно с М. М. Лери.)

О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа вблизи критических точек // *Дискретная математика*. Т. 28, вып. 2. С. 58–70. (Совместно с Е. В. Феклистовой.)

**2017.** Random graphs' robustness in random environment // *Austrian Journal of Statistics*. Vol. 46, no. 3-4. P. 89–98. (Совместно с М. М. Лери.)

**2018.** Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // *Математический сборник*. Т. 209, № 2. С. 120–137.

Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число ребер // *Дискретная математика*. Т. 30, вып. 1. С. 77–94. (Совместно с И. А. Чеплюковой.)

Об устойчивости конфигурационных графов в случайной среде // *Информатика и ее применения*. Т. 12, вып. 2. С. 2–10. (Совместно с М. М. Лери.)

## УТРАТЫ

### ГЕОРГИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ БОРИСОВ (1935–2018)



27 июня 2018 г. на 84-м году жизни не стало замечательного ученого и выдающегося организатора науки, внесшего значительный вклад в развитие математических исследований в Карелии, Георгия Александровича Борисова.

Г. А. Борисов родился 9 апреля 1935 г. в Петрозаводске. После окончания железнодорожной средней школы № 9 г. Петрозаводска он поступил в Ленинградский политехнический институт им. Н. И. Калинина, который окончил в 1958 г. по специальности «Электрические станции, сети и системы». Его общий трудовой стаж и стаж работы по специальности составляет более полувека, а стаж работы в системе Академии наук – почти 45 лет.

После окончания института Г. А. Борисов работал на инженерных должностях в Карелэнерго. С 1960 по 1963 гг. учился в аспирантуре Карельского филиала АН СССР, в 1966 г. защитил кандидатскую диссертацию. Прошел

путь от младшего научного сотрудника до заведующего отделом автоматизации, начальника вычислительного центра Карельского НИИ лесной промышленности. С 1968 по 1971 гг. работал в должности заведующего отделением систем управления КарНИИЛПа. Начав работу в КФ АН СССР в должности заведующего лабораторией математических методов и вычислительной техники, он в 1975 г. создал самостоятельный отдел математических методов автоматизации научных исследований и проектирования, которым руководил 16 лет. Затем работал в должностях заведующего лабораторией и ведущего научного сотрудника. В 1976 г. получил ученое звание старшего научного сотрудника.

Г. А. Борисов – автор более 160 научных работ, в том числе 3 монографий и более 100 статей. Ему принадлежит ведущая роль в постановке научно-технических проблем по применению математических методов и ЭВМ в области лесотранспортного и лесомелиоративного проектирования в Карелии и далеко за ее пределами. Под его руководством были созданы основы теории оптимального проектирования сетей и дорог лесотранспорта и объектов лесомелиорации, разработаны оригинальные методы и технологии автоматизированного проектирования с помощью ЭВМ. Разработанные системы автоматизированного проектирования (СЕТИ, САПАД, КАНАЛ) были отмечены медалями ВДНХ, рекомендованы Минлеспромом СССР для внедрения в проектных организациях страны и использовались на стадии технико-экономического обоснования проектов сетей и автомобильных дорог лесозаготовительных предприятий.

В последние десятилетия Г. А. Борисов активно занимался изучением проблем топливно-энергетического комплекса, исследованием ресурсов местных источников энергии. Принимал участие в разработке энергетической программы Республики Карелия, в различных разделах ТАСИС-проекта ERUS

9701, в проекте центра стратегических разработок «Северо-Запад», в разработке Концепции социально-экономического развития Республики Карелия, проекта республиканской целевой программы «Энергосбережение», проводил экологические экспертизы проектов реконструкции крупных котельных республиканского подчинения. Г. А. Борисов являлся членом Наблюдательного совета при Госкомитете РК по ценам и тарифам.

Георгий Александрович активно занимался педагогической деятельностью в Петрозаводском госуниверситете и Институте управления, экономики и права при Правительстве Республики Карелия. За успехи в научной и научно-организационной деятельности Г. А. Борисов награжден Почетными грамо-

тами Президиума Верховного Совета КАССР и Совета Министров КАССР, медалью «Ветеран труда», Почетными грамотами Президиума РАН и Совета профсоюзов РАН, Благодарственным письмом Главы Республики Карелия, ему присвоено звание «Заслуженный работник народного хозяйства РК».

Ушел из жизни основоположник научного направления, созданного и активно развивавшегося благодаря его кипучей энергии, широкой научной эрудиции, инженерному чутью на постановки новых перспективных математических проблем, сочетавший неизменную жизнерадостность, доброжелательность и готовность подставить плечо коллегам по работе в любых жизненных ситуациях.

*Коллектив ИПМИ КарНЦ РАН*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации  
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учетом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редакционные коллегии серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляют за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкеты» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия «Анкеты» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Журнал имеет полноценную электронную версию на базе Open Journal System (OJS), позволяющую перевести предоставление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегией серий и рецензентами в электронный формат и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Редакционный совет журнала «Труды Карельского научного центра РАН» (Труды КарНЦ РАН) определил для себя в качестве одного из приоритетов полную открытость издания. Это означает, что пользователям на условиях свободного доступа разрешается: читать, скачивать, копировать, распространять, печатать, искать или находить полные тексты статей журнала по ссылке без предварительного разрешения от издателя и автора. Учредители журнала берут на себя все расходы по редакционно-издательской подготовке статей и их опубликованию.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

Почтовый адрес редакции: 185 910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762 018.

### ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объем рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объем рисунков не должен превышать 1/4 объема статьи. Рукописи

большого объема (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в двух экземплярах, напечатанных на одной стороне листа формата А4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

#### **ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ**

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: *УДК* курсивом на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; инициалы, фамилии всех авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: **Введение. Материалы и методы. Результаты и обсуждение. Выводы** либо **Заключение. Литература**); благодарности и указание источников финансирования выполненных исследований; списки литературы: с библиографическими описаниями на языке и алфавите оригинала (**Литература**) и транслитерированный в латиницу с переводом названий русскоязычных источников на английский язык (**References**).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности, ученые звания, ученые степени авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на наклейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. Ссылки на литературу в тексте даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Заголовки таблиц, заголовки и содержание столбцов, строк, а также примечания приводятся на русском и английском языках. Диаграммы и графики не дублируются. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ приводятся на русском и английском языках, должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях, детали на рисунках следует обозначать цифрами или буквами, значение которых также приводится в подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5–2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления ([http://www.bookchamber.ru/GOST\\_P\\_7.0.5.-2008](http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.-2008)). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

ТРАНСЛИТЕРИРОВАННЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (References). Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Описания русскоязычных работ указываются в латинской транслитерации, рядом в квадратных скобках помещается их перевод на английский язык. Выходные данные приводятся на английском языке (допускается транслитерация названия издательства). При наличии переводной версии источника можно указать ее библиографическое описание вместо транслитерированного. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала. Для составления списка рекомендуется использование бесплатных онлайн-сервисов транслитерации, вариант BSI.

Внимание! С 2015 года каждой статье, публикуемой в «Трудах Карельского научного центра РАН», редакцией присваивается уникальный идентификационный номер цифрового объекта (DOI) и статья включается в базу данных Crossref. **Обязательным условием является указание в списках литературы DOI для тех работ, у которых он есть.**

**Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате .tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>. Статья в файле с расширением .pdf загружается на сайт журнала <http://journals.krc.karelia.ru>. Исходный файл с расширением .tex и необходимые рисунки загружаются на 4 шаге «Загрузка дополнительных файлов».**

**Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences**  
**No. 7, 2019**  
**“MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES”**

**TABLE OF CONTENTS**

A. V. Ivanov, O. V. Fomkina. ON THE ORDER OF METRIC APPROXIMATION OF MAXIMAL LINKED SYSTEMS AND CAPACITARIAN DIMENSIONS .....	5
A. N. Kirillov, A. M. Sazonov, N. K. Bryksenkova. STABILIZATION OF THE BIOLOGICAL WASTEWATER TREATMENT PROCESS WITH VARIABLE BIOMASS STRUCTURE .....	15
A. V. Kolchin, B. F. Bezrodnyy. ON SOME ASPECTS OF DEVELOPMENT OF THE GENERALISED ALLOCATION SCHEME .....	21
M. M. Leri. ON ASSORTATIVITY AND CLUSTERING OF A POWER-LAW CONFIGURATION GRAPH MODEL .....	30
Yu. L. Pavlov. ON THE MAXIMUM OF THE MODULARITY OF RANDOM CONFIGURATION GRAPHS	36
N. I. Rodchenkova, K. V. Grudova. MODELING OF THE MOVEMENT OF THE FREE BOUNDARY OF HYDRIDE FORMATION IN A CYLINDRICAL SHELL MADE OF A ZIRCONIUM ALLOY .....	42
S. V. Stafeev. IDENTIFIABILITY OF STRUCTURAL EQUATION MODELS WITH LATENT VARIABLES	53
E. V. Khvorostyanskaya. ON THE DISTRIBUTION OF THE SECOND DEGREES OF CONFIGURATION GRAPHS VERTICES .....	58
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE SCHEME OF DIVISION OF A POPULATION OF DISTINGUISHABLE ELEMENTS INTO PARTS OF GIVEN SIZES IRRESPECTIVE OF THEIR ORDER	63
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS IN THE SCHEME OF ALLOCATION OF DISTINGUISHABLE PARTICLES INTO INDISTINGUISHABLE CELLS WITH A GIVEN NUMBER OF NON-EMPTY CELLS .....	70
<b>CHRONICLE</b>	
A. S. Rumiantsev, N. N. Nikitina. The first International seminar SMARTY – Stochastic Modeling and Applied Research of Technology (Petrozavodsk, September 21–25, 2018) .....	78
M. M. Leri, Yu. L. Pavlov. X International Petrozavodsk Conference «Probabilistic methods in discrete mathematics» (Petrozavodsk, May 22–26, 2019) .....	80
<b>DATES AND ANNIVERSARIES</b>	
Yuri L. Pavlov (on the 70 <sup>th</sup> anniversary) .....	82
<b>BEREAVEMENTS</b>	
Georgy A. Borisov (1935–2018) .....	86
<b>INSTRUCTIONS FOR AUTHORS</b> .....	88

Научный журнал

**Труды Карельского научного центра  
Российской академии наук**  
№ 7, 2019

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению Ученого совета  
Федерального исследовательского центра  
«Карельский научный центр Российской академии наук»*

Выходит 12 раз в год

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
Регистрационная запись ПИ № ФС 77-72429 от 28.02.2018 г.

Редактор А. И. Мокеева  
Компьютерная верстка Г. О. Предтеченский

Подписано в печать 24.06.2019. Дата выхода 31.07.2019. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 7,3. Усл. печ. л. 10,7.  
Тираж 100 экз. Заказ 565. Цена свободная

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»  
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН  
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50