

Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр
Российской академии наук»

ТРУДЫ

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 7, 2018

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Петрозаводск
2018

Научный журнал
**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**
№ 7, 2018
Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Scientific Journal
**Transactions of the Karelian Research Centre of the
Russian Academy of Sciences**
№ 7, 2018
MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION
TECHNOLOGIES Series

Главный редактор
А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; О. Н. БАХМЕТ (зам. главного редактора), член-корр. РАН, д. б. н.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; И. В. ДРОБЫШЕВ, доктор биологии (Швеция – Канада); Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; А. С. ИСАЕВ, академик РАН, д. б. н., проф.; Х. ЙООСТЕН, доктор биологии, проф. (Германия); А. М. КРЫШЕНЬ, д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; О. Л. КУЗНЕЦОВ, д. б. н.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; О. ОВАСКАЙНЕН, доктор математики, проф. (Финляндия); О. Н. ПУГАЧЕВ, академик РАН, д. б. н.; С. А. СУББОТИН, доктор биологии (США); Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; Т. Э. ХАНГ, доктор географии (Эстония); П. ХОЛТА, доктор геологии, проф. (Финляндия); К. ШАЕВСКИЙ, доктор математики, проф. (Польша); В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Editor-in-Chief
A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; O. N. BAKHMET (Deputy Editor-in-Chief), RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); I. V. DROBYSHEV, PhD (Biol.) (Sweden – Canada); N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; T. E. HANG, PhD (Geog.) (Estonia); P. HÖLTTÄ, PhD (Geol.), Prof. (Finland); A. S. ISAIEV, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; H. JOOSTEN, Dr. (Biol.), Prof. (Germany); A. M. KRYSHEN', DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; O. L. KUZNETSOV, DSc (Biol.); V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; O. OVASKAINEN, PhD (Math.), Prof. (Finland); O. N. PUGACHYOV, RAS Academician, DSc (Biol.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; S. A. SUBBOTIN, PhD (Biol.) (USA); D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); K. SZAJEWSKI, PhD (Math.), Prof. (Poland); A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Редакционная коллегия серии
«Математическое моделирование и информационные технологии»

Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; В. Ф. КОЛЧИН, д. ф.-м. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент.

Editorial Board of the «Mathematical Modeling and Information Technologies» Series

Yu. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. F. KOLCHIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.

ISSN 1997-3217 (печатная версия)
ISSN 2312-4504 (онлайн-версия)

Адрес редакции: 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
тел. (8142)762018; факс (8142)769600
E-mail: trudy@krc.karelia.ru

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>

© ФИЦ «Карельский научный центр РАН», 2018
© Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, 2018

УДК 519.218.3 (519.23)

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПРОЦЕССА ДЕГРАДАЦИИ В СИСТЕМЕ С ПОСТЕПЕННЫМИ И ВНЕЗАПНЫМИ ОТКАЗАМИ

А. В. Бородина¹, В. А. Тищенко²

¹Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

²Петрозаводский государственный университет, Россия

В работе рассматривается неоднородный процесс деградации системы с постепенными и внезапными отказами. Для случая, когда времена пребывания на стадиях деградации независимы и распределены экспоненциально с разными параметрами, получены аналитические выражения для вероятности внезапного отказа на цикле регенерации, среднего времени до отказа на цикле, средней длины цикла с отказом и без, средней общей длины цикла. Для случая произвольных распределений и высоконадежных систем, когда отказ является редким событием, предложен имитационный алгоритм на основе техники расщепления для ускоренного построения циклов регенерации. Представлены результаты экспериментов, полученные методом расщепления и стандартным методом Монте-Карло, для экспоненциальных стадий деградации проведено сравнение со значениями по формулам.

Ключевые слова: процесс деградации; системы с отказами; вероятность отказа; редкие события; метод расщепления; регенеративный метод; неоднородный случай.

A. V. Borodina, V. A. Tishenko. SIMULATION OF A NONHOMOGENEOUS DEGRADATION PROCESS IN A SYSTEM WITH GRADUAL AND INSTANTANEOUS FAILURES

The paper deals with a heterogeneous degradation process in a system with gradual and instantaneous failures. For the case when the times in the degradation stages are independent and distributed exponentially with different parameters, analytical expressions are obtained for the probability of a failure on the regeneration cycle, average time until failure on the cycle, average cycle length with and without failure, average total cycle length. For the case of arbitrary distributions in highly reliable systems, where failure is a rare event, a simulation splitting algorithm is proposed to speed up the construction of regeneration cycles. The results of experiments obtained by the splitting and the Monte Carlo methods are presented and compared with analytical solutions.

Key words: degradation process; system with failures; probability of failure; rare events; splitting method; regenerative method; nonhomogeneous case.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучение процессов старения и деградации в технических и биологических системах является актуальной задачей и предполагает исследование систем с постепенными отказами, для которых было разработано большое количество многоуровневых моделей надежности (см., например, [15, 18]).

Для оптимального управления такими системами критически важным является расчет вероятности отказа, средней длины цикла регенерации с отказом и без отказа и т. д. Если процесс деградации является марковским, то некоторые основные характеристики можно вычислить аналитически и при небольшом количестве стадий деградации. В случае, когда процесс деградации не является марковским, необходимо использовать методы имитационного моделирования.

В работе рассматривается процесс деградации в восстанавливаемой системе с постепенными и внезапными отказами, где для предотвращения мгновенного отказа используется профилактический ремонт, а сам процесс имеет тенденцию ускоряться во времени. Для случая экспоненциальных распределений (с разными параметрами) получены аналитические результаты.

Когда найти решение аналитически невозможно или затруднительно, предлагается имитационный метод, который, в частности, позволит избежать инверсии преобразования Лапласа для свертки, что при большом количестве стадий деградации может являться причиной вычислительных ошибок даже для экспоненциально распределенных случайных величин.

Рассмотрим процесс деградации $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ с пространством состояний $E = \{0, 1, \dots, L, \dots, M, \dots, K, F\}$, которые представляют *стадии деградации* системы (см. рис. 1).

Подробно такой процесс описан в работе [7], где для исследования динамики состояния антикоррозийного покрытия рассматривается система, управляемая двухуровневой политикой (K, L) , и решается задача поиска оптимального управления профилактическим ремонтом с целью минимизации средних затрат при заданной системе штрафов.

Важным этапом в решении оптимизационной задачи является вычисление основных характеристик процесса деградации, которые, за исключением простейших случаев, возможно получить только путем имитационного моделирования. Например, в случае, когда процесс деградации не является марковским, либо ве-

роятность отказа системы очень мала, либо число стадий достаточно велико и т. д.

Далее будем считать, что политика управления, определяющая, когда осуществляется профилактический ремонт и когда проводить восстановление (частичное или полное), фиксирована и значения (K, L) являются известными.

Рассмотрим возможные состояния системы, проиллюстрированные на рисунке 1. В системе возможны два типа отказов: *наблюдаемый (постепенный)* отказ, который соответствует переходу на следующую стадию деградации, и *внезапный* отказ, когда процесс попадает в финальное состояние F .

Процесс стартует из состояния $X(0) = 0$ и затем последовательно проходит $K - 1$ стадию деградации до перехода на стадию профилактического ремонта с номером K , если внезапный отказ не произошел. Внезапный отказ возможен начиная со стадии M , когда система не успевает перейти на стадию K , т. е. время перехода со стадии M до стадии K превышает время до отказа V , при этом V является случайной величиной (с.в.) с известным законом распределения.

Обозначим время перехода из состояния j в состояние $j + 1$ случайной величиной (с.в.) T_j и будем считать все T_j независимыми. Если $\{T_j\}$ одинаково распределены (н.о.р.), то процесс называют *однородным*, если возможны разные распределения — *неоднородным*.

В работе [5] рассматривался однородный процесс, для которого были получены аналитические результаты в случае экспоненциально распределенных T_j и предложен алгоритм ускоренного моделирования циклов регенерации на основе техники расщепления (когда отказ является редким событием).

В данной статье предлагается исследовать неоднородный случай, который является более естественным, поскольку, как правило, процесс деградации ускоряется со временем.

Определим суммарное время перехода из состояния M в состояние K значением случайной величины

$$S_{MK} = \sum_{j=M}^{K-1} T_j, \quad (1)$$

тогда внезапный отказ связан с событием $\{S_{MK} \geq V\}$. Предполагается, что с.в. S_{MK} и V независимы. Если произошел отказ, то система становится неработоспособной, для полного восстановления требуется время U_F , и затем процесс заново стартует из начального состояния 0. Если отказа не случилось, то после профилактического ремонта за время U_{KL} система возвращается в состояние L (стадия возврата).

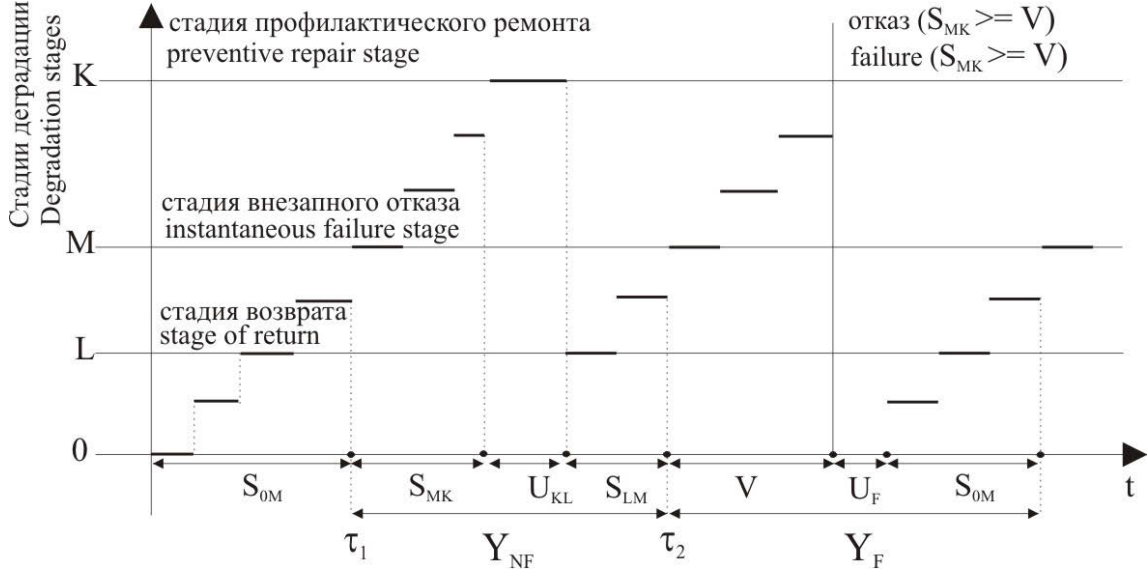


Рис. 1. Динамика процесса деградации с двумя типами циклов регенерации
Fig. 1. Dynamics of the degradation process with two types of regeneration cycles

РЕГЕНЕРАТИВНАЯ СТРУКТУРА ПРОЦЕССА ДЕГРАДАЦИИ

Процесс деградации X является регенерирующим, начало нового цикла регенерации определяет момент перехода на стадию M :

$$\tau_{n+1} = \inf\{Z_i > \tau_n : X(Z_i^+) = M\},$$

где $n \geq 0$, $\tau_0 := 0$, Z_k – это момент перехода на стадию $k \geq 1$, а длины циклов $Y_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, $k \geq 1$, являются н.о.р.

Введем необходимые обозначения для функций

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \mathbb{P}(T_i \leq t); \quad F_V(t) = \mathbb{P}(V \leq t); \\ F_{i,j}(t) &= \mathbb{P}(S_{ij} \leq t) = F_{i,j-1} * F_j(t) = \\ &= \int_{0^-}^t F_{i,j-1}(t-v) dF_j(v); \\ \overline{F}_{i,j}(t) &= 1 - F_{i,j}(t) \\ F_{i,i+1}(t) &= F_i(t), \quad F_{i,i}(t) \equiv 0, \end{aligned}$$

где $*$ означает свертку.

В работе требуется вычислить вероятность внезапного отказа на цикле регенерации

$$p_F = \mathbb{P}(S_{MK} \geq V) = \int_0^\infty \overline{F}_{MK}(t) dF_V(t), \quad (2)$$

а также другие характеристики функционирования рассматриваемой системы в неоднородном случае: время до случайного отказа, среднюю длину цикла регенерации, средние длины циклов с отказом и без отказа.

Кроме того, одним из важнейших показателей надежности является функция надежности:

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t | X(0) = 0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где T – время жизни системы (время безотказной работы). Даже в случае, когда стадии деградации распределены экспоненциально, вычисление надежности затруднительно, т. к. связано с нахождением обратного преобразования Лапласа (подробнее см. в [5]). Для надежных систем с редкими отказами вместо функции надежности (3) используют *асимптотическую функцию надежности*

$$R_a(t) = e^{-t \frac{p_F}{\mathbb{E}[Y_{NF}]}} \quad (4)$$

где значения p_F и $\mathbb{E}[Y_{NF}]$ неизвестны. В таких случаях необходимо использовать имитационное моделирование.

Далее получим выражения для основных характеристик. Циклы регенерации процесса X можно разделить на два типа: с отказом и без, обозначив типичную длину цикла соответственно:

$$\begin{aligned} Y_F &= V + U_F + S_{0,M} \\ Y_{NF} &= S_{MK} + U_{KL} + S_{LM}, \end{aligned} \quad (5)$$

где с.в. $V, U_F, S_{0,M} = \sum_{j=0}^{M-1} T_j$ независимы так же, как и с.в. $S_{MK}, U_{KL}, S_{LM} = \sum_{j=L}^{M-1} T_j$. Тогда безусловная (типичная) длина цикла регенерации определяется выражением

$$Y = Y_F \cdot I_{\{V \leq S_{MK}\}} + Y_{NF} \cdot I_{\{S_{MK} < V\}}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\min\{V, S_{MK}\}] \\ &+ (\mathbb{E}[U_F] + \mathbb{E}[S_{0M}])p_F \\ &+ (\mathbb{E}[U_{KL}] + \mathbb{E}[S_{LM}]) (1 - p_F),\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\mathbb{E}[\min\{V, S_{MK}\}] = \int_0^\infty \overline{F_V}(t) \overline{F_{MK}}(t) dt.$$

Обозначим T_F время до внезапного отказа на цикле в случае, когда отказ произошел. Пусть существует $F'_V(x) = f_V(x)$, тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_F] &= \mathbb{E}[V|V \leq S_{MK}] \\ &= \int_0^\infty \frac{y f_V(y) \mathbb{P}(S_{MK} \geq y)}{\mathbb{P}(V \leq S_{MK})} dy \\ &= \frac{1}{p_F} \int_0^\infty y f_V(y) \overline{F_{MK}}(y) dy.\end{aligned}\quad (8)$$

Средняя длина цикла с отказом

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_F] &= \mathbb{E}[Y|V \leq S_{MK}] \\ &= \mathbb{E}[T_F] + \mathbb{E}[U_F] + \mathbb{E}[S_{0M}].\end{aligned}\quad (9)$$

При условии, что существует $F'_{S_{MK}}(x) := f_S(x)$, средняя длина цикла без отказа определяется выражением

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_{NF}] &= \mathbb{E}[Y|S_{MK} < V] \\ &= \frac{1}{1 - p_F} \int_0^\infty y f_S(y) \overline{F_V}(y) dy \\ &+ \mathbb{E}[U_{KL}] + \mathbb{E}[S_{LM}].\end{aligned}\quad (10)$$

Для получения аналитических выражений характеристик, описанных выше, необходимо вычислить свертки, что в общем случае сделать практически невозможно. Более того, для нахождения явного решения необходимо выполнить инверсию преобразования Лапласа – Стилтеса, что возможно сделать в некоторых простейших случаях. Численное вычисление обратного преобразования Лапласа показало низкую точность, в частности для большого числа стадий (см. [5]).

Аналитические формулы подсчета важнейших характеристик для однородного процесса X в случае экспоненциальных T_j были получены в работе [5]. Далее получим формулы для неоднородного процесса деградации, когда все параметры распределены экспоненциально.

НЕОДНОРОДНЫЙ СЛУЧАЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СТАДИЯМИ ДЕГРАДАЦИИ

Рассмотрим случай, когда независимые времена T_j распределены экспоненциально с

параметрами λ_j (далее этот факт будем обозначать $T_j \sim \text{Exp}(\lambda_j)$) с плотностью

$$f_j(x) = \lambda_j e^{-\lambda_j x}, \quad x \geq 0.$$

Поскольку процесс деградации, как правило, ускоряется со временем, то далее будем считать, что:

$$\lambda_0 < \dots < \lambda_{K-1}, \quad \nu < \lambda_j, \quad j = [0, K-1], \quad (11)$$

где параметр ν определяет экспоненциальное время до отказа $V \sim \text{Exp}(\nu)$.

Утверждение 1. Если времена пребывания $\{T_j\} \sim \text{Exp}(\lambda_j)$ являются независимыми, а время до отказа $V \sim \text{Exp}(\nu)$, то справедливо

$$\mathbb{E}[T_F] = \frac{\nu}{p_F} \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \frac{1}{\lambda_j (\lambda_j + \nu)^2 A_j}, \quad (12)$$

где $A_j = \prod_{l=M, l \neq j}^{K-1} (\lambda_l - \lambda_j)$ и вероятность отказа

$$p_F = \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \frac{\nu}{\lambda_j (\lambda_j + \nu) A_j}. \quad (13)$$

Доказательство. Для удобства будем рассматривать экспоненциальное распределение как частный случай гамма-распределения с характеристической функцией

$$\varphi_{T_j}(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda_j}\right)^{-1}. \quad (14)$$

В силу независимости T_j характеристическая функция $\varphi_{S_{MK}}(t) := \varphi_S(t)$ для суммы S_{MK} является произведением соответствующих характеристических функций

$$\begin{aligned}\varphi_S(t) &= \mathbb{E}e^{it(T_M + \dots + T_{K-1})} \\ &= \mathbb{E}e^{itT_M} \dots \mathbb{E}e^{itT_{K-1}} \\ &= \prod_{j=M}^{K-1} \left(1 - \frac{it}{\lambda_j}\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (15)$$

По индукции можно показать (см., например, [2]), что справедливо

$$\varphi_S(t) = \sum_{j=M}^{K-1} \varphi_{T_j}(t) \prod_{l=M, l \neq j}^{K-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_l - \lambda_j}. \quad (16)$$

Сделав замену в формуле (16),

$$\prod_{l=M, l \neq j}^{K-1} (\lambda_l - \lambda_j) = A_j, \quad (17)$$

получим следующее представление

$$\varphi_S(t) = \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \varphi_{T_j}(t) \frac{1}{\lambda_j A_j}. \quad (18)$$

Используя известное выражение функции плотности распределения с.в. через преобразование Фурье для характеристической функции, а именно

$$f_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_S(t) dt, \quad (19)$$

из тождества (18) немедленно получим

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} f_{T_j}(x) \frac{1}{\lambda_j A_j} = \\ &= \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \frac{e^{-\lambda_j x}}{A_j}, \end{aligned} \quad (20)$$

тогда

$$\begin{aligned} \overline{F_{MK}}(x) &= \mathbb{P}(S_{MK} > x) = \int_x^{+\infty} f_S(y) dy = \\ &= \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\lambda_j A_j}. \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку с.в. $V \sim \text{Exp}(\nu)$ с плотностью $f_V(x) = \nu e^{-\nu x}$, $x \geq 0$, то согласно формулам (2) и (21)

$$p_F = \nu \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \frac{1}{\lambda_j A_j} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_j + \nu)y} dy, \quad (22)$$

откуда немедленно следует выражение (13). (Альтернативный способ вывода формулы (13) приведен в статье [7], где используется свойство марковости рассматриваемого процесса и с применением преобразования Лапласа решается система дифференциальных уравнений Колмогорова.)

Аналогичным образом из формулы (8), применяя интегрирование по частям, легко получим (12). \square

Учитывая, что

$$\mathbb{E}[S_{LM}] = \sum_{j=L}^{M-1} \frac{1}{\lambda_j}$$

и для $U_{KL} \sim \text{Exp}(\mu)$ известно $\mathbb{E}[U_{KL}] = 1/\mu$, то на основании формул (10) и (20) можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Если времена пребывания $T_j \sim \text{Exp}(\lambda_j)$ на стадиях деградации являются независимыми, время до отказа $V \sim \text{Exp}(\nu)$, а время профилактического ремонта $U_{KL} \sim \text{Exp}(\mu)$, то справедливо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{NF}] &= \frac{1}{(1-p_F)} \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \frac{1}{(\lambda_j + \nu)^2 A_j} + \\ &+ \frac{1}{\mu} + \sum_{j=L}^{M-1} \frac{1}{\lambda_j}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $A_j = \prod_{l=M, l \neq j}^{K-1} (\lambda_l - \lambda_j)$ и вероятность отказа

$$p_F = \prod_{j=M}^{K-1} \lambda_j \sum_{j=M}^{K-1} \frac{\nu}{\lambda_j (\lambda_j + \nu) A_j}.$$

Кроме того, на основании Утверждения 1 и выражения (9) при $U_F \sim \text{Exp}(\mu_F)$ справедлива формула вычисления средней длины цикла с отказом:

$$\mathbb{E}[Y_F] = \mathbb{E}[T_F] + \frac{1}{\mu_F} + \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\lambda_j}, \quad (24)$$

где $\mathbb{E}[T_F]$ вычисляется по формуле (12). Поскольку

$$\mathbb{E}[\min\{V, S_{MK}\}] = p_F/\nu,$$

то, следуя приведенным выше рассуждениям, из формулы (7) получим, что средняя (безусловная) длина цикла равна

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu_F} + \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\lambda_j} \right) p_F + \\ &+ \left(\frac{1}{\mu} + \sum_{j=L}^{M-1} \frac{1}{\lambda_j} \right) (1-p_F). \end{aligned} \quad (25)$$

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Поскольку в общем случае вычислить аналитически характеристики деградирующего процесса, как правило, не представляется возможным, то необходимо предложить метод имитационного моделирования, который будет применим в случае редких отказов, когда, как известно, метод Монте-Карло является трудоемким по времени для вычисления с заданной точностью (см., например, [20]).

Кроме того, реализовав алгоритм имитационного оценивания вероятности отказа и средней длины цикла без отказа, можно вычислить асимптотическую функцию надежности (4).

В статье [5] были представлены результаты экспериментов для однородного случая с экспоненциальными стадиями деградации, полученные тремя способами: аналитически, методом Монте-Карло (MC, Monte Carlo), методом расщепления (RS, Regenerative Splitting).

В данной работе предлагается применить аналогичную технику расщепления для ускоренного построения циклов регенерации неоднородного процесса деградации и сравнить результаты моделирования с аналитическими значениями, полученными выше для экспоненциальных стадий деградации.

Эксперименты проводились с использованием двух языков программирования python и Си++ (в том числе с целью проверить, насколько интерпретируемый язык проигрывает в скорости получения оценки) с использованием ЭВМ: Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2630 2.30GHz, 4GB RAM, операционная система Linux openSUSE 42.2.

Метод Монте-Карло для процесса деградации

Сначала рассмотрим стандартный метод Монте-Карло. Очевидно, что для оценивания

вероятности отказа p_F на цикле регенерации (в частности это следует из формулы (13)) достаточно моделировать процесс деградации от стадии M до стадии $K - 1$. Таким образом, метод Монте-Карло для оценивания вероятности p_F сводится к простому алгоритму моделирования суммы независимых с.в.

Для определения других характеристик процесса необходимо имитационное построение полного цикла регенерации между моментами прихода на стадию M . В этом случае, используя регенеративный подход (см., например, [10–12]) и определение цикла (5) и (6), можно построить точечные и интервальные оценки для средней длины цикла, средней длины цикла с отказом и без, среднего времени до отказа на цикле и т. д.

Зафиксируем параметры модели $\nu = 0,5$, $\mu_F = 1,5$, $\mu = 2$, $L = 1$, $M = 5$, $K = 17$. Для наблюдения за относительной ошибкой оценивания (relative error, [20]), вычисляемой по формуле

$$RE[\hat{p}_F] = \frac{\sqrt{Var[\hat{p}_F]}}{\mathbb{E}[\hat{p}_F]}, \quad (26)$$

в экспериментах будем варьировать число циклов регенерации n и последовательность величин

$$\lambda_j = \lambda_{K-1} - (K - j)s, \quad j \in [0, K - 2],$$

где λ_{K-1} будем выбирать, а остальные значения сдвигать на шаг s , таким образом гарантируется выполнение условия (11).

В таблице 1 приведены оценки вероятности отказа в сравнении с результатами, полученными по формуле (13). Время моделирования указано в секундах для реализации на языке python.

Таблица 1. Оценивание p_F методом Монте-Карло (python)
Table 1. Estimation of p_F by Monte Carlo method (python)

λ_{K-1}, s	n	p_F	\hat{p}_{MC}	t_{MC}	Var_{MC}	RE_{MC}
$10^3, 50$	10^4	$8,75 \cdot 10^{-3}$	$8,79 \cdot 10^{-3}$	0,16	$7,18 \cdot 10^{-7}$	0,096
$10^4, 5 \cdot 10^2$	10^4	$8,79 \cdot 10^{-4}$	$8,85 \cdot 10^{-4}$	0,17	$1,03 \cdot 10^{-7}$	0,363
$10^5, 5 \cdot 10^3$	10^5	$8,79 \cdot 10^{-5}$	$8,54 \cdot 10^{-5}$	1,78	$1,20 \cdot 10^{-9}$	0,406
$10^6, 5 \cdot 10^4$	10^7	$8,79 \cdot 10^{-6}$	$8,85 \cdot 10^{-6}$	205,14	$1,64 \cdot 10^{-12}$	0,145
$10^7, 5 \cdot 10^5$	10^8	$8,79 \cdot 10^{-7}$	$8,68 \cdot 10^{-7}$	1983,11	$9,00 \cdot 10^{-15}$	0,109

Отметим, что для величин p_F порядка 10^{-5} и меньше при числе циклов менее $n = 10^6$ метод Монте-Карло выдает $\hat{p}_F = 0$.

Замечание 1. Поскольку для метода Монте-Карло несмещенная оценка вероятности отказа $\hat{p}_F = \sum_{j=1}^n I_j/n$, где индикатор $I_j = 1$ для цикла с отказом, то при малых значениях

$p_F \rightarrow 0$ из (26) следует

$$RE_{MC} = \frac{\sqrt{p_F(1-p_F)/n}}{p_F} \approx \frac{1}{\sqrt{np_F}}.$$

В таблице 1 указана статистическая оценка RE_{MC} , для вычисления которой в формуле (26) использовались несмещенные статистические оценки дисперсии и математического ожидания, вычисляемые по выборке из

50 значений. Как видно из таблицы 1, общее время эксперимента для вероятности порядка 10^{-7} достаточно велико и составляет около 27,5 часа.

В таблице 2 можно проследить, как меняется время вычисления оценки с уменьшением относительной ошибки оценивания (за счет увеличения числа циклов n), остальные параметры те же, что и для результатов из таблицы 1.

Таблица 2. Увеличение времени оценивания p_F с ростом n методом Монте-Карло (python)
Table 2. An increase in the estimation time of p_F by the Monte Carlo method (python)

p_F	n	$\hat{p}_{F_{MC}}$	t_{MC}	RE_{MC}
$8,75 \cdot 10^{-3}$	10^5	$8,83 \cdot 10^{-3}$	1,71	0,025
	$5 \cdot 10^5$	$8,73 \cdot 10^{-3}$	9,85	0,013
$8,79 \cdot 10^{-4}$	10^5	$9,00 \cdot 10^{-4}$	1,76	0,145
	$5 \cdot 10^5$	$8,77 \cdot 10^{-4}$	8,91	0,040
$8,79 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^5$	$9,32 \cdot 10^{-5}$	8,65	0,142
	10^6	$8,58 \cdot 10^{-5}$	19,73	0,085

Таким образом, с увеличением точности вычисления оценки в методе Монте-Карло существенно возрастает время моделирования. В случаях, когда аналитическое решение получить невозможно, необходимо рассмотреть алгоритмы для ускоренного имитационного моделирования циклов регенерации.

Метод расщепления для процесса деградации

В работе [5] для однородного процесса деградации в случае редких отказов был предложен имитационный алгоритм на основе динамического метода расщепления (см. [9, 13, 14]).

Ключевая проблема — это случайность порогового значения времени до отказа V , тогда как стандартная постановка задачи для ускоренного метода расщепления предполагает наличие фиксированного порога, превышение которого является редким событием.

Необходимо отметить, что и для других ускоренных методов, в частности методов уменьшения дисперсии оценки, пороговое значение в задаче оценивания вероятностей редких событий также предполагается константой (см., например, RESTART [21], условный метод Монте-Карло [6]). Для моделирования циклов регенерации в деградирующей системе техника расщепления подходит наилучшим образом и позволяет оценивать сразу несколько характеристик за один прогон. Более того, для процесса деградации возможно комбинировать расщепление с условным методом

Монте-Карло с целью уменьшения дисперсии оценки.

Другая проблема заключается в подборе оптимальных параметров: количества уровней, самих уровней и числа расщеплений на каждом уровне. Как и для однородного процесса деградации в [5], система уровней для расщепления жестко определена и совпадает со стадиями деградации. Поскольку пороговое значение V не константа, то оптимальные параметры для процедуры расщепления возможно подобрать только экспериментально.

Процедуру расщепления для процесса деградации целесообразно запускать в момент перехода на стадию M (в момент регенерации τ_k), когда случайный отказ становится возможен (см. рис. 1), и заканчивать на стадии $K-1$.

При достижении процессом стадии i происходит расщепление траектории, когда для с.в. T_i генерируется R_i реализаций (копий), $M \leq i \leq K-1$. Определим $R_M = 1$ и будем считать, что с уровня M стартует одна траектория, которая разветвляется при расщеплении, и новые R_i траекторий после стадии i развиваются независимо, но имеют общую предысторию.

Таким образом, вместо одного цикла регенерации генерируется группа из

$$D = R_M \cdots R_{K-1}$$

зависимых циклов, и мы получаем D реализаций с.в. S_{MK} на каждую группу. Циклы

внутри группы зависимы, циклы из разных групп независимы. Общее число групп обозначим R_{M-1} . Тогда общее число отказов в i -й группе

$$A_i = \sum_{j=(i-1) \cdot D+1}^{i \cdot D} I^{(j)}, i = 1, \dots, R_{M-1},$$

где индикатор $I^{(j)} = 1$ для цикла с отказом ($I^{(j)} = 0$, иначе) и с.в. A_i н.о.р.

Последовательность $\{I^{(j)}, j \geq 1\}$ является дискретной регенерирующей с постоянной длиной цикла $\beta_i = D$ и моментами регенерации $i \cdot D$, $i \in [1, R_{M-1}]$. Тогда несмещенная оценка \hat{p}_F вероятности p_F является строго состоятельной, т. е. при $R_{M-1} \rightarrow \infty$ с вероятностью 1 имеет место сходимость

$$\hat{p}_F = \frac{\sum_{j=1}^{R_{M-1}} A_j}{R_{M-1} \cdot D} \rightarrow \frac{\mathbb{E} \sum_{j=1}^D I^{(j)}}{D} = p_F. \quad (27)$$

Таблица 3. Сравнение оценок p_F в методах Монте-Карло и расщепления (Си++)
Table 3. Comparison of the estimates of p_F in Monte Carlo and splitting methods (C++)

λ_{K-1}, s	n	p_F	RER_{MC}	RER_{RS}	t_{MC}	t_{RS}	RE_{MC}	RE_{RS}
$10^3, 50$	10^4	$8,75 \cdot 10^{-3}$	0,42	0,48	0,037	0,012	0,104	0,984
$10^4, 5 \cdot 10^2$	10^4	$8,79 \cdot 10^{-4}$	2,89	1,69	0,037	0,010	0,318	2,167
$10^5, 5 \cdot 10^3$	10^5	$8,79 \cdot 10^{-5}$	3,84	0,95	0,389	0,095	0,366	3,254
$10^6, 5 \cdot 10^4$	10^7	$8,79 \cdot 10^{-6}$	0,75	1,80	37,83	6,56	0,125	1,967
$10^7, 5 \cdot 10^5$	10^8	$8,79 \cdot 10^{-7}$	8,51	3,99	378,0	25,06	0,166	3,188

Эксперименты показали, что, как и в однородном случае, метод расщепления дает выигрыш по времени построения циклов регенерации. Более того, из таблицы 3 видно (столбцы RER_{MC} , RER_{RS}), что оценка по методу расщепления является более близкой к аналитическому решению, т. к. имеет меньшую относительную экспериментальную ошибку. Более того, для метода расщепления во всех экспериментах $RER < 4\%$, тогда как метод Монте-Карло показал $RER > 8\%$ для вероятности порядка 10^{-7} . Тем не менее для заданного числа циклов метод расщепления имеет большую дисперсию, чем метод Монте-Карло, а следовательно, и большую относительную ошибку оценивания.

Замечание 2. Качество оценивания в методе расщепления существенно зависит от выбора уровней и числа расщеплений. Тем не ме-

Поскольку для экспоненциального неоднородного случая p_F можно вычислить явно по формуле (13), то для удобства сравнения оценки с точным решением подсчитаем относительную экспериментальную ошибку (relative experimental error, [20]) для обоих методов МС и RS по формуле (в %):

$$RER[\hat{p}_F] = |\hat{p}_F - p_F| \cdot 100/p_F.$$

В таблице 3 приведены результаты запуска программы на языке Си++ для метода Монте-Карло и метода расщепления. Как и следовало ожидать, время моделирования методом Монте-Карло на языке Си++ при одинаковых фиксированных параметрах существенно меньше, чем для языка python (см. табл. 1).

нее для процесса деградации система уровней определена изначально стадиями деградации процесса и не может подбираться оптимально. Поскольку время до отказа V является случайной величиной, то использовать процедуру настройки как для стандартного метода расщепления (pilot run [17, 19]) не представляется возможным. В этой связи для уменьшения относительной ошибки оценивания возможно комбинировать метод расщепления с условным методом Монте-Карло [6].

Для вычисления асимптотической функции надежности (4) необходимо получить оценку средней длины цикла без отказа $\mathbb{E}[Y_{NF}]$. Результаты моделирования методами Монте-Карло и расщепления в таблице 4 можно сравнить с аналитическим выражением по формуле (23).

Таблица 4. Результаты вычисления $\mathbb{E}[Y_{NF}]$ методами MC и RS
 Table 4. Estimation results of $\mathbb{E}[Y_{NF}]$ by MC and RS methods

λ_{K-1}	n	$\mathbb{E}[Y_{NF}]$	$\hat{\mathbb{E}}[Y_{NF}]_{MC}$	$\hat{\mathbb{E}}[Y_{NF}]_{RS}$
10^3	10^5	0,528497	0,528150	0,528275
10^4	10^5	0,502851	0,502976	0,502807
10^5	10^5	0,500285	0,500063	0,500282
10^6	10^7	0,500029	0,499987	0,500030
10^7	10^8	0,500003	0,499961	0,500438

Как видно из таблицы 4, оба метода показывают хорошую близость оценки к точному решению, однако при одинаковом числе циклов метод расщепления является более точным.

Отметим, что предлагаемый алгоритм позволяет за один прогон построить оценки одновременно для всех необходимых характеристик цикла регенерации и оценить вероятность отказа.

Принцип построения доверительного интервала для процесса деградации с использованием метода расщепления был описан в работе [5]. Напомним, что классический регенеративный метод предполагает независимость и одинаковую распределенность циклов регенерации.

Когда для построения циклов используется метод расщепления, то очевидным образом циклы регенерации являются зависимыми (подробнее см. в [4]).

Для случая зависимых, но одинаково распределенных циклов можно воспользоваться центральной предельной теоремой для стационарной в узком смысле последовательности k -зависимых с.в. с конечной дисперсией (см. [1, 8]). При $k = 1$ для однозависимых циклов формула доверительного оценивания содержит ковариацию между двумя зависимыми циклами (см. в [16]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый имитационный алгоритм для ускоренного моделирования циклов регенерации процесса деградации позволяет строить оценки основных характеристик процесса в случае, когда аналитические результаты получить невозможно. Для неоднородного процесса были предложены аналитические результаты и проведено сравнение с оценками, построенными стандартным методом Монте-Карло и методом расщепления. В дальнейшем планируется адаптировать условный метод Монте-Карло для процесса деградации и объединить с техникой расщепления, это позволит уменьшить дисперсию оценки.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-07-00187, 18-07-00147).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. 576 с.
2. Bibinger M. Notes on the sum and maximum of independent exponentially distributed random variables with different scale parameters. arXiv preprint arXiv:1307.3945, 2013.
3. Botev Z. I., Kroese D. P. Efficient Monte Carlo simulation via the generalized splitting method // Statistics and Computing. 2012. Vol. 22, no. 1. P. 1–16. doi: 10.1007/s11222-010-9201-4
4. Borodina A. V. Regenerative modification of the splitting method for estimating the overload probability in queuing systems: PhD Thesis. Petrozavodsk State University, 2008 (in Russian).
5. Borodina A. V., Efrosinin D. V., Morozov E. V. Application of Splitting to Failure Estimation in Controllable Degradation System // Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds). Distributed Computer and Communication Networks. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham. 2017. Vol. 700. P. 217–230. doi: 10.1007/978-3-319-66836-9
6. Chan J. C. C., Kroese D. P. Rare-event probability estimation with conditional Monte Carlo // Ann. Oper. Res. 2011. Vol. 189. P. 43. doi: 10.1007/s10479-009-0539-y
7. Efrosinin D. V., Farhadov M. P. Optimal management of the system with the gradual and instantaneous failures // Dependability. 2009. No. 1(28). P. 27–42 (in Russian).
8. Ferguson T. S. A course in large sample theory: Texts in Statistical Science. Chapman and Hall/CRC, 1996. 256 p.
9. Garvels M. The splitting method in rare event simulation: PhD Thesis. The University of Twente, The Netherlands, 2000.

10. Glynn P. W. Some topics in regenerative steady state Simulation // *Acta Applic. Math.* 1994. Vol. 34. P. 225–236. doi: 10.1007/BF00994267

11. Glynn P. W., Iglehart D. L. Conditions for the applicability of the regenerative method // *Management Science.* 1993. Vol. 39. P. 1108–1111. doi: 10.1287/mnsc.39.9.1108

12. Glynn P. W., Iglehart D. L. A joint central limit theorem for the sample mean and regenerative variance estimator // *Annals of Operations Research.* 1987. Vol. 8. P. 41–55. doi: 10.1007/BF02187081

13. Heegaard P. E. A survey of Speedup simulation Techniques: Workshop tutorial on Rare Event Simulation, Aachen, Germany, 1997.

14. Heidelberger P. Fast simulation of rare events in queuing and reliability Models // *Performance Evaluation of Computers and Communications Systems.* Springer-Verlag, LN in Computer Sci, 1993. Vol. 729. P. 165–202.

15. Lisniansky A., Levitin G. Multi-state system reliability: assessment, optimization and application. New Jersey, London, Singapore, Hong-Kong: World Scientific, 2003. doi: 10.1142/5221

16. Morozov E., Aminova I. Steady-state simulation of some weak regenerative networks

// *European Transactions on Telecommunications ETT.* 2002. Vol. 13, no. 4. P. 409–418. doi: 10.1002/ett.4460130412

17. Rubinstein R. Y., Kroese D. P. Simulation and the Monte Carlo method. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2016. 396 p. doi: 10.1002/9781118631980

18. Rykov V., Dimitrov B. On multi-state reliability systems // *Proc. of Seminar Applied Stochastic Models and Information Processes.* 2002. P. 128–135.

19. Rubinstein R. Y., Ridder A., Vaisman R. Fast Sequential Monte Carlo Methods for Counting and Optimization. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2014. 208 p. doi: 10.1002/9781118612323

20. Vaisman R., Roughan M., Kroese D. P. The multilevel splitting algorithm for graph coloring with application to the Potts model // *Philosophical Magazine.* 2017. doi: 10.1080/14786435.2017.1312023

21. Vill'en Altamirano J. RESTART Vs Splitting: A Comparative Study // *Proceedings of the 11th Workshop on Rare Event Simulation, RESIM'16, Eindhoven (The Netherlands), 2017.* P. 1–12. doi: 10.1016/j.peva.2018.02.002

Поступила в редакцию 08.04.2018

REFERENCES

1. Shiryaev A. N. Veroyatnost' [Probability]. Moscow: Nauka, 1980.

2. Bibinger M. Notes on the sum and maximum of independent exponentially distributed random variables with different scale parameters. arXiv preprint arXiv:1307.3945, 2013.

3. Botev Z. I., Kroese D. P. Efficient Monte Carlo simulation via the generalized splitting method. *Statistics and Computing.* 2012. Vol. 22, no. 1. P. 1–16. doi: 10.1007/s11222-010-9201-4

4. Borodina A. V. Regenerative modification of the splitting method for estimating the overload probability in queuing systems: PhD Thesis. Petrozavodsk State University, 2008 (in Russian).

5. Borodina A. V., Efrosinin D. V., Morozov E. V. Application of Splitting to Failure Estimation in Controllable Degradation System. In: *Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds). Distributed Computer and Communication Networks. Communications in Computer and Information Science, Springer, Cham.* 2017. Vol. 700. P. 217–230. doi: 10.1007/978-3-319-66836-9

6. Chan J. C. C., Kroese D. P. Rare-event probability estimation with conditional Monte Carlo. *Ann. Oper. Res.* 2011. Vol. 189. P. 43. doi: 10.1007/s10479-009-0539-y

7. Efrosinin D. V., Farhadov M. P. Optimal management of the system with the gradual and instantaneous failures. *Dependability.* 2009. No. 1(28). P. 27–42 (in Russian).

8. Ferguson T. S. A course in large sample theory. *Texts in Statistical Science.* Chapman and Hall/CRC, 1996. 256 p.

9. Garvels M. The splitting method in rare event simulation: PhD Thesis. The University of Twente, The Netherlands, 2000.

10. Glynn P. W. Some topics in regenerative steady state simulation. *Acta Applic. Math.* 1994. Vol. 34. P. 225–236. doi: 10.1007/BF00994267

11. Glynn P. W., Iglehart D. L. Conditions for the applicability of the regenerative method. *Management Science.* 1993. Vol. 39. P. 1108–1111. doi: 10.1287/mnsc.39.9.1108

12. Glynn P. W., Iglehart D. L. A joint central limit theorem for the sample mean and regenerative variance estimator. *Annals of Operations Research.* 1987. Vol. 8. P. 41–55. doi: 10.1007/BF02187081

13. Heegaard P. E. A survey of Speedup simulation techniques. Workshop tutorial on Rare Event Simulation, Aachen, Germany, 1997.

14. Heidelberger P. Fast simulation of rare events in queuing and reliability Models. *Performance Evaluation of Computers and Communications*

Systems. Springer-Verlag, LN in Computer Sci., 1993. Vol. 729. P. 165–202.

15. *Lisnuansky A., Levitin G.* Multi-state system reliability: assessment, optimization and application. New Jersey, London, Singapore, Hong-Kong: World Scientific, 2003. doi: 10.1142/5221

16. *Morozov E., Aminova I.* Steady-state simulation of some weak regenerative networks. *European Transactions on Telecommunications*. 2002. Vol. 13, no. 4. P. 409–418. doi: 10.1002/ett.4460130412

17. *Rubinstein R. Y., Kroese D. P.* Simulation and the Monte Carlo method. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2016. 396 p. doi: 10.1002/9781118631980

18. *Rykov V., Dimitrov B.* On multi-state reliability systems. *Proc. of Seminar Applied*

Stochastic Models and Information Processes. 2002. P. 128–135.

19. *Rubinstein R. Y., Ridder A., Vaisman R.* Fast Sequential Monte Carlo Methods for Counting and Optimization. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2014. 208 p. doi: 10.1002/9781118612323

20. *Vaisman R., Roughan M., Kroese D. P.* The multilevel splitting algorithm for graph coloring with application to the Potts model. *Philosophical Magazine*. 2017. doi: 10.1080/14786435.2017.1312023

21. *Vill'en Altamirano J.* RESTART Vs Splitting: A Comparative Study. *Proceedings of the 11th Workshop on Rare Event Simulation, RESIM'16, Eindhoven* (The Netherlands), 2017. P. 1–12. doi: 10.1016/j.peva.2018.02.002

Received April 8, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Бородина Александра Валентиновна

научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: borodina@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Тищенко Виталий Анатольевич

студент
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,
Россия, 185910
эл. почта: vitalik1tishenko@gmail.com
тел.: (8142) 719606

CONTRIBUTORS:

Borodina, Alexandra

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910
Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: borodina@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Tishenko, Vitalii

Petrozavodsk State University
33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: vitalik1tishenko@gmail.com
tel.: (8142) 719606

УДК 519.6:539.2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ГИДРИДООБРАЗОВАНИЯ

Ю. В. Заика, Н. И. Родченкова, К. В. Грудова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. В зависимости от уровня содержания водорода и температуры водород может находиться в циркониевых сплавах в виде твердого раствора или в виде гидридов. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками образования и развития трещин. Проблема состоит в моделировании динамики свободной границы фазового перехода и оценке распределений концентраций в гидриде и в сплаве. В статье представлены математическая модель гидрирования циркониевого сплава с учетом фазового перехода (гидридообразования), итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи со свободной границей раздела фаз на основе неявных разностных схем и результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: гидрирование; нелинейные краевые задачи со свободной границей; разностные схемы; численное моделирование.

Yu. V. Zaika, N. I. Rodchenkova, K. V. Grudova. NUMERICAL MODELLING OF DYNAMICS OF FREE BOUNDARY OF HYDRIDE FORMATION

One of the most important requirements for the reactor's active zone materials (made of zirconium alloys) is low hydrogen absorptivity since hydrogen embrittlement may cause zirconium cladding damage. Depending on the hydrogen content and operation temperature, hydrogen may be present in zirconium alloys as a solid solution or as hydrides. Hydrides have the greatest embrittlement effect on alloys as they can form and enlarge cracks. The problem is to model the dynamics of the moving boundary of phase transition and to estimate the concentration distribution in hydride and in solution. This paper presents a mathematical model of zirconium alloy hydrogenation taking into account phase transition (hydride formation), the iterative computational algorithm for solving the nonlinear boundary-value problem with free phase boundary based on implicit difference schemes, and the results of computational experiments. The study was carried out under state order to the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

Key words: hydrogenation; nonlinear boundary-value problems with free phase boundary; difference schemes; numerical simulation.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к взаимодействию изотопов водорода с конструкционными материалами носит многоплановый характер [1–5, 8, 9, 11]. Энтузиасты говорят не только об энергетике, но и о водородной экономике [11]. Некоторые модели дегидрирования и водородопроницаемости, связанные с тематикой данной статьи, исследованы в [7, 12–15]. Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. В зависимости от уровня содержания водорода и температуры водород может находиться в циркониевых сплавах в виде твердого раствора или в виде гидридов. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками образования трещин.

При разработке математической модели гидрирования авторы следовали работам [6, 10]. Проблема состоит в моделировании динамики свободной границы фазового перехода и оценке распределений концентраций в гидриде и в сплаве. В статье представлены математическая модель гидрирования пластины из циркониевого сплава с учетом фазового перехода (гидридообразования) и итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи со свободной границей раздела фаз на основе неявных разностных схем.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРИРОВАНИЯ

Вначале кратко опишем условия эксперимента (подробнее см. [10]). Пластина из сплава $Zr-1Nb$ шлифуется с одной стороны, другая сторона практически водородонепроницаема, торцами пренебрегаем; температура образца T и давление газообразного водорода p поддерживаются постоянными (предпринимаются специальные меры охлаждения).

Выделим тонкий объемный слой, в котором при относительно большом давлении напуска ($p \approx 2$ атм) распределение H можно считать равномерным. Только с некоторой начальной глубины ℓ_0 начинает ощущаться диффузионное сопротивление. Когда концентрация растворенного атомарного водорода достигает определенного предела, начинается образование зародышей гидридной фазы, и этот слой относительно быстро преобразуется в начальную корку гидрида. Этот переходный процесс «от зародышей к корке» в приповерхностном объеме считаем практически мгновенным в масштабе времени последу-

ющего медленного движения фронта гидрирования на заметную глубину. Дальнейший перенос водорода в образец уже осуществляется сквозь растущий слой гидрида со значительно меньшей скоростью.

Обозначим: L — толщина пластины; ℓ_0 — толщина слоя, в который водород абсорбируется относительно легко и еще не ощущается диффузионное сопротивление (будущая начальная корка гидрида); $u(t)$ — концентрация H в ℓ_0 -слое ($1_H/\text{см}^3$); Q — концентрация, по достижении которой локально решетка перестраивается и возникают зародыши гидридной фазы; Q_h — концентрация атомов водорода в гидридной фазе (химически связанный водород, образующий гидрид как вещество); $c(t, x)$ — концентрация растворенного H в $(L - \ell_0)$ -слое; μ — газокинетическая константа. Температура пластины и давление напуска водорода постоянны ($T = \text{const}$, $p = \text{const}$).

Согласно кинетической теории газов плотность J_p падающего на поверхность потока частиц (в данном случае молекул H_2) связана с давлением p по формуле Герца – Кнудсена: $J_p = p/\sqrt{2\pi mkT}$ (k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы H_2). В контексте эксперимента удобно в качестве единиц измерения выбрать $[x, \ell, L] = \text{см}$, $[p] = \text{торр}$. Тогда численно получаем зависимость $J_p = \mu p$, $\mu(T) \approx 2,474 \cdot 10^{22}/\sqrt{T}$ ($[\mu] = 1_H/(\text{торр см}^2 \text{ с})$, $[T] = \text{К}$, под корнем безразмерное численное значение). Поскольку диффундирует атомарный водород, то для единообразия подсчет будем вести в атомах H : $J_p = 2\mu p$. Только малая часть H окажется в абсорбированном состоянии: $J_{\text{abs}} = 2\mu s p$ ($s \ll 1$). Множитель s имеет смысл доли налетающих H , которые оказались в приповерхностном объеме. Объединяем более элементарные стадии физадсорбции, диссоциации и растворения в одну: s — эффективный коэффициент абсорбции.

Этап I: растворение H в $Zr-1Nb$

Для диффузионного слоя толщины $(L - \ell_0)$ имеем стандартную краевую задачу:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad x \in (\ell_0, L), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$c(0, x) = 0, \quad x \in [\ell_0, L],$$

$$c(t, \ell_0) = u(t), \quad \partial_x c(t, L) = 0. \quad (2)$$

Граничное условие $c(t, \ell_0) = u(t)$ отражает непрерывность распределения H в сплаве, а $\partial_x c|_L = 0$ — непроницаемость стороны пластины $x = L$. Здесь и в дальнейшем считаем, что коэффициенты подчиняются закону Аррениуса по температуре, в частности $D =$

$D_0 \exp\{-E_D/[RT]\}$. В течение одного эксперимента поддерживается $T = \text{const}$.

Для концентрации $u(t)$ запишем ОДУ, исходя из баланса потоков:

$$\dot{u}(t)\ell_0 = 2\mu sp - bu^2 + D\partial_x c|_{\ell_0}, \quad u(0) = 0. \quad (3)$$

Содержательный смысл: за 1 с через 1 см^2 абсорбировалось за счет давления $2\mu sp$ атомов H , но есть встречный поток десорбции bu^2 (b — эффективный коэффициент рекомбинации) и диффузионный отток. Рассогласование плотностей этих потоков идет на накопление атомов водорода в ℓ_0 -слое ($\dot{u}\ell_0$). Уравнение (3) нужно рассматривать совместно с (1)–(2), поскольку $u(t)$ определяет граничную концентрацию в (2). При небольшом p (без образования гидрида) в равновесии (когда производные равны нулю) имеем

$$2\mu sp - b\bar{u}^2 = 0 \Rightarrow \bar{u} = \Gamma\sqrt{p}, \quad \Gamma \equiv \sqrt{2\mu sb^{-1}}.$$

Следовательно, динамика (3) в статике согласуется с законом Сиверта $\bar{u} \propto \sqrt{p}$, Γ — коэффициент растворимости. Подчеркнем, что речь — о растворенном атомарном диффузионно подвижном водороде. В эксперименте «насыщение-дегазация» учитывается общее поглощение водорода, включая обратимый захват и гидридные фазы — коэффициент Γ может иметь другой смысл и численное значение. Технически нетрудно учесть обратимый захват H в $(L - \ell_0)$ -слое дефектами материала, но в рассматриваемой задаче считаем ловушки второстепенным фактором.

Этап II: гидридообразование и движение границы фазового перехода

По достижении концентрации $u(t)$ порогового уровня $Q = Q(T)$ происходит образование зародышей гидрида (δ -фазы). Дальнейшее поступление абсорбированного атомарного водорода расходуется на рост зародышей до образования сплошной корки гидрида (с концентрацией $Q_h > Q$ химически связанного водорода) и поддержание уровня $c(t, \ell_0) = Q$ в α -фазе раствора. При этом с входной стороны зародыши растут и смыкаются быстрее, общая концентрация водорода уже начинает превышать уровень Q_h за счет дополнительного растворения в гидриде. Когда приток к границе гидридного микрослоя $x = \ell_0$ начинает превышать отток в сплав $Zr - 1Nb$, появляется «движущая сила», и граница фазового перехода начинает смещаться, слой гидрида растет.

Считаем, что этот переходный процесс относительно быстрый. Разумеется, речь не о

строгой последовательности описанных процессов, а о преимущественных стадиях. Детальное уточнение представляет самостоятельный интерес. Но для задачи моделирования динамики границы фазового перехода описание начальных данных имеет скорее смысл технической процедуры организации начальных вычислений, поскольку на длительных временах проявляется эффект сглаживания, характерный для диффузионных дифференциальных уравнений.

За новый отсчет времени ($t = 0$) удобно принять момент, когда в ℓ_0 -слое достигается концентрация $u(t) = Q$. Быстро образуется корка гидрида с концентрацией Q_h . К этому моменту $c(0, x) = \varphi(x)$ (распределение растворенного водорода в α -фазе с предыдущего этапа), $\varphi(\ell_0) = Q$, ℓ_0 -слой уже гидридный и сквозь него диффундирует растворенный H . Речь о диффузионно подвижном атомарном водороде в отличие от химически связанного (гидрид является новым «самостоятельным» материалом). Обозначим концентрацию диффундирующих атомов H в гидриде через $v(t, x)$. Общая концентрация равна $Q_h + v(t, x)$.

В плане второстепенного уточнения можно для диффузионного уравнения (1) незначительное время продолжить вычисления с граничными условиями $c(t, \ell_0) = Q$, $\partial_x c(t, L) = 0$ (пока зерна срastaются в корку), чтобы «подправить» распределение $\varphi(x)$. Далее подобные переходные процессы не учитываем.

В пластине с растущей коркой гидрида ($x = \ell(t)$ — граница раздела фаз, $\ell(0) = \ell_0$) запишем диффузионные уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \ell(t)), \quad (4)$$

$$v(0, x) = 0, \quad x \in [0, \ell_0],$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad x \in (\ell(t), L), \quad (5)$$

$$c(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [\ell_0, L].$$

Здесь D_* — коэффициент диффузии H в новом материале (гидриде). Граничные условия на «входе-выходе» запишем аналогично I:

$$2\mu s_* p - b_* v^2(t, 0) = -D_* \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_L = 0.$$

В гидриде градиент концентрации возникает практически сразу, поскольку диффундировать сквозь δ -фазу значительно труднее. Нет «накопительного» слоя (аналога ℓ_0 -слоя на этапе I). Когда баланс «приток-отток» станет положительным, граница раздела фаз $x = \ell(t)$

станет подвижной и для «склейки» диффузионных уравнений потребуются дополнительные условия на стыке $x = \ell(t)$.

Начнем с уравнения типа уравнения Стефана, описывающего динамику движения свободной границы раздела фаз:

$$\begin{aligned} [v(t, \ell(t)) + Q_h - c(t, \ell(t))] \dot{\ell}(t) = \\ = -D_* \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\ell(t)} + D \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{\ell(t)}. \end{aligned}$$

Появляется разрыв концентраций:

$$v(t, \ell) + Q_h > Q_h > c(t, \ell), \quad \ell = \ell(t).$$

При этом концентрация $v(t, \ell)$ должна быть пренебрежимо малой (нет существенного «сопротивления» со стороны Zr -сплава). Принимаем $v(t, \ell(t)) = 0$. Поступающий поток из δ -фазы практически полностью уходит на формирование нового слоя гидрида (сдвиг границы $x = \ell(t)$) и в раствор. При $c(t, \ell) < Q$ тонкий слой гидрида на границе раздела фаз становится неустойчивым и частично распадается, поэтому полагаем $c(t, \ell) = Q$.

Таким образом, принимаем следующие условия на свободной границе раздела фаз:

$$v(t, \ell(t)) = 0, \quad c(t, \ell(t)) = Q, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$[Q_h - Q] \dot{\ell}(t) = -D_* \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\ell} + D \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{\ell}, \quad (7)$$

$t \geq t_s > 0$. Подчеркнем, что уравнение Стефана (7) «подключается» к модели, когда правая часть (баланс потоков) станет положительной. Так, условно выбран $t = 0$. До этого момента краевые задачи в слоях решаются численно независимо при $\ell = \ell_0$. Фронт движется ($t \geq t_s$) с общей концентрацией Q_h в сторону $x = L$. В пределе имеем $\ell(t) \rightarrow L$ ($t \gg 1$). Уровень $c(t, x)$ выравнивается, не превышая значение Q . Тонким «остаточным» слоем $Zr-1Nb$ в расчетах уже можно пренебречь.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОДЕЛИ: ПЕРЕХОД К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ

Этап I. Сделаем замену времени $t = L^2 D^{-1} t'$, где $L^2 D^{-1}$ – характерное время диффузии, и замену независимой переменной $x = \ell_0 + z[L - \ell_0]$, $\hat{c}(t', z) = c(t(t'), x(z))$. Введем соответствующую нормировку концентраций и оставим прежнее обозначение для функции \hat{c} : $\hat{c} := \hat{c}/\bar{u}$, $\hat{u} := u/\bar{u}$, $\bar{u} = \sqrt{2\mu sp/b}$.

Краевая задача (1)–(3) после замены переменных примет следующую форму:

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t'} = \left[\frac{L}{L - \ell_0} \right]^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2}, \quad \hat{c}(0, z) = 0, \quad (8)$$

$$z \in [0, 1], \quad \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=1} = 0, \quad \hat{c}(t', 0) = \hat{u}(t'), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{dt'} = 2\mu sp \cdot \frac{L^2}{D\ell_0 \bar{u}} - \frac{L^2 \bar{u}}{D\ell_0} \cdot b\hat{u}^2 + \\ + \frac{L^2}{\ell_0 [L - \ell_0]} \cdot \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \hat{u}(0) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что вследствие

$$2\mu sp L^2 [D\ell_0 \bar{u}]^{-1} = bL^2 \bar{u} [D\ell_0]^{-1}$$

уравнение (10) можно переписать в виде

$$\frac{d\hat{u}}{dt'} = d_1(1 - \hat{u}^2) + d_2 \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \hat{u}(0) = 0, \quad (11)$$

$$d_1 \equiv bL^2 \bar{u} [D\ell_0]^{-1}, \quad d_2 \equiv L^2 [\ell_0 (L - \ell_0)]^{-1}.$$

Этап II. Сделаем замену времени $t = \frac{L^2}{\sqrt{DD_*}} t'$ и пространственной переменной:

$$(4): \quad x = \ell(t')y, \quad v \rightarrow \hat{v}(t', y);$$

$$(5): \quad x = \ell(t') + z[L - \ell(t')], \quad c \rightarrow \hat{c}(t', z).$$

Введем соответствующие нормировки и оставим прежние обозначения для функций $\hat{v} := \hat{v}/\bar{v}$, $\hat{c} := \hat{c}/\bar{u}$, $\bar{v} = \sqrt{2\mu s_* p/b_*}$, $\bar{u} = \sqrt{2\mu sp/b}$.

Дополнительно введем функцию

$$\lambda(t') \equiv \frac{\dot{\ell}(t')}{\ell(t')} = \frac{d}{dt'} \ln \ell(t'),$$

где точка означает дифференцирование по t' .

Краевая задача (4)–(6) после замены переменных принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t'} = \sqrt{\frac{D_*}{D}} \left(\frac{L}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \lambda(t')y \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad (12)$$

$$t' > 0, \quad y \in (0, 1), \quad \hat{v}(0, y) = 0, \quad \hat{v}(t', 1) = 0,$$

$$d_* [1 - \hat{v}^2(t', 0)] = - \left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad d_* \equiv \frac{b_* \ell(t') \bar{v}}{D_*}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t'} = \sqrt{\frac{D}{D_*}} \left[\frac{L}{L - \ell} \right]^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2} + \frac{\lambda(t')(1 - z)}{L\ell^{-1}(t') - 1} \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\hat{c}(0, z) = \psi(z), \quad \hat{c}(t', 0) = \frac{Q}{\bar{u}}, \quad \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=1} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{Q_h}{\bar{u}} - \hat{c}(t', 0) \right] \cdot \lambda(t') = - \sqrt{\frac{D_*}{D}} \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \left(\frac{L}{\ell} \right)^2 \cdot \left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right|_1 + \\ + \sqrt{\frac{D}{D_*}} \cdot \frac{L^2}{\ell(t') [L - \ell(t')]} \cdot \left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (t' \geq t'_s). \end{aligned} \quad (16)$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Этап I: растворение H в $Zr-1Nb$

Следуя технике разностных схем, введем сетку $\{z_m = mh_z, m = 0, 1, \dots, M\}$ ($h_z = 1/M$) по пространственной переменной и сетку по времени $\{t'_n = nh_{t'}, n = 0, 1, \dots\}$. Обозначим через $\{\hat{C}_m^n\}$, $\{\hat{U}^n\}$ приближенные значения концентраций в $(L - \ell_0)$ -слое ($c(t'_n, z_m)$) и в ℓ_0 -слое ($u(t'_n)$) соответственно. Рассмотрим неявную схему для уравнения диффузии (8) и неявный метод Эйлера для ОДУ (11)

$$\frac{\hat{C}_m^{n+1} - \hat{C}_m^n}{h_{t'}} = \left[\frac{L}{L - \ell_0} \right]^2 \frac{\hat{C}_{m-1}^{n+1} - 2\hat{C}_m^{n+1} + \hat{C}_{m+1}^{n+1}}{h_z^2}, \quad (17)$$

$$\frac{\hat{U}^{n+1} - \hat{U}^n}{h_{t'}} = d_1[1 - (\hat{U}^{n+1})^2] + d_2 \frac{-3\hat{C}_0^{n+1} + 4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1}}{2h_z}. \quad (18)$$

Рассмотрим уравнения перехода с n -го слоя на $(n+1)$ -й слой по времени ($n \geq 0, 0 < m < M$): $w_1 \equiv h_z^2 h_{t'}^{-1} [L - \ell_0]^2 L^{-2}$,

$$\hat{C}_{m-1}^{n+1} - [w_1 + 2]\hat{C}_m^{n+1} + \hat{C}_{m+1}^{n+1} + w_1\hat{C}_m^n = 0.$$

Значения в начальный момент времени известны: $\hat{C}_m^0 = \hat{U}^0 = 0$ ($0 \leq m \leq M$). Следуя методу прогонки (алгоритм Томаса), ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(n+1)$ -м слое по времени в виде

$$\hat{C}_m^{n+1} = \alpha_{m+1}\hat{C}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

Прогоночные коэффициенты следующие: ($m = 1, \dots, M-1$): $\alpha_{m+1} = [2 + w_1 - \alpha_m]^{-1}$,

$$\beta_{m+1} = \frac{\beta_m + w_1\hat{C}_m^n}{2 + w_1 - \alpha_m}. \quad (19)$$

Для нахождения начальных коэффициентов α_1, β_1 воспользуемся следующими соображениями. Подсчитаем предварительно значения $\hat{C}_{1,2}^{n+1}$ по явной разностной схеме (в равенстве (17) справа заменяем $n+1$ на n). Подставляя эти значения в (18) и используя второе условие (9) ($\hat{U}^{n+1} = \hat{C}_0^{n+1}$), в итоге получаем выражение $\hat{C}_0^{n+1} = f_1(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1})$ (положительный корень квадратного уравнения):

$$\begin{aligned} d_1(\hat{C}_0^{n+1})^2 + A_1\hat{C}_0^{n+1} + A_2 &= 0, \\ A_1 &= h_{t'}^{-1} + 3d_2[2h_z]^{-1}, \quad A_2 = -d_1 + \\ &+ d_2[\hat{C}_2^{n+1} - 4\hat{C}_1^{n+1}][2h_z]^{-1} - \hat{U}^n[h_{t'}]^{-1}. \end{aligned}$$

Зная численное значение \hat{C}_0^{n+1} и выражение $\hat{C}_0^{n+1} = \alpha_1\hat{C}_1^{n+1} + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \hat{C}_0^{n+1}$. По α_1, β_1 вычисляем оставшиеся прогоночные коэффициенты $\alpha_m, \beta_m, m = 2, \dots, M$.

Ближайшая цель — найти значение \hat{C}_M^{n+1} , необходимое для реализации обратного метода прогонки. Рассмотрим первое краевое условие непроницаемости при $z = 1$ в (9). Используя разностную аппроксимацию

$$\partial_z \hat{c}|_{z=1} \approx [\hat{C}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{C}_M^{n+1}]/2h_z = 0$$

и соотношение $\hat{C}_m^{n+1} = \alpha_{m+1}\hat{C}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}$ при $M-2, M-1$, находим выражение $\hat{C}_M^{n+1} = [(4 - \alpha_{M-1})\beta_M - \beta_{M-1}][(\alpha_{M-1} - 4)\alpha_M + 3]^{-1}$.

Следующий этап: с текущими приближениями значений $\hat{C}_0^{n+1}, \hat{C}_M^{n+1}$ решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций $C_{1,2}^{n+1}$ (и остальные значения C_m^{n+1} для $m = 3, \dots, M-1$). Далее снова пользуемся формулой $\hat{C}_0^{n+1} = f_1(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1})$. После этого корректируем значения прогоночных коэффициентов (19), определяем $\hat{C}_M^{n+1} = [(4 - \alpha_{M-1})\beta_M - \beta_{M-1}][(\alpha_{M-1} - 4)\alpha_M + 3]^{-1}$ и повторяем вычисления (возвращаясь к началу абзаца) до установления граничных значений $\hat{C}_{0,M}^{n+1}$ (обычно 2-3 итерации). Критерием окончания вычислений на этапе I выбрано условие $\hat{U}^{n+1} \geq Q/\bar{u} = 0,98$.

Результат окончания I этапа: образовался гидридный слой толщины ℓ_0 с концентрацией химически связанного водорода Q_h , а в слое раствора толщины $(L - \ell_0)$ имеется распределение концентрации растворенного водорода $\varphi(x), \varphi(\ell_0) = Q$.

Этап II: гидридообразование и движение границы фазового перехода

Начальное распределение $\psi(z)$ ($\varphi(x)$) определяется первым этапом. Формально можно забыть о физическом смысле функции $\ell(t')$ как границы раздела фаз и рассматривать ее как функциональный параметр. По решению $\ell(t')$ (зная $\lambda(t')$) определяются коэффициенты модели. Поэтому вычислительный алгоритм основан на неявных разностных схемах и носит итерационный характер. Итерации будут связаны с уточнением значения $\lambda(t')$ на каждом временном слое.

Введем следующие сетки: $\{y_m = mh_y, m = 0, 1, \dots, M\}$, $h_y = 1/M$ — шаг по пространственной переменной y ; $\{z_k = kh_z, k = 0, 1, \dots, K\}$, $h_z = 1/K$ — шаг по пространственной переменной z ; $\{t'_n = nh_{t'}, n = 0, 1, \dots\}$,

$h_{t'}$ — шаг по времени t' . Обозначим через $\{\hat{V}_m^n\}$, $\{\hat{C}_k^n\}$ приближенные значения концентраций в гидридном $\ell(t')$ -слое ($\hat{v}(t'_n, y_m)$) и в $(L - \ell(t'))$ -слое раствора ($\hat{c}(t'_n, z_k)$).

1. Начальный этап: нахождение $\lambda > 0$

При $\ell = \ell_0$ будем рассматривать последовательно и независимо две краевые задачи: сначала для гидридного слоя, потом для слоя раствора в сплаве $Zr-1Nb$. Граница раздела фаз на данном этапе неподвижна, поэтому полагаем в (12), (14) $\lambda = 0$ ($\ell = 0$). Опишем алгоритм перехода с n -го на $(n + 1)$ -й слой по t' .

1.1 Гидридный слой

Рассмотрим краевую задачу (12)–(13) при $\lambda = 0$, $\ell = \ell_0$:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t'} = \sqrt{\frac{D_*}{D}} \cdot \left(\frac{L}{\ell_0}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2}, \quad y \in (0, 1), \quad (20)$$

$$\hat{v}(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad \hat{v}(t', 1) = 0,$$

$$d_* [1 - \hat{v}^2(t', 0)] = -\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad d_* \equiv \frac{b_* \ell_0 \bar{v}}{D_*}. \quad (21)$$

Для уравнения диффузии (20) рассмотрим неявную разностную схему на $(n + 1)$ -м слое: $m = 1, \dots, M - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{V}_m^{n+1} - \hat{V}_m^n}{h_{t'}} &= \\ &= \sqrt{\frac{D_*}{D}} \left(\frac{L}{\ell_0}\right)^2 \cdot \frac{\hat{V}_{m-1}^{n+1} - 2\hat{V}_m^{n+1} + \hat{V}_{m+1}^{n+1}}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим уравнения перехода с n -го на $(n + 1)$ -й слой по t' ($0 < m < M$):

$$\hat{V}_{m-1}^{n+1} - [w_2 + 2]\hat{V}_m^{n+1} + \hat{V}_{m+1}^{n+1} + w_2\hat{V}_m^n = 0,$$

$w_2 \equiv [\ell_0/L]^2 \sqrt{D/D_*} h_y^2/h_{t'}$. Начальные данные известны: $\hat{V}_m^0 \equiv 0$ ($0 \leq m \leq M$). Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки в виде $\hat{V}_m^{n+1} = \alpha_{m+1}\hat{V}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}$, $m = 0, \dots, M - 1$. Прогночные коэффициенты ($m = 1, \dots, M - 1$):

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1}{2 + w_2 - \alpha_m}, \\ \beta_{m+1} &= \frac{\beta_m + w_2 \hat{V}_m^n}{2 + w_2 - \alpha_m}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для нахождения начальных коэффициентов α_1 , β_1 воспользуемся следующими соображениями. Подсчитаем предварительно значения $\hat{V}_{1,2}^{n+1}$ по явной разностной схеме (в равенстве (22) справа заменяем $n + 1$ на n). На

$(n + 1)$ -м слое по t' аппроксимируем производную $\partial_y \hat{v}|_{y=0} \approx [-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}]/2h_y$ и подставляем в граничное условие (21):

$$d_* [1 - (\hat{V}_0^{n+1})^2] = -\frac{-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}}{2h_y}.$$

В итоге получаем $\hat{V}_0^{n+1} = f_2(\hat{V}_1^{n+1}, \hat{V}_2^{n+1})$ (положительный корень квадратного уравнения):

$$\begin{aligned} (\hat{V}_0^{n+1})^2 + B_1 \hat{V}_0^{n+1} + B_2 &= 0, \\ B_1 &= 3[2h_y d_*]^{-1}, \quad d_* = b_* \ell_0 \bar{v} D_*^{-1}, \\ B_2 &= [\hat{V}_2^{n+1} - 4\hat{V}_1^{n+1}][2h_y d_*]^{-1} - 1. \end{aligned}$$

Зная численное значение \hat{V}_0^{n+1} и выражение для $\hat{V}_0^{n+1} = \alpha_1 \hat{V}_1^{n+1} + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{V}_0^{n+1}$. По α_1 , β_1 вычисляем оставшиеся прогночные коэффициенты α_m , β_m при $m = 2, \dots, M$ по формулам (23).

Ближайшая цель — найти значение \hat{V}_M^{n+1} , необходимое для реализации прогонки. Из краевого условия $\hat{v}(t', 1) = 0 \Rightarrow \hat{V}_M^{n+1} = 0$.

Следующий этап: с текущими приближениями значений $\hat{V}_{0,M}^{n+1}$ решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и находим новые приближения концентраций $\hat{V}_{1,2}^{n+1}$ (и остальные \hat{V}_m^{n+1} , $m = 3, \dots, M - 1$).

После этого возвращаемся к уточнению $\hat{V}_0^{n+1} = f_2(\hat{V}_1^{n+1}, \hat{V}_2^{n+1})$ в силу (21), корректируем прогночные коэффициенты (23) и повторяем вычисления (возвращаясь к предыдущему абзацу) до установления распределения $\hat{v}(t'_{n+1}, y)$ [\hat{V}_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M$]. Шаг по времени мал, достаточно нескольких итераций.

1.2 Слой раствора $Zr-1Nb$

Переходим к краевой задаче (14)–(15), возвращаясь к предыдущему слою t'_n : $\lambda = 0$,

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t'} = \sqrt{\frac{D}{D_*}} \left[\frac{L}{L - \ell_0}\right]^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2}, \quad (24)$$

$$\hat{c}(0, z) = \psi(z), \quad \hat{c}(t', 0) = \frac{Q}{\bar{u}}, \quad \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0. \quad (25)$$

Для уравнения диффузии (24) рассмотрим неявную схему на $(n + 1)$ -м слое: $k = 1, \dots, K - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_k^{n+1} - \hat{C}_k^n}{h_{t'}} &= \\ &= \sqrt{\frac{D}{D_*}} \left[\frac{L}{L - \ell_0}\right]^2 \cdot \frac{\hat{C}_{k-1}^{n+1} - 2\hat{C}_k^{n+1} + \hat{C}_{k+1}^{n+1}}{h_z^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения перехода на $(n+1)$ -й слой ($0 < k < K$): $w_4 \equiv [(L - \ell_0)/L]^2 \sqrt{D_*/D} h_z^2/h_{t'}$,

$$\hat{C}_{k-1}^{n+1} - [w_4 + 2]\hat{C}_k^{n+1} + \hat{C}_{k+1}^{n+1} + w_4\hat{C}_k^n = 0.$$

Начальные данные: $\hat{C}_k^0 = \psi(z_k)$ ($0 \leq k \leq K$). Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах на $(n+1)$ -м слое по t' в виде $\hat{C}_k^{n+1} = \alpha_{k+1}\hat{C}_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}$, $k = 0, \dots, K-1$. Прогночные коэффициенты ($k = 1, \dots, K-1$):

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{1}{2 + w_4 - \alpha_k}, \\ \beta_{k+1} &= \frac{\beta_k + w_4 \hat{C}_k^n}{2 + w_4 - \alpha_k}. \end{aligned} \quad (27)$$

Зная численное значение $\hat{C}_0^{n+1} = Q/\bar{u}$ (первое граничное условие в (25)) и выражение $\hat{C}_0^{n+1} = \alpha_1\hat{C}_1^{n+1} + \beta_1$, находим начальные коэффициенты $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{C}_0^{n+1}$. По α_1 , β_1 вычисляем оставшиеся коэффициенты α_k , β_k , $k = 2, \dots, K$, по формулам (27).

Теперь найдем значение \hat{C}_K^{n+1} , необходимое для реализации прогонки. Рассмотрим краевое условие непроницаемости в (25). На $(n+1)$ -м слое по t' аппроксимируем производную

$$\left. \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \right|_{z=1} \approx \frac{\hat{C}_{K-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{K-1}^{n+1} + 3\hat{C}_K^{n+1}}{2h_z} = 0$$

и подставляем вместо $\hat{C}_{K-2, K-1}^{n+1}$ выражения $\hat{C}_k^{n+1} = \alpha_{k+1}\hat{C}_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}$ при соответствующих k . В итоге получаем $\hat{C}_K^{n+1} =$

$$= [(4 - \alpha_{K-1})\beta_K - \beta_{K-1}][(\alpha_{K-1} - 4)\alpha_K + 3]^{-1}.$$

Используя \hat{C}_K^{n+1} , решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и находим значения концентрации \hat{C}_k^{n+1} , $k = 1, \dots, K-1$.

1.3 Итерационное уточнение λ

После проведенных вычислений из уравнения (16) находим новое приближение λ . Если $\lambda \leq 0$, то возвращаемся в начало излагаемого алгоритма (пункт 1.1), в противном случае переходим к пункту 2 с текущими распределениями концентраций в качестве начальных данных и начальным значением $\lambda > 0$.

2. Переход от n -го к $(n+1)$ -му слою по t'

Опишем алгоритм нахождения распределений на $(n+1)$ -м слое $\hat{v}(t'_{n+1}, y)$ [\hat{V}_m^{n+1} , $m =$

$0, \dots, M$], $\hat{c}(t'_{n+1}, z)$ [\hat{C}_k^{n+1} , $k = 0, \dots, K$], зная распределения с предыдущего слоя по времени $\hat{v}(t'_n, y)$, $\hat{c}(t'_n, z)$. Рассмотрим последовательно два слоя материала: сначала гидридный, затем слой сплава $Zr-1Nb$ с раствором H (это соответствует и последовательности движения растворенного диффузионно подвижного водорода сквозь материал с течением времени).

Начальное приближение $\lambda(t'_n) \approx \lambda(t'_{n-1})$ берется с предыдущего временного слоя. Параметр $\lambda(t'_n)$ подлежит итерационному уточнению, значение $\ell(t'_n)$ известно.

2.1 Гидридный слой

Для уравнения диффузии (12) в безразмерной форме рассмотрим неявную разностную схему на $(n+1)$ -м слое: $m = 1, \dots, M-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{V}_m^{n+1} - \hat{V}_m^n}{h_{t'}} &= \lambda(t'_n) y_m \cdot \frac{\hat{V}_{m+1}^{n+1} - \hat{V}_{m-1}^{n+1}}{2h_y} + \quad (28) \\ &+ \sqrt{\frac{D_*}{D}} \cdot \left[\frac{L}{\ell(t'_n)} \right]^2 \cdot \frac{\hat{V}_{m-1}^{n+1} - 2\hat{V}_m^{n+1} + \hat{V}_{m+1}^{n+1}}{h_y^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения перехода с n -го слоя на $(n+1)$ -й слой по t' ($n \geq 0$, $0 < m < M$):

$$\begin{aligned} [1 - w_3]\hat{V}_{m-1}^{n+1} - [w_2 + 2]\hat{V}_m^{n+1} + \\ + [1 + w_3]\hat{V}_{m+1}^{n+1} + w_2\hat{V}_m^n = 0, \end{aligned}$$

$$w_2(t'_n) \equiv \sqrt{\frac{D}{D_*}} \cdot \left[\frac{\ell(t'_n)}{L} \right]^2 \cdot \frac{h_y^2}{h_{t'}},$$

$$w_3(t'_n; m) \equiv w_2(t'_n) \cdot \frac{h_{t'}}{h_y} \cdot \frac{\lambda(t'_n) y_m}{2}.$$

Ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(n+1)$ -м слое в виде $\hat{V}_m^{n+1} = \alpha_{m+1}\hat{V}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}$, $m = 0, \dots, M-1$. Прогночные коэффициенты ($m = 1, 2, \dots, M-1$):

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1 + w_3}{2 + w_2 + (w_3 - 1)\alpha_m}, \\ \beta_{m+1} &= \frac{(1 - w_3)\beta_m + w_2 \hat{V}_m^n}{2 + w_2 + (w_3 - 1)\alpha_m}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для нахождения α_1 , β_1 подсчитаем предварительно значения $\hat{V}_{1,2}^{n+1}$ по явной разностной схеме (в равенстве (28) справа заменяем $n+1$ на n). На $(n+1)$ -м слое по t' аппроксимируем

$$\partial_y \hat{v}|_{y=0} \approx [-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}]/2h_y$$

и подставляем в граничное условие (13):

$$d_* [1 - (\hat{V}_0^{n+1})^2] = -\frac{-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}}{2h_y}.$$

В итоге получаем $\hat{V}_0^{n+1} = f_2(\hat{V}_1^{n+1}, \hat{V}_2^{n+1})$ (положительный корень квадратного уравнения):

$$(\hat{V}_0)^2 + B_1 \hat{V}_0 + B_2 = 0, \quad B_1 = 3[2h_y d_*]^{-1},$$

$$B_2 = [\hat{V}_2 - 4\hat{V}_1][2h_y d_*]^{-1} - 1, \quad d_* = b_* \ell \bar{v} D_*^{-1},$$

$V = V^{n+1}$, $\ell = \ell(t'_n)$. Зная значение \hat{V}_0^{n+1} и выражение $\hat{V}_0^{n+1} = \alpha_1 \hat{V}_1^{n+1} + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{V}_0^{n+1}$. По α_1 , β_1 вычисляем оставшиеся прогоночные коэффициенты α_m , β_m , $m = 2, \dots, M$, по формулам (29).

Теперь найдем значение \hat{V}_M^{n+1} , необходимое для реализации прогонки. Из краевого условия $\hat{v}(t', 1) = 0$ получаем $\hat{V}_M^{n+1} = 0$. Следующий этап: с текущими приближениями $\hat{V}_{0,M}^{n+1}$ решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций $\hat{V}_{1,2}^{n+1}$ (и остальные \hat{V}_m^{n+1} , $m = 3, \dots, M-1$).

После этого возвращаемся к уточнению $\hat{V}_0^{n+1} = f_2(\hat{V}_1^{n+1}, \hat{V}_2^{n+1})$ в силу уравнения (13), корректируем значения прогоночных коэффициентов (29) и повторяем вычисления до установления распределения $\hat{v}(t'_{n+1}, y)$ [\hat{V}_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M$]. Шаг по времени мал, так что достаточно нескольких итераций.

2.2 Слой раствора $Zr-1Nb$

Переходим к краевой задаче (14)–(15), возвращаясь к предыдущему слою ($t' = t'_n$).

Для уравнения диффузии (14) в безразмерной форме рассмотрим неявную разностную схему на $(n+1)$ -м слое: $k = 1, \dots, K-1$,

$$\frac{\hat{C}_k^{n+1} - \hat{C}_k^n}{h_{t'}} = \frac{\lambda(t'_n) [1 - z_k]}{L \ell^{-1}(t'_n) - 1} \cdot \frac{\hat{C}_{k+1}^{n+1} - \hat{C}_{k-1}^{n+1}}{2h_z} +$$

$$+ \sqrt{\frac{D}{D_*}} \left[\frac{L}{L - \ell(t'_n)} \right]^2 \cdot \frac{\hat{C}_{k-1}^{n+1} - 2\hat{C}_k^{n+1} + \hat{C}_{k+1}^{n+1}}{h_z^2}. \quad (30)$$

Рассмотрим уравнения перехода с n -го слоя по t' на $(n+1)$ -й слой ($n \geq 0$, $0 < k < K$):

$$[1 - w_5] \hat{C}_{k-1}^{n+1} - [w_4 + 2] \hat{C}_k^{n+1} +$$

$$+ [1 + w_5] \hat{C}_{k+1}^{n+1} + w_4 \hat{C}_k^n = 0,$$

$$w_4(t'_n) \equiv \sqrt{\frac{D_*}{D}} \cdot \left[\frac{L - \ell(t'_n)}{L} \right]^2 \cdot \frac{h_z^2}{h_{t'}},$$

$$w_5(t'_n; k) \equiv w_4(t'_n) \frac{\ell(t'_n)}{L - \ell(t'_n)} \cdot \frac{h_{t'}}{h_z} \cdot \frac{\lambda(t'_n) (1 - z_k)}{2}.$$

Ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(n+1)$ -м слое в виде

$$\hat{C}_k^{n+1} = \alpha_{k+1} \hat{C}_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}, \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Прогоночные коэффициенты ($k = 1, \dots, K-1$):

$$\alpha_{k+1} = \frac{1 + w_5}{2 + w_4 + (w_5 - 1)\alpha_k},$$

$$\beta_{k+1} = \frac{(1 - w_5)\beta_k + w_4 \hat{C}_k^n}{2 + w_4 + (w_5 - 1)\alpha_k}. \quad (31)$$

Зная численное значение $\hat{C}_0^1 = Q/\bar{u}$ (первое из граничных условий (15)) и выражение $\hat{C}_0^1 = \alpha_1 \hat{C}_1^1 + \beta_1$, находим начальные коэффициенты $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{C}_0^1$. По α_1 , β_1 вычисляем оставшиеся прогоночные коэффициенты α_k , β_k , $k = 2, \dots, K$, по формулам (31).

Найдем значение \hat{C}_K^{n+1} , необходимое для прогонки. Рассмотрим краевое условие непроницаемости $\partial_z \hat{c}|_{z=1} = 0$ в (15). На $(n+1)$ -м слое по t' аппроксимируем производную

$$\partial_z \hat{c}|_{z=1} \approx [\hat{C}_{K-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{K-1}^{n+1} + 3\hat{C}_K^{n+1}]/2h_z = 0$$

и подставляем вместо $\hat{C}_{K-2,K-1}^{n+1}$ выражения

$$\hat{C}_{k-1}^{n+1} = \alpha_k \hat{C}_k^{n+1} + \beta_k$$

при соответствующих k . В итоге $\hat{C}_K^{n+1} =$

$$= [(4 - \alpha_{K-1})\beta_K - \beta_{K-1}][(\alpha_{K-1} - 4)\alpha_K + 3]^{-1}.$$

Используя \hat{C}_K^{n+1} , решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и находим значения концентрации \hat{C}_k^{n+1} , $k = 1, \dots, K-1$.

2.3 Итерационное уточнение $\lambda(t'_n)$

После указанных вычислений аппроксимируем производные на $(n+1)$ -м слое

$$\partial_y \hat{v}|_{y=1} \approx [\hat{V}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{V}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{V}_M^{n+1}]/2h_y,$$

$$\partial_z \hat{c}|_{z=0} \approx [-3\hat{C}_0^{n+1} + 4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1}]/2h_z$$

и подставляем их в граничное условие (16):

$$\left[\frac{Qh}{\bar{u}} - \hat{C}_0^{n+1} \right] \lambda(t'_n) =$$

$$= -\sqrt{\frac{D_*}{D}} \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \left[\frac{L}{\ell} \right]^2 \cdot \frac{\hat{V}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{V}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{V}_M^{n+1}}{2h_y} +$$

$$+ \sqrt{\frac{D}{D_*}} \cdot \frac{L^2}{\ell[L - \ell]} \cdot \frac{-3\hat{C}_0^{n+1} + 4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1}}{2h_z}.$$

Отсюда находим новое приближение $\lambda(t'_n) > 0$ и возвращаемся в начало излагаемого алгоритма (пункт 2.1). Через несколько итераций получаем установившееся значение $\lambda(t'_n)$. В итоге считаем, что число $\lambda(t'_n)$ фиксировано.

Далее вычисляем $\dot{\ell}(t'_n) = \lambda(t'_n)\ell(t'_n)$ и в силу

$$\lambda(t'_n) = \frac{d}{dt'} \ln \ell(t')|_{t'_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\ell(t'_n + \Delta t')) \approx \ln \ell(t'_n) + \lambda(t'_n) \cdot \Delta t'$$

определяем $\ln \ell(t'_{n+1})$, $t'_{n+1} = t'_n + \Delta t'$. По значению $\ln \ell(t'_{n+1})$ находим $\ell(t'_{n+1})$ и переходим к слою t'_{n+2} , приняв в качестве начального приближения $\lambda(t'_{n+1}) \approx \lambda(t'_n)$. Далее уточняем значение $\lambda(t'_{n+1})$ и распределения $\hat{v}(t'_{n+2}, y)$, $\hat{c}(t'_{n+2}, z)$ по изложенной схеме (пп. 2.1–2.3).

ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

При тестировании алгоритма использовались следующие входные данные: $L = 6 \times 10^{-2}$ см, $\ell_0 = 1,3 \times 10^{-3}$ см, $p = 1520$ торр, $T = 593$ К, $Q = 6,14 \times 10^{20}$ см⁻³, $Q_h = 6,5 \times 10^{21}$ см⁻³, $D_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ см² с⁻¹, $E_D = 35 \times 10^3$ Дж/моль, $D_{*0} = 1,5 \times 10^{-3}$ см² с⁻¹, $E_{D*} = 59 \times 10^3$ Дж/моль, $b = 5,5 \times 10^{-24}$ см⁴ с⁻¹, $b_* = 3 \times 10^{-27}$ см⁴ с⁻¹, $s = 7 \times 10^{-7}$, $s_* = 6 \times 10^{-8}$. На рисунке представлена возможность анализировать динамику распределения концентраций растворенного водорода в слоях гидрида и сплава с помощью программного обеспечения, разработанного в среде Scilab.

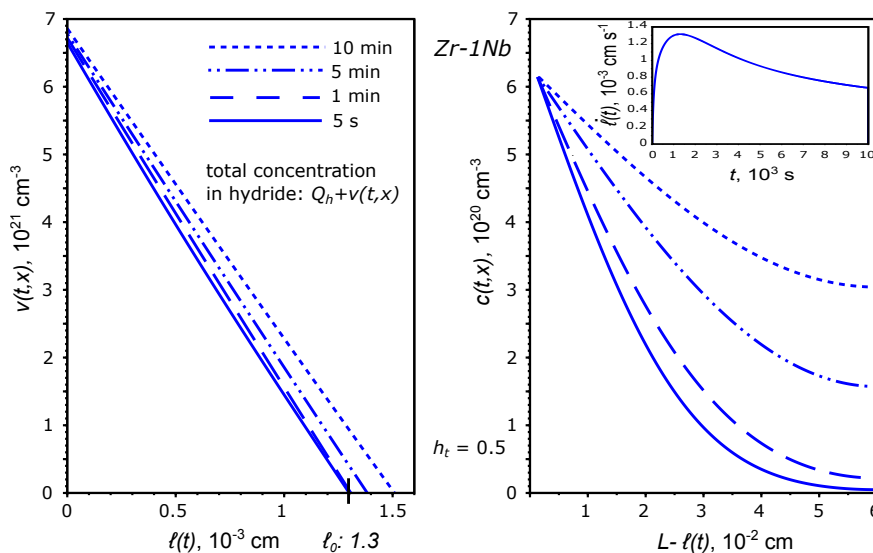
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками развития трещин.

При проведении экспериментальных исследований практически невозможно на основе доступных внешних измерений определить распределение водорода в материале в зависимости от времени, поскольку атомарный растворенный водород является чрезвычайно подвижной фазой внедрения.

В статье представлена модель гидрирования пластины из циркониевого сплава, учитывающая динамику абсорбционно-десорбционных процессов и движение свободной границы раздела фаз (гидрид-металл). На основе неявных разностных схем разработан итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).



Распределения концентраций растворенного водорода в слоях гидрида и сплава
Distribution of dissolved hydrogen concentration across the hydride and the alloy layers

ЛИТЕРАТУРА

1. *Взаимодействие* водорода с металлами / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.
2. *Водород* в металлах / Ред. Г. Алефельд, И. Фёлькль. М.: Мир, 1981. Т. 1, 506 с.; т. 2, 403 с.
3. *Изотопы* водорода. Фундаментальные и прикладные исследования / Ред. А. А. Юхимчук. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 697 с.
4. Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярko С. С. Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.
5. Черданцев Ю. П., Чернов И. П., Тюрин Ю. И. Методы исследования систем металл-водород. Томск: ТПУ, 2008. 286 с.
6. Denisov E. A., Kompaniets M. V., Kompaniets T. N., Bobkova I. S. Peculiarities of hydrogen permeation through Zr-1%Nb alloy and evaluation of terminal solid solubility // *Journal of Nuclear Materials*. 2016. Vol. 472. P. 13–19. doi: 10.1016/j.jnucmat.2016.01.022
7. Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A. Kinetics of hydrogen evolution from MgH₂: Experimental studies, mechanism and modelling // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2010. Vol. 35, iss. 17. P. 9060–9069. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.05.092
8. *Handbook of hydrogen storage: new materials for future energy storage* / Ed. M. Hirscher. Wiley-VCH, 2010.
9. Lototskiy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr. Metal hydride hydrogen

REFERENCES

1. *Vzaimodeistvie vodoroda s metallami* [Interactions of hydrogen with metals]. Moscow: Nauka, 1987. 296 p.
2. *Vodorod v metallakh* [Hydrogen in metals]. Moscow: Mir, 1981. Vol. 1, 2. 506, 403 p.
3. *Izotopy vodoroda. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya* [Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies]. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. 697 p.
4. Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarko S. S. Pronitsaemost' vodoroda cherez metallu [Hydrogen permeability through metals]. Moscow: MIFI, 2008. 144 p.
5. Cherdantsev Yu. P., Chernov I. P., Tyurin Yu. I. Metody issledovaniya sistem metall-vodorod [Methods of studying metal-hydrogen systems]. Tomsk: TPU, 2008. 286 p.
6. Denisov E. A., Kompaniets M. V., Kompaniets T. N., Bobkova I. S. Peculiarities of hydrogen permeation through Zr-1%Nb alloy and

- compressors: a review // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, iss. 11. P. 5818–5851. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.01.158
10. Pushilina N. S., Kudiiarov V. N., Laptev R. S., Lider A. M., Teresov A. D. Microstructure changes in Zr-1Nb alloy after pulsed electron beam surface modification and hydrogenation // *Surface and Coatings Technology*. 2015. Vol. 284. P. 63–68. doi: 10.1016/j.surfcoat.2015.07.082
11. *The hydrogen economy* / Eds. M. Ball, M. Wietschel. Cambridge University Press, 2009.
12. Zaika Yu. V., Bormatova E. P. Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1295–1305. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.07.099
13. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: Diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // *Applied Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 33, iss. 10. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018
14. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface // *Mathematical Modelling*. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.
15. Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V. Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121

Поступила в редакцию 17.04.2018

- evaluation of terminal solid solubility. *Journal of Nuclear Materials*. 2016. Vol. 472. P. 13–19. doi: 10.1016/j.jnucmat.2016.01.022
7. Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A. Kinetics of hydrogen evolution from MgH₂: Experimental studies, mechanism and modelling. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2010. Vol. 35, iss. 17. P. 9060–9069. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.05.092
8. *Handbook of hydrogen storage: new materials for future energy storage*. Wiley-VCH, 2010. 353 p.
9. Lototskiy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr. Metal hydride hydrogen compressors: a review. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, iss. 11. P. 5818–5851. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.01.158
10. Pushilina N. S., Kudiiarov V. N., Laptev R. S., Lider A. M., Teresov A. D. Microstructure changes in Zr-1Nb alloy after pulsed electron beam surface modification and hydrogenation. *Surface and Coatings Technology*. 2015. Vol. 284. P. 63–68. doi: 10.1016/j.surfcoat.2015.07.082

11. *The hydrogen economy*. Cambridge Univ. Press, 2009. 646 p.
12. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1295–1305. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.07.099
13. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: Diffusion peak of TDS-spectrum of dehydrating. *Applied Mathematical*

Modelling. 2009. Vol. 33, iss. 10. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018

14. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface. *Mathematical Modelling. Nova Sci. Publishers*. 2013. P. 269–302.
15. *Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V.* Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121

Received April 17, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Заика Юрий Васильевич

рук. лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 780059

Родченкова Наталья Ивановна

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: nirodchenkova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Грудова Ксения Васильевна

стажер-исследователь
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: grudova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Zaika, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 780059

Rodchenkova, Natalia

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: nirodchenkova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Grudova, Kseniia

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: grudova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

УДК 515.12

ПОЧТИ ВПОЛНЕ ЗАМКНУТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КВАЗИ- F -КОМПАКТЫ

А. В. Иванов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Введено понятие почти вполне замкнутого отображения, обобщающее определение вполне замкнутости. Показано, что свойство почти вполне замкнутости сохраняется при композиции и переходе к пределу счетной обратной трансфинитной последовательности почти вполне замкнутых отображений компактов с первой аксиомой счетности. Определен класс квази- F -компактов (включающий в себя класс компактов Федорчука), для которого установлены утверждения, обобщающие и усиливающие некоторые полученные ранее теоремы об F -компактах.

Ключевые слова: почти вполне замкнутое отображение; компакт Федорчука; квази- F -компакт; резольвента.

A. V. Ivanov. ALMOST FULLY CLOSED MAPPINGS AND QUASI- F -COMPACTA

The notion of an almost fully closed mapping, which generalizes the definition of a fully closed map, is introduced. It is shown that the composition of almost fully closed mappings of compacta with the first axiom of countability is also almost fully closed, and so is the limit of a countable inverse transfinite sequence of the same mappings. A class of quasi- F -compacta (which contains the class of Fedorchuk compacta) is defined. For this class, some statements are proved that generalize and strengthen the known theorems on F -compacta.

Keywords: almost fully closed mapping; Fedorchuk compactum; quasi- F -compactum; resolution.

Понятие вполне замкнутого отображения неразрывно связано с одноименным методом построения контрпримеров в теории компактных пространств, который был разработан В. В. Федорчуком в 60–70-е годы прошлого века (см. [6]). Метод вполне замкнутых отображений (впоследствии переименованный усилиями западных математиков в «метод резольвент») показал исключительную эффективность в решении многих задач общей топологии, что естественно привело к опреде-

лению и исследованию класса компактов, которые могут быть построены этим методом. Такие компакты получили название компактов Федорчука, или F -компактов. По определению, компакт X называется F -компактом, если он допускает разложение в специальный вполне упорядоченный обратный спектр (F -спектр) с вполне замкнутыми соседними проекциями. Наименьшая длина F -спектра, дающего в пределе X , называется спектраль-

ной высотой $sh(X)$ F -компакта X (подробные определения приведены ниже).

Вполне замкнутые отображения были введены как инструмент решения конкретных задач общей топологии, однако впоследствии оказалось, что этот класс обладает уникальными категорными свойствами, которые определяются топологической независимостью прообразов точек при вполне замкнутом отображении (см. обзор В. В. Федорчука [6], II. 1–4). В то же время свойство вполне замкнутости не сохраняется при операциях с отображениями. Так, композиция вполне замкнутых отображений может не быть вполне замкнутой. Также не являются вполне замкнутыми, вообще говоря, произвольные проекции F -спектра, что создает определенные трудности при построении контрпримеров и исследовании класса F -компактов. В связи с этим представляется естественным сформулировать обобщение определения вполне замкнутости с тем, чтобы избавиться от указанных недостатков и в то же время сохранить (по возможности) инструментарий, разработанный для вполне замкнутых отображений. Вариантом решения этой задачи является предложенное в работе понятие почти вполне замкнутого отображения¹.

Определение вполне замкнутого отображения допускает ряд равносильных формулировок. Самая краткая из них такова: отображение² $f : X \rightarrow Y$ вполне замкнуто, если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset X$ пересечение $f(A) \cap f(B)$ конечно. Определение почти вполне замкнутого отображения получается из приведенного выше определения заменой строгого неравенства $|f(A) \cap f(B)| < \omega_0$ на нестрогое $|f(A) \cap f(B)| \leq \omega_0$. Однако при этом оказывается, что композиция почти вполне замкнутых отображений компактов с первой аксиомой счетности всегда почти вполне замкнута. Кроме того, почти вполне замкнутыми являются и все предельные проекции F -спектров длины $\leq \omega_1$. По аналогии с F -компактами могут быть определены квази- F -компакты как пределы квази- F -спектров, определение которых отличается от определения F -спектра заменой требования вполне замкнутости соседних проекций на почти вполне замкнутость. Также по аналогии определяется спектральная высота $qsh(X)$ квази- F -компакта X .

Для квази- F -компактов справедливы утверждения, обобщающие и усиливающие по-

лученные ранее теоремы для F -компактов. В их числе теорема 1, утверждающая, что произведение квази- F -компактов Z_1, Z_2 не может быть квази- F -компактом счетной спектральной высоты, если $qsh(Z_i) = \gamma_i$ и для каждого $i = 1, 2$ существует ординал $\gamma_i - 3$. Из этой теоремы следует, что произведение неметризуемых F -компактов конечной спектральной высоты всегда не является F -компактом счетной спектральной высоты. Тем самым получено усиление основного результата [7], где аналогичное утверждение об антимультпликативности доказано для F -компактов спектральной высоты 3.

В [3] доказана теорема, утверждающая, что если компакт X допускает вполне замкнутое отображение f на метрический компакт K и слои f метризуемы, то такое отображение почти единственно. Более точно, почти все нетривиальные слои любого другого аналогичного отображения обязательно совпадают со слоями f . Оказывается, что такое же утверждение справедливо и для почти вполне замкнутых отображений (теорема 2). Причем класс компактов, который охватывает теорема 2, шире класса F -компактов спектральной высоты 3, о котором фактически идет речь в теореме из [3]. Это следует из существования F -компакта с $qsh(X) = 3 < sh(X) = 4$ (пример 2). Заметим, что вопрос о соотношении классов F -компактов и квази- F -компактов остается открытым.

В работе идет речь исключительно о компактах с первой аксиомой счетности и вполне упорядоченных обратных спектрах, длина которых не превосходит ω_1 . За пределами этой области многие из доказанных утверждений перестают быть верными. Однако такое ограничение соответствует сфере применения метода вполне замкнутых отображений. Подавляющее большинство построенных этим методом примеров имеет спектральную высоту $\leq \omega_1$. Сказанное в полной мере относится и к содержательным общим теоремам об F -компактах (см. [2, 4–6]).

Определение 1. *Отображение $f : X \rightarrow Y$ будем называть почти вполне замкнутым, если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $F_1, F_2 \subset X$*

$$|f(F_1) \cap f(F_2)| \leq \omega_0.$$

Определение квази- F -спектра аналогично определению F -спектра (см. [7]), с той лишь

¹Термин «почти вполне замкнутое отображение» уже использовался в [6], но там он имеет технический характер и (в случае отображений компактных хаусдорфовых пространств) равносильно вполне замкнутости.

²В статье рассматриваются только компактные хаусдорфовы пространства (компакты), все отображения предполагаются непрерывными.

разницей, что требование вполне замкнутости соседних проекций заменяется на почти вполне замкнутость.

Определение 2. Непрерывный вполне упорядоченный обратный спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}$ (γ – ординал) называется квази- F -спектром (F -спектром), если X_0 есть точка, все соседние проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$, $\alpha + 1 < \gamma$ почти вполне замкнуты (вполне замкнуты), а слои $(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(x)$, $x \in X_\alpha$ этих проекций метризуемы.

Отметим, что все пространства X_α квази- F -спектра длины $\gamma \leq \omega_1$ являются компактными с первой аксиомой счетности (см. [4]).

Определение 3. Компакт X называется квази- F -компактом (F -компактом – см. [7]), если существует квази- F -спектр (F -спектр), дающий в пределе X . Наименьшая длина γ такого квази- F -спектра называется спектральной высотой $qsh(X)$ квази- F -компакта X .

Определение спектральной высоты квази- F -компакта аналогично определению спектральной высоты $sh(X)$ F -компакта как наименьшей длины F -спектра, предел которого равен X (см. [7]). Всякий F -компакт X является квази- F -компактом, и $qsh(X) \leq sh(X)$. В [2] показано, что для любого ординала $\alpha \leq \omega_1$, не представимого в виде $\beta + 1$, где β – предельный ординал, существует F -компакт спектральной высоты α .

Очевидно, что ограничение почти вполне замкнутого отображения на любое замкнутое подмножество почти вполне замкнуто. Поэтому для любого квази- F -спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}$ и любого замкнутого подмножества A его предела $X = \lim S$ спектр

$$S_A = \{A_\alpha = \pi_\alpha(A), (\pi_\beta^\alpha)|_{A_\alpha} : \alpha, \beta < \gamma\}$$

также является квази- F -спектром. Поскольку $\lim S_A = A$, отсюда следует, что любое замкнутое подмножество A квази- F -компакта X также является квази- F -компактом и $qsh(A) \leq qsh(X)$.

Следующее предложение устанавливает важный в дальнейшем критерий почти вполне замкнутости.

Предложение 1. Отображение $f : X \rightarrow Y$ почти вполне замкнуто тогда и только тогда, когда для любого непрерывного отображения $g : X \rightarrow K$ компакта X в метрический компакт K

$$|\{y : |g(f^{-1}(y))| > 1\}| \leq \omega_0.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует отображение $g :$

$X \rightarrow K$ такое, что множество $A = \{y : |g(f^{-1}(y))| > 1\}$ несчетно. Зафиксируем метрику на K и для каждого $n \in N$ положим

$$A_n = \{y : \text{diam } g(f^{-1}(y)) \geq 1/n\}.$$

Существует $k \in N$ такое, что $|A_k| > \omega_0$. Несчетное индексированное точками y семейство множеств $T_k = \{g(f^{-1}(y)) : y \in A_k\}$ имеет в пространстве $\text{exp}(g(X))$ непустых замкнутых подмножеств $g(X)$ с топологией Вьеториса точку полного накопления D . При этом $\text{diam } D \geq 1/k$. Возьмем в D две различные точки t_1, t_2 и их окрестности O_{t_1}, O_{t_2} в $g(X)$ с непересекающимися замыканиями. Так как D – точка полного накопления семейства T_k , несчетное подсемейство элементов T_k пересекает обе окрестности O_{t_1} и O_{t_2} : $g(f^{-1}(y)) \cap O_{t_i} \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ при $y \in A' \subset A_k$, $|A'| > \omega_0$.

Положим $F_i = g^{-1}(O_{t_i})$, $i = 1, 2$. По построению имеем $A' \subset f(F_1) \cap f(F_2)$, $|A'| > \omega_0$. Получено противоречие с почти вполне замкнутостью f .

Достаточность. Предположим, что отображение f не является почти вполне замкнутым. Тогда существуют замкнутые непересекающиеся подмножества $F_1, F_2 \subset X$ такие, что $|f(F_1) \cap f(F_2)| > \omega_0$. Возьмем непрерывную функцию $g : X \rightarrow [0, 1]$, которая разделяет F_1 и F_2 : $g(F_1) = \{0\}$, $g(F_2) = \{1\}$. Тогда для любой точки $y \in f(F_1) \cap f(F_2)$ получаем, что $\{0, 1\} \subset g(f^{-1}(y))$. Следовательно, множество $\{y : |g(f^{-1}(y))| > 1\}$ – несчетно. \square

Следующее предложение является обобщением утверждения, доказанного в [6] для вполне замкнутых отображений (см. [6], предложение II.3.10).

Предложение 2. Если $f : X \rightarrow Y$ – почти вполне замкнутое отображение компакта X на метрический компакт Y с метризуемыми слоями $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, то X метризуем тогда и только тогда, когда

$$|\{y : |f^{-1}(y)| > 1\}| \leq \omega_0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $|\{y : |f^{-1}(y)| > 1\}| > \omega_0$. Предположим, что $w(X) \leq \omega_0$. Тогда существует вложение $X \subset I^{\omega_0} = \prod_{n \in N} I_n$ (I – единичный отрезок). Пусть $g_n = \pi_n|_X$, где $\pi_n : I^{\omega_0} \rightarrow I_n$ – проекция произведения на сомножитель. В силу предложения 1, для каждого n множество $A_n = \{y : |g_n(f^{-1}(y))| > 1\}$ имеет мощность $\leq \omega_0$. Следовательно, множество $A = \cup A_n$ также не более чем счетно. Возьмем точку $y \in Y$ такую, что $y \notin A$ и $|f^{-1}(y)| > 1$. В множестве $f^{-1}(y)$ выберем две различные точки

x_1, x_2 . По построению, для каждого $n \in N$ получаем $\pi_n(x_1) = \pi_n(x_2)$. Но это невозможно, поскольку x_1, x_2 – различные точки I^{ω_0} .

Достаточность. Пусть множество $B = \{y : |f^{-1}(y)| > 1\}$ счетно (в случае конечного B отображение f вполне замкнуто и утверждение предложения 2 следует из предложения П.3.10 работы [6]). Занумеруем точки B натуральными числами: $B = \{y_i : i \in N\}$. В каждом слое $f^{-1}(y_i)$ выберем счетную базу $\sigma_i = \{U_k^i : k \in N\}$ (U_k^i – открытые подмножества $f^{-1}(y_i)$). Для каждой пары $U_k^i, U_n^i \in \sigma_i$ такой, что $[U_k^i] \subset U_n^i$, выберем открытое в X множество V_{kn}^i так, что $V_{kn}^i \cap f^{-1}(y_i) = U_k^i$ и $[V_{kn}^i] \cap (f^{-1}(y_i) \setminus U_n^i) = \emptyset$.

Пусть $\nu = \{W_j : j \in N\}$ – счетная база Y . Рассмотрим счетное семейство

$$\sigma = \{V_{kn}^i \cap f^{-1}(W_j) : i, j, k, n \in N\} \cup \{f^{-1}(W_j) : j \in N\}$$

и покажем, что конечные пересечения его элементов образуют базу X . Метризуемость компакта X тем самым будет доказана.

Пусть $x \in X$ и Ox – окрестность точки x . Если $f(x) \notin B$, то $f(x) \in f^{\sharp}(Ox)$ и, следовательно, найдется $W_j \in \nu$ такое, что $x \in f^{-1}(W_j) \subset Ox$.

Пусть теперь $f(x) = y_i$. Покажем, что для любой точки $z \in X, z \neq x$ существует множество $G \in \sigma$ такое, что $x \in G$, а $z \notin [G]$. Если $f(z) \neq y_i$, то существует $W_j \in \nu$ такое, что $y_i \in W_j, f(z) \notin [W_j]$. Тогда в качестве G можно взять $f^{-1}(W_j)$.

Если же $z \in f^{-1}(y_i)$, выберем $U_k^i, U_n^i \in \sigma_i$ так, что $x \in U_k^i \subset [U_k^i] \subset U_n^i$ и $z \notin U_n^i$. Тогда по построению $x \in V_{kn}^i$ и $z \notin [V_{kn}^i]$. Следовательно, множество $G = V_{kn}^i \cap f^{-1}(W_j)$, где $y_i \in W_j$, удовлетворяет сформулированным выше требованиям.

Итак, мы можем утверждать, что

$$\cap\{[G] : x \in G, G \in \sigma\} = \{x\}.$$

Отсюда в силу компактности X следует, что найдется конечный набор множеств $G_i \in \sigma, i = 1, \dots, t$ такой, что $x \in \cap G_i \subset Ox$. \square

Следующее предложение обобщает предложение 3 из [7], в котором установлено аналогичное утверждение для спектров с вполне замкнутыми соседними проекциями.

Предложение 3. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}, \gamma \leq \omega_1$ – вполне упорядоченный непрерывный обратный спектр из компактов с первой аксиомой счетности с почти вполне замкнутыми соседними проекциями $\pi_\alpha^{\alpha+1}, \alpha +$

$1 < \gamma$. Тогда все проекции спектра S , включая предельные проекции π_α , почти вполне замкнуты.

Доказательство. Почти дословное повторение доказательства предложения 3 из [7]. При этом достаточно лишь заметить, что счетное замкнутое подмножество в компакте с первой аксиомой счетности (как и конечное подмножество) имеет тип G_δ . \square

Следствие 1. Все проекции (включая предельные) квази- F -спектра (в частности, F -спектра) длины $\leq \omega_1$ почти вполне замкнуты.

Следствие 2. Композиция почти вполне замкнутых отображений компактов с первой аксиомой счетности почти вполне замкнута.

Следующий пример показывает, что требование первой аксиомы счетности у рассматриваемых пространств существенно.

Пример 1. Существуют вполне замкнутые отображения f и g , композиция которых не является почти вполне замкнутой.

Пусть X – дискретное объединение двух экземпляров одноточечной компактификации несчетного дискретного пространства. Будем считать, что топология одноточечной компактификации задана на отрезке $[0, 1]$ и при этом 0 – единственная ее неизолированная точка. Таким образом, $X = [0, 1]_1 \cup_d [0, 1]_2$. (Точки двух экземпляров отрезка $[0, 1]_i, i = 1, 2$ будем различать соответствующим индексом i .)

Пусть Y – фактор-пространство X по разбиению, единственным нетривиальным элементом которого является пара $\{0_1, 0_2\}$, а $f : X \rightarrow Y$ – факторное отображение. Очевидно, что f вполне замкнуто. Зададим разбиение на Y , нетривиальными элементами которого являются пары $\{t_1, t_2\}, t \in (0, 1]$. Пусть Z – фактор-пространство Y по этому разбиению, а $g : Y \rightarrow Z$ – соответствующее факторное отображение. Поскольку Y является одноточечной компактификацией дискретного пространства, для любой пары непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset Y$ одно из множеств обязательно конечно. Следовательно, любое сюръективное отображение Y вполне замкнуто.

Итак, мы получили два вполне замкнутых отображения f и g , композиция которых не является почти вполне замкнутой, поскольку отображение $g \circ f$ склеивает точки $t_1, t_2 : t \in [0, 1]$ несчетных непересекающихся замкнутых подмножеств $[0, 1]_1, [0, 1]_2 \subset X$. \square

Согласно следствию 1, пределы счетных трансфинитных обратных последовательностей вполне замкнутых отображений компак-

тов с первой аксиомой счетности почти вполне замкнуты. В связи с этим утверждением естественно возникает следующий

Вопрос 1. Верно ли, что любое почти вполне замкнутое отображение (компактов с первой аксиомой счетности) можно представить как предельную проекцию непрерывного вполне упорядоченного спектра с вполне замкнутыми соседними проекциями?

Этот вопрос имеет прямое отношение к основному вопросу статьи о соотношении классов F -компактов и квази- F -компактов:

Вопрос 2. Существуют ли квази- F -компакты (с первой аксиомой счетности), не являющиеся F -компактами?

Определение 4. Квази- F -спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}$ будем называть неприводимым, если для каждой пары индексов α, β , где $\alpha \geq \beta + 2$, отображение π_β^α имеет хотя бы один неметризуемый слой $(\pi_\beta^\alpha)^{-1}(x)$, $x \in X_\beta$.

Предложение 4. Для любого счетного квази- F -спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}$ существует неприводимый квази- F -спектр $S' = \{Y_\delta, p_{\delta'}^\delta : \delta, \delta' < \gamma'\}$ длины $\gamma' \leq \gamma$, имеющий тот же предел: $\lim S' = \lim S$.

Доказательство. Построим по рекурсии трансфинитную последовательность индексов α_δ . Положим $\alpha_0 = 0$. Предположим, что для всех $\delta < \aleph$ уже указаны индексы $\alpha_\delta < \gamma$ так, что:

- 1) $\alpha_\delta < \alpha_{\delta'}$ при $\delta < \delta'$;
- 2) для любого предельного $\aleph' < \aleph$ $\sup\{\alpha_\delta : \delta < \aleph'\} = \alpha_{\aleph'}$;
- 3) прообразы точек (слои) $(\pi_{\alpha_\delta}^{\alpha_{\delta+1}})^{-1}(x)$ метризуемы для любого $x \in X_{\alpha_\delta}$ при $\delta + 1 < \aleph$;
- 4) каждое отображение $\pi_{\alpha_\delta}^{\alpha_{\delta'}}$ имеет неметризуемый слой при $\delta' \geq \delta + 2$.

Рассмотрим систему пространств и отображений

$$S'_\aleph = \{Y_\delta, p_{\delta'}^\delta : \delta, \delta' < \aleph\},$$

где $Y_\delta = X_{\alpha_\delta}$, $p_{\delta'}^\delta = \pi_{\alpha_{\delta'}}^{\alpha_\delta}$. Очевидно, что S'_\aleph — неприводимый квази- F -спектр.

Если множество $\{\alpha_\delta : \delta < \aleph\}$ конфинально γ , то построение заканчивается: спектр S'_\aleph — искомый. В противном случае, если ординал \aleph является предельным, полагаем $\alpha_\aleph = \sup\{\alpha_\delta : \delta < \aleph\}$. Условия 1)–4) при этом будут выполнены. Если же \aleph не является предельным (существует $\aleph - 1$), то здесь возможны два варианта.

1. $\aleph - 1$ — предельный ординал. Тогда полагаем $\alpha_\aleph = \alpha_{\aleph-1} + 1$.

2. Существует $\aleph - 2$. В этом случае рассмотрим множество B , состоящее из таких индексов $\beta > \aleph - 2$, для которых отображение $\pi_{\alpha_{\aleph-2}}^\beta$ имеет хотя бы один неметризуемый слой.

Если B пусто, то все слои отображения $\pi_{\alpha_{\aleph-2}} : \lim S \rightarrow X_{\alpha_{\aleph-2}}$ метризуемы. Тогда мы заменяем уже построенное пространство $Y_{\aleph-1}$ на $\lim S$, а отображение $p_{\aleph-2}^{\aleph-1}$ — на предельную проекцию $\pi_{\alpha_{\aleph-2}}$. В итоге получаем спектр S'_\aleph , который удовлетворяет условию предложения. При этом $\aleph \leq \gamma$, поскольку \aleph изоморфно множеству $\{\alpha_\delta : \delta < \aleph\}$, которое является подмножеством γ .

Если $B \neq \emptyset$, то положим $\beta_0 = \inf B$. В силу непрерывности исходного спектра S ординал β_0 не является предельным. Мы полагаем $\alpha_\aleph = \beta_0$ и заменяем уже построенное $\alpha_{\aleph-1}$ на $\beta_0 - 1$ с соответствующей заменой пространств и отображений спектра S'_\aleph (такая замена корректна, поскольку касается только последнего элемента $\alpha_{\aleph-1}$ и не нарушает условия 1)–4), выполненные на предыдущем шаге рекурсии).

Итак, во всех случаях мы получаем множество индексов $\{\alpha_\delta : \delta \leq \aleph\}$, удовлетворяющее условиям 1)–4). На каком-то шаге $\aleph \leq \gamma$ рекурсивный процесс исчерпает возможные индексы, и мы получим искомый спектр S' . \square

Следствие. Для любого квази- F -компакта X счетной спектральной высоты существует неприводимый квази- F -спектр, дающий в пределе X , длина которого равна $qsh(X)$.

Доказательство следующей ниже теоремы аналогично доказательству основного результата [7].

Теорема 1. Пусть Z_1, Z_2 — квази- F -компакты спектральной высоты $qsh(Z_i) = \gamma_i < \omega_1$, $i = 1, 2$, причем для каждого γ_i , $i = 1, 2$ существует ординал $\gamma_i - 3$. Тогда произведение $Z_1 \times Z_2$ не является квази- F -компактом счетной спектральной высоты.

Лемма 1. Пусть $f : X \rightarrow Y$ — почти вполне замкнутое отображение, $T = \{y : |f^{-1}(y)| > 1\}$ — множество точек Y с нетривиальными прообразами, и точка $y \in T$ такова, что для любой окрестности U этой точки пересечение $U \cap T$ несчетно. Тогда существует точка $a_y \in f^{-1}(y)$ такая, что для любой ее окрестности Oa_y в X $f^\sharp(Oa_y) \neq \emptyset$.

Доказательство леммы 1. От противного. Пусть точка $y \in T \subset Y$ удовлетворяет условиям леммы и для любого $x \in f^{-1}(y)$ существует окрестность Ox такая, что $f^\sharp(Ox) = \emptyset$. Выберем конечное покрытие $\{Ox_i : i \leq k\}$ множества $f^{-1}(y)$, состоящее из таких окрестностей. При этом $y \in f^\sharp(\bigcup O x_i)$.

Положим $V_i = O x_i \cap f^{-1}(y)$ и проведем ужатие открытого покрытия $\{V_i : i \leq k\}$ компакта $f^{-1}(y)$ до замкнутого покрытия $\{F_i : i \leq k\}$ (по теореме об ужатии — см. [1], глава 1, теорема 14): $F_i \subset V_i$, F_i замкнуто в

$f^{-1}(y), \bigcup F_i = f^{-1}(y)$. Далее для каждого F_i выберем в X открытое множество O_i так, что $F_i \subset O_i \subset [O_i] \subset Ox_i$. По построению имеем $f^\# [O_i] = \emptyset, i \leq k$ и $y \in f^\# (\bigcup_{i \leq k} O_i)$. По условию леммы, $|f^\# (\bigcup_{i \leq k} O_i) \cap T| > \omega_0$. Следовательно, найдется множество O_{i_0} такое, что $|f(O_{i_0}) \cap T| > \omega_0$. Поскольку $f^\# (Ox_{i_0}) = \emptyset$,

$$f(X \setminus Ox_{i_0}) = f(X) \supset T.$$

Таким образом, мы получаем в X два непересекающихся замкнутых подмножества $[O_{i_0}]$ и $X \setminus Ox_{i_0}$, для которых

$$|f[O_{i_0}] \cap f(X \setminus Ox_{i_0})| > \omega_0,$$

что противоречит почти вполне замкнутости отображения f . \square

Лемма 2. Пусть $f_i : X \rightarrow K_i, i = 1, 2$ – почти вполне замкнутые отображения компакта X на метрические компакты K_i . Если все слои $f_2^{-1}(t), t \in K_2$ отображения f_2 метризуемы, то почти все³ нетривиальные слои $f_1^{-1}(t), t \in K_1, |f_1^{-1}(t)| > 1$ отображения f_1 являются слоями f_2 .

Доказательство леммы 2. Покажем, что любой слой $T = f_2^{-1}(t)$ отображения f_2 содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев f_1 . Рассмотрим почти вполне замкнутое отображение $f_1|_T$ метрического компакта T на метрический компакт $f_1(T)$. В силу предложения 2 $f_1|_T$ имеет не более чем счетное множество нетривиальных слоев, что и требовалось.

В силу предложения 1 почти все слои отображения f_1 содержатся в слоях f_2 , и обратно, почти все слои f_2 содержатся в слоях f_1 . Итак:

1) множество нетривиальных слоев f_1 , которые не содержатся в слоях f_2 , не более чем счетно;

2) множество слоев f_2 , которые не содержатся в слоях f_1 , также не более чем счетно, причем каждый такой слой f_2 содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев f_1 .

Таким образом, множество нетривиальных слоев f_1 , упомянутых в 1) и 2), не более чем счетно. Любой не входящий в это множество нетривиальный слой f_1 содержится в слое f_2 , который, в свою очередь, содержится в слое f_1 , что означает их совпадение. \square

Доказательство теоремы. Пусть $S = \{B_\alpha, p_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma_1\}$ – неприводимый квази- F -спектр, предел которого равен Z_1 . Поскольку множество индексов γ_1 имеет наибольший элемент $\gamma_1 - 1$, постольку $\lim S = B_{\gamma_1 - 1} = Z_1$. В

³ «Почти все» означает здесь, как обычно, «все, кроме, может быть, счетного множества».

силу неприводимости S существует точка $b \in B_{\gamma_1 - 3}$, для которой прообраз $(p_{\gamma_1 - 3}^{\gamma_1 - 1})^{-1}(b) = Y_1$ метризуем. При этом $K_1 = (p_{\gamma_1 - 3}^{\gamma_1 - 2})^{-1}(b)$ – метрический компакт. Введем обозначение:

$$g_1 = (p_{\gamma_1 - 2}^{\gamma_1 - 1})|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow K_1.$$

Отображение g_1 является почти вполне замкнутым, и все его слои метризуемы. Следовательно, Y_1 – квази- F -компакт спектральной высоты 3, содержащийся в Z_1 . Аналогично в Z_2 можно указать метризуемый компакт Y_2 , для которого существует почти вполне замкнутое отображение $g_2 : Y_2 \rightarrow K_2$ с метризуемыми слоями на метрический компакт K_2 . Поскольку замкнутое подпространство квази- F -компакта счетной спектральной высоты также является квази- F -компактом счетной спектральной высоты, достаточно доказать, что произведение $Y_1 \times Y_2$ не является квази- F -компактом счетной спектральной высоты.

Для каждого $i = 1, 2$ введем обозначение: $T_i = \{t \in K_i : |g_i^{-1}(t)| > 1\}$. В силу предложения 2 множества T_i несчетны. Без ограничения общности можно считать, что для любого непустого открытого множества $U \subset K_i$ пересечение $T_i \cap U$ несчетно ($i = 1, 2$.) Если это не так, то в силу предложения 6 из [2] можно указать компактное подмножество $K'_i \subset K_i$ такое, что для любого непустого открытого $U \subset K'_i$ пересечение $T_i \cap U$ несчетно, и заменить K_i на K'_i , а Y_i на $Y'_i = g_i^{-1}(K'_i)$.

В силу леммы 1 для каждого $t \in T_i, i = 1, 2$ мы можем выбрать точку $a_t \in g_i^{-1}(t)$, любая окрестность Oa_t которой удовлетворяет условию $g_i^\#(Oa_t) \neq \emptyset$. Кроме того, зафиксируем в каждом прообразе $g_i^{-1}(t), t \in T_i$ точку b_t , отличную от a_t .

Предположим, что произведение $Y_1 \times Y_2$ является квази- F -компактом счетной спектральной высоты, то есть существует счетный квази- F -спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}$, предел которого равен $Y_1 \times Y_2$.

В $Y_1 \times Y_2$ рассмотрим слои вида

$$Y_1 \times \{a_t\} = H_1(t) \quad (t \in T_2)$$

и

$$\{a_t\} \times Y_2 = H_2(t) \quad (t \in T_1),$$

гомеоморфные Y_1 и Y_2 соответственно. Для каждого слоя $H_k(t) (k = 1, 2)$ определим $\alpha_k(t)$ как наименьший ординал α , для которого образ $\pi_\alpha(H_k(t))$ метризуем. В силу непрерывности и счетности спектра S ординал $\alpha_k(t)$ всегда является изолированным.

Поскольку множество слоев вида $H_k(t)$ имеет несчетную мощность, для некоторого несчетного семейства слоев значения $\alpha_k(t)$ совпадают. Тогда найдется несчетное множество слоев одного типа, пусть (для определенности) $H_1(t)$, где $t \in D \subset T_2$, $|D| > \omega_0$, для которых $\alpha_1(t) = \delta$, и при этом для любого $\delta' < \delta$ множество слоев с $\alpha_k(t) = \delta'$ не более чем счетно.

Фиксируем слой $H_1(t)$, $t \in D$. В силу выбора δ образ $\pi_{\delta-1}(H_1(t))$ метризуем. Поэтому согласно предложению 2 множество

$$A = \{x : |(\pi_{\delta-1}^\delta)^{-1}(x) \cap \pi_\delta(H_1(t))| > 1\}$$

несчетно.

Введем обозначения:

$$p = \pi_{\delta-1}|_{H_1(t)},$$

$$q = g_1 \times g_2|_{H_1(t)} : H_1(t) \rightarrow K_1 \times \{t\};$$

p и q отображают $H_1(t)$ на метрические компакты. При этом оба отображения почти вполне замкнуты и все слои q метризуемы. В силу леммы 2 почти все нетривиальные слои отображения p совпадают со слоями q . Следовательно, существует несчетное подмножество $A' \subset A$ такое, что каждой точке $x \in A'$ соответствует некоторая точка $s_x \in T_1$, для которой $p^{-1}(x) = q^{-1}(s_x)$. Таким образом, $\pi_{\delta-1}(a_{s_x}, a_t) = x$ для любого $x \in A'$. Если для всех точек $x \in A'$

$$\pi_{\delta-1}(a_{s_x}, a_t) = \pi_{\delta-1}(a_{s_x}, b_t),$$

то

$$|\pi_{\delta-1}(Y_1 \times \{a_t\}) \cap \pi_{\delta-1}(Y_1 \times \{b_t\})| > \omega_0,$$

что противоречит почти вполне замкнутости отображения $\pi_{\delta-1}$. Следовательно, существует точка $x(t) \in A'$ такая, что

$$\pi_{\delta-1}(a_{s_{x(t)}}, a_t) \neq \pi_{\delta-1}(a_{s_{x(t)}}, b_t).$$

Тогда найдутся окрестности $O_1 = Oa_{s_{x(t)}} \times Ob_t$ и $O_2 = Oa_{s_{x(t)}} \times Oa_t$ точек $(a_{s_{x(t)}}, b_t)$ и $(a_{s_{x(t)}}, a_t)$ в произведении $Y_1 \times Y_2$, образы которых при отображении $\pi_{\delta-1}$ не пересекаются.

Напомним, что все рассуждения мы провели для фиксированного слоя $H_1(t)$, где $t \in D \subset T_2$, со значением $\alpha_1(t)$, равным δ . Будем теперь варьировать $t \in D$. В итоге получим несчетное семейство $Oa_{s_{x(t)}}$, $t \in D$ открытых подмножеств Y_1 , малый образ которых $g_1^\#(Oa_{s_{x(t)}})$ непуст. Поскольку K_1 – метризуемый компакт, существует непустое открытое множество $U \subset K_1$, которое содержится в несчетном семействе множеств $g_1^\#(Oa_{s_{x(t)}})$,

$t \in D' \subset D$, $|D'| > \omega_0$. По построению окрестность O_1 содержит точки вида $(a_{t'}, b_t)$, а O_2 – точки $(a_{t'}, a_t)$, где $t \in D'$, $t' \in T_1 \cap U$. Следовательно, при $t' \in T_1 \cap U$ и $t \in D'$

$$\pi_{\delta-1}(a_{t'}, b_t) \neq \pi_{\delta-1}(a_{t'}, a_t). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь слой $H_2(t') = \{a_{t'}\} \times Y_2$, $t' \in T_1 \cap U$ и докажем, что его образ $\pi_{\delta-1}(H_2(t'))$ неметризуем. Предположим противное. Рассмотрим почти вполне замкнутое отображение $h = g_1 \times g_2|_{H_2(t')}$ слоя $H_2(t')$ на K_2 и отображение $\pi_{\delta-1}|_{H_2(t')}$ этого слоя на метризуемый компакт. В силу предложения 1 множество точек $t \in K_2$, для которых $|\pi_{\delta-1}(h^{-1}(t))| > 1$, не более чем счетно. Однако в силу (1) для любого $t \in D'$ $|\pi_{\delta-1}(h^{-1}(t))| \geq 2$. Противоречие.

Таким образом, для всех слоев $H_2(t')$ при $t' \in T_1 \cap U$ имеет место неравенство $\alpha_2(t') \leq \delta - 1$. Мы получили противоречие с выбором δ , которое завершает доказательство теоремы. \square

Из теоремы 1 сразу следует сформулированное ниже обобщение основного результата работы [7]:

Следствие. *Произведение неметризуемых F -компактов конечной спектральной высоты не является F -компактом счетной спектральной высоты.*

Для квази- F -компактов спектральной высоты 3 справедлив аналог теоремы о почти единственности спектрального разложения, доказанной в [3] для F -компактов. А именно имеет место

Теорема 2. *Пусть $f_i : X \rightarrow K_i$, $i = 1, 2$ – почти вполне замкнутые отображения компакта X на метрические компакты K_i с метризуемыми слоями $f_i^{-1}(t)$, $t \in K_i$, $i = 1, 2$. Тогда почти все нетривиальные слои отображений f_1 и f_2 совпадают:*

$$|\{f_1^{-1}(t) : |f_1^{-1}(t)| > 1, t \in K_1\} \Delta$$

$$\{f_2^{-1}(t) : |f_2^{-1}(t)| > 1, t \in K_2\}| \leq \omega_0,$$

где Δ – симметрическая разность множеств.

Доказательство. Достаточно дважды применить лемму 2. \square

Пример 2. Существует F -компакт Z , для которого $qsh(Z) = 3 < sh(Z) = 4$.

Для построения искомого компакта воспользуемся конструкцией резольвенты (см. [6], III.1.1). Пусть X – компакт, и каждой точке $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый компакт Y_x и выбрано непрерывное отображение $h_x : X \setminus \{x\} \rightarrow Y_x$. Резольвентой

$R(X, Y_x, h_x)$ называется множество

$$\bigcup \{ \{x\} \times Y_x : x \in X \},$$

наделенное топологией, открытую базу которой образуют множества вида

$$U \otimes_x V = \{x\} \times V \cup$$

$$\bigcup \{ \{x'\} \times Y_{x'} : x' \in U \cap h_x^{-1}(V) \},$$

где U открыто в X , а V – открытое подмножество Y_x . Резольвента является компактным хаусдорфовым пространством. отображение $\pi : R(X, Y_x, h_x) \rightarrow X$, переводящее пару (x, y) в точку x , всегда вполне замкнуто, а его слои $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфны Y_x .

Шаг 1. Возьмем в качестве Z_1 отрезок $I = [0, 1]$. Для каждого $x \in I$ положим $Y_x = I_x$, где I_x – экземпляр того же отрезка, и определим $h_x : I \setminus \{x\} \rightarrow I_x$ как постоянное отображение: $h_x(t) = 0 \in I_x$ для любого $t \in I \setminus \{x\}$. Положим $Z_2 = R(Z_1, I_x, h_x)$, и пусть $\pi_1^2 = \pi : Z_2 \rightarrow Z_1$ – проекция резольвенты на Z_1 . В силу предложения 2 компакт Z_2 неметризуем. Заметим, что Z_2 как множество совпадает с I^2 , следовательно, точками Z_2 являются пары (x, y) , где $x, y \in I$.

Шаг 2. Выделим в $Z_1 = I$ семейство мощности континуум попарно непересекающихся счетных всюду плотных подмножеств $\{A_x : x \in I\}$, элементы которого проиндексируем точками $x \in I$. Для каждого $x \in I$ выберем последовательность $\{a_n^x : n \in N\} \subset A_x \setminus \{x\}$, которая сходится к x . Тогда последовательности $\{(a_n^x, 0)\}$ и $\{(a_n^x, 1)\}$ сходятся в Z_2 к точке $(x, 0)$.

Для каждой точки $(x, y) \in Z_2$ при $y \neq 0$ положим $Y_{(x,y)} = \{0\} \subset I$, а при $y = 0$ в качестве $Y_{(x,0)}$ возьмем $I_{(x,0)}$, где I – экземпляр отрезка $[0, 1]$. Для точек $(x, y) \in Z_2$ при $y \neq 0$ отображение

$$h_{(x,y)} : Z_2 \setminus \{(x, y)\} \rightarrow Y_{(x,y)}$$

определено однозначно. Для точек вида $(x, 0)$ построим отображение $h_{(x,0)}$ следующим образом. Положим $h_{(x,0)}(a_n^x, 0) = 0$ и $h_{(x,0)}(a_n^x, 1) = 1$ для всех $n \in N$. Тем самым отображение $h_{(x,0)}$ определено на замкнутом в $Z_2 \setminus \{(x, 0)\}$ подмножестве $B = \{(a_n^x, 0) : n \in N\} \cup \{(a_n^x, 1) : n \in N\}$. Компакт Z_2 удовлетворяет первой аксиоме счетности, следовательно, пространство $Z_2 \setminus \{(x, 0)\}$ нормально. Поэтому заданное на B отображение можно продолжить до непрерывного отображения $h_{(x,0)} : Z_2 \setminus \{(x, 0)\} \rightarrow I_{(x,0)}$.

Положим теперь $Z_3 = R(Z_2, Y_{(x,y)}, h_{(x,y)})$, $\pi_2^3 = \pi : Z_3 \rightarrow Z_2$, где π – проекция резоль-

венты. Компакт Z_3 как множество вкладывается в I^3 , его точки мы будем обозначать через (x, y, z) .

Пусть Z_0 есть точка и $\pi_0^1 : Z_1 \rightarrow Z_0$ – постоянное отображение. Таким образом, мы получили F -спектр $S = \{Z_i, \pi_j^i : i, j < 4\}$, предел которого равен Z_3 . Значит, Z_3 – F -компакт и $sh(Z_3) \leq 4$. В силу предложения 2 прообраз каждой точки $x \in Z_1$ при отображении $\pi_1^3 = \pi_1^2 \circ \pi_2^3$ метризуем. Поэтому F -спектр S можно «ужать» до неприводимого квази- F -спектра длины 3. Следовательно, $qsh(Z_3) = 3$.

Остается показать, что $sh(Z_3) = 4$. Предположим противное. Тогда существует вполне замкнутое отображение $f : Z_3 \rightarrow K$ на метрический компакт с метризуемыми слоями. По лемме 2 почти все нетривиальные слои отображения π_1^3 являются слоями f . Следовательно, существует множество A_x такое, что для любого $t \in A_x$ слой $(\pi_1^3)^{-1}(t)$ является слоем f . В силу построения отображения $h_{(x,0)}$ множества

$$C_i = \bigcup \{ (\pi_2^3)^{-1}(a_n^x, i) : n \in N \}, \quad i = 0, 1$$

имеют в Z_3 непересекающиеся замыкания, поскольку $[C_i] = C_i \cup \{(x, 0, i)\}$, $i = 0, 1$. Остается заметить, что отображение f склеивает точки $(a_n^x, 0, 0) \in C_0$ и $(a_n^x, 1, 0) \in C_1$, причем $f(a_n^x, 0, 0) \neq f(a_k^x, 0, 0)$ при $n \neq k$. Таким образом, $|f[C_0] \cap f[C_1]| = \omega_0$, что противоречит вполне замкнутости f . Итак, Z_3 – искомым компакт. \square

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-51-18051).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 577 с.
2. Баранова М. А., Иванов А. В. О спектральной высоте F -компактов // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 498–503. doi: 10.1134/S0037446613030026
3. Гулько С. П., Иванов А. В. О вполне замкнутых отображениях компактов Федорчука // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 50. С. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1
4. Иванов А. В. О бикомпактах Федорчука // Отображения и функторы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 31–40.

5. *Иванов А. В.* О наследственной нормальности F-бикомпактов // Матем. заметки. 1986. Т. 39, вып. 4. С. 606–611. doi: 10.1007/BF01158007

6. *Федорчук В. В.* Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, вып. 4. С. 105–235. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2

7. *Ivanov A. V.* The class of Fedorchuk compact spaces is anti-multiplicative // *Topology and its Applications*. 2018. Vol. 235. P. 485–491. doi: 10.1016/j.topol.2017.12.026

Поступила в редакцию 14.03.2017

REFERENCES

1. *Aleksandrov P. S., Pasyukov B. A.* Vvedenie v teoriyu razmernosti [Introduction to dimension theory]. Moscow: Nauka, 1973. 577 p.

2. *Baranova M. A., Ivanov A. V.* On the spectral height of F-compact spaces. *Sib. Math. J.* 2013. 54(3). P. 388–392. doi: 10.1134/S0037446613030026

3. *Gul'ko S. P., Ivanov A. V.* O vpolne zamknutykh otobrazheniyakh kompaktov Fedorchuka [On fully closed mappings of Fedorchuk compacta]. *Vestn Tomsk. gos. un-ta. Matematika i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Math. Mechanics]. 2017. No. 50. P. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1

4. *Ivanov A. V.* On Fedorchuk compacta. *Mappings and Functors*. Moscow: Izd. Mosk. Univ., 1984. P. 31–40

5. *Ivanov A. V.* O nasledstvennoi normal'nosti F-bikompektov [Hereditary normality of F-bicompecta]. *Matem. zametki* [Math. Notes]. 1986. Vol. 39, iss. 4. P. 606–611. doi: 10.1007/BF01158007

6. *Fedorchuk V. V.* Fully closed mappings and their applications. *J. Math. Sci.* 2006. 136(5). P. 4201–4292. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2

7. *Ivanov A. V.* The class of Fedorchuk compact spaces is anti-multiplicative. *Topology and its Applications*. 2018. Vol. 235. P. 485–491. doi: 10.1016/j.topol.2017.12.026

Received March 14, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических
исследований КарНЦ РАН, Федеральный
исследовательский центр «Карельский
научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441

УДК 004.01:006.72 (470.22)

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ШУМПЕТЕРОВСКОЙ ДИНАМИКИ

А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

В статье предлагается математическая модель шумпетеровской динамики. Вводится понятие емкости экономической ниши. Исследуется устойчивость распределения капитала по уровням технологического развития.

Ключевые слова: динамические системы; шумпетеровская динамика; устойчивость.

A. N. Kirillov, A. M. Sazonov. GLOBAL STABILITY IN MODEL OF NON-LINEAR SCHUMPETERIAN DYNAMICS

The mathematical model of Schumpeterian dynamics is proposed. The notion of economical niche volume is introduced. The stability of capital distribution over levels of technological development is investigated.

Key words: dynamic systems; Schumpeterian dynamics; stability.

ВВЕДЕНИЕ

Австрийский экономист Й. Шумпетер в 1939 году предложил концепцию эндогенного экономического роста. Согласно Шумпетеру, в основе роста лежат два процесса: создание новых технологий (инновации) и их заимствование (имитации). В работе К. Иваи [7, 8] предложена первая математическая модель этой теории, получившая продолжение в работах В. М. Полтеровича, Г. М. Хенкина, А. А. Шананина [2, 4–6]. В представленной работе авторы, развивая подход Полтеровича — Хенкина, строят математические модели шумпетеровской динамики, в которых учитывается ограниченность возможностей роста на основе введенного понятия емкости экономической ниши. Под емкостью экономической ниши понимается некоторая предельная величина суммарного капитала, при которой скорость роста снижена настолько, что увеличение капитала

не происходит. Также предлагается подход к моделированию процесса создания новых технологий, основанный на динамической системе с переменной размерностью. Найдены равновесия построенных динамических моделей и доказана их устойчивость в целом.

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КАПИТАЛА БЕЗ АМОРТИЗАЦИИ

Двухуровневая модель

Пусть $C_i, i = 1, 2$ — суммарный капитал отрасли на уровне эффективности i (одно и то же предприятие может иметь капитал на различных уровнях), V_i — емкость экономической ниши на уровне i , φ_i — доля средств, которую предприятия на уровне i тратят на развитие производства на уровне $i + 1$, λ_i — удельная себестоимость товара на уровне i (стоимость производства единицы товара в единицу времени).

Тогда

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V_1 - C_1) \\ \dot{C}_2 = \frac{1-\varphi_2}{\lambda_2} C_2 (V_2 - C_2) + \varphi_1 C_1. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим $a_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i}$, $i = 1, 2$.

Приравнивая правые части к 0, получаем положения равновесия: $(0, 0)$, $(0, V_2)$, (V_1, C_2^*) , где $C_2^* = \frac{V_2 + \sqrt{V_2^2 + \frac{4\varphi_1}{a_2} V_1}}{2}$.

Теорема 1. Для двухуровневой модели динамики капитала с разными емкостями экономической ниши для каждого уровня без амортизации имеет место локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия $P = (V_1, C_2^*)$ и неустойчивость других положений равновесия.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем первый метод Ляпунова в частном случае, соответствующем автономной системе, а именно теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению.

Обозначим

$$f_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V_1 - C_1)$$

$$f_2 = \frac{1-\varphi_2}{\lambda_2} C_2 (V_2 - C_2) + \varphi_1 C_1.$$

Находим матрицу Якоби $f' = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial C_j} \right\}$, $i, j = 1, 2$.

$$f' = \begin{pmatrix} -2a_1 C_1 + a_1 V_1 & 0 \\ \varphi_1 & -2a_2 C_2 + a_2 V_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Вычисляем характеристические многочлены для положений равновесия, находим собственные числа и сравниваем их вещественные части с нулем:

$$\begin{aligned} \det(f'(V_1, C_2^*) - \lambda E) &= \quad (3) \\ &= \begin{vmatrix} -a_1 V_1 - \lambda & 0 \\ \varphi_1 & -a_2 \sqrt{V_2^2 + \frac{4\varphi_1}{a_2} V_1} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-a_1 V_1 - \lambda) \left(-a_2 \sqrt{V_2^2 + \frac{4\varphi_1}{a_2} V_1} - \lambda \right) = 0. \end{aligned}$$

Получаем, $\lambda_1 = -a_1 V_1 < 0$, $\lambda_2 = -a_2 \sqrt{V_2^2 + \frac{4\varphi_1}{a_2} V_1} < 0$, то (V_1, C_2^*) локально асимптотически устойчиво.

$$\begin{aligned} \det(f'(0, V_2) - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_1 V_1 - \lambda & 0 \\ \varphi_1 & -a_2 V_2 - \lambda \end{vmatrix} = \quad (4) \\ &= (a_1 V_1 - \lambda) (-a_2 V_2 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_1 = a_1 V_1 > 0$, то $(0, V_2)$ неустойчиво.

$$\begin{aligned} \det(f'(0, 0) - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_1 V_1 - \lambda & 0 \\ \varphi_1 & a_2 V_2 - \lambda \end{vmatrix} = \quad (5) \\ &= (a_1 V_1 - \lambda) (a_2 V_2 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_1 = a_1 V_1 > 0$, $\lambda_2 = a_2 V_2 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ неустойчиво. \square

Далее исследуем глобальную устойчивость положения равновесия (V_1, C_2^*) .

Теорема 2. Для двухуровневой модели динамики капитала с разными емкостями экономической ниши для каждого уровня без амортизации имеет место глобальная устойчивость положения равновесия $P = (V_1, C_2^*)$.

Доказательство. Все пространство R^2 разбивается изоклинами $C_1 = V_1$ и $C_2 = \tilde{C}_2 = \frac{V_2 + \sqrt{V_2^2 + \frac{4\varphi_1}{a_2} C_1}}{2}$ на четыре области D_i , $i = 1, \dots, 4$ в зависимости от $C_1 > / < V_1$, $C_2 > / < \tilde{C}_2$ (см. рис. 1).

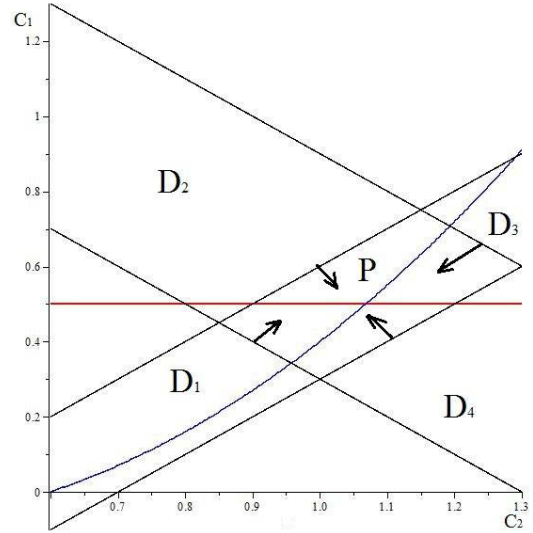


Рис. 1. Фазовый портрет (2 ЕЭН без амортизации)
Fig. 1. Phase portrait (2 ENV without amortization)

$$f_1 = \dot{C}_1 > 0 \Leftrightarrow C_1 < V_1$$

$$f_2 = \dot{C}_2 > 0 \Leftrightarrow C_2 < \tilde{C}_2.$$

Определим знаки правых частей в областях D_i :

- В D_1 : $f_1 > 0, f_2 > 0$
- В D_2 : $f_1 < 0, f_2 > 0$
- В D_3 : $f_1 < 0, f_2 < 0$
- В D_4 : $f_1 > 0, f_2 < 0$.

Ограничим положение равновесия (V_1, C_2^*) четырехугольником E . В качестве его границ используем отрезки прямых:

- Для D_1 : $C_1 + C_2 = r$
- Для D_2 : $-C_1 + C_2 = r$
- Для D_3 : $-C_1 - C_2 = r$
- Для D_4 : $C_1 - C_2 = r$.

Рассмотрим область D_1 .

Нормаль к прямым $C_1 + C_2 = r$: $\bar{n} = (1, 1)$. Тогда

$$(\bar{n}, \bar{f}) = f_1 + f_2 > 0. \quad (6)$$

Следовательно, траектории в области D_1 образуют острый угол с нормальями к границе E , лежащей в данной области, а значит, они пересекают данную границу снаружи внутрь. Поэтому траектории в D_1 сколь угодно близко подходят к положению равновесия.

Аналогично для остальных областей D_i .

Таким образом, имеет место глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия (V_1, C_2^*) . \square

Произвольное число уровней

Обозначим N число уровней эффективности. Тогда аналогично случаю двух уровней получим

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V_1 - C_1) \\ \dot{C}_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i (V_i - C_i) + \varphi_{i-1} C_{i-1}, i = 2, \dots, N. \end{cases}$$

Обозначим $a_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, N$.

Приравнявая правые части к 0, получаем положения равновесия: $(0, \dots, 0)$, $(0, \dots, 0, V_{N-1}, C_N^*)$, ..., $(V_1, C_2^*, \dots, C_N^*)$, где $C_i^* = \frac{V_i + \sqrt{V_i^2 + \frac{4\varphi_{i-1}}{a_i} V_{i-1}}}{2}$, $i = 2, \dots, N$.

Теорема 3. Для N -уровневой модели динамики капитала с разными емкостями экономической ниши для каждого уровня без амортизации имеет место локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия $(V_1, C_2^*, \dots, C_N^*)$ и неустойчивость других положений равновесия.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем первый метод Ляпунова в частном случае, соответствующем автономной системе, а именно теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению.

Обозначим

$$f_1 = \frac{1-\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V_1 - C_1)$$

$$f_i = \frac{1-\varphi_i}{\lambda_i} C_i (V_i - C_i) + \varphi_{i-1} C_{i-1}, i = 2, \dots, N.$$

Находим матрицу Якоби $f' = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial C_j} \right\}$, $i, j = 1, \dots, N$, где

$$f'_{i,i} = -2a_i C_i + a_i V_i$$

$$f'_{i,i-1} = \varphi_i$$

$$f'_{i,j} = 0, i \neq j, i - 1.$$

Вычисляем характеристический многочлен для положения равновесия $(V_1, C_2^*, \dots, C_N^*)$, находим собственные числа и сравниваем их вещественные части с нулем:

$$\begin{aligned} \det(f'(V_1, C_2^*, \dots, C_N^*) - \lambda E) &= \quad (7) \\ &= \begin{vmatrix} -a_1 V_1 - \lambda & 0 \\ \varphi_1 & -a_2 \sqrt{V_2^2 + \frac{4\varphi_1}{a_2} V_1} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-a_1 V_1 - \lambda) (-a_2 \sqrt{V_2^2 + \frac{4\varphi_1}{a_2} V_1} - \lambda) \dots \\ &\dots (-a_N \sqrt{V_N^2 + \frac{4\varphi_{N-1}}{a_N} V_{N-1}} - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Получаем, $\lambda_1 = -a_1 V_1 < 0$, $\lambda_i = -a_i \sqrt{V_i^2 + \frac{4\varphi_{i-1}}{a_i} V_{i-1}} < 0 \Rightarrow (V_1, C_2^*, \dots, C_N^*)$ локально асимптотически устойчиво.

Очевидно, если $C_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = a_i V_i > 0 \Rightarrow$ остальные положения равновесия неустойчивы.

$$\begin{aligned} \det(f'(0, V_2) - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_1 V_1 - \lambda & 0 \\ \varphi_1 & -a_2 V_2 - \lambda \end{vmatrix} = \quad (8) \\ &= (a_1 V_1 - \lambda) (-a_2 V_2 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_1 = a_1 V_1 > 0 \Rightarrow (0, V_2)$ неустойчиво. \square

Далее исследуем глобальную устойчивость положения равновесия $(V_1, C_2^*, \dots, C_N^*)$.

Теорема 4. Для N -уровневой модели динамики капитала с разными емкостями экономической ниши для каждого уровня без амортизации имеет место глобальная устойчивость положения равновесия $(V_1, C_2^*, \dots, C_N^*)$.

Доказательство. Все пространство R^N разбивается на 2^N областей в зависимости от $C_1 > / < V_1, C_i > / < \tilde{C}_i$, где $\tilde{C}_i = \frac{V_i + \sqrt{V_i^2 + \frac{4\varphi_i - 1}{a_i} C_{i-1}}}{2}$

$$\dot{C}_1 > 0 \Leftrightarrow C_1 < V_1$$

$$\dot{C}_i > 0 \Leftrightarrow C_i < \tilde{C}_i.$$

В качестве границ области E , которой принадлежит положение равновесия $(V_1, C_2^*, \dots, C_N^*)$, используем гиперплоскости:

$$A_1 C_1 + \dots + A_N C_N = r > 0,$$

где

$$\begin{cases} A_1 = 1 & C_1 < V_1 \\ A_1 = -1 & C_1 > V_1 \\ A_i = 1 & C_i < \tilde{C}_i \\ A_i = -1 & C_i > \tilde{C}_i. \end{cases}$$

Нормали к данным гиперплоскостям $\bar{n} = (A_1, \dots, A_N)$.

A_i и f_i имеют одинаковый знак для любой области, поэтому

$$(\bar{n}, \bar{f}) = A_1 f_1 + \dots + A_N f_N > 0 \quad (9)$$

Следовательно, траектории образуют острый угол с нормальными, а значит, они пересекают данные гиперплоскости снаружи внутрь. Поэтому все траектории сколь угодно близко подходят к положению равновесия, таким образом, имеет место его глобальная асимптотическая устойчивость. \square

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КАПИТАЛА С АМОРТИЗАЦИЕЙ

Обозначим μ_2 интенсивность амортизации для уровня 2, φ_i – доля средств, которую предприятия на уровне i тратят на развитие производства на текущем уровне i .

Тогда

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \frac{\varphi_1}{\lambda_1} C_1 (V_1 - C_1) + \mu_2 C_2 \\ \dot{C}_2 = \frac{\varphi_2}{\lambda_2} C_2 (V_2 - C_2) + (1 - \varphi_1) C_1 - \mu_2 C_2. \end{cases}$$

Теорема 5. Существует единственное положение равновесия $P = (C_1^*, C_2^*)$ такое, что $C_1 > 0, C_2 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим изоклины $\dot{C}_i = 0$ и их поведение в 1-й четверти R^2 .

Возможны два случая: либо часть изоклины $\dot{C}_2 = 0$ в первой четверти начинается в точке $(0, V_2 - \frac{\mu_2}{a_2})$ (при $V_2 > \frac{\mu_2}{a_2}$), либо в точке $(0, 0)$ (при $V_2 \leq \frac{\mu_2}{a_2}$) (см. 2, 3).

Обозначим

$$f(x) = \frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4x}}{2}$$

$$g(x) = x(x - v)$$

$$F(x) = f(x) - g(x).$$

Очевидно, $F(v) > 0$.

$$f(x) = \frac{y_0 + \sqrt{y_0^2 + 4x}}{2}$$

$$g(x) = x(x - v).$$

Обе функции возрастающие, однако

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{y_0^2 + 4x}} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$$

$$g'(x) = 2x - v \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\exists x^* : \forall x > x^* f'(x) < g'(x)$, т. е. $F'(x) < 0$ при $x > x^*$. Поэтому $\exists \tilde{x} : \forall x > \tilde{x} F(x) < 0$.

Итак,

$$1. F(x) < 0, x > \tilde{x}$$

$$2. F(v) > 0.$$

Следовательно, $\exists \hat{x} : F(\hat{x}) = 0$.

Кроме того, поскольку $F'(x) < 0$ при $x > x^* \Rightarrow F(x)$ монотонно убывает, то каждое свое значение $F(x)$ принимает ровно 1 раз. Отсюда \hat{x} – единственное.

Таким образом, изоклины $\dot{C}_1 = 0$ и $\dot{C}_2 = 0$ пересекаются в 1-й четверти R^2 в одной точке, следовательно, положение равновесия (C_1^*, C_2^*) существует и единственно. \square

Теорема 6. Положение равновесия $P = (C_1^*, C_2^*)$ – глобально устойчиво.

Доказательство. Все пространство R^2 разбивается изоклинами $C_1 = \tilde{C}_1 = \frac{V_1 + \sqrt{V_1^2 + \frac{4\mu_2}{a_1} C_2}}{2}$ и $C_2 = \tilde{C}_2 = \frac{V_2 - \frac{\mu_2}{a_2} + \sqrt{V_2^2 - \frac{\mu_2^2}{a_2^2} + \frac{4\mu_1}{a_2} C_1}}{2}$ на четыре области D_i , $i = 1, \dots, 4$ в зависимости от $C_1 > / < V_1$, $C_2 > / < \tilde{C}_2$ (см. 2, 3).

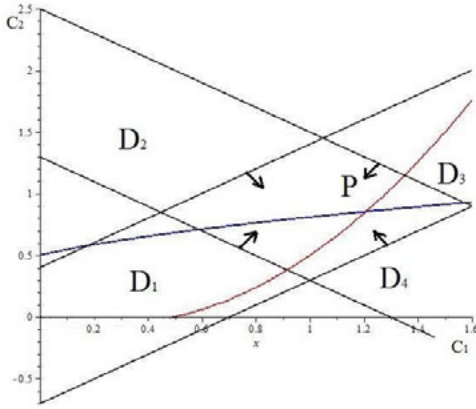


Рис. 2. Фазовый портрет (2 ЕЭН с амортизацией, $V_2 > \frac{\mu_2}{a_2}$)
Fig. 2. Phase portrait (2 ENV with amortization $V_2 > \frac{\mu_2}{a_2}$)

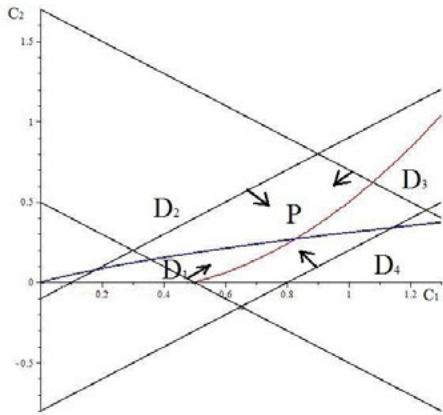


Рис. 3. Фазовый портрет (2 ЕЭН с амортизацией, $V_2 \leq \frac{\mu_2}{a_2}$)
Fig. 3. Phase portrait (2 ENV with amortization, $V_2 \leq \frac{\mu_2}{a_2}$)

$$f_1 = \dot{C}_1 > 0 \Leftrightarrow C_1 < \tilde{C}_1$$

$$f_2 = \dot{C}_2 > 0 \Leftrightarrow C_2 < \tilde{C}_2.$$

Определим знаки правых частей в областях D_i :

- В D_1 : $f_1 > 0, f_2 > 0$

- В D_2 : $f_1 < 0, f_2 > 0$

- В D_3 : $f_1 < 0, f_2 < 0$

- В D_4 : $f_1 > 0, f_2 < 0$.

Ограничим положение равновесия (C_1^*, C_2^*) четырехугольником E . В качестве его границ используем отрезки прямых:

- Для D_1 : $C_1 + C_2 = r$
- Для D_2 : $-C_1 + C_2 = r$
- Для D_3 : $-C_1 - C_2 = r$
- Для D_4 : $C_1 - C_2 = r$.

Рассмотрим область D_1 .

Нормаль к прямой $C_1 + C_2 = r$: $\bar{n} = (1, 1)$. Тогда

$$(\bar{n}, \bar{f}) = f_1 + f_2 > 0. \quad (10)$$

Следовательно, траектории в области D_1 образуют острый угол с нормалью к границе E , лежащей в данной области, а значит, они пересекают данную границу снаружи внутрь. Поэтому траектории в D_1 сколь угодно близко подходят к положению равновесия.

Аналогично для остальных областей D_i .

Таким образом, имеет место глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия (V_1, C_2^*) . \square

Работа поддержана РФФИ (грант № 18-01-00249).

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. Гельман Л. М., Левин М. И., Полтерович В. М., Спивак В. А. Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) // Экономика и математические методы. 1993. Т. 29, № 3. С. 460–469.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
4. Полтерович В. М. Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // Журнал Новой экономической ассоциации. 2017. № 2(34). С. 193–201.
5. Полтерович В. М., Хенкин Г. М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. № 24. С. 1071–1083.
6. Хенкин Г. М., Шананин А. А. Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 3–19.

7. *Iwai K.* Schumpeterian Dynamics. Part 1: An Evolutionary Model of innovation and Imitation // *Journal of Economic Behavior and Organization*. 1984. Vol. 5, no. 2. P. 159–190.

8. *Iwai K.* Schumpeterian Dynamics. Part 2: Technological Progress, Firm Growth and

«Economic Selection» // *Journal of Economic Behavior and Organization*. 1984. Vol. 5, no. 3–4. P. 321–351.

Поступила в редакцию 27.02.2018

REFERENCES

1. *Barbashin E. A.* Funktsii Lyapunova [Lyapunov functions]. Moscow: Nauka, 1970. 240 p.

2. *Gel'man L. M., Levin M. I. Polterovich V. M., Spivak V. A.* Modelirovanie dinamiki raspredeleniya predpriyatii otrasli po urovnyam effektivnosti (na primere chernoi metallurgii) [Modeling of the dynamics of the enterprises distribution by efficiency levels (the case of ferrous metallurgy)]. *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and Mathematical Methods]. 1993. Vol. 29, no. 3. P. 460–469.

3. *Demidovich B. P.* Lektsii po matematicheskoi teorii ustoychivosti [Lectures on mathematical stability theory]. Moscow: Nauka, 1967. 472 p.

4. *Polterovich V. M.* Teoriya endogenogo ekonomicheskogo rosta i uravneniya matematicheskoi fiziki [The theory of endogenous economic growth and equations of mathematical physics]. *Zhurnal Novoi ekonomicheskoi assotsiatsii* [The Journal of the New Economic Association]. 2017. No. 2(34). P. 193–201.

5. *Polterovich V. M., Khenkin G. M.* Evolyutsionnaya model' vzaimodeistviya protsessov

sozdaniya i zaimstvovaniya tekhnologii [Evolutionary model of the interaction of creating and borrowing technologies processes]. *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and Mathematical Methods]. 1988. No. 24. P. 1071–1083.

6. *Khenkin G. M., Shanin A. A.* Matematicheskoe modelirovanie shumpeterovskoi innovatsionnoi dinamiki [Mathematical modeling of the Schumpeterian innovation dynamics]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modeling]. 2014. Vol. 26, no. 8. P. 3–19.

7. *Iwai K.* Schumpeterian Dynamics. Part 1: An Evolutionary Model of innovation and Imitation. *Journal of Economic Behavior and Organization*. 1984. Vol. 5, no. 2. P. 159–190.

8. *Iwai K.* Schumpeterian Dynamics. Part 2: Technological Progress, Firm Growth and «Economic Selection». *Journal of Economic Behavior and Organization*. 1984. Vol. 5, no. 3–4. P. 321–351.

Received February 27, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич

ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: krllv1812@yandex.ru
тел.: (8142) 763370

Сазонов Александр Михайлович

аспирант
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: sazonov@cs.karelia.ru

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910
Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: krllv1812@yandex.ru
tel.: (8142) 763370

Sazonov, Alexander

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910
Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: sazonov@cs.karelia.ru

УДК 519.144.1 + 519.16

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОИСКА ДЕРЕВЬЕВ ШТЕЙНЕРА В ПОТОКОВОЙ ЗАДАЧЕ ШТЕЙНЕРА

В. Д. Кукин

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Для потоковой задачи Штейнера на транспортной сети ранее был разработан двухуровневый композитный эволюционный алгоритм: на верхнем уровне ищется топология дерева, на нижнем – оптимальные координаты точек Штейнера для дерева с заданной топологией. В настоящей статье для решения задачи нижнего уровня предлагается вещественный эволюционный алгоритм, использующий модель онтогенеза. В нем применяется специальный оператор развития, основанный на случайной модификации метода покоординатного спуска, адаптированного для потоковой задачи.

Ключевые слова: потоковая задача Штейнера; оптимизация; дерево Штейнера; эволюционная модель; вещественный эволюционный алгоритм; оператор развития.

V. D. Kukin. OPTIMIZATION OF STEINER TREES SEARCH IN THE FLOW STEINER TREE PROBLEM

For the flow Steiner tree problem on a transport network, a two-level composite evolutionary algorithm was developed. At the upper level a tree topology is searched; at the low level optimal Steiner points' coordinates are searched for the three with a given topology. In this paper for solving the latter problem, a real-coded evolutionary algorithm is suggested. The algorithm uses an ontogenesis model and a special maturation operator. The operator is based on a random modification of the coordinate-wise-decent method adapted for the flow problem.

Key words: flow Steiner tree problem; optimization; Steiner tree; evolutionary model; real-coded evolutionary algorithm; maturation operator.

ВВЕДЕНИЕ

Статья дополняет опубликованные ранее работы [3, 4, 6], посвященные эволюционному методу решения NP-трудной [2] потоковой задачи Штейнера в дискретно-непрерывной постановке [1]. Далее используются понятия и термины, введенные в [1] или известные из теории графов [9].

Модель потоковой задачи инварианта относительно направления потоков. Здесь она рассматривается на примере сети с одним стоком, множеством источников продукта с заданными мощностями и положением на мест-

ности. Строительные и транспортные затраты на участках сети зависят от величины потоков, которые суммируются в точках ветвления сети. Для уменьшения затрат вводятся дополнительные свободно размещаемые точки ветвления. При условии баланса потоков и полного перетока продукта из источников в сток требуется выбрать конфигурацию сети и положение точек ее ветвления, при которых затраты на строительство сети и транспортировку продукта минимальны.

Моделью сети является планарный граф. В данном случае граф — ориентированное к

корню взвешенное дерево, на дугах которого задана неубывающая вогнутая весовая функция от величины потока. Дерево определяют: топология — отношения инцидентности между вершинами и дугами, представленные некоторой структурой данных; координаты n фиксированных терминальных вершин, где n называют размерностью задачи; координаты свободно размещаемых вершин — точек Штейнера (ТШ). Дерево с оптимальными координатами ТШ, минимальное для данной топологии, называют деревом Штейнера (ДШ). Минимальное дерево Штейнера (МДШ) — минимальное ДШ на множестве всех топологий для заданного множества терминальных вершин. Найти МДШ — значит найти дерево с оптимальной топологией и оптимальными координатами ТШ.

Считая вырожденные (нулевой длины) дуги полноправными элементами дерева, можно искать МДШ только среди деревьев с полной топологией, т. е. с максимальным числом ТШ, равным $(n - 2)$ [1]. В таком дереве все терминальные вершины — висячие, а все внутренние вершины — ТШ, инцидентные трем дугам. Поток на висячих дугах равен мощностям источников продукта, а поток на дуге, исходящей из каждой ТШ, равен сумме потоков на двух входящих в нее дугах.

Используя эволюционный подход к решению потоковой задачи, автор разработал: способ представления и принцип кодирования/декодирования полной топологии и оригинальные генетические операторы [3]; эволюционную модель и композитный эволюционный алгоритм (ЭА) [6]. Он быстро находит МДШ, а в задачах большой размерности — решения, близкие к МДШ. В [4] показано, что быстрая сходимость этого алгоритма обеспечивается оригинальными генетическими операторами и учетом специфики потоковой задачи.

В эволюционной модели [6] топология и координаты ТШ дерева трактуются соответственно как хромосома и набор фенотипических признаков особи. По характеру операций, выполняемых над деревом, в работе композитного ЭА можно выделить два уровня. На верхнем — операции с хромосомой: генерируется или изменяется топология дерева [3, 6]. На нижнем уровне — работа с фенотипом: в дереве с заданной топологией вычисляются начальные координаты ТШ, значения которых затем оптимизируются. Хотя задачи этого уровня не так сложны, как верхнего, они превосходят последние на много порядков по общему числу выполняемых операций. Поэто-

му оптимизация поиска ДШ в композитном алгоритме — актуальная проблема. В настоящей статье для поиска ДШ предлагается вещественный эволюционный алгоритм (ВЭА) с оптимизированными параметрами, который был выбран в результате экспериментальных исследований.

После того как математическое сообщество приняло идею вещественного кодирования, разработано много вещественных генетических алгоритмов (ВГА) для задач непрерывной оптимизации, решения которых представлены векторами. В этих алгоритмах используется модель эволюции популяции хромосом, в которой хромосома отождествляется с вещественным вектором, а гены — с его компонентами. Точечные или групповые операции с генами выполняют с помощью различных операторов кроссинговера и мутаций [12, 13].

Эволюционный подход к задаче поиска ДШ ранее не применялся. В предлагаемом ВЭА использована модель онтогенеза — индивидуального развития особи. Координаты ТШ трактуются как набор фенотипических признаков особи с фиксированной хромосомой, а отдельный признак — как ген со сложной структурой. Хотя такое представление о гене появилось еще в тридцатые годы прошлого века, в известных эволюционных моделях оно не встречается.

Для ВЭА разработан специальный оператор, названный оператором развития (the maturation operator). Он выполняет заданное нормой (управляющим параметром) число операций с набором признаков, изменяя их значения случайным образом. Отдельная операция реализована с помощью случайной модификации метода покоординатного спуска [10], адаптированного для потоковой задачи Штейнера. Обычно этот метод применяется в итеративных алгоритмах локальной оптимизации, в частности, в алгоритме для поиска локально оптимальных деревьев в евклидовой задаче Штейнера [8]. Использование этого метода при разработке оператора повышает эффективность поиска альтернативных решений задачи. Вычислительные эксперименты показали, что сложность ВЭА близка к линейной.

В разделе 1 статьи рассматривается математическая модель задачи и построение исходного дерева; в разделе 2 — случайная модификация метода покоординатного спуска, адаптированного для потоковой задачи; в разделе 3 — вещественный эволюционный алгоритм поиска ДШ с оптимизированными параметрами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ИСХОДНОГО ДЕРЕВА

1.1. Математическая модель

Пусть A — ориентированное к корню дерево, на дугах которого задана неубывающая вогнутая весовая функция w от величины потока; T — множество полных топологий дерева.

Обозначим $A_\tau = (V, D_\tau)$ дерево с заданной топологией $\tau \in T$, множеством вершин V и множеством дуг $D_\tau = \{(i, j) \mid i, j \in V\}$. Пронумеруем вершины A_τ и представим их в виде $V = V_0 \cup V_S$, где $V_0 = \{i = 1 \div n, i = 1 - \text{корень}\}$ — терминальные вершины; $V_S = \{i = (n+1) \div (2n-2)\}$ — точки Штейнера; $|V| = 2n - 2$. Рассмотрим множество $X = X_0 \cup X_S$, где $X_0 = \{(x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in R^+, i = 1 \div n\}$ — координаты терминальных вершин; $X_S = \{(x_i, y_i) \mid x_i, y_i \in R^+, i = (n+1) \div (2n-2)\}$ — искомые координаты ТШ. Сопоставим дугам $(i, j) \in D_\tau$: длины $l_{(i,j)} = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}$ и величины потоков $q_{(i,j)}$. Источники продукта с мощностями $M_0 = \{m_i \in R^+ \mid i = 2 \div n\}$ на дугах, исходящих из терминальных вершин $i \neq 1$, порождают $q_{(i,j)} = m_i$. Потоки $q_{(i,j)}$ на дугах, исходящих из ТШ, равны сумме потоков на дугах, входящих в эти ТШ. Определим значения весовой функции (веса дуг) $w_{(i,j)} = k_{(i,j)} + c_{(i,j)}q_{(i,j)}$, где $k_{(i,j)} > 0$ — удельные капитальные затраты, $c_{(i,j)} > 0$ — удельные транспортные затраты. Требуется найти такие координаты ТШ, при которых сумма $S(A_\tau)$ взвешенных длин дуг $w_{(i,j)}l_{(i,j)}$ дерева A_τ минимальна.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$S(A_\tau) = \sum_{(i,j) \in D_\tau} (k_{(i,j)} + c_{(i,j)}q_{(i,j)})l_{(i,j)} \rightarrow \min_{X_S \in R_+^2}$$

Эта задача многопараметрической оптимизации состоит в поиске ДШ, т. е. в оптимизации координат $(n-2)$ точек Штейнера в дереве с заданной топологией.

1.2. Начальные значения координат ТШ

Поиску ДШ предшествует построение исходного дерева (или поддерева) с заданной топологией. Начальные значения координат ТШ любого дерева, кроме прародителя (дерева со специальной топологией [3]), наследуются от предыдущего этапа решения. Для прародителя и поддеревьев они вычисляются с помощью следующей эвристики. По заданной топологии формируется очередь перебора ТШ, состоящая из номеров ТШ. Построенная по признаку удаленности от корня, она может изменяться в прямом или обратном порядке. В

данном случае она используется по направлению от периферии к корню дерева. Сначала координатам каждой ТШ из очереди перебора последовательно присваиваются значения координат середины отрезка, связывающего эту ТШ со смежными начальными вершинами входящих дуг. Затем каждая ТШ из очереди перебора сдвигается по исходящей дуге на две трети ее длины. Эта эвристика дает хорошее начальное приближение, так как во всех четырехточечных фрагментах дерева уменьшаются длины самых «тяжелых» дуг, что значительно уменьшает число итераций поискового алгоритма.

2. МЕТОД ПОИСКА ДШ И ЕГО АДАПТАЦИЯ

2.1. Выбор метода

Как было отмечено ранее, в композитном ЭА для потоковой задачи Штейнера различают два уровня. На верхнем изменяется топология текущего дерева. На нижнем уровне вычисляются начальные координаты ТШ дерева с заданной топологией, значения которых затем оптимизируются. На поддеревьях фиксированной размерности, выделяемых в дереве [3], это чередование уровней происходит многократно: на каждом поддереве формируются все полные топологии, вычисляются начальные координаты ТШ, находятся все ДШ и лучшее встраивается в дерево. После операций с поддеревьями оптимизируются координаты ТШ всего дерева.

Затраты времени на решение потоковой задачи существенно увеличиваются с ростом числа оптимизируемых параметров. К тому же резко возрастает общее число топологий, генерируемых на верхнем уровне алгоритма, и соответственно увеличиваются затраты времени на решение множества задач на нижнем уровне. Таким образом, эффективность алгоритма поиска ДШ — актуальная проблема для решения потоковых задач Штейнера большой размерности.

Последовательно были рассмотрены несколько алгоритмов поиска ДШ, в которых использовались методы случайного поиска [10]. На первый взгляд методы многопараметрической оптимизации выглядели наиболее перспективными. Сначала был разработан алгоритм с направляющим конусом [5]. Вектор памяти, введенный в алгоритм с самообучением, рассматривался в $(2n-2)$ -мерном пространстве параметров. После удачного шага компоненты вектора рекуррентно пересчитываются. В задачах небольшой размерности

метод оказался весьма эффективным. Однако с ростом числа оптимизируемых параметров затраты времени на поиск ДШ резко возрастали из-за нелинейной вычислительной сложности алгоритма. От его применения пришлось отказаться.

Бесперспективным оказался и градиентный алгоритм с парными пробами. С ростом размерности задачи резко возрастали затраты времени на вычисление градиентов из-за нелинейной сложности алгоритма.

Последним рассматривался ВЭА, вычислительная сложность которого оказалась практически линейной. При его разработке использовалась модель онтогенеза со специальным оператором развития, основанным на случайной модификации метода покоординатного спуска, адаптированного для потоковой задачи.

2.2. Адаптация метода покоординатного спуска

Пусть A_τ — дерево с заданной топологией $\tau \in T$; $X_S = \{(x_i, y_i) | x_i, y_i \in R^+, i = (n + 1) \div (2n - 2)\}$ — текущие координаты ТШ; I — очередь перебора ТШ. Случайная модификация метода покоординатного спуска сводит решение многопараметрической задачи к решению $(n - 2)$ однопараметрических задач. Используя случайные пробы, ищутся улучшения значений целевой функции по каждой паре $(x_i, y_i) \in X_S$ при условии, что (x_j, y_j) , $j \neq i$, остаются неизменными. Решение однопараметрической задачи состоит в том, чтобы для каждой ТШ найти такие координаты, при которых суммарные затраты на трех дугах, инцидентных этой ТШ, минимальны.

Адаптация метода для потоковой задачи включает организацию циклов покоординатного спуска и случайных проб с рекуррентными формулами для рабочего шага. Цикл покоординатного спуска использует очередь I перебора ТШ. Установлено, что здесь оптимальным является перебор ТШ в направлении от корня дерева к его периферии. При этом быстро находится устойчивая конфигурация в прикорневой области дерева [4]. Дальнейшие улучшения значения целевой функции происходят в основном за счет оптимизации координат ТШ в средней части дерева, что влияет на выбор оптимального числа случайных проб.

Для каждой i -й ТШ из очереди I выполняется цикл из pr случайных проб. Новые значения в каждой паре $(x_i, y_i) \in X_S$ выбираются по первой пробе, давшей улучшение значения целевой функции. Нет смысла выполнять оставшиеся пробы: вследствие взаимодействия между всеми ТШ при повторении цикла гра-

диент в каждой ТШ может непредсказуемо меняться.

Рекуррентные формулы для $(N + 1)$ рабочего шага метода при $\forall i \in I$ имеют вид:

$$\begin{cases} x_i^{N+1} = x_i^N + (p_x - 0,5)R, \\ y_i^{N+1} = y_i^N + (p_y - 0,5)R, \text{ если } \Delta s_i^{N+1} > 0, \\ x_i^{N+1} = x_i^N, y_i^{N+1} = y_i^N - \text{иначе.} \end{cases}$$

В этих формулах (x_i^N, y_i^N) и (x_i^{N+1}, y_i^{N+1}) — координаты i -й ТШ до и после пробы; p_x, p_y — случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$; $\Delta s_i^{N+1} = s_i^N - s_i^{N+1}$ — изменение значения целевой функции после пробы, где s_i^N, s_i^{N+1} — суммарные затраты на трех дугах, инцидентных ТШ с координатами до и после пробы; R — радиус круга $K(i, R)$ с центром в i -й ТШ с координатами (x_i^N, y_i^N) .

Таким образом, на $(N + 1)$ шаге случайная проба для i -й ТШ выполняется так, что точка со случайными координатами (x_i^{N+1}, y_i^{N+1}) попадает в круг $K(i, R)$. В процессе статистических испытаний установлена зависимость оптимального значения радиуса R от густоты сети C . Если C определить как среднее расстояние от каждой терминальной вершины до ближайшей терминальной, то $R = 0,31C$.

3. АЛГОРИТМ ПОИСКА ДШ

3.1. Моделирование онтогенеза

Выше отмечено, что при разработке ВЭА использовалась модель онтогенеза, в которой множество X_S координат ТШ трактуется как набор фенотипических признаков особи, изменяющихся с течением времени. Процесс онтогенеза имитируется с помощью оператора развития, выполняющего заданное нормой k число операций. Одна операция представляет собой цикл, основанный на рассмотренном выше методе покоординатного спуска и управляемый очередью перебора I .

Геометрический смысл действий оператора состоит в том, чтобы в некоторой окрестности каждой ТШ найти новое положение этой точки, которое может улучшить значение целевой функции. Если изменилось положение одной ТШ, то вследствие взаимодействия между ТШ есть вероятность оптимизации положений других. Именно поэтому оператор выполняется многократно. Формирование фенотипа особи происходит в результате поэтапных применений оператора развития, разделенных частичными рестартами. В отличие от полных рестартов они сохраняют преемственность признаков.

Набор X_S признаков считаем устойчивым на отдельном этапе развития особи, если относительное улучшение значения целевой функции на нем не превышает заданный порог. Набор X_S признаков считаем оптимальным, если он устойчив на нескольких последовательных этапах развития.

3.2. Схема алгоритма

Для описания схемы ВЭА введем обозначения: t — счетчик последовательных этапов; $S(A_t)$ и $S(A'_t)$ — значения целевой функции до и после очередного этапа соответственно; $\Delta S(A_t)$ — относительное улучшение значения целевой функции после очередного этапа; ε — минимальный порог для $\Delta S(A_t)$; $count$ — заданное число последовательных этапов в пределах ε .

Пусть известны X_S и $S(A_t)$ — начальный набор признаков и соответствующее значение целевой функции. Схема алгоритма имеет вид:

1. Обнулить счетчик этапов развития особи: $t = 0$.
2. Применить к текущему набору X_S оператор развития.
3. Вычислить $\Delta S(A_t) = |(S(A_t) - S(A'_t))/S(A_t)|$.
4. Если $\Delta S(A_t) > \varepsilon$, обновить X_S , $S(A_t) = S(A'_t)$ и перейти к 1, иначе $t = t + 1$.
5. Если $t < count$, перейти к 2, иначе останов.

При поиске ДШ оператор развития используется со следующими оптимизированными параметрами: $pr = 5$ — число случайных проб, $k = 100$ — норма оператора. Для оценки относительного улучшения значения целевой функции задан порог $\varepsilon = 0,001$. Это значение рассчитано для практических задач большой размерности с погрешностью входной информации в 3%. Такой порог применялся и при решении тестовых задач со случайными данными. В алгоритме принят критерий остановки «по счету три», т. е. $count = 3$. Это значит, что на трех последовательных этапах значения $\Delta S(A_t)$ не превышали заданный порог ε . В задачах размерности n от 11 до 1000 по экспериментальной оценке требуется от 7 до 9 рестартов по «счету три». При этом максимальное число пробных изменений координат ТШ находится в интервале $(35 \cdot 10^2, 45 \cdot 10^2)$. Это позволяет считать вычислительную сложность ВЭА близкой к линейной.

Как было отмечено, в композитном алгоритме решается множество задач поиска ДШ на поддеревьях ($n < 10$). Установлено, что для них достаточно однократного применения оператора развития с параметрами $k = 50$, $pr = 3$.

ВЭА прошел успешное тестирование вместе с композитным ЭА для потоковой задачи Штейнера на кластере КарНЦ РАН [7]. В вычислительных экспериментах использовались тесты из OR-Library [11] для задачи Штейнера без потоков как частного случая потоковой задачи с нулевыми значениями мощностей источников, а также соответствующие тесты, адаптированные для потоковой задачи. Результаты экспериментов приведены в [6].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен эволюционный подход к задаче оптимизации координат точек Штейнера в дереве с заданной топологией. Эта задача решается на нижнем уровне двухуровневого композитного эволюционного алгоритма, ранее разработанного для потоковой задачи Штейнера, на верхнем уровне которого изменяется топология. Для рассматриваемой задачи впервые предложен вещественный эволюционный алгоритм. Его вычислительная сложность близка к линейной. В алгоритме использована модель онтогенеза со специальным оператором развития. Он основан на случайной модификации метода покоординатного спуска, адаптированного для потоковой задачи Штейнера. Для алгоритма и оператора в ходе серий экспериментов получены оптимальные управляющие параметры.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилберт Э. Н., Поллак Г. О. Минимальные деревья Штейнера // Кибернетический сборник, новая серия. Вып. 8. М.: Мир, 1971. С. 19–49.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
3. Кукин В. Д. Генетические операторы эволюционной модели для потоковой задачи Штейнера // Известия РАН. ТиСУ. 2010. № 2. С. 74–80.
4. Кукин В. Д. Гипотеза о «большой долине» для потоковой задачи Штейнера // Известия РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 72–78. doi: 10.7868/S0002338815010096
5. Кукин В. Д. Локальная оптимизация лесотранспортной сети с помощью аналога задачи Штейнера // Системы автоматизированного проектирования лесотранспорта и лесомелиорации. Петрозаводск: Карел. фил. АН СССР, 1984. С. 12–17.

6. Кукин В. Д. Эволюционная модель для задачи Штейнера с потоками и зависящими от них весами // Известия РАН. ТиСУ. 2008. № 3. С. 115–123.

7. Кластер КарНЦ РАН: cluster.krc.karelia.ru (дата обращения: 14.09.2017).

8. Лотарев Д. Т., Супрун А. В., Уздемир А. П. Локальная оптимизация в задаче Штейнера на евклидовой плоскости // Автоматика и телемеханика. 2004. Вып. 7. С. 60–70.

9. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.

10. Растрюгин Л. А. Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974. 630 с.

11. Beasley J. E. OR-Library: Distributing Test Problems by Electronic Mail // Journal of the Operational Research Society. 1990. Vol. 41, iss. 11. P. 1069–1072. doi: 10.1057/jors.1990.166

12. Herrera F., Lozano M., Verdegay J. L. Tackling Real-coded Genetic Algorithms: Operators and Tools for Behavioural Analysis // Artificial Intelligence Review. 1998. Vol. 12, iss. 4. P. 265–319. doi: 10.1023/A:1006504901164

13. Michalewicz Z., Logan T. D., Swaminathan S. Evolutionary operators for continuous convex parameter space // Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming. 1994. P. 84–97. doi: 10.1142/9789814534116

Поступила в редакцию 14.03.2018

REFERENCES

1. Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees. *SIAM J. Appl. Math.* 1968. Vol. 16, iss. 1. P. 1–29.

2. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP completeness. Freeman, San Francisco, 1979; Moscow: Mir, 1982. 416 p.

3. Kukin V. D. Genetic operators of an evolutionary model for the Steiner flow problem. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2010. Vol. 49, iss. 2. P. 227–233. doi: 10.1134/S1064230710020085

4. Kukin V. D. The Big Valley conjecture for the flow Steiner tree problem. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015. Vol. 54, iss. 1. P. 69–76. doi: 10.1134/S1064230715010098

5. Kukin V. D. Lokal'naya optimizatsiya lesotransportnoi seti s pomoshch'yu analoga zadachi Shteinera [Local optimization of a forest transportation network with the help of an analogue of the Steiner problem]. *CAD Systems for Forest Transport and Forest Reclamation*. Petrozavodsk: Karel. f. AN SSSR, 1984. P. 12–17.

6. Kukin V. D. Evolutionary model for the Steiner tree problem with flow-dependent weights. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2008. Vol. 47, iss. 3. P. 447–454. doi: 10.1134/S1064230708030143

7. Link for the KarRC RAS cluster: <http://cluster.krc.karelia.ru/index.php?plang=e> (accessed: 14.09.2017).

8. Lotarev D. T., Suprun A. V., Uzdemir A. P. Local optimization in the Steiner problem on the Euclidean plane. *Automation and Remote Control*. 2004. Vol. 65, iss. 7. P. 1089–1098. doi: 10.1023/B:AURC.0000038715.76668.83

9. Ore O. Theory of Graphs. Am. Math. Soc., Providence, RI. 1962. 279 p.

10. Rastrigin L. A. Sistemy ekstremal'nogo upravleniya [Systems of extremal control]. Moscow: Nauka, 1974. 630 p.

11. Beasley J. E. OR-Library: Distributing Test Problems by Electronic Mail. *Journal of the Operational Research Society*. 1990. Vol. 41, iss. 11. P. 1069–1072. doi: 10.1057/jors.1990.166

12. Herrera F., Lozano M., Verdegay J. L. Tackling Real-coded Genetic Algorithms: Operators and Tools for Behavioural Analysis. *Artificial Intelligence Review*. 1998. Vol. 12, iss. 4. P. 265–319. doi: 10.1023/A:1006504901164

13. Michalewicz Z., Logan T. D., Swaminathan S. Evolutionary operators for continuous convex parameter space. *Proceed. the 3rd Annual Conf. Evolutionary Programming*. 1994. P. 84–97. doi: 10.1142/9789814534116

Received March 14, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Кукин Валерий Дмитриевич
 научный сотрудник
 Институт прикладных математических исследований
 КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
 «Карельский научный центр РАН»
 ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
 Республика Карелия, Россия, 185910
 эл. почта: kukin_v@krc.karelia.ru
 тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTOR:

Kukin, Valery
 Institute of Applied Mathematical Research,
 Karelian Research Centre,
 Russian Academy of Sciences
 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
 Karelia, Russia
 e-mail: kukin_v@krc.karelia.ru
 tel.: (8142) 766312

УДК 004.01:006.72 (470.22)

СРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

М. М. Лери

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются случайные конфигурационные графы, где распределение степеней вершин является дискретным степенным распределением со случайным параметром, имеющим усеченное нормальное распределение на интервале (a, b) . Проводится анализ устойчивости таких графов к случайным и направленным разрушениям как с точки зрения сохранения связности, так и к разрушениям по типу «лесного пожара». В первом случае получены модели зависимости объема максимальной компоненты графа, а также вероятности его разрушения от процента удаленных вершин и начального размера графа. В случае «лесного пожара» основным объектом рассмотрения было число оставшихся в графе после «пожара» вершин. Наряду с двумя случаями «начала пожара» – случайным возгоранием и направленным поджогом вершины с наибольшей степенью – рассматривались два вида распространения пожара: с фиксированной вероятностью распространения огня по ребрам и со случайной. Для обоих видов внешнего воздействия проведено сравнение результатов с полученными ранее для случаев фиксированного значения параметра распределения степеней вершин и параметра, равномерно распределенного на отрезке $[a, b]$.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степенное распределение; устойчивость; случайная среда; модель лесного пожара; имитационное моделирование.

M. M. Leri. ON COMPARING CONFIGURATION GRAPHS ROBUSTNESS IN A RANDOM ENVIRONMENT

We consider configuration graphs with vertex degrees distributed independently according to the power law, with a truncated parameter τ normally distributed on the interval (a, b) . By computer simulation we study the robustness of such graphs to both random and targeted destructions in the cases of preserving graph connectivity and «forest fire». In the first case, the models of the dependence of the size of the giant component and the probability of graph destruction on the initial graph size N and the percentage of removed vertices were obtained. In the case of the forest fire, the main interest was in the number of vertices remaining after the fire. Along with the two «fire starts» (random ignition and targeted lightning-up of the node with the highest degree), we considered the two fire propagation processes: with a fixed probability of fire transition through a graph edge and a random one. For both types of external destructive impacts, we compared the new results with the ones obtained previously for the configuration graphs with a fixed parameter of node degree distribution and the one uniformly distributed on the interval $[a, b]$.

Key words: configuration graph; power-law; robustness; random environment; forest fire model; simulation modeling.

ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие и рост глобальных сетей передачи данных как в размере, так и в их количестве приводит к росту разнообразия задач, возникающих в результате всех этих процессов. Направления исследования варьируются от изучения структуры таких сетей (см., например, [6, 9, 10, 15]) до исследования их устойчивости к разного рода воздействиям, как случайным, так и целенаправленным, приводящим к разрушению сетевой структуры (см., например, [4, 7, 14]). Очевидно, что для математического представления данных сетей используются случайные графы. Изучение структуры и образования реальных сетей (см., например, [9, 15]) показало, что одной из наиболее подходящих для их описания моделей является предложенная в [6] конфигурационная модель случайных графов со случайными независимыми степенями.

Рассматриваются конфигурационные графы, число вершин которых равно N . Степени вершин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ такого графа представляют собой независимые случайные величины, общее распределение которых имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \tau > 1. \quad (1)$$

При построении графа степени вершин $1, 2, \dots, N$, являющиеся реализациями случайной величины ξ , определяют различные полурёбра графа [15], занумерованные в произвольном порядке. Равновероятное соединение всех полурёбер графа образует ребра. Такое соединение подразумевает, что сумма степеней вершин должна быть четной, поэтому в противном случае степень равновероятно выбранной вершины увеличивается на 1. Конфигурационные графы могут иметь петли, кратные ребра и циклы.

Несмотря на то что в большинстве работ [6, 7, 9, 10, 14, 15] рассматриваются графы с фиксированным значением параметра τ , исследования последних лет показывают, что в связи с быстрым ростом и развитием сложных сетей, а также с увеличением их разнообразия не меньший интерес представляют собой модели случайных графов, распределения степеней вершин которых изменяются с возрастанием числа вершин или даже являются случайными [5]. Это привело к новой ветви в исследованиях – изучению случайных процессов в случайной среде [2].

В настоящей работе рассматриваются конфигурационные графы с распределением сте-

пеней вершин (1), где параметр τ является случайной величиной, имеющей усеченное нормальное распределение на интервале (a, b) со следующей плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(F(b) - F(a))} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

где $x \in (a, b)$, $\mu = \frac{a+b}{2}$, $\sigma = \frac{b-\mu}{3}$ (правило трех сигм), $F(a)$ и $F(b)$ – значения функции нормального распределения с параметрами μ , σ в точках a и b соответственно.

В работе проведена оценка устойчивости рассматриваемых конфигурационных графов к разрушающим воздействиям в условиях, когда эволюция графов происходит в случайной среде. В данном случае случайная среда подразумевает то, что степени вершин графа имеют распределение (1) со случайным параметром τ , который выбирается отдельно для каждой вершины из распределения с плотностью (2). Цель настоящей работы состояла в сравнении полученных результатов с предыдущими: для графов с фиксированным значением параметра τ [1, 11, 12] и со случайным τ , равномерно распределенным на отрезке $[a, b]$ [13].

Рассматривались два типа разрушающих воздействий: разрушение связности графа и «лесной пожар». Первый вид процесса состоит в последовательном удалении вершин графа вместе с инцидентными этим вершинам ребрами с целью разрушения его связности, тогда как «лесной пожар», начинаясь с некоторой вершины, распространяется по ребрам, как пожар или инфекция, поражая инцидентные вершины.

РАЗРУШЕНИЕ СВЯЗНОСТИ

Одним из важных свойств конфигурационных графов является наличие и единственность гигантской компоненты связности в графах с параметром $\tau \in (1, 2)$ (см., например, [15]), то есть компоненты, объем которой при $N \rightarrow \infty$ пропорционален числу вершин графа N . Предыдущие исследования [11, 12] показали, что при $\tau > 2$ наибольшая по объему компонента связности конфигурационного графа содержит значительно больше вершин, чем любая другая, хотя эта компонента и не является гигантской. Таким образом, через η_1 обозначим процент вершин графа, вошедших в максимальную компоненту связности (независимо от того, является ли она гигантской), через η_2 – процент вершин, вошедших во вторую по объему компоненту. Рас-

смаивались два типа разрушений: направленное и случайное. При направленном разрушении последовательно удалялись вершины с максимальными степенями и инцидентные им ребра, при случайном – тот же процесс происходил на равновероятно выбранных вершинах. Вершины, оказавшиеся в результате разрушения изолированными, также удалялись из графа. В качестве критерия разрушения, как и в более ранних работах (см., например, [11, 12]), рассматривалось наступление следующего события $A : \{\eta_1 \leq 2\eta_2\}$, которое означает, что граф считался разрушенным в том случае, если объем максимальной компоненты становился меньшим либо равным двум объемам второй по размеру компоненты графа. Через $p = \mathbf{P}\{A\}$ обозначим вероятность события A .

Имитационные эксперименты проводились на графах размерности $1000 \leq N \leq 10000$ с шагом 500 для трех интервалов $[a, b]$: (1, 2), [2, 3] и (1, 3], по 100 моделей для каждой пары $(N, [a, b])$. Выбор интервалов был продиктован следующими соображениями: конфигурационные графы с $\tau \in (1, 2)$ используют для описания сложных сетей телекоммуникаций (см., например, [9, 10, 15]); графы с $\tau \in [2, 3]$ показали себя устойчивыми к «лесному пожару» [1, 11–13]; а параметр $\tau \in (1, 3]$ рассматривался как обобщающий. По полученным статистическим данным посредством методов регрессионного анализа были получены оценки зависимостей объема η_1 максимальной компоненты связности, а также вероятности разрушения p от процента удаленных из графа вершин r при разных объемах графа N и значениях параметра распределения степеней вершин графа $\tau \in [a, b]$ для трех интервалов $[a, b]$. В случае направленного разрушения были получены следующие регрессионные зависимости:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ \eta_1 &= 55,82 - 8,85r - 6,62 \ln r, \\ p &= -0,21 + 0,065r^{1,84}, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ \eta_1 &= -0,65 + 2,1r - 2,87 \ln r, \\ p &= 1,15 + 0,27 \ln r, \\ \tau \sim N(1, 3] : \\ \eta_1 &= 22,04 - 4,01r - 10,51 \ln r, \\ p &= -1,55 + 1,77r^{0,41} \end{aligned}$$

с коэффициентами детерминации не ниже 0,95 для всех приведенных выше моделей, где $\tau \sim N(a, b)$ означает, что рассматриваются конфигурационные графы с распределением степеней вершин (1) и параметром τ , имею-

щим плотность распределения (2). Значения r в моделях зависимости вероятности разрушения графа p имеют следующие ограничения: $0,84 + 0,095 \ln N \leq r \leq 11,17 - 0,71 \ln N$ при $\tau \sim N(1, 2)$, $0,31 - 0,033 \ln N \leq r \leq 3,84 - 0,37 \ln N$ при $\tau \sim N[2, 3]$, $-1,48 + 0,25 \ln N \leq r \leq 7,73 - 0,6 \ln N$ при $\tau \sim N(1, 3]$, где значение R^2 не опускается ниже 0,89 для всех моделей. Очевидно, что для значений r меньше нижней границы $p = 0$, а для r больше верхнего ограничения $p = 1$. Аналогичное верно для следующих моделей зависимости p от r и N для варианта случайных разрушений:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ \eta_1 &= 83,82 - 1,05r - 4,22 \ln r, \\ p &= -0,43 - 0,026 \ln N + 5,96 \cdot 10^{-6}r^3, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ \eta_1 &= 13,38 - 0,14r - 1,61 \ln r, \\ p &= 0,1 - 0,0000104N + 0,018r, \\ \tau \sim N(1, 3] : \\ \eta_1 &= 57,46 - 0,67r - 4,5 \ln r, \\ p &= 0,41 - 0,16 \ln N + 0,00053r^2. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов детерминации для всех приведенных выше моделей были не ниже 0,92, а ограничения на значения r в моделях для вероятности разрушения p были следующими ($R^2 > 0,9$ для всех моделей): $33,41 + 1,64 \ln N \leq r \leq 75,24 - 1,15 \ln N$ при $\tau \sim N(1, 2)$, $-46,16 + 9,96 \ln N \leq r \leq 69,48 - 1,14 \ln N$ при $\tau \sim N[2, 3]$, $0,29 - 0,031 \ln N \leq r \leq 55,9 - 0,28 \ln N$ при $\tau \sim N(1, 3]$.

Далее было проведено сравнение устойчивости рассматриваемых в настоящей работе конфигурационных графов с нормально распределенным параметром распределения степеней вершин и рассмотренных в предыдущих работах конфигурационных графов с фиксированным параметром τ [11] и с τ , равномерно распределенным на отрезке $[a, b]$ [13], которые будем обозначать $\tau \sim U[a, b]$. На рисунках 1–6 представлены регрессионные зависимости объемов (в %) максимальных компонент η_1 графа от процента удаленных из него вершин r для трех типов конфигурационных графов: с нормально распределенным параметром $\tau \sim N(a, b)$, фиксированным параметром $\tau = \frac{a+b}{2}$ и равномерно распределенным $\tau \sim U[a, b]$ в случаях направленного (рис. 1–3) и случайного (рис. 4–6) разрушений для трех интервалов: (1, 2) – рисунки 1 и 4, [2, 3] – рисунки 2 и 5 и (1, 3] – рисунки 3 и 6.

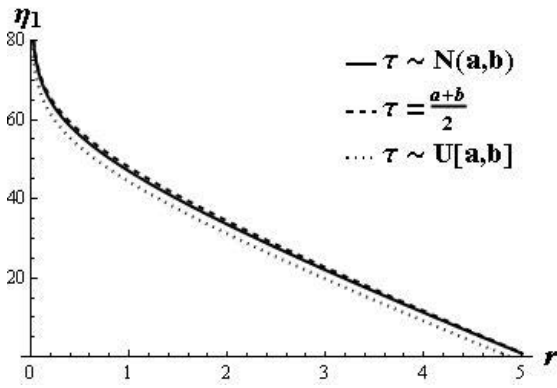


Рис. 1. Зависимости η_1 от r при направленном разрушении для интервала (1, 2)
 Fig. 1. Dependencies of η_1 on r in the case of targeted attack on the interval (1, 2)

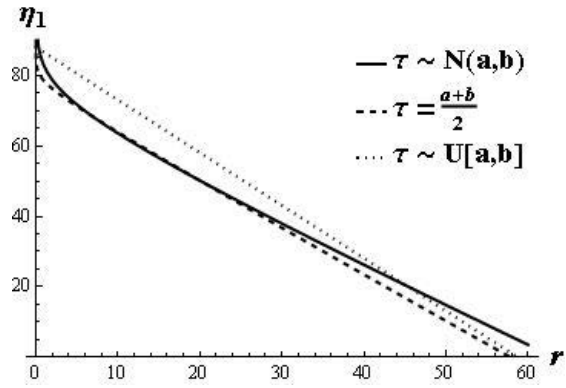


Рис. 4. Зависимости η_1 от r при случайном разрушении для интервала (1, 2)
 Fig. 4. Dependencies of η_1 on r in the case of random breakdown on the interval (1, 2)

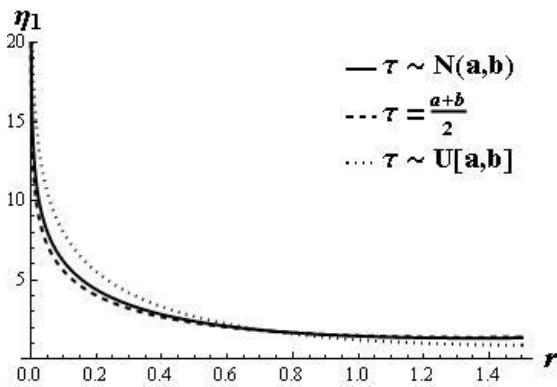


Рис. 2. Зависимости η_1 от r при направленном разрушении для интервала [2, 3]
 Fig. 2. Dependencies of η_1 on r in the case of targeted attack on the interval [2, 3]

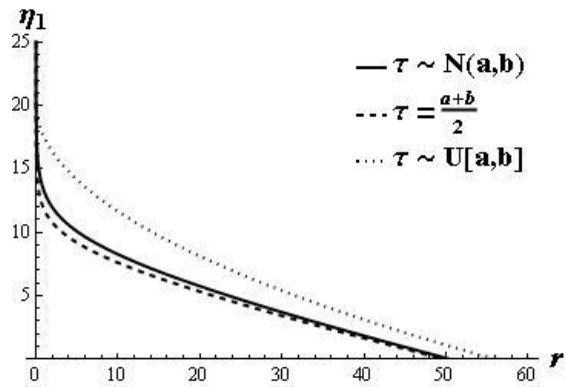


Рис. 5. Зависимости η_1 от r при случайном разрушении для интервала [2, 3]
 Fig. 5. Dependencies of η_1 on r in the case of random breakdown on the interval [2, 3]

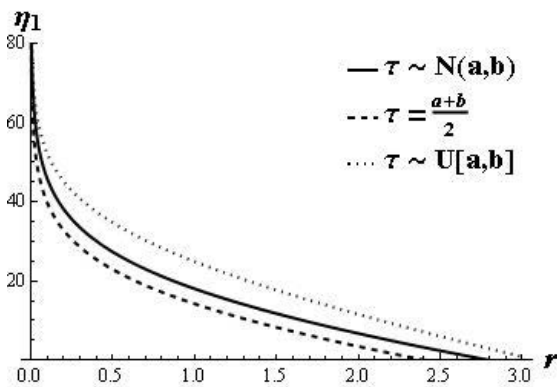


Рис. 3. Зависимости η_1 от r при направленном разрушении для интервала (1, 3)
 Fig. 3. Dependencies of η_1 on r in the case of targeted attack on the interval (1, 3)

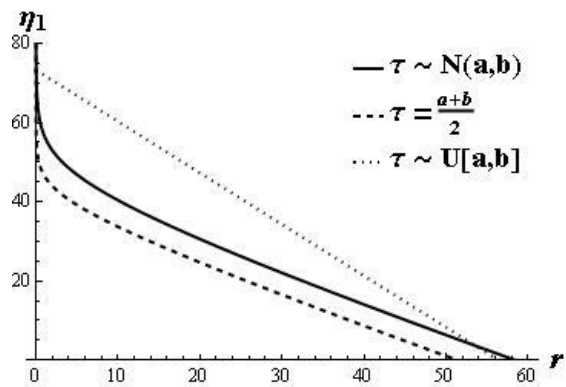


Рис. 6. Зависимости η_1 от r при случайном разрушении для интервала (1, 3)
 Fig. 6. Dependencies of η_1 on r in the case of random breakdown on the interval (1, 3)

Вследствие того, что регрессионные модели обычно нивелируют отклонения, было проведено сравнение исходных результатов: объемов максимальной компоненты η_1 и вероятностей разрушения графа p для каждой тройки

$([a, b], N, r)$. В качестве нулевой была рассмотрена гипотеза о равенстве средних $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ двух рассматриваемых выборок $H_0 : \bar{m}_1 = \bar{m}_2$. В таблице 1 приведен процент отвергнутых гипотез.

Таблица 1. Сравнение объемов максимальной компоненты: процент отвергнутых гипотез
Table 1. Comparison of the largest component sizes: the percentage of rejected hypotheses

вид разрушения type of destruction	сравниваемые графы compared graphs	$[a, b]$		
		(1, 2)	[2, 3]	(1, 3)
направленное разрушение targeted attack	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	11,5	92,6	19,5
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	56,4	98,7	52
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	60,7	99,6	75,4
случайное разрушение random breakdown	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	63,6	96,7	15,5
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	84,9	97,8	61,4
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	95,3	99,7	69,9

Результаты сравнения показывают, что, несмотря на видимую близость регрессионных зависимостей, отличие в динамике разрушения между тремя видами конфигурационных графов статистически значимо. Что подтверждается и результатами сравнения вероятностей разрушения графов (рис. 7–12 и табл. 2). На рисунках 7–12 представлены регрессионные зависимости вероятностей p разрушения графов от процента удаленных из него вер-

шин r и начальных объемов графов N (для некоторых моделей) для трех типов конфигурационных графов: с нормально распределенным параметром $\tau \sim N(a, b)$, фиксированным параметром $\tau = \frac{a+b}{2}$ и равномерно распределенным $\tau \sim U[a, b]$ в случаях направленного (рис. 7–9) и случайного (рис. 10–12) разрушений для трех интервалов: (1, 2) – рисунки 7 и 10, [2, 3] – рисунки 8 и 11 и (1, 3) – рисунки 9 и 12.

Таблица 2. Сравнение вероятностей разрушения графа: процент отвергнутых гипотез
Table 2. Comparison of the probabilities of graph destruction: the percentage of rejected hypotheses

вид разрушения type of destruction	сравниваемые графы compared graphs	$[a, b]$		
		(1, 2)	[2, 3]	(1, 3)
направленное разрушение targeted attack	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	87,4	77,9	54,3
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	72	58,7	49,1
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	61,1	44,1	36,5
случайное разрушение random breakdown	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	94,6	61,5	69,7
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	89,8	39,9	76,5
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	87,6	22	68,2

Таким образом, необходимо отметить, что процесс разрушения на всех трех рассмотренных моделях конфигурационных графов происходит по-разному. Это касается как структурных изменений, так и вероятности разрушения графов. Согласно полученным результатам, на интервалах изменения параметров распределения степеней вершин [2, 3] и

(1, 3] конфигурационные графы с равномерно распределенным параметром более устойчивы как к направленному, так и к случайному разрушению, чем графы с нормально распределенным или с фиксированным параметром.

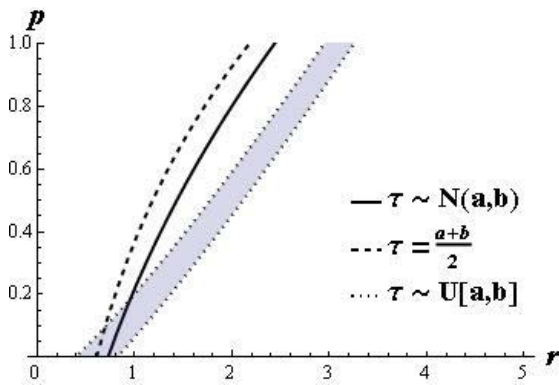


Рис. 7. Зависимости p от r и N при направленном разрушении для интервала (1, 2)
 Fig. 7. Dependencies of p on r and N in the case of targeted attack on the interval (1, 2)

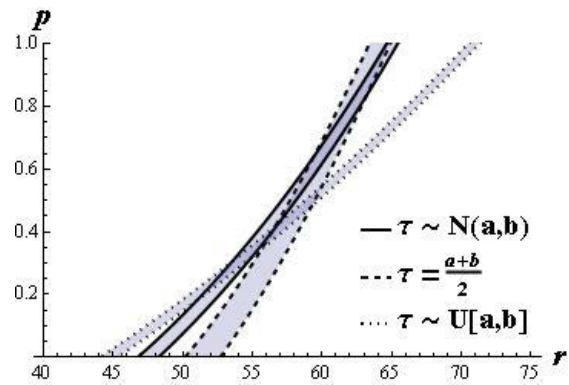


Рис. 10. Зависимости p от r и N при случайном разрушении для интервала (1, 2)
 Fig. 10. Dependencies of p on r and N in the case of random breakdown on the interval (1, 2)

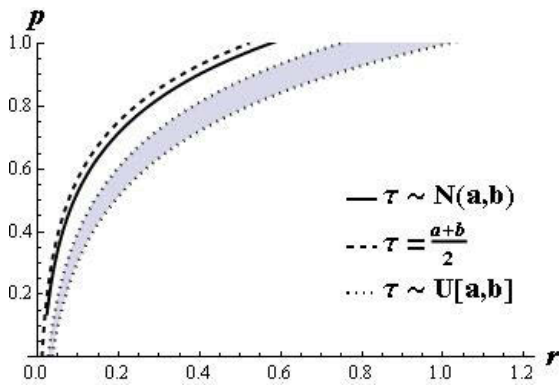


Рис. 8. Зависимости p от r и N при направленном разрушении для интервала [2, 3]
 Fig. 8. Dependencies of p on r and N in the case of targeted attack on the interval [2, 3]

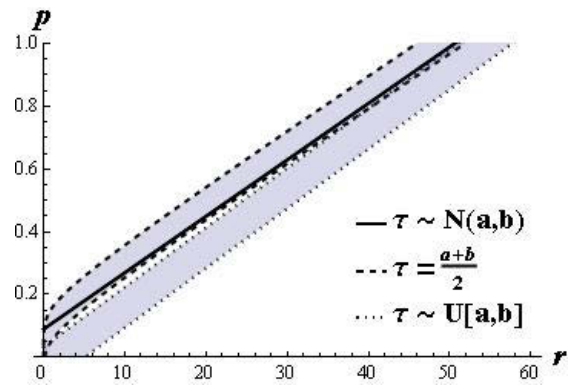


Рис. 11. Зависимости p от r и N при случайном разрушении для интервала [2, 3]
 Fig. 11. Dependencies of p on r and N in the case of random breakdown on the interval [2, 3]

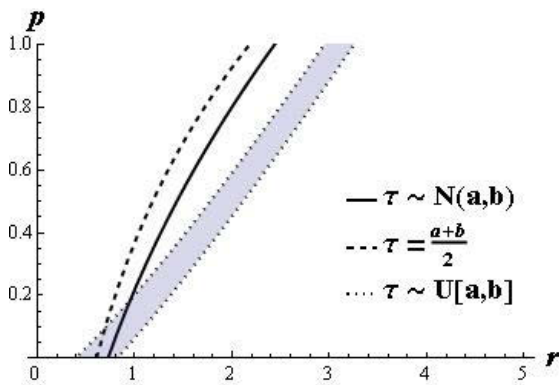


Рис. 9. Зависимости p от r и N при направленном разрушении для интервала (1, 3)
 Fig. 9. Dependencies of p on r and N in the case of targeted attack on the interval (1, 3)

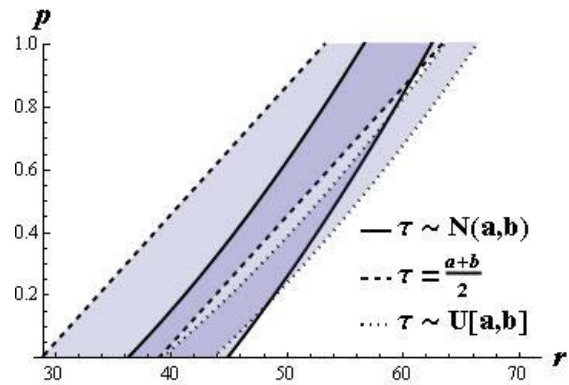


Рис. 12. Зависимости p от r и N при случайном разрушении для интервала (1, 3)
 Fig. 12. Dependencies of p on r and N in the case of random breakdown on the interval (1, 3)

При этом наименее устойчивыми оказываются графы с фиксированным параметром. Однако в случае $\tau \in (1, 2)$ и направленного разрушения наибольшую устойчивость проявляют графы с фиксированным параметром, а наименьшую – с равномерным. При случайном разрушении и $\tau \in (1, 2)$ графы с равномерным параметром τ начинают разрушаться раньше, но их разрушение происходит дольше, тогда как графы с фиксированным τ , наоборот, начинают разрушаться позднее, но сам процесс происходит быстрее. Следует отметить, что графы с нормально распределенным параметром τ всегда занимают промежуточное положение в вопросе их устойчивости к данному виду разрушений.

«ЛЕСНОЙ ПОЖАР»

Далее рассматривался процесс разрушения, известный как «модель лесного пожара» (см., например, [4, 8]), а также используемый некоторыми авторами для изучения банковских кризисов [3]. Связь данного процесса разрушения с лесным пожаром состоит в следующем. Вершины конфигурационного графа интерпретируются как деревья, растущие на некоторой ограниченной территории, а ребра графа – это возможные пути перехода огня от одной вершины к другой. Возгорание всегда начинается с одной вершины графа: это может быть вершина с максимальной степенью, тогда речь идет о целенаправленном поджоге; либо это может быть случайно (равновероятно) выбранная вершина, тогда говорится о случайном возгорании. После возгорания первой вершины огонь переходит на инцидентные ей вершины по ребрам графа с некоторой вероятностью $0 < p \leq 1$. Эта вероятность может либо принимать фиксированное значение для всех ребер графа, либо быть равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$ и разной для каждого ребра.

Для согласования топологии конфигурационного графа с моделью «лесного пожара» будем использовать вспомогательные графы, вершины которых расположим в узлах квадратной целочисленной решетки размера 100×100 (см. [1]), соединив их ребрами по принципу «ближайшего соседа». Степень любой вершины внутри решетки не будет превышать 8. Используя эти вспомогательные графы, в [1] была установлена зависимость числа N вершин конфигурационного графа от параметра τ распределения степеней вершин:

$$N = [9256\tau^{-1,05}]. \quad (3)$$

Имитационное моделирование данного процесса разрушения проводилось для конфигурационных графов с распределением степеней вершин (1) и с параметром τ , имеющим усеченное нормальное распределение (2) на трех интервалах (a, b) : $(1, 2)$, $(1, 3)$ и $[2, 3]$. Объемы графов для каждого из интервалов (a, b) вычислялись из уравнения (3), где $\tau = (a + b)/2$. В случае фиксированных значений вероятности перехода огня по ребру графа $0 < p \leq 1$ для каждой пары $([a, b], p)$ было построено по 100 моделей и получены регрессионные зависимости числа оставшихся после пожара вершин n от p для каждого из трех интервалов $[a, b]$. Так, в случае целенаправленного поджога модели были следующими:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ n &= 5733,56 - 4720,65p - 129,19 \ln p, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ n &= 3829,6 - 627,63p + 87,51 \ln p, \\ \tau \sim N(1, 3) : \\ n &= 5299,18 - 3276,12p + 212,25 \ln p, \end{aligned}$$

где коэффициенты детерминации всех моделей равны 0,99. Аналогично для процесса случайного возгорания были получены следующие модели:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ n &= 8034,94 - 5754,33p + 544,56 \ln p, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ n &= 3586,94 - 97,98p + 15,7 \ln p, \\ \tau \sim N(1, 3) : \\ n &= 5395,22 - 2062,52p + 266,2 \ln p \end{aligned}$$

со значениями коэффициентов детерминации не ниже 0,98.

Далее на тех же графах рассматривался процесс случайного распространения огня, когда вероятность p перехода огня по ребру является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$. В этом случае были получены средние значения числа оставшихся в графе вершин \bar{n} (табл. 3).

По аналогии с разделом «Разрушение связности» было проведено сравнение устойчивости к пожару конфигурационных графов с нормально распределенным параметром τ и рассмотренных в работах [11, 13] конфигурационных графов с τ либо фиксированным, либо равномерно распределенным на отрезке $[a, b]$.

Таблица 3. Средние значения числа оставшихся в графе вершин \bar{n} для графов с нормально распределенным τ

Table 3. Average values of the number of vertices remaining in the graph \bar{n} for graphs with normally distributed τ

$\tau \sim N(a, b)$	целенаправленный поджог targeted lightning-up
(1, 2)	3392,5
[2, 3]	3487,2
(1, 3)	3535
$\tau \sim N(a, b)$	случайное возгорание random ignition
(1, 2)	4848,6
[2, 3]	3533,1
(1, 3)	4238,4

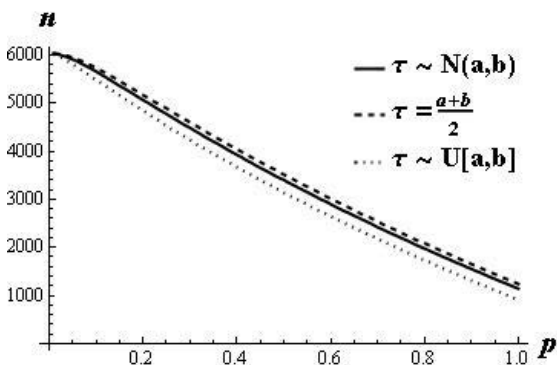


Рис. 13. Зависимости n от p при целенаправленном поджоге для интервала (1, 2)
Fig. 13. Dependencies of n on p in the case of targeted lightning-up on the interval (1, 2)

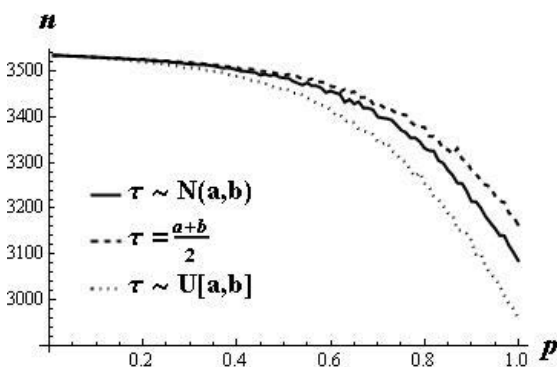


Рис. 14. Зависимости n от p при целенаправленном поджоге для интервала [2, 3]
Fig. 14. Dependencies of n on p in the case of targeted lightning-up on the interval [2, 3]

На рисунках 13–18 показаны зависимости числа оставшихся после пожара вершин n от вероятности p перехода огня по ребру графа для трех рассматриваемых моделей конфигурационных графов: с нормально распределенным параметром $\tau \sim N(a, b)$, с фиксированным $\tau = \frac{a+b}{2}$ и равномерно распределенным $\tau \sim U[a, b]$ для трех интервалов (a, b) : (1, 2) – рисунки 13 и 16, [2, 3] – рисунки 14 и 17, (1, 3) – рисунки 15 и 18 при целенаправленном поджоге (рис. 13–15) и случайном возгорании (рис. 16–18).

С целью сравнения трех моделей графов для каждой пары значений $((a, b), p)$ было проведено попарное сравнение выборок, состоящих каждая из 100 значений n (числа оставшихся после пожара вершин), то есть проверялась гипотеза о равенстве средних с уровнем значимости 0,05 по критерию Манна – Уитни из-за отсутствия нормальности сравниваемых выборок.

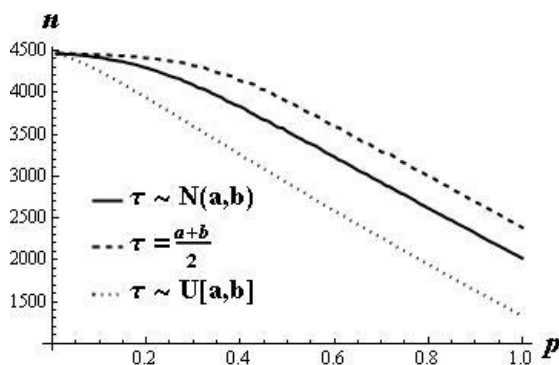


Рис. 15. Зависимости n от p при целенаправленном поджоге для интервала (1, 3)
Fig. 15. Dependencies of n on p in the case of targeted lightning-up on the interval (1, 3)

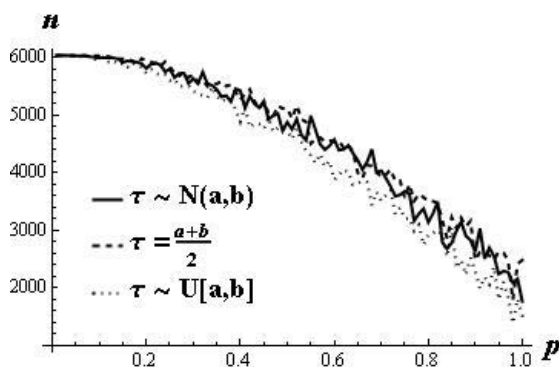


Рис. 16. Зависимости n от p при случайном возгорании для интервала (1, 2)
Fig. 16. Dependencies of n on p in the case of random ignition on the interval (1, 2)

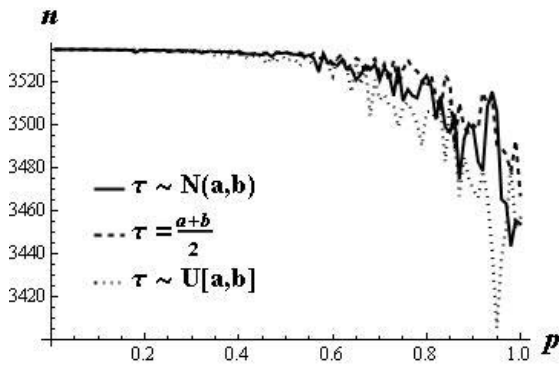


Рис. 17. Зависимости n от p при случайном возгорании для интервала $[2, 3]$
 Fig. 17. Dependencies of n on p in the case of random ignition on the interval $[2, 3]$

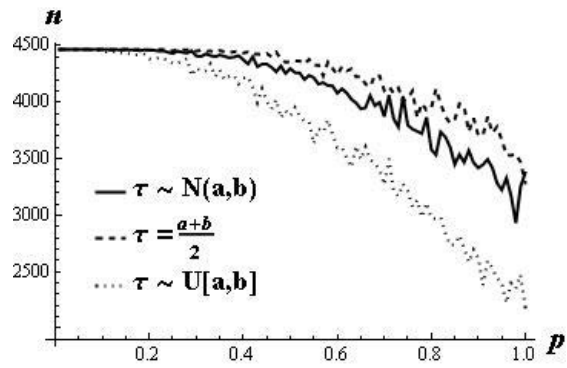


Рис. 18. Зависимости n от p при случайном возгорании для интервала $(1, 3]$
 Fig. 18. Dependencies of n on p in the case of random ignition on the interval $(1, 3]$

В таблице 4 приведены проценты случаев, в которых эта гипотеза отвергалась для целенаправленного поджога и случайного возгорания.

Таблица 4. Сравнение числа оставшихся после пожара вершин для трех видов графов ($0 < p \leq 1$ фиксировано)
 Table 4. Comparison of the number of vertices remaining after the fire for three graph types ($0 < p \leq 1$ is fixed)

вид разрушения type of destruction	сравниваемые графы compared graphs	$[a, b]$		
		(1, 2)	[2, 3]	(1, 3]
целенаправленный поджог targeted lightning-up	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	99	29	100
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	100	67	100
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	100	88	100
случайное возгорание random ignition	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	35	5	31
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	61	4	51
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	64	1	49

Для сравнения числа оставшихся после пожара вершин при случайной вероятности перехода огня по ребру p приведем полученные ранее [1, 13] значения числа оставшихся вершин для графов с фиксированным τ и с равномерно распределенным на отрезке $[a, b]$ (табл. 5).

По аналогии со случаем фиксированного значения p для каждого интервала (a, b) было проведено сравнение числа оставшихся после пожара вершин попарно для трех видов графов. Результаты сравнения показали, что в случае целенаправленного поджога для интервалов (1, 2) и (1, 3] гипотеза о равенстве средних значений числа оставшихся после пожара вершин n отвергается, тогда как для интервала

[2, 3] – нет. При случайном возгорании гипотеза о равенстве средних отвергается для всех трех интервалов.

Таким образом, проведенное исследование процесса разрушения по типу «лесного пожара» показало, что при случайном возгорании значимого различия в смысле числа оставшихся после пожара вершин между тремя рассмотренными моделями конфигурационных графов не наблюдается. Однако при целенаправленном поджоге описанного выше различия между тремя моделями не наблюдается только на интервале изменения параметра $\tau \in [2, 3]$. Кроме того, результаты показывают, что графы с фиксированным значением параметра τ более устойчивы к «пожару»,

причем как к целенаправленному, так и к случайному возгоранию. Наименее устойчивыми в смысле числа оставшихся после пожара вершин оказываются графы с параметром τ , равномерно распределенным на отрезке $[a, b]$.

Таблица 5. Средние значения числа оставшихся в графе вершин \bar{n} для графов с фиксированным и равномерно распределенным τ
 Table 5. Average values of the number of vertices remaining in the graph \bar{n} for graphs with fixed and uniformly distributed τ

(a, b)	целенаправленный поджог targeted lightning-up	
	$\tau = (a + b)/2$	$\tau \sim U[a, b]$
(1, 2)	3516,8	3146,3
[2, 3]	3494,5	3464,4
(1, 3]	3890	2916,9
(a, b)	случайное возгорание random ignition	
(1, 2)	5027,4	4932,8
[2, 3]	3533,1	3532,5
(1, 3]	4403,6	3926,6

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-0005а). Исследования выполнены на научном оборудовании Центра коллективного пользования Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

ЛИТЕРАТУРА

1. Лери М. М. Пожар на конфигурационном графе со случайными переходами огня по ребрам // Информатика и ее применения. 2015. Т. 9, вып. 3. С. 67–73. doi: 10.14357/19922264150307
2. Afanasyev V. I., Boinghoff C., Kersting G., Vatutin V. A. Limit theorems for weekly branching processes in random environment // Journal of Theoretical Probability. 2012. Vol. 25, iss. 3. P. 703–732. doi: 10.1007/s10959-010-0331-6
3. Arinaminparty N., Kapadia S., May R. Size and complexity in model financial

systems // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2012. Vol. 109, no. 45. P. 18338–18343. doi: 10.1073/pnas.1213767109

4. Bertoin J. Fires on trees // Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques. 2012. Vol. 48, no. 4. P. 909–921. doi: 10.1214/11-AHP435

5. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86, iss. 24. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

6. Bollobas B. A. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European Journal of Combinatorics. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

7. Bollobas B., Riordan O. Robustness and vulnerability of scale-free random graphs // Internet Mathematics. 2004. Vol. 1, no. 1. P. 1–35. doi: 10.1080/15427951.2004.10129080

8. Drossel B., Schwabl F. Self-organized critical forest-fire model // Physical Review Letters. 1992. Vol. 69, iss. 11. P. 1629–1632. doi: 10.1103/PhysRevLett.69.1629

9. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 221 p.

10. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p.

11. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model // Austrian J. Stat. 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/ajs.v43i4.34

12. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs // Fundamenta Informaticae. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362

13. Leri M., Pavlov Yu. Random graphs' robustness in random environment // Austrian J. Stat. 2017. Vol. 46, no. 3-4. P. 89–98. doi: 10.17713/ajs.v46i3-4.674

14. Norros I., Reittu H. Attack Resistance of Power-law Random Graphs in the Finite Mean, Infinite Variance Region // Internet Mathematics. 2008. Vol. 5, no. 3. P. 251–266. doi: 10.1080/15427951.2008.10129162

15. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 16.03.2018

REFERENCES

1. Leri M. M. Pozhar na konfiguratsionnom grafe so sluchainymi perekhodami ognya po rebram [Fire in a configuration graph with random fire propagation on edges]. *Informatics and Applications*. 2015. Vol. 9, iss. 3. P. 67–73. doi: 10.14357/19922264150307
2. Afanasyev V. I., Boinghoff C., Kersting G., Vatutin V. A. Limit theorems for weekly branching processes in random environment. *Journal of Theoretical Probability*. 2012. Vol. 25, iss. 3. P. 703–732. doi: 10.1007/s10959-010-0331-6
3. Arinaminparty N., Kapadia S., May R. Size and complexity in model financial systems. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2012. Vol. 109, no. 45. P. 18338–18343. doi: 10.1073/pnas.1213767109
4. Bertoin J. Fires on trees. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*. 2012. Vol. 48, no. 4. P. 909–921. doi: 10.1214/11-AIHP435
5. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86, iss. 24. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632
6. Bollobas B. A. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European Journal of Combinatorics*. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
7. Bollobas B., Riordan O. Robustness and vulnerability of scale-free random graphs. *Internet Mathematics*. 2004. Vol. 1, no. 1. P. 1–35. doi: 10.1080/15427951.2004.10129080
8. Drossel B., Schwabl F. Self-organized critical forest-fire model. *Physical Review Letters*. 1992. Vol. 69, iss. 11. P. 1629–1632. doi: 10.1103/PhysRevLett.69.1629
9. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 221 p.
10. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p.
11. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model. *Austrian J. Stat.* 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236.
12. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs. *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362
13. Leri M., Pavlov Yu. Random graphs' robustness in random environment. *Austrian J. Stat.* 2017. Vol. 46, no. 3-4. P. 89–98. doi: 10.17713/ajs.v46i3-4.674
14. Norros I., Reittu H. Attack Resistance of Power-law Random Graphs in the Finite Mean, Infinite Variance Region. *Internet Mathematics*. 2008. Vol. 5, no. 3. P. 251–266. doi: 10.1080/15427951.2008.10129162
15. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received March 16, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Лери Марина Муксумовна

научный сотрудник, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: leri@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Leri, Marina

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: leri@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

О КЛАСТЕРИЗАЦИИ УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными ограниченными случайными величинами. Они равны числу занумерованных в произвольном порядке полуребер. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Изучается подмножество таких случайных графов при условии, что сумма степеней известна и равна n . Важной характеристикой топологии графа является локальный кластерный коэффициент. При $N, n \rightarrow \infty$ найдены предельные распределения локального кластерного коэффициента и числа треугольников одной вершины. Мы рассмотрели также предельное поведение их математических ожиданий.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; условный граф; кластерный коэффициент; предельные теоремы.

Yu. L. Pavlov. ON CLUSTERING OF CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPHS

We consider configuration graphs with N vertices. The degrees of the vertices are independent identically distributed limited random variables. They are equal to the number of vertex semiedges that are numbered in an arbitrary order. The graph is constructed by joining all of the semiedges pairwise equiprobably to form edges. We study the subset of such random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and it is equal to n . An important characteristic of the topology of a graph is the local clustering coefficient. We obtained the limit distributions of the local clustering coefficient and the number of triangles of each vertex as N and n tend to infinity. We also considered the limit behaviour of their mathematical expectations.

Key words: random configuration graph; conditional graph; clustering coefficient; limit theorems.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [4] были введены конфигурационные графы, широко использующиеся в настоящее время для моделирования сложных сетей коммуникаций (см., например, [5]). Мы будем рассматривать конфигурационные гра-

фы с N вершинами, степени которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами ξ_1, \dots, ξ_N . Обозначим ξ случайную величину, равную степени любой вершины графа, и пусть

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Степень вершины равна числу выходящих из нее различных полуребер. Понятно, что сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, поэтому в случае необходимости в граф вводится дополнительная вершина единичной степени. В статье [6] отмечается, что появление такой вспомогательной вершины не влияет на асимптотические свойства графа при стремящемся к бесконечности числе вершин. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Легко видеть, что такие графы могут содержать петли и кратные ребра.

Далее мы будем изучать условные конфигурационные графы при условии, что сумма степеней известна и равна n . Такие условные графы впервые рассматривались в [2]. В последние годы опубликован ряд работ, в которых исследовалось предельное поведение степенной структуры условных конфигурационных графов при различном характере стремления N и n к бесконечности (см. [1, 3] и библиографию в них).

Важной характеристикой топологии графа является кластерный коэффициент, впервые введенный в [7]. Локальным кластерным коэффициентом вершины i , имеющей степень d_i , $1 \leq i \leq N$, называется величина

$$C(i) = \frac{2T_i}{d_i(d_i - 1)}, \quad (2)$$

где T_i – число пар соседей вершины i , соединенных друг с другом хотя бы одним ребром. Понятно, что под соседом вершины понимается любая другая смежная с ней вершина. Заметим, что T_i равно числу различных треугольников, одной из вершин которых служит вершина i , а стороны – ребра графа, которые могут быть и кратными. Коэффициент $C(i)$ можно рассматривать как вероятность того, что два различных соседа вершины i тоже являются соседями друг другу. Кроме локального кластерного коэффициента (2) используется также средний локальный кластерный коэффициент:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C(i). \quad (3)$$

В данной статье при $N, n \rightarrow \infty$ изучается предельное поведение $T_i, C(i)$ и C . В теореме 1 найдены асимптотики распределения T_i , и $\mathbf{E}T_i$, а в теореме 2 рассматриваются $C(i)$ и $\mathbf{E}C$. В следующем разделе приводятся формулировки теорем 1 и 2, а в последнем разделе статьи собраны доказательства этих теорем.

Полученные результаты являются только первым шагом в исследовании процессов кластеризации в условных конфигурационных графах.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем обозначения:

$$m = \mathbf{E}\xi, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi. \quad (4)$$

Ниже доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty, n > N, \max \xi = O(1)$. Тогда для любого $i, 1 \leq i \leq N$, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_i = 0\} &= \\ &= 1 - \frac{(m-1)^2(\sigma^2 + m^2 - m)}{2n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \\ \mathbf{P}\{T_i = 1\} &= \\ &= \frac{(m-1)^2(\sigma^2 + m^2 - m)}{2n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \\ \mathbf{P}\{T_i = k\} &= O(n^{-3k}), \quad k > 1; \\ \mathbf{E}T_i &= \frac{(m-1)^2(\sigma^2 + m^2 - m)}{2n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого $i, 1 \leq i \leq N$, и всех $j, 2 \leq j \leq \max \xi$, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{C(i) = 0\} &= \\ &= 1 - \frac{(m-1)^2(\sigma^2 + m^2 - m)}{2n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \\ \mathbf{P}\left\{C(i) = 1/\binom{j}{2}\right\} &= \\ &= \binom{j}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} p_j \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \\ \mathbf{P}\left\{C(i) = k/\binom{j}{2}\right\} &= O(n^{-6}), \quad 2 \leq k \leq \binom{j}{2}; \\ \mathbf{E}C &= \frac{(m-1)^2(1-p_1)}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Пусть выполнены условия теоремы 1. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{T_i = k\} = \sum_{j \geq 1} \mathbf{P}\{T_i = k | \xi_i = j\} p_j. \quad (5)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{T_i = 0 | \xi_i = 1\} = 1. \quad (6)$$

Рассмотрим пару смежных ребер, соединенных вершиной i . Обозначим q вероятность события S , состоящего в том, что другие концы этих ребер являются смежными, т. е. соединенными хотя бы одним ребром. Пусть d_1 и d_2 – степени этих концевых вершин. Понятно, что

$$q = \sum_{j \geq 2} \sum_{l \geq 2} \mathbf{P}\{S | d_1 = j, d_2 = l\} \times \mathbf{P}\{d_1 = j, d_2 = l\}, \quad (7)$$

поскольку

$$\mathbf{P}\{S | d_1 = 1, d_2 = l\} = 0,$$

$$\mathbf{P}\{S | d_1 = j, d_2 = 1\} = 0.$$

Нетрудно видеть, что число всех возможных различных способов построения рассматриваемого графа равно $(n-1)(n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = (n-1)!!$ и все такие реализации графа равновероятны. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S | d_1 = 2, d_2 = 2\} &= \frac{(n-7)!!}{(n-1)!!} \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-3)(n-5)}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$\mathbf{P}\{S | d_1 = 2, d_2 = 3\} = \frac{2}{(n-1)(n-3)(n-5)}$$

и

$$\mathbf{P}\{S | d_1 = 2, d_2 = l\} = \frac{l-1}{(n-1)(n-3)(n-5)}.$$

Тогда, в силу независимости степеней вершин,

$$\begin{aligned} &\sum_{l \geq 2} \mathbf{P}\{S | d_1 = 2, d_2 = l\} \mathbf{P}\{d_1 = 2, d_2 = l\} = \\ &= \frac{p_2(p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots)}{(n-1)(n-3)(n-5)} = \frac{p_2(m-1)}{(n-1)(n-2)(n-5)}. \end{aligned}$$

Таким же образом приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} &\sum_{l \geq 2} \mathbf{P}\{S | d_1 = j, d_2 = l\} \mathbf{P}\{d_1 = j, d_2 = l\} = \\ &= \frac{(j-1)p_j(m-1)}{(n-1)(n-2)(n-5)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1), (4) и (7) следует:

$$q = \frac{(m-1)(p_2 + 2p_3 + \dots)}{(n-1)(n-3)(n-5)} =$$

$$= \frac{(m-1)^2}{(n-1)(n-3)(n-5)}. \quad (8)$$

Вернемся к случайной величине T_i . Если степень вершины i равна двум, то у этой вершины может быть петля. Если это не так, то возможны два случая: соседи вершины i могут быть или не быть смежными. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_i = 0 | \xi_i = 2\} &= \frac{(n-3)!!}{(n-1)!!} + \\ &+ \frac{(n-2)(n-3)!!}{(n-1)!!} (1-q) = 1 - q + \frac{q}{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_i = 0 | \xi_i = 2\} &= \\ &= \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_i = 0 | \xi_i = 3\} &= \frac{\binom{3}{2}}{n-1} + \\ &+ \frac{(n-3)(n-4)(n-5)!!}{(n-1)!!} (1-q)^{\binom{3}{2}} = \\ &= 1 - \binom{3}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее мы используем факт, что, в силу (8), для любого натурального $t > 2$

$$(1-q)^{\binom{t}{2}} = 1 - \binom{t}{2} q + O(n^{-6}).$$

Если $\xi_i = 4$, то вершина i может иметь две петли, или одну петлю, или ни одной. Учитывая это, с помощью (8) выводим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_i = 0 | \xi_i = 4\} &= \\ &= 1 - \binom{4}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Повторяя эти рассуждения, из (6), (8)–(11) и условия $\max \xi = O(1)$ по индукции заключаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_i = 0 | \xi_i = j\} &= \\ &= 1 - \binom{j}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned} \quad (12)$$

поэтому из (1), (4) и (5) при $k = 0$ следует:

$$\mathbf{P}\{T_i = 0\} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \sum_{j \geq 1} \binom{j}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) p_j = \\
&= 1 - \frac{(m-1)^2(\sigma^2 + m^2 - m)}{2n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned} \tag{13}$$

что и доказывает первое утверждение теоремы 1.

Положим теперь $k = 1$ в (5). Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{T_i = 1 | \xi_i = 1\} = 0. \tag{14}$$

Легко видеть также, что, в силу (8),

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{T_i = 1 | \xi_i = 2\} &= \frac{(n-2)(n-3)!!}{(n-1)!!} q = \\
&= q - \frac{q}{n-1} = \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\
\mathbf{P}\{T_i = 1 | \xi_i = 3\} &= \binom{3}{2} \frac{(n-4)(n-3)!!}{(n-1)!!} \times \\
&\times q(1-q)^2 = \binom{3}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

и, в более общем виде, с учетом (14), при $j \geq 1$

$$\mathbf{P}\{T_i = 1 | \xi_i = j\} = \tag{15}$$

$$= \binom{j}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Тогда, согласно (5),

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{T_i = 1\} &= \\
&= \frac{(m-1)^2(\sigma^2 + m^2 - m)}{2n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Следуя той же схеме доказательства, получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{T_i = 2 | \xi_i = 3\} &= \\
&= \frac{(n-4)(n-3)!!}{(n-1)!!} q^2 = O\left(\frac{1}{n^6}\right)
\end{aligned}$$

и, аналогично, для всех $j > 3$

$$\mathbf{P}\{T_i = 2 | \xi_i = j\} = O\left(\frac{1}{n^6}\right). \tag{17}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{T_i = 2\} = O\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Общий случай, как легко видеть, теперь выглядит так:

$$\mathbf{P}\{T_i = k\} = O(n^{-3k}), \quad k \geq 2, \tag{18}$$

что и приводит к третьему утверждению теоремы. Последнее утверждение очевидным образом следует из равенства

$$\mathbf{E}T_i = \sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}\{T_i = k\}$$

и из (13), (16) и (18). Теорема 1 доказана.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Из (12) следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{C(i) = 0\} &= \sum_{j \geq 1} \mathbf{P}\{T_i = 0 | \xi_i = j\} p_j = \\
&= \sum_{j \geq 1} \left(1 - \binom{j}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) p_j = \\
&= 1 - \frac{(m-1)^2(\sigma^2 + m^2 - m)}{2n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned} \tag{19}$$

поэтому первое утверждение теоремы доказано. Используя (2), (15) и (18), легко понять, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{C(i) = 1\} &= \sum_{j \geq 2} \mathbf{P}\left\{T_i = \binom{j}{2} \mid \xi_i = j\right\} p_j = \\
&= \frac{(m-1)^2}{n^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) p_2 + O\left(\frac{1}{n^9}\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Опять используя (15), получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left\{C(i) = 1 / \binom{3}{2}\right\} &= \mathbf{P}\{T_i = 1 | \xi_i = 3\} p_3 = \\
&= \binom{3}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} p_3 \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

и, обобщая на все $j, 3 \leq j \leq \max \xi$,

$$\mathbf{P}\left\{C(i) = 1 / \binom{j}{2}\right\} = \tag{21}$$

$$= \binom{j}{2} \frac{(m-1)^2}{n^3} p_j \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

откуда и вытекает второе утверждение теоремы. Третье очевидным образом следует из (17). Переходим наконец к оценке математического ожидания $C(i)$ с помощью (19)–(21):

$$\mathbf{E}C(i) = \sum_{j \geq 2} \frac{(m-1)^2}{n^3} p_j \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{(m-1)^2(1-p_1)}{n^3} p_j \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Отсюда и из (3) очевидным образом следует последнее утверждение теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-0005а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
2. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

REFERENCES

1. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with random parameter of the power-law degree distribution. *SB MATH*. 2018. Vol. 209. doi: 10.1070/sm8832 (in print).
2. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033
3. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Ob asimptotike stepennoi struktury konfiguratsionnykh grafov s ogranicheniyami na chislo reber [On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with restrictions on the number of edges]. *Discrete Mathematics and Applications* (in print).

3. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число ребер // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 21–39. doi: 10.4213/dm1445

4. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // *European J. Comb.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

5. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. Vol. 1. Cambridge University Press, 2017. 337 p.

6. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

7. Watts D. J., Strogats S. Collective dynamics of "small-world" networks // *Nature*. 1998. Vol. 393(6684). P. 440–442. doi: 10.1038/30918

Поступила в редакцию 19.02.2018

4. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Comb.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

5. Hofstad R. *Random Graphs and Complex Networks*. Vol. 1. Cambridge University Press, 2017. 337 p.

6. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

7. Watts D. J., Strogats S. Collective dynamics of "small-world" networks. *Nature*. 1998. Vol. 393(6684). P. 440–442. doi: 10.1038/30918

Received February 19, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович

главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

О СТРУКТУРЕ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА С НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ СТЕПЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими дискретное степенное распределение с положительным параметром τ . Они равны числу занумерованных в произвольном порядке полуребер. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Изучается подмножество таких случайных графов при условии, что сумма степеней известна и равна n . Пусть τ является случайной величиной, имеющей усеченное нормальное распределение на произвольном фиксированном конечном интервале. Для максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени найдены предельные распределения в различных зонах стремления N и n к бесконечности.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; степень вершины; предельные теоремы.

Yu. L. Pavlov. THE STRUCTURE OF A CONFIGURATION GRAPH WITH A NORMALLY DISTRIBUTED PARAMETER OF THE POWER SERIES DISTRIBUTION OF VERTEX DEGREES

We consider configuration graphs with N vertices. The degrees of the vertices are independent random variables identically distributed according to the power law, with a positive parameter τ . They are equal to the number of vertex semiedges that are numbered in an arbitrary order. The graph is constructed by joining all of the semiedges pairwise equiprobably to form edges. We study the subset of such random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and it is equal to n . Let τ be a random variable following a truncated normal distribution on an arbitrary fixed finite interval. We obtained the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree for various zones of N and n tendency to infinity.

Keywords: random configuration graph; vertex degree; limit theorems.

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования современных сложных сетей коммуникаций в настоящее время ши-

роко используются конфигурационные графы со случайными степенями вершин (см., например, [14]). В таких моделях предполагается, что степени вершин являются независи-

ми одинаково распределенными случайными величинами. Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали [14], что распределения этих случайных величин можно считать подчиняющимися дискретному степенному закону (аналог распределения Парето). Ребра таких графов образуются путем попарного равновероятного соединения друг с другом различных полуребер, инцидентных вершинам. Существует несколько способов обеспечить, в случае необходимости, четность суммы степеней; эти способы, как замечено в [15], не влияют на асимптотические свойства графов. Обозначим ξ случайную величину, равную степени любой вершины графа. В статье [15] предложена достаточно адекватная модель конфигурационного графа, в которой

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots$, τ – положительный параметр распределения. В реально существующих сетях обычно $\tau \in (1, 2)$ [14]. Однако в наших последних исследованиях, посвященных моделированию лесных пожаров [12, 13], показано, что представляют интерес и модели, в которых $\tau > 2$.

В [9] впервые рассматривались условные конфигурационные графы при условии, что число ребер известно. Для таких графов в ряде работ исследовалось предельное поведение максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при различных соотношениях между стремящимися к бесконечности числе вершин и числе ребер [2, 3, 7]. Полученные результаты можно использовать как для описания сетей с ограничениями на число связей, так и для сетей общего вида. Более того, они могут быть полезны и для изучения поведения и других числовых характеристик, зависящих от степенной структуры графа.

В некоторых работах [10, 11] отмечается, что в процессе роста сетей распределение степеней вершин может меняться вместе с числом вершин и даже быть случайным. В [8] рассматривались графы, в которых степени вершин имеют распределение (1), с изменяющимся параметром τ . В статьях [4, 5] этот параметр является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Однако более естественным является предположение о том, что случайная величина τ должна иметь унимодальное распределение. Поэтому в [1] в качестве закона распределения τ было предложено использовать гамма-распределение. Известно, что коэффициент асимметрии этого распределения не равен нулю, что представляется недостатком мо-

дели. Желательно, чтобы плотность распределения положительного параметра была симметричной. В настоящей статье впервые рассматривается усеченное нормальное распределение τ на интервале $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Обозначим

$$M = \mathbf{E}\xi, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi.$$

В качестве математического ожидания ξ естественно выбрать середину интервала $[a, b]$:

$$M = \frac{a+b}{2}. \quad (2)$$

Среднеквадратическое отклонение σ может принимать любое положительное значение. Далее нам будет удобно определить σ на основе известного правила «трех сигм»:

$$\sigma = \frac{b-a}{6}. \quad (3)$$

Легко убедиться, что при другом выборе σ нетрудно внести соответствующие количественные изменения в следующие ниже доказательства и результаты.

Таким образом, в работе рассматриваются условные конфигурационные графы с N вершинами, при условии, что сумма степеней вершин равна n , сами степени являются независимыми случайными величинами, имеющими общее распределение (1), где случайный параметр τ подчиняется усеченному нормальному закону, заданному на интервале $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$ и имеющему параметры (2) и (3). Для таких графов при $N, n \rightarrow \infty$ найдены предельные распределения максимальной степени вершины $\xi_{(N)}$ и числа вершин μ_r , имеющих степень r . В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1–5, а в последнем разделе изложено доказательство этих результатов.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем вспомогательную случайную величину η такую, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta = k\} = \lambda^k p_k / B(\lambda), \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda < 1$ и

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k p_k. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$m(\lambda) = \mathbf{E}\eta = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda^k p_k,$$

$$\sigma^2(\lambda) = \mathbf{D}\eta = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \lambda^k p_k - m^2(\lambda).$$

Пусть λ является единственным решением уравнения $m(\lambda) = n/N$. Обозначим $F(x)$ функцию нормального распределения с параметрами (M, σ) , а символами C, C_1, C_2 – некоторые положительные постоянные.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1, (n - N)^3/N^2 \geq C > 0$, а $r = r(N, n)$ – наименьшие натуральные числа такие, что $N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \rightarrow \gamma$, где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r+1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < M$, а $r = r(N, n)$ выбраны так, что

$$\frac{6aN\lambda^{r+1}}{(b-a)e^9(F(b) - F(a))B(\lambda)r^{a+1} \ln r} \rightarrow \gamma,$$

где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leq r+k\} = \exp\{-\gamma\lambda^k(1-\lambda)^{-1}\}(1+o(1)).$$

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow M$ и выполнено одно из следующих условий:

1. $a > 2$;
2. $0 < a \leq 2$, и существует такое $\delta > 0$, что $N(1-\lambda)^{2+\delta} \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{|\ln \lambda|\xi_{(N)} - u \leq z\} \rightarrow e^{-e^{-z}},$$

где $-\infty < z < \infty$, а $u = u(N, n)$ выбраны так, что

$$\frac{6a|\ln \lambda|^a e^{-(u+9)}}{(b-a)(F(b) - F(a))B(\lambda)u^{a+1} \ln(u/|\ln \lambda|)} \rightarrow 1.$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1, n - N \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного натурального $r \geq 3$ и для целых неотрицательных k равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(\lambda)}(1+o(1)).$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < M$, или выполнены условия теоремы 3. Тогда для любого натурального r равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma_{rr}(\lambda)\sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2},$$

где

$$\sigma_{rr}^2(\lambda) = p_r(\lambda) \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m(\lambda) - r)^2}{\sigma^2(\lambda)} p_r(\lambda) \right).$$

Легко видеть, что условия теорем 1–5 не исчерпывают все возможные случаи поведения N и n , поэтому получение аналогичных результатов при других условиях предполагается осуществить в следующих работах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Обозначим $f(x)$ плотность распределения параметра τ . Тогда

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(F(b)-F(a))} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Отсюда и из (1) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi = k\} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(F(b)-F(a))} \times \\ &\times \int_a^b \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая $x = M + \sigma y$, легко получить соотношение:

$$\int_a^b \frac{1}{k^x} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma}{k^m} \int_{\frac{a-M}{\sigma}}^{\frac{b-M}{\sigma}} e^{-(y^2/2 + y\sigma \ln k)} dy.$$

Проведем в этом равенстве еще одну замену переменной интегрирования: $t = (y + \sigma \ln k)/\sqrt{2}$, тогда

$$\int_a^b \frac{1}{k^x} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{k^m\sqrt{2}} e^{\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2}} \times \quad (7)$$

$$\times \left(\operatorname{erf} \left(\frac{b-M+\sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{a-M+\sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right),$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt \quad (8)$$

– интеграл вероятности. Известно, что при больших $z > 0$

$$\operatorname{erf}(z) \sim 1 - \quad (9)$$

$$- \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k z^{2k}} \right).$$

Пусть $k \rightarrow \infty$. Из (7)–(9) находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left(\frac{a - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) &= 1 - \\ &- \exp \left\{ -\frac{((a - M)/\sigma + \sigma \ln k)^2}{2} \right\} \times \\ &\times \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}(a - M + \sigma^2 \ln k)} \times \\ &\times \left(1 - \left(\frac{a - M}{\sigma} + \sigma \ln k \right)^{-2} + O \left(\frac{1}{\ln^4 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left(\frac{a - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma \ln k} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(1 + \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right\} \times \quad (10) \\ &\times \left(1 - \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} \left(\frac{b - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma \ln k} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(1 + \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right\} \times \\ &\times \left(1 - \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (10) видим, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{erf} \left(\frac{b - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \\ &- \operatorname{erf} \left(\frac{a - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma \ln k} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(1 + \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(1 + \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right\} \times \quad (11) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(1 + \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right\} \times \\ &\times \left(1 - \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma \ln k} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(1 + \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right\} \times \\ &\times \left(1 - \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Из (2) находим, что $(a - M)^2 = (b - M)^2$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(\left(1 + \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 - \left(1 + \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right) &= \\ &= (b - a) \ln k \end{aligned}$$

и из (11) следует, что при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\operatorname{erf} \left(\frac{b - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \\ &- \operatorname{erf} \left(\frac{a - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma \ln k} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} \left(1 + \frac{b - M}{\sigma^2 \ln k} \right)^2 \right\} \times \\ &\times k^{b-a} \left(1 - \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\operatorname{erf} \left(\frac{b - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \\ &- \operatorname{erf} \left(\frac{a - M + \sigma^2 \ln k}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma \ln k} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 \ln^2 k}{2} - \frac{(b - a)^2}{4\sigma^2} \right\} \times \\ &\times k^{\frac{b-a}{2}} \left(1 - \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда из (7) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{1}{k^x} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{k^a \ln k} e^{-\frac{(b-a)^2}{4\sigma^2}} \left(1 - \frac{a - M}{\sigma^2 \ln k} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &\int_a^b \frac{1}{(k+1)^x} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{(k+1)^a \ln(k+1)} e^{-\frac{(b-a)^2}{4\sigma^2}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{a - M}{\sigma^2 \ln(k+1)} + O \left(\frac{1}{\ln^2 k} \right) \right). \end{aligned}$$

Проводя элементарные преобразования, из последних двух равенств выводим, что

$$\int_a^b \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{a(1+o(1))}{k^{a+1} \ln k} e^{-\frac{(b-a)^2}{4\sigma^2}}.$$

Учитывая (3), отсюда и из (6) получаем, что при $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{6a}{(b-a)e^9 \sqrt{2\pi}(F(b) - F(a))k^{a+1} \ln k}. \quad (12)$$

В статье [6] рассматривалось предельное поведение $\xi_{(N)}$ и μ_r в условных конфигурационных графах при условии, что сумма степеней вершин равна n , а случайная величина ξ , равная степени любой вершины графа, при $k \rightarrow \infty$ обладает свойством:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{d(1+o(1))}{k^g (\ln k)^h}, \quad (13)$$

где $d > 0, g \geq 1, g + h > 1$. В этой же статье показано, что примеры таких графов возникают в случаях, когда параметр τ распределения (1) равномерно распределен на любом конечном фиксированном интервале или подчиняется гамма-распределению. Из соотношения (12) следует, что в случае усеченного нормального распределения τ условия теорем работы [6] выполнены, если в (13) положить $y = a + 1, h = 1$ и

$$d = \frac{6a}{(b-a)e^9 \sqrt{2\pi}(F(b) - F(a))}.$$

Таким образом, рассмотренный нами случай можно считать еще одним примером случайного конфигурационного графа, удовлетворяющего условиям статьи [6]. Это значит, что утверждения теорем 1–5 непосредственно следуют из соответствующих теорем этой статьи.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-0005а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лери М. М., Павлов Ю. Л. Об устойчивости конфигурационных графов в случайной среде // Информатика и ее применения (в печати).

2. Павлов Ю. Л. О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, вып. 3. С. 14–23. doi: 10.4213/dm1057

3. Павлов Ю. Л. Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi: 10.4213/dm1104

4. Павлов Ю. Л. Об условных конфигурационных графах со случайным распределением степеней вершин // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 62–72. doi: 10.17076/mat313

5. Павлов Ю. Л. Один случай предельного поведения степеней вершин в условных конфигурационных графах // Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 66–75. doi: 10.17076/mat613

6. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

7. Павлов Ю. Л., Дертишников Е. Н. О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе Интернет-типа // Труды КарНЦ РАН. 2010. № 3. С. 59–65.

8. Павлов Ю. Л., Фекиштова Е. В. О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа вблизи критических точек // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 2. С. 58–70. doi: 10.4213/dm1369

9. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

10. Самосват Е. А. Моделирование Интернета с помощью случайных графов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 98 с.

11. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

12. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graph's robustness: link saving and forest fire model // Austrian Journal of Statistics. 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236.

13. Leri M., Pavlov Yu. Forest Fire Models on Configuration Random Graphs // Fundamenta Informaticae. 2016. Vol. 145, no. 3. P. 313–322.

14. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Volume One. Cambridge University Press, 2017. 337 p.

15. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 27.01.2018

REFERENCES

1. *Leri M. M., Pavlov Yu. L.* Ob ustoychivosti konfiguratsionnykh grafov v sluchainoi srede [On robustness of configuration graphs in random environment]. *Informatika i ee primeneniya* [Informatics and its applications] (in print).
2. *Pavlov Yu. L.* On the limit distributions of the vertex degrees of conditional Internet graphs. *Discrete Mathematics and Applications*. 2009. Vol. 19, iss. 4. P. 349-360. doi: 10.1515/DMA.2009.023
3. *Pavlov Yu. L.* On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Mathematics and Applications*. 2010. Vol. 20, iss. 5-6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031
4. *Pavlov Yu. L.* Ob uslovykh konfiguratsionnykh grafakh so sluchainym raspredeleniem stepenei vershin [On conditional configuration graphs with random distribution of vertex degrees]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 62–72. doi: 10.17076/mat313
5. *Pavlov Yu. L.* Odin sluchai predel'nogo povedeniya stepenei vershin v uslovykh konfiguratsionnykh grafakh [A case of limit behaviour of vertex degrees in conditional configuration graphs]. *Trudy KarNTs RAN*. [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 66–75. doi: 10.17076/mat613
6. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with random parameter of the power-law degree distribution. *SB MATH*. 2018 (in print). doi: 10.1070/SM8832
7. *Pavlov Yu. L., Dertishnikova E. N.* O predel'nom raspredelenii maksimal'noj stepeni vershiny v sluchajnom grafe Internet-tipa [On limit distribution of maximum vertex degree in a random graph of Internet type]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2010. No. 3, iss. 1. P. 59–65. doi: 10.17076/mat313
8. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* On limit behaviour of maximum vertex degree in a conditional configuration graph near critical points. *Discrete Mathematics and Applications*. 2017. Vol. 27, iss. 4. P. 213–222. doi: 10.1515/dma-2017-0023
9. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033
10. *Samosvat E. A.* Modelirovanie Interneta s pomosh'ju sluchainykh grafov [Internet modeling with help of random graphs]: DSe (Cand. of Phys.-Math) thesis. Moscow, 2014. 98 p.
11. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632
12. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graph's robustness: link saving and forest fire model. *Austrian Journal of Statistics*. 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236.
13. *Leri M., Pavlov Yu.* Forest Fire Models on Configuration Random Graphs. *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145, no. 3. P. 313–322.
14. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Volume One. Cambridge University Press, 2017. 337 p.
15. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received January 27, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 004.01:006.72 (470.22)

МЕТОДЫ РЕГЕНЕРАТИВНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА МНОГОСЕРВЕРНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

И. В. Пешкова¹, А. С. Румянцев²

¹ *Петрозаводский государственный университет, Россия*

² *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

В статье представлены методы регенеративного моделирования многосерверных систем обслуживания в применении к доверительному оцениванию их характеристик. Кроме хорошо известных методов построения классической и слабой регенерации представлены менее известные и в значительной мере новые методы искусственной регенерации и регенеративных огибающих в применении к современным моделям многосерверных систем с управлением энергоэффективностью и вычислительного кластера.

Ключевые слова: регенеративное моделирование; доверительное оценивание; многосерверные системы; метод расщепления; метод регенеративных огибающих; высокопроизводительный вычислительный кластер.

I. V. Peshkova, A. S. Rumyantsev. REGENERATIVE SIMULATION METHODS FOR MULTISERVER SYSTEMS

We present regeneration techniques for performance estimation of multiserver system characteristics. Providing a necessary background of classical and weak regeneration notions, we focus on less well-known and mainly new construction of artificial classical regeneration, as well as recent method of regenerative envelopes for modeling modern energy efficient multiserver systems and high-performance computing cluster.

Keywords: regenerative simulation; confidence estimation; multiserver systems; splitting; high-performance computing cluster.

ВВЕДЕНИЕ

Современные вычислительные системы, как правило, имеют многопроцессорную или *многоядерную* архитектуру. Это обусловлено как физическими особенностями современного технологического процесса производства микросхем [34], так и потребностью в создании вычислителей большой мощности, пригодных для решения вычислительноемких задач

(таких, например, как моделирование климата). Развитие каналов связи и коммуникационных сетей позволяет осуществлять перенос части задач в так называемые *облачные* системы, в которых вычисления производятся удаленно, на оборудовании поставщика услуг, на гибко выделяемой части ресурсов из общего пула серверов (как правило, расположенных в нескольких центрах обработки данных). Пе-

редача данных до конечного потребителя в современных сетях также предполагает согласованную работу нескольких устройств, а кроме того, работу с несколькими каналами, в том числе для решения задач снижения задержек и оптимизации пропускной способности.

Исследование характеристик качества обслуживания, надежности, энергоэффективности таких систем можно проводить методами теории массового обслуживания. Модели таких систем в рамках теории массового обслуживания относятся к классу многосерверных. В то же время особенности вычислительных систем и сетей, такие как неконсервативность дисциплины обслуживания (возможность простоя оборудования при наличии ожидающих клиентов) [30] и сложная структура входного потока клиентов [14], затрудняют получение аналитических результатов. Таким образом, необходимо применение методов стохастического моделирования и надежного оценивания характеристик систем.

Регенеративный метод является одним из самых мощных инструментов моделирования неклассических систем обслуживания [2]. Этот метод позволяет проводить достоверное оценивание характеристик системы даже в случае, когда классическое оценивание неприменимо (например, в случае наличия зависимости в исследуемом процессе). Метод основан на выделении так называемых циклов регенерации на траектории исследуемого процесса, между которыми отсутствует либо имеется лишь слабая зависимость, что позволяет применять аналог центральной предельной теоремы для построения достоверного интервала характеристики процесса [9]. Основная цель данной работы состоит в следующем: исследовать применимость методов регенеративного моделирования для анализа новых моделей многосерверных систем обслуживания. Важной задачей работы является развитие регенеративного метода для анализа больших систем, таких как программно определяемые сети и вычислительные кластеры. Указанные объекты обладают большим объемом вспомогательной информации (например, информации об ожидании заявки на узлах сети при прохождении маршрута), которая позволяет идентифицировать регенерацию конструктивно. В свою очередь, конструктивное построение моментов регенерации позволит проводить достоверное оценивание практически важных метрик производительности больших систем.

Классическая регенерация является достаточно хорошо изученным типом регенерации

[9, 19, 31, 35], в которой в качестве моментов регенерации используются, например, моменты опустошения системы (когда нет заявок ни в очереди системы, ни на обслуживании), а циклы регенерации являются независимыми. Критерий стационарности односерверной системы обслуживания гарантирует существование бесконечной последовательности таких моментов [9]. В то же время наличие моментов классической регенерации в модели многосерверной системы не гарантировано. *Слабая регенерация* означает попадание исследуемого процесса в определенное множество состояний, а также допускает зависимость на соседних циклах регенерации [9, 36], тем самым расширяя возможности ее использования для моделирования более сложных, в том числе многосерверных систем. Для построения моментов слабой регенерации могут использоваться конструкция обновляющих событий Боровкова [15, 16, 20] или метод расщепления цепей Маркова, возвратных по Харрису [18, 33]. При этом указанные методы позволяют исследовать многосерверные модели в достаточно общем случае (например, при произвольных распределениях интервалов между приходами клиентов и времени их обслуживания). Указанные типы регенерации пригодны для анализа классических систем, однако при анализе современных моделей (таких, как модели высокопроизводительных и распределенных вычислительных систем) возникают трудности, требующие доработки или адаптации методов.

Для успешного применения существующих методов регенеративного оценивания необходимо гарантировать конечность средней длины цикла регенерации. В ряде случаев такое условие обеспечить затруднительно (например, если достаточные условия стационарности системы не гарантируют существования классической регенерации). Одним из перспективных методов разрешения данного затруднения является метод искусственной регенерации с помощью экспоненциального расщепления плотности [8]. Другим новым подходом является метод регенеративных огибающих. Суть метода сводится к замене исходной системы на основе так называемого метода каплинга [6, 7] и свойства монотонности исследуемых процессов парой систем [25] (минорантной и мажорантной), которые регенерируют в классическом смысле и используются для построения достоверного интервала характеристики исходной системы. В данной статье применение указанных методов продемонстрировано на моделях современных вычислительных систем.

Изложение построено по усложнению методов, адекватному усложнению моделей. Более точно структура работы следующая. В первом разделе представлен метод построения классической регенерации, для иллюстрации метода исследуется модель односерверной системы. Далее приводятся два метода построения моментов слабой регенерации: метод обновляющих событий и метод расщепления цепи Маркова, возвратной по Харрису. Применение методов проиллюстрировано на классической многосерверной модели. В следующем разделе рассматривается метод искусственной регенерации с использованием экспоненциального расщепления плотности. Иллюстрация метода проведена на основе исследования энергоэффективности многосерверной системы с управлением активностью серверов (в указанной системе классические моменты регенерации отсутствуют). Далее представлен метод регенеративных огибающих, работа которого продемонстрирована на модели высокопроизводительного вычислительного кластера. Наконец, представлены практические аспекты построения доверительных интервалов для характеристик регенерирующих процессов.

КЛАССИЧЕСКАЯ РЕГЕНЕРАЦИЯ

Определение 1. Случайный процесс $Z = \{Z(t)\}_{t \geq 0} \in E$ с непрерывными справа траекториями называется *регенерирующим в классическом смысле* [35], если найдется такой процесс восстановления $\beta = \{\beta_n = \alpha_0 + \dots + \alpha_n, n \geq 0\}$, что для $k \geq 0$ процесс

$$\theta_{\beta_k}(Z, \beta) := \{\{Z(\beta_k + t)\}_{t \geq 0}, \{\beta_i - \beta_k\}_{i > k}\} \quad (1)$$

обладает следующими свойствами:

- (1) распределение $\theta_{\beta_k}(Z, \beta)$ не зависит от k ;
- (2) процесс $\theta_{\beta_k}(Z, \beta)$ не зависит от предыстории $\{\{Z(t)\}_{t < \beta_k}, \beta_0, \dots, \beta_k\}$.

Процесс β называется *процессом восстановления, вложенным в процесс Z* , а моменты β_k называются *моментами классической регенерации*. Заметим, что последовательность моментов регенераций не обязательно уникальна. Значения G_k процесса между соседними моментами регенерации (м.р.) называют *циклами регенерации*, т. е.

$$G_k = \{Z(t + \beta_k)\}_{0 \leq t < \alpha_{k+1}}, \quad k \geq 0,$$

при этом элемент $\{Z(t)\}_{t < \alpha_0}$ называют *задержкой* (если $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, то говорят о процессе без задержки). Будем считать, что длина задержки конечна с вероятностью 1, $\alpha_0 < \infty$.

Длины циклов регенерации $\{\alpha_k, k \geq 1\}$ классически регенерирующих процессов являются независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.) случайными величинами (с.в.), и циклы процесса являются н.о.р. Регенерирующие процессы с конечной средней длиной цикла регенерации $E\alpha_1 < \infty$ называются *положительно возвратными*.

Одно из важных свойств регенерирующих процессов состоит в том, что предельное распределение регенерирующего процесса существует при достаточно слабых условиях.

Теорема 1. [9] Пусть длина первого цикла α_1 положительно возвратного регенерирующего процесса Z – нерешетчатая, т. е. не существует такого числа $d > 0$, что выполняется равенство $P\left(\sum_{j=1}^{\infty} \{\alpha_1 = a + jd\}\right) = 1$, где $a \in \mathbf{R}$. Тогда существует предельное распределение P_e процесса Z при $t \rightarrow \infty$, и для ограниченной измеримой функции $f(Z) : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ выполнено соотношение

$$E_e f(Z) = \frac{1}{E\alpha_1} E_0 \int_0^{\alpha_1} f(Z(s)) ds, \quad (2)$$

где E_0 – математическое ожидание процесса без задержки (естественно считать $f(Z)$ некоторой характеристикой системы).

Кроме того, если f непрерывна почти всюду, то выполняется соотношение

$$E_0 f(Z(t)) \rightarrow E_e f(Z), \quad t \rightarrow \infty.$$

Классическая регенерация процесса с дискретным временем $Z = \{Z_n\}_{n \geq 1}$ определяется аналогично, а процесс восстановления β определен на множестве натуральных чисел \mathbf{N} . Для регенерирующего в классическом смысле процесса с дискретным временем циклы $G_k = \{Z_i\}_{\beta_k \leq i < \beta_{k+1}}$ независимы и одинаково распределены для всех $k \geq 1$. Соотношение (2) в теореме 1 для процесса с дискретным временем [3] принимает вид

$$E_e(f(Z)) = \frac{E_0\left(\sum_{i=0}^{\beta_1-1} f(Z_i)\right)}{E\alpha_1}. \quad (3)$$

Система $GI/G/1$

В качестве моментов классической регенерации при исследовании систем часто используются моменты опустошения системы (если оно возможно). Примером системы, в которой критерий стационарности гарантирует наступление опустошения, является односерверная система $GI/G/1$. Напомним, в такой системе в моменты $0 = t_0 < t_1, \dots$, образующие процесс восстановления, поступают клиенты,

при этом клиенту i требуется S_i единиц времени для обслуживания на единственном сервере. Клиент i ожидает в общей неограниченной очереди время $D_i \geq 0$ и по окончании обслуживания покидает систему. Времена между приходами $\{T_i := t_i - t_{i-1}\}$ и времена обслуживания $\{S_i\}$, $i \geq 1$ являются н.о.р.с.в. Время ожидания каждого клиента можно определить с помощью хорошо известной стохастической рекуррентной последовательности, рекурсии Линдли:

$$D_{i+1} = (D_i + S_i - T_i)^+, \quad i \geq 1, \quad (4)$$

где $D_1 = 0$ есть время ожидания первого клиента (процесс без задержки), а $(\cdot)^+ = \max(0, \cdot)$. Отметим, что рекурсия (4) определяет оставшуюся работу (нагрузку) D_i в системе в момент времени t_i^- перед приходом клиента i . Известно [9], что стационарное время ожидания существует тогда и только тогда, когда

$$E(T - S) > 0 \text{ или } \rho := \frac{\lambda}{\mu} < 1, \quad (5)$$

где $ET = 1/\lambda$. $ES = 1/\mu$ (нижних индексов лишены типичные время между приходами и время обслуживания). В качестве моментов регенерации можно определить моменты прихода клиентов в пустую систему [9]:

$$\beta_k = \min\{i > \beta_{k-1} : D_i = 0\}.$$

При этом $\beta_0 = 0$ и можно показать, что с.в. α_1 – непериодическая, поскольку (5) влечет

$$P(\alpha_1 = 1) = P(T - S > 0) > 0.$$

Отметим, что цикл регенерации в такой системе состоит из *цикла занятости сервера* (в течение которого каждый приходящий клиент вынужден ожидать) и последующего *интервала простоя сервера*. При этом процесс $\{D_i\}_{i \geq 0}$ с последовательностью β является положительно возвратным регенерирующим процессом в классическом смысле тогда и только тогда, когда выполнен критерий (5) [4, 9].

СЛАБАЯ РЕГЕНЕРАЦИЯ

С. Асмуссен и Х. Торрисон [9, 36] обобщили понятие классической регенерации до так называемой *регенерации в широком смысле*, при которой допускается зависимость между циклами регенерации. Более точно, в определении 1 свойство (2) заменяется на следующее [35]:

(2') процесс $\theta_{\beta_k}(Z, \beta)$ не зависит от $\{\beta_0, \dots, \beta_k\}$.

На практике широко используется частный случай регенерации в широком смысле, *слабая (однозависимая) регенерация*, при которой допускается зависимость лишь между соседними циклами регенерации. Отметим, что при слабой регенерации процесс $\beta = \{\beta_n, n \geq 0\}$ по-прежнему является процессом восстановления. Как и в случае классической регенерации, существует предельное распределение P_e процесса Z [3, 9], и теорема 1 справедлива.

Метод обновляющих событий

Для построения моментов слабой регенерации можно использовать метод обновляющих событий А. А. Боровкова [15, 16, 20]. Метод основан на определении так называемых периодов обновления и разработан для стохастических рекуррентных последовательностей, широко применяемых в анализе систем обслуживания (примером такой последовательности является рекурсия Линдли (4)).

Пусть последовательность $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ определяется с помощью наперед заданной *управляющей последовательности* $\{X_n\}_{n \geq 1}$ следующим одношаговым рекуррентным соотношением:

$$Z_{n+1} = g_1(Z_n, X_n), \quad n \geq 1,$$

где н.о.р.с.в. X_n принимают значения на некотором пространстве состояний \mathfrak{X} , $g_1 : E \times \mathfrak{X} \rightarrow E$ – измеримая функция. Элементы $X_n \in \mathfrak{X}$ обычно используются для описания входного потока и длительностей обслуживания клиентов системы, например, $X_n = (T_n, S_n)$ для системы $GI/G/1$. Разворачивая рекурсию от шага n на L шагов вперед, получим выражение для вычисления значения Z_{n+L} :

$$Z_{n+L} = g_L(z, X_n, \dots, X_{n+L-1}),$$

где $g_L : E \times \mathfrak{X}^L \rightarrow E$ и $\mathfrak{X}^L = \mathfrak{X} \times \dots \times \mathfrak{X}$. Если при этом найдутся множество $C \in E$ и измеримые подмножества $B_L \in \mathfrak{X}^L$ такие, что для любых значений $z_1, z_2 \in C$ и $(x_1, \dots, x_L) \in B_L$ выполняется соотношение

$$g_L(z_1, x_1, \dots, x_L) = g_L(z_2, x_1, \dots, x_L), \quad (6)$$

то говорят о *независимости от прошлого* процесса Z через L шагов после попадания процесса во множество C на шаге n и элементов $\{X_n, \dots, X_{n+L-1}\}$ во множество B_L . При этом момент $n + L$ наступления события

$$\Omega_n = \{Z_n \in C, (X_n, \dots, X_{n+L-1}) \in B_L\}$$

является моментом регенерации, т. е. моменты регенерации можно определить следующим образом:

$$\beta_k = \min_n \{n + L > \beta_{k-1} : I\{\Omega_n\} = 1\}, \quad k > 1,$$

где $I\{\Omega\}$ – индикатор случайного события Ω . Заметим, что если множество C состоит только из одной точки, то равенство (6) выполняется автоматически для любых L и B_L .

Отметим, что цепочка *обновляющих событий*, приводящая к слабой регенерации, предполагает алгебраическую независимость процесса от предыстории. При этом поведение слабо регенерирующего процесса после момента регенерации зависит от L значений процесса на предыдущем цикле. При таком определении циклы регенерации являются *однозависимыми* (т. е. зависимы только два соседних цикла) [11, 17], однако сдвинутый процесс $\{Z_{n+\beta_k}\}_{n \geq 0}$ не зависит от моментов регенерации $\{\beta_0, \dots, \beta_k\}$. Следовательно, процесс Z является слабо регенерирующим. Событие Ω_n называется *обновляющим событием* [1]. Если событие Ω_n происходит, то интервал $[n, n+L)$ является *периодом обновления*, момент $n+L$ является моментом регенерации, а распределение процесса в момент $n+L$ $\mu(\cdot) := P(Z_{n+L} \in \cdot)$ называется *мерой регенерации*.

Система $GI/G/m$

В отличие от односерверной системы критерий стационарности многосерверной системы не гарантирует ее опустошения и, следовательно, существования моментов классической регенерации. Действительно, рассмотрим m -серверную систему обслуживания Σ типа $GI/G/m$, адаптировав обозначения потока клиентов из анализа системы $GI/G/1$. Рассмотрим вектор Кифера – Вольфовица $W_n = (W_{n,1}, \dots, W_{n,m})$, содержащий упорядоченную по возрастанию нагрузку (незавершенную работу) на серверах в момент t_n^- , включая ожидающих в очереди клиентов (обслуживание которых ведется в порядке поступления). Одношаговое рекуррентное соотношение для вектора нагрузки, предложенное в работе [21], является многомерным аналогом рекурсии Линдли (4):

$$W_{n+1} = R(W_n + lS_n - \mathbf{1}T_n)^+, \quad (7)$$

где $l = (1, 0, \dots, 0)$; $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и оператор $R(\cdot)$ упорядочивает компоненты вектора в порядке возрастания. Заметим, что значение $D_n := W_{n,1}$ является временем ожидания клиента n , при этом моменты прихода клиентов являются последовательными моментами дискретного времени системы.

Критерий стационарности процесса нагрузки обобщает (5) следующим образом:

$$E(mT - S) > 0 \text{ или } \rho < m. \quad (8)$$

Условие (8) гарантирует лишь условие $P(mT - S > 0) > 0$, т. е. в «худшем» случае [12]

$$\min\{i \geq 0 : s < it\} = m, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} s &= \sup\{x : P(S \geq x) = 1\}, \\ t &= \inf\{x : P(T \leq x) = 1\}. \end{aligned}$$

Отметим, что если $t = \infty$ либо $s = 0$, то $P(T - S > 0) > 0$ и система может полностью опустошаться, см. [4, 32, 38]. Условие (9) означает, что в системе после шага $m-1$ всегда находится не менее $m-1$ заявки. Действительно, рассмотрим систему Σ^* с *детерминированным входным потоком* $T_i^* = t, S_i^* = s$. Из условия (9) следует, что до шага $m-1$ в системе не произойдет ни одного ухода, т. е.

$$W_{m-1}^* = \mathbf{v} := (0, s - (m-1)t, \dots, s - t).$$

Перед приходом клиента m гарантированно произойдет уход клиента, т. е.

$$W_m^* = R(\mathbf{v} + ls - \mathbf{1}t)^+ = \mathbf{v}. \quad (10)$$

При этом можно показать, опираясь на свойство монотонности процесса W_n относительно управляющих последовательностей [37], что поскольку $T_n \geq t, S_n \leq s$, то $W_n \geq W_n^*$ (по вероятности). Таким образом, при любых управляющих последовательностях нагрузка в системе Σ всегда *не менее* \mathbf{v} .

Соотношение (10) подсказывает метод построения обновляющего события: необходимо, чтобы цепь W_n оказалась «достаточно близко» к значению \mathbf{v} и при этом управляющие последовательности T_n и S_n оказались «достаточно близко» к значениям t и s соответственно [12, 22, 36]. Для того чтобы приблизить значение W_n к \mathbf{v} , необходимо прежде всего показать, что W_n не растет неограниченно по вероятности, если выполнено (8). Действительно, предположим обратное: для любого $x > 0$ и любого $\varepsilon_0 > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon_0, x) < \infty$ такое, что $P(D_n \leq x) < \varepsilon_0$ для всех $n \geq n_0$. Рассмотрим приращение суммарной работы за один приход:

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^m (W_{n+1,i} - W_{n,i}) \leq S_n.$$

Заметим, что если $D_n = W_{n,1} > t$, то все серверы системы работают *без простоев*, и из (7) следует, что $W_{n+1,i} > 0$ (поскольку уменьшение нагрузки на каждом сервере составит $T_n \leq t$), поэтому

$$\begin{aligned} E(\Delta_n) &= E(\Delta_n | D_n \leq t)P(D_n \leq t) + \\ &+ E(\Delta_n | D_n > t)P(D_n > t) \leq \\ &\leq ES_n\varepsilon_0 + E(S_n - mT_n)(1 - \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (11)$$

За счет произвольности выбора ε_0 и использования условия (8) правая часть может быть сделана строго отрицательной для всех $n > n_0(\varepsilon_0, \mathbf{t})$. Это означает, что

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^m W_{n,i} \leq \mathbb{E} \sum_{i=1}^m W_{n_0,i} \leq n_0 \mathbb{E} S < \infty,$$

что противоречит предположению. Таким образом, время ожидания в системе не растет неограниченно по вероятности, т. е. найдется неслучайная последовательность $\{z_i, i \geq 1\}$, постоянные $D_0 < \infty, \varepsilon_1 > 0$ такие, что

$$\inf_i \mathbb{P}(D_{z_i} \leq D_0) \geq \varepsilon_1.$$

Наконец, используя стохастическую ограниченность процесса $\{W_{n,m} - W_{n,1}\}_{n \geq 1}$ [9, 23], можно показать, что (вообще говоря, для некоторой подпоследовательности z_i , при необходимости увеличив D_0 , уменьшив ε_1 и переобозначив элементы последовательности)

$$\mathbb{P}(W_{z_i} \leq \mathbf{1}D_0) \geq \varepsilon_1. \quad (12)$$

Таким образом, процесс $\{W_n\}_{n \geq 1}$ бесконечно часто с положительной вероятностью $\geq \varepsilon_1$ попадает в компакт $\{x \in E : x \leq \mathbf{1}D_0\}$ в неслучайные моменты $\{z_i\}$.

Рассмотрим один из таких моментов z_1 . Будем приближать вектор нагрузки, заключенный в компакт $\mathbf{1}D_0$, к вектору \mathbf{v} . Для этого построим циклы разгрузки, состоящие из m последовательных наступлений следующего события положительной вероятности:

$$H_i = \{T_i \in (\mathbf{t} - \delta, \mathbf{t}], S_i \in [\mathbf{s}, \mathbf{s} + \delta)\},$$

где δ выбирается так, чтобы было выполнено неравенство

$$0 < \delta < \frac{m\mathbf{t} - \mathbf{s}}{m + 1}. \quad (13)$$

При этом, даже если в «худшем» случае $D_0 > (m - 1)(\mathbf{t} - \delta)$, то уже к моменту $z_1 + m$ из (7) следует

$$W_{z_1+m} \leq \mathbf{1}(D_0 + \mathbf{s} - m\mathbf{t} + (m + 1)\delta) < \mathbf{1}(D_0 - \delta_0),$$

где величина $\delta_0 := -(\mathbf{s} - m\mathbf{t} + (m + 1)\delta) > 0$ равна минимальной разгрузке каждого сервера. Заметим, однако, что разгрузка всех серверов происходит лишь через m шагов, поскольку из (9) следует $(m - 1)t - s < 0$. Продолжая реализовывать событие H_i , через

$$k_1 = m \left\lceil \frac{D_0 - (m - 1)(\mathbf{t} - \delta)}{\delta_0} \right\rceil$$

шагов получим $W_{z_1+k_1} < D_0^1$ для некоторого $D_0^1 < \mathbf{1}(m - 1)(\mathbf{t} - \delta)$. Здесь $\lceil a \rceil$ означает наименьшее целое больше a . Выполнив еще $m - 1$ шаг, заметим, что первая компонента вектора $W_{z_1+k_1+m-1}$ обращается в нуль, т. е. один из серверов освободится:

$$W_{z_1+k_1+m-1} \leq (0, D_0^1 + \mathbf{s} - (m - 1)\mathbf{t} + m\delta, \dots).$$

На следующем шаге заявка, поступившая без ожидания, займет в векторе последнее место (поскольку из (13) $D_0^1 - \delta_0 < \mathbf{s} - \mathbf{t} + 2\delta$):

$$W_{z_1+k_1+m} \leq (D_0^1 - \delta_0, \dots, D_0^1 - \delta_0, \mathbf{s} - \mathbf{t} + 2\delta).$$

При этом нагрузка на остальных серверах уменьшилась не менее чем на величину δ_0 . Заметим также, что из (13) следует, что $W_{z_1+k_1+im-1,1} = 0$ для любого целого $i \geq 1$. Продолжая m -шаговые циклы разгрузки, не более чем через $k_2 = m \lceil \frac{t - \delta}{\delta_0} \rceil$ шагов добьемся, что две последовательные заявки поступят без ожидания, при этом нагрузка на остальных серверах может только уменьшиться. Продолжая процедуру, можно заметить, что число шагов k_0 с момента прихода заявки z_1 (момента первого попадания в компакт $W_{z_i} \leq \mathbf{1}D_0$), необходимое для получения серии из $m - 1$ последовательных заявок, поступающих на обслуживание без ожидания, определяется соотношением

$$k_0 \leq m \left\lceil \frac{D_0}{\delta_0} \right\rceil. \quad (14)$$

Кроме того, (14) влечет $D_0 - k_0\delta_0 < 0$, поэтому в момент времени $t_{z_1+k_0}^-$ выполнено

$$W_{z_1+k_0} \leq (0, \mathbf{s} - (m - 1)\mathbf{t} + m\delta, \dots, \mathbf{s} - \mathbf{t} + 2\delta).$$

Таким образом, в момент дискретного времени $z_1 + k_0$ в системе одновременно обслуживаются не более $m - 1$ последних пришедших заявок, которые поступили на обслуживание без задержки. Это означает, что будущее процесса нагрузки $\{W_{z_1+k_0+i}\}_{i \geq 0}$ не зависит от его прошлого до момента $z_1 + k_0 - m$. Отметим, что данная процедура построения моментов регенерации уточняет конструкции в [12, 36]. Осталось указать, что обновление происходит с вероятностью, не меньшей чем

$$\varepsilon_2 := \mathbb{P}(H_i)^{k_0} > 0. \quad (15)$$

Соответственно, множество C для процесса $\{W_n\}$ можно определить так:

$$C = \{x \in E : x \leq \mathbf{1}D_0\},$$

длительность периода обновления $L \leq k_0$, и множество B_L для управляющих последовательностей связано с событием H_i таким образом:

$$B_L = \{T_i \in (\mathbf{t} - \delta, \mathbf{t}], S_i \in [\mathbf{s}, \mathbf{s} + \delta), i = 1, \dots, L\}.$$

При этом из (12) и (15) следует, что событие Ω_n (регенерация W_n) происходит на интервале $[z_i; z_i + k_0]$ с вероятностью не меньше $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$. Отметим, что можно доказать конечность средней длины цикла регенерации, $E\alpha_1 < \infty$ [13], см. также [4, 23].

ВОЗВРАТНОСТЬ ПО ХАРРИСУ

Регенерация в классическом смысле, как правило, связана с попаданием цепи Маркова (процесса) в определенное состояние, например, нулевое (опустошение системы), при этом циклы регенерации являются независимыми. Как показано ранее, такое состояние не всегда существует. Это вызвало необходимость расширить понятие классической регенерации. Слабая регенерация допускает попадание цепи и управляющей последовательности в определенное множество состояний, при этом ослабляя требование независимости циклов регенерации. Подобными свойствами возвращения в некоторое множество с положительной вероятностью обладают цепи Маркова, возвратные по Харрису.

Рассмотрим однородную цепь Маркова $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ с начальным состоянием $Z_1 = x \in E$ и r -шаговым переходным ядром

$$\begin{aligned} K^r(x, \cdot) &= P(Z_{r+1} \in \cdot | Z_1 = x) = \\ &= P_x(Z_r \in \cdot), \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

Заметим, что E может быть не счетным. Обозначим через $\tau(A)$ момент первого возвращения в множество A :

$$\tau(A) = \inf\{n \geq 1 : Z_n \in A\},$$

который является моментом остановки относительно сигма-алгебры, порожденной траекторией цепи до шага n , поскольку

$$\{\tau(A) \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{Z_k \in A\}.$$

Определение 2. ([18, 33]) Цепь Маркова $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ называется *возвратной по Харрису*, если существует нетривиальная мера φ (σ -конечная мера на E , оснащенном борелевской сигма-алгеброй \mathfrak{E}), такая, что из положительности меры $\varphi(A) > 0$ для множества $A \in \mathfrak{E}$ следует, что

$$P_x(\tau(A) < \infty) = 1$$

для любого начального состояния $x \in E$, т. е. каждое достижимое множество A имеет конечную меру φ .

Можно показать [28], что для такой цепи существует единственная инвариантная мера π и, в случае конечности последней, цепь называется *положительно возвратной по Харрису*. Например, если $\varphi(A) = \sum_{i=1}^{\alpha_1} I\{X_i \in A\}$ и $E\alpha_1 = \varphi(E) < \infty$, то

$$\pi(A) = \frac{\varphi(A)}{\varphi(E)} = \frac{\varphi(A)}{E\alpha_1}.$$

В работе [33] (в условиях сепарабельности E) дается эквивалентное определение возвратности по Харрису в терминах так называемых *малых множеств*:

Определение 3. Цепь $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ называется возвратной по Харрису, если

1) для некоторого *фиксированного* множества $V \in \mathfrak{E}$, *меры регенерации* μ (вероятностной меры, такой, что $\mu(V) = 1$) и любого $x \in E$ выполнено

$$P_x(\tau(V) < \infty) = 1;$$

2) для любого $x \in V$, $B \in \mathfrak{E}$ и некоторых $\varepsilon \in (0, 1)$, $r \geq 1$ выполнено *условие миноризации*:

$$K^r(x, B) \geq \varepsilon \mu(B). \quad (16)$$

Взаимосвязь данных определений рассмотрим в следующем разделе.

Метод расщепления

Поясним связь между однозависимой регенерацией и возвратностью по Харрису. Для этого можно воспользоваться *процедурой расщепления* (рандомизации). В моменты попадания цепи Z_n во множество V определим 0-1 н.о.р.с.в. ξ_n такие, что $P(\xi_n = 1) = \varepsilon$. Назовем событие $\{\xi_n = 1\}$ успехом. В случае успеха строим Z_{n+r} в соответствии с распределением $\mu(\cdot)$, в противном случае строим Z_{n+r} по условному распределению $Q(Z_n, \cdot)$, определяемому равенством:

$$Q(x, \cdot) = \frac{K^r(x, \cdot) - \varepsilon \mu(\cdot)}{1 - \varepsilon}.$$

Таким образом, переходное ядро имеет вид

$$K^r(x, \cdot) = \varepsilon \mu(\cdot) + (1 - \varepsilon) Q(x, \cdot). \quad (17)$$

В силу (16) в момент попадания цепи во множество V происходит *условное расщепление* распределения вероятности перехода за r шагов.

Поскольку цепь с вер. 1 попадает во множество V неограниченное число раз, то можно определить последовательность моментов регенерации $\{\beta_n\}$ следующим образом:

$$\beta_{n+1} = \inf\{i > \beta_n : Z_i \in V, \xi_i = 1\} + r, \quad n \geq 1,$$

причем в силу положительности вероятности успеха ε длина цикла регенерации α_n конечна [10, 18, 28]. При этом значения процесса $\{Z_{n+i}, 1 \leq i \leq r-1\}$ определяются граничными значениями Z_n, Z_{n+r} , распределенными в соответствии с μ , вследствие чего возникает зависимость между соседними циклами регенерации. В общем случае реализовать такую конструкцию достаточно трудно (см. [9]). В то же время в некоторых случаях возможно конструирование таких моментов, аналогичное построению обновляющих событий (наступление успешного расщепления в возвратной по Харрису цепи эквивалентно наступлению обновляющего события в слабо регенерирующем процессе). Более того, в случае $r = 1$ цепь регенерирует в классическом смысле [18, 33].

Вернемся к рассмотрению системы $GI/G/m$, где в качестве цепи Маркова рассматривается вектор нагрузки $\{W_n\}_{n \geq 1}$. Положим в (17) $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ и определим меру $\varphi(\cdot)$ как среднее число попаданий во множество $V = \{x \in E : \mathbf{v} \leq x \leq (0, \mathbf{s} - (m-1)\mathbf{t} + m\varepsilon, \dots, \mathbf{s} - \mathbf{t} + 2\varepsilon)\}$ на цикле регенерации [9, 10, 17, 28] при условии, что стартовым распределением W_1 является $\mu(\cdot)$ (мера регенерации), т. е.

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot) &:= E_\mu \left[\sum_{i=1}^{\alpha_1} I\{W_i \in \cdot\} \right] = \\ &= \int E_x \left[\sum_{i=1}^{\alpha_1} I\{W_i \in \cdot\} \right] d\mu(x). \end{aligned}$$

Слабая регенерация произойдет через $r = m-1$ шагов цепи, и в качестве меры регенерации μ можно выбрать следующую меру:

$$\mu(\cdot) = K^{m-1}(0, \cdot).$$

Искусственная регенерация

Напомним, что при построении регенерации возвратной по Харрису цепи Маркова методом расщепления в случае $r = 1$ происходит потеря зависимости между соседними циклами (поскольку выбор из распределения μ происходит на следующем шаге после попадания в компакт V), т. е. цепь регенерирует в классическом смысле. Одним из конструктивных методов использования этого свойства является искусственное построение моментов регенерации за счет экспоненциального расщепления плотности [8]. Этот метод актуален для моделирования систем, в которых характеристики имеют распределения с тяжелыми хвостами.

Экспоненциальное расщепление плотности заменяет исходную случайную величину S (с

плотностью f) на комбинацию трех случайных величин: экспоненциально распределенной, индикатора и остатка. Экспоненциальное расщепление возможно, если существуют такие константы $\theta > 0$, x_0 и $0 < p < 1$, что выполнено неравенство миноризации

$$f(x) \geq pf_0(x), \quad x \geq x_0, \quad (18)$$

где f_0 – плотность усеченного слева экспоненциального распределения:

$$f_0(x) := \begin{cases} 0, & x \leq x_0; \\ \theta e^{-\theta(x-x_0)}, & x > x_0. \end{cases} \quad (19)$$

Введем плотность $f_1(x) = \frac{f(x) - pf_0(x)}{1-p}$. Тогда

$$f_1(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{1-p}, & x \leq x_0; \\ \frac{f(x) - p\theta e^{-\theta(x-x_0)}}{1-p}, & x > x_0. \end{cases} \quad (20)$$

Легко увидеть, что с.в. S может быть представлена в виде следующей суммы:

$$S = I\{\xi = 1\}S_0 + I\{\xi = 0\}S_1, \quad (21)$$

где независимые с.в. S_0 и S_1 имеют плотности распределения f_0 и f_1 соответственно. С.в. ξ имеет распределение Бернулли с вероятностью успеха $P(\xi = 1) = p$ и называется *индикатором расщепления*.

Поясним вкратце метод построения искусственной регенерации, предложенный в работе [8]. Рассмотрим многокомпонентный процесс $\Theta = \{X_1(t), T_1(t), \dots, X_M(t), T_M(t)\}_{t \geq 0}$, имеющий дискретные компоненты $X_i \in E$ (например, число заявок в очереди системы) и непрерывные компоненты $T_i \geq 0$, линейно убывающие до обнуления (например, остаточное время обслуживания). В момент t^* обнуления i -й компоненты происходит изменение дискретных компонент процесса в соответствии с некоторой вероятностной мерой

$$P_i(x, x') = P\{X_1(t^*+) = x'_1, \dots, X_M(t^*+) = x'_M \\ | X_1(t^*-) = x_1, \dots, X_M(t^*-) = x_M\},$$

при этом новое значение T_i имеет некоторую плотность $f_i(x, x')$. Непрерывные компоненты в момент t^* не претерпевают изменения. Напротив, в момент, не соответствующий обнулению непрерывной компоненты, дискретные компоненты не изменяются. Пусть существует такой вектор $x^* \in E^M$, что если дискретные компоненты цепи приняли значение x^* , то каждая непрерывная компонента допускает миноризацию плотности (18) (возможно, со своими параметрами $p_i(x, x')$, $x_{0,ix'}$, $\theta_i(x, x')$).

Пусть в момент времени t^* произошло попадание некоторой дискретной компоненты $X_i(t^*+)$ в состояние x_i^* . Тогда произведем экспоненциальное расщепление соответствующей непрерывной компоненты $T_i(t^*+)$. Для этого добавим в процесс Θ M -мерный дискретный процесс $\{(Z_1(t), \dots, Z_M(t))\}_{t \geq 0}$, где Z_i есть фаза экспоненциально расщепленной i -й непрерывной компоненты. В момент расщепления положим $Z_i(t) = 1$, если соответствующий индикатор расщепления равен 1, и такие компоненты назовем проходящими предэкспоненциальную фазу. Тогда в момент времени $t^* + x_{0,ixx'}$ положим $Z_i(t) = 0$, а соответствующая компонента попадет в экспоненциальную фазу (и соответствующая непрерывная компонента может в моменты событий переразыгрываться). Положим $Z_i(t) = 2$, если в момент t^* индикатор расщепления равен 0 либо $X_i(t^*+) \neq x_i^*$. Тогда событие искусственной регенерации наступает, когда все непрерывные компоненты попадают в экспоненциальную фазу, т. е. в такой момент t^* , что

$$\{X_1(t^*) = x_1^*, \dots, X_M(t^*) = x_M^*, \\ Z_1(t^*) = Z_M(t^*) = 0\}.$$

Система $GI/G/m$ с выключением приборов

Поясним технику построения моментов искусственной регенерации на следующем примере. Пусть в многосерверной системе обслуживания в момент освобождения сервера, при условии пустой очереди, сервер уходит в состояние пониженного энергопотребления, в котором обслуживание заявок невозможно (так называемый спящий режим) на случайное время C_i , имеющее плотность $c(\cdot)$, и напомним, что клиенты приходят в систему через моменты времени T_i (имеющие плотность $a(\cdot)$), обслуживаются время S_i (с плотностью $b(\cdot)$). Введем следующий $m + 1$ -мерный процесс: $X_0(t)$ есть число заявок в очереди в момент времени t , а $X_1(t), \dots, X_m(t)$ есть режимы работы сервера $1, \dots, m$: $X_1(t) = 1$, если сервер занят обслуживанием клиента, и $X_1(t) = 0$, если он находится в режиме пониженного энергопотребления. Непрерывные компоненты определим следующим образом: $T_0(t)$ есть время до прихода следующего клиента, $T_1(t), \dots, T_m(t)$ есть времена до окончания текущей активности (бездействия) сервера. Заметим, что клиенты никогда не попадают на обслуживание в момент прихода, но вынуждены дожидаться окончания текущей активности (бездействия) сервера. Пусть вектор $l = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда в момент прихода

заявки происходит следующее изменение дискретной компоненты: из состояния x в $x + l$ (попадание заявки в очередь) с вероятностью $P_0(x, x + l) = 1$. В момент окончания текущей активности на сервере $i \geq 1$ происходит либо уход сервера в режим пониженного энергопотребления (если очередь пуста), либо уход заявки из очереди на обслуживание, т. е. $P_i(x, x') = 1$, если $x_0 = 0$, $x'_i = 0$, либо $x_0 > 0$, $x'_0 = x_0 - 1$, $x'_i = 1$, где $x_j = x'_j, j \neq i$. При этом непрерывная компонента T_0 в момент прихода выбирается из распределения $a(x)$, а компонента T_i в момент окончания очередного периода активности (бездействия) сервера i выбирается из распределения $b(x)$, если $x_0 > 0$, и $c(x)$ иначе. Зафиксируем состояния дискретного многомерного процесса, например, следующим образом: $x^* = (k, 1, \dots, 1)$. Произведем экспоненциальное расщепление плотностей T_0, \dots, T_m в моменты попадания дискретных компонент в зафиксированное состояние. Пусть Z_0, \dots, Z_m есть соответствующие фазы каждой непрерывной компоненты, определенные ранее. Если все фазы экспоненциальные, а дискретные компоненты попали в состояние x^* , то наступил момент регенерации.

Поясним при этом технику построения циклов регенерации методом дискретно-событийного моделирования. Применение данного метода обусловлено свойствами модели, поскольку изменение состояния системы происходит только в моменты прихода и ухода клиентов, а также окончания периодов бездействия, в то время как между данными событиями непрерывные компоненты линейно убывают.

Предположим, что изначально цепь стартует в момент регенерации. Выберем ближайшее по времени событие t^* и изменим состояние системы, пусть оно связано с обнулением компоненты $T_i(t^*-) = 0, i \geq 0$. Если при этом $X_i(t^*+) = x^*$, то можно провести экспоненциальное расщепление плотности *нового* времени $T_i(t^*+)$. Для этого разыграем бернуллиевскую случайную величину ξ_i с соответствующей вероятностью успеха. Если $\xi_i = 1$, начнем отсчет времени предэкспоненциальной фазы, положив $Z_i = 1$ и временно положив $T_i(t^*+) = x_{0,ixx'}$. Далее, как только истечет предэкспоненциальная фаза, величину T_i можно будет каждый раз разыгрывать заново из классического экспоненциального распределения с параметром $\theta_i(x, x')$, полагая $Z_i = 0$. Если же $\xi_i = 0$, то разыграем $T_i(t^*+)$ из распределения $f_{1,i}(x, x')$ и полагая $Z_i = 2$. Дальнейшая эволюция системы связана с переходом к следующему ближайшему событию. Наконец за

метим, что если в момент t^* дискретная компонента не попала в x^* , то новое время $T_i(t^*+)$ выбирается из исходного распределения (a, b, c соответственно), и полагаем $Z_i = 2$. Более подробное пояснение алгоритма представлено в работе [8]. Отметим, что на построенных таким образом циклах регенерации можно применять технику регенеративного оценивания, рассмотренную ниже, например, для оценивания некоторой ценовой функции (энергопотребления, среднего числа заявок и т. п.).

МЕТОД РЕГЕНЕРАТИВНЫХ ОГИБАЮЩИХ

В этом разделе мы рассмотрим метод регенеративных огибающих для построения моментов регенерации высокопроизводительного вычислительного кластера. Суть метода заключается в следующем. Предположим, что описывающий исходную систему случайный процесс не является регенерирующим, либо число моментов слишком мало для эффективного оценивания. Тогда для исходной системы Σ строятся две новые системы: мажорантная система $\bar{\Sigma}$ и минорантная система $\underline{\Sigma}$, входные потоки в которые совпадают с входным потоком исходной системы Σ . В мажорантной (минорантной) системе времена обслуживания стохастически больше (меньше), чем в исходной. Обе новые системы регенерируют в классическом смысле. Тогда оценки характеристик (например, средней загрузки, средней длины очереди, среднего числа заявок), получаемых в этих системах, являются верхней (оценка, получаемая в мажорантной системе) и нижней (оценка, получаемая в минорантной системе) границами для соответствующих характеристик исходной системы. Соответствующие величины в новых системах $\bar{\Sigma}$ и $\underline{\Sigma}$ будем также обозначать верхней и нижней чертой соответственно.

Рассмотрим модель высокопроизводительного вычислительного кластера Σ с m серверами, работающими параллельно. Обозначим $T_n = t_{n+1} - t_n$ времена между приходами клиентов (с интенсивностью λ), где t_n – момент прихода n -го клиента, которому требуется для обслуживания случайное время S_n (с интенсивностью μ) на N_n серверах *одновременно* с распределением $\{p_k := P(N_i = k)\}$. При этом n -й клиент занимает N_n наименее загруженных серверов. Обозначим $\nu_n(Q_n)$ число заявок в кластере (размер очереди) в момент времени t_n^- . Условия стационарности для ν, Q приведены в работах [24, 30].

Построим для кластера две новые системы $\bar{\Sigma}$ (мажорантную) и $\underline{\Sigma}$ (минорантную), с таким же (используя каплинг) входным по-

током $\{T_i\}$, как в системе Σ , и соответственно увеличенными (уменьшенными) временами обслуживания $\{\bar{S}_i\}$ ($\{\underline{S}_i\}$), $i \geq 1$. Такие изменения времен обслуживания происходят в моменты, когда мажорантная (минорантная) система попадает в некоторое фиксированное состояние, приводящее к регенерации в классическом смысле. Это позволяет построить доверительные оценки, даже если исходная система не являлась регенерирующей. (Более подробно этот метод представлен в [26].)

Метод базируется на использовании свойства монотонности процессов [25]. Предположим, что времена обслуживания стохастически упорядочены, $\underline{S}_i \leq S_i \leq \bar{S}_i$, $i \geq 1$. Тогда

$$\underline{\nu}_i \leq \nu_i \leq \bar{\nu}_i, \quad \underline{Q}_i \leq Q_i \leq \bar{Q}_i, \quad i \geq 1. \quad (22)$$

Для начала определим для мажорантной системы $\bar{\Sigma}$ моменты регенерации. Рассмотрим процесс $\bar{Z}_n := \{\bar{\nu}_n, \bar{S}_i(n), i \in \bar{M}_n\}$, $n \geq 1$, где $\bar{M}_n = \{i : t_i \leq t_n < \bar{z}_i\}$ – набор номеров заявок, обслуживаемых в $\bar{\Sigma}$ в момент времени t_n , \bar{z}_i – момент ухода i -й заявки из системы, $\bar{S}_i(n)$ – остаточное время обслуживания i -й заявки в момент t_n . Фиксированное состояние определим двумя следующими способами.

1 способ: зафиксируем целое Q_0 (размер очереди) и N_0 (число серверов, требуемых для обслуживания первой в очереди заявки), константы $0 \leq a \leq b < \infty$ и определим моменты

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{n+1} = \inf \{ k > \bar{\beta}_n : \bar{Q}_k = Q_0 > 0, \\ N_{k-Q_0} = N_0, \\ \bar{S}_i(k) \in (a, b), i \in \bar{M}_k, \\ \bar{M}_{\bar{\beta}_n} \cap \bar{M}_k = \emptyset \}, n \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

2 способ: зафиксируем число занятых серверов m_0 при свободной очереди и определим моменты

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{n+1} = \inf \{ k > \bar{\beta}_n : \bar{Q}_k = 0, \\ \sum_{i \in \bar{M}_k} N_i = m_0 \leq m, \\ \bar{S}_i(k) \in (a, b), i \in \bar{M}_k, \\ \bar{M}_{\bar{\beta}_n} \cap \bar{M}_k = \emptyset \}, n \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Условие $\bar{M}_{\bar{\beta}_n} \cap \bar{M}_k = \emptyset$ означает, что все заявки, обслуживаемые в момент $\bar{\beta}_n$, покидают систему до момента $\bar{\beta}_{n+1}$.

Аналогично определяются моменты $\underline{\beta}_n$, $n \geq 0$, для минорантной системы (константы a, b, Q_0, N_0, m_0 могут быть другими).

Когда система попадает в фиксированное состояние, остаточные времена обслуживания

$\bar{S}_i(k), i \in M_k$, заменяются на верхнюю границу компакта b (в мажорантной системе $\bar{\Sigma}$), остаточные времена обслуживания $S_i(k), i \in M_k$, заменяются на нижнюю границу компакта a (в минорантной системе $\underline{\Sigma}$). Построенные моменты времени $\{\bar{\beta}_n\}, \{\underline{\beta}_n\}$ являются моментами регенерации, и кроме того, эти преобразования сохраняют свойство монотонности исследуемых характеристик.

Процесс $\bar{Z}_n (Z_n)$ является марковским и в каждый момент времени $\bar{\beta}_n^+, (\underline{\beta}_n^+)$ переходит в фиксированное состояние $(\nu_0, b\mathbf{1}), ((\nu_0, a\mathbf{1}))$. Таким образом, процесс $\{\bar{Z}_n\}$ регенерирует в классическом смысле в моменты времени $\{\bar{\beta}_k\}$ и имеет н.о.р. циклы регенерации $\{\bar{Z}_k, \bar{\beta}_n \leq k < \bar{\beta}_{n+1}\}$ с н.о.р. длинами циклов регенерации $\bar{\beta}_{n+1} - \bar{\beta}_n, n \geq 1$ (то же самое верно для минорантной системы).

Из (22) следует, что $\underline{Q}_n \leq Q_n$ и

$$\underline{EQ} \leq EQ \leq \overline{EQ}.$$

Для построения моментов регенерации границы a, b для остаточных времен обслуживания можно брать разные a_i и b_i в зависимости от номера сервера i . Заметим, что, как и в методе обновляющих событий, для построения моментов слабой регенерации частота моментов регенерации регенеративных огибающих зависит от выбора констант a и b .

РЕГЕНЕРАТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Предположим, что необходимо оценить некоторый функционал от исследуемого процесса (в дискретном времени) $f(Z_n)$. Например, Z_n – число клиентов в системе, а $f(Z_n)$ – задержка в системе или ее энергопотребление.

Пусть $Y_j = \sum_{i=\beta_j}^{\beta_{j+1}-1} f(Z_i)$ – сумма значений характеристики процесса на j -м цикле, для классически регенерирующего процесса, с.в. (Y_j) независимы и одинаково распределены. В силу (3) статистическое оценивание характеристики процесса сводится к следующему: при наличии независимых и одинаково распределенных наблюдений $(Y_j, \alpha_j), j \geq 0$, необходимо оценить величину

$$r = \frac{E_0 Y_1}{E_0 \alpha_1},$$

где, напомним, E_0 есть математическое ожидание процесса без задержки.

Предположим, что $E(Y_1 + \alpha_1)^2 < \infty$, тогда на основе центральной предельной теоремы можно получить следующий $(1 - 2\gamma)\%$ до-

верительный интервал для r [3]:

$$\left[\bar{r}_n \pm \frac{h_\gamma \sqrt{\text{Var}(n)}}{\sqrt{n \bar{\alpha}_n}} \right], \quad (25)$$

где $\bar{\alpha}_n (\bar{Y}_n)$ – выборочное среднее для $\alpha_i (Y_i)$, n – число циклов регенерации, $\text{Var}(n)$ – оценка $\text{Var}(Y_1) - 2r \text{cov}(Y_1, \alpha_1) + r^2 \text{Var}(\alpha_1)$, $h_\gamma = \Phi^{-1}((1 - \gamma)/2)$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Отметим, что данный метод применим также для слабо зависимых циклов регенерации. В этом случае доверительный интервал имеет вид:

$$\left[\bar{r}_n \pm \frac{h_\gamma \sqrt{\text{Var}(n) + 2(t_1(n) - \bar{r}_n t_2(n))}}{\sqrt{n \bar{\alpha}_n}} \right], \quad (26)$$

где $t_1(n)$ – выборочная оценка ковариации $\text{cov}(Y_0, Y_1)$, $t_2(n)$ – выборочная оценка ковариации $\text{cov}(\alpha_1, Y_0)$.

Аналогичная конструкция доступна и для цепей Маркова, положительно возвратных по Харрису. Обозначим $E_\mu(\cdot) = \int E_x(\cdot) \mu(dx)$, $E_x(\cdot) = E(\cdot | Z_0 = x)$. Пусть $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ положительно возвратна по Харрису, т. е. $E_\mu \beta_1 < \infty$. Тогда [9]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(Z_n) = \frac{E_\mu \sum_{n=0}^{\beta_1-1} f(Z_n)}{E_\mu \beta_1}.$$

Использование методов уменьшения дисперсии оценки, таких как, например, метод общих случайных чисел или метод противоположных случайных чисел [29], позволило бы управлять знаком ковариации в полученном доверительном интервале и, следовательно, сократить его длину. Они применимы при условии монотонности соответствующих функционалов, что требует дополнительного изучения и, с точки зрения авторов, является перспективным направлением дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены методы регенеративного моделирования многосерверных систем обслуживания. Высокая сложность современных многосерверных систем обслуживания является не только вызовом, требующим доработки классических методов, но и возможностями, требующими исследовать новые методы оценивания и типы регенерации, в том числе за счет качественно новой информации о состоянии системы (доступной, например, в программно конфигурируемых сетях [27]). При этом, с учетом дополнительной

информации о типах распределения управляющих последовательностей системы, представляется перспективным применение методов сокращения дисперсии оценки, методов ускоренного моделирования. Отметим также, что для ускорения моделирования возможно применение параллельных и распределенных вычислений. Исследование этих возможностей представляется важной темой для дальнейшей работы.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (18-07-00147, 18-07-00156, 16-07-00622), гранта Президента РФ МК-1641.2017.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А. А. Теория вероятностей. М., 1972.
2. Иглхард Д. Л., Шедлер Д. С. Регенеративное моделирование сетей массового обслуживания. М.: Радио и связь, 1984.
3. Крэйн М., Лемуан О. Введение в регенеративный метод анализа моделей. М.: Наука, 1982.
4. Морозов Е. В., Дельгадо Р. Анализ стационарности регенеративных систем обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2009. Т. 70. С. 42–58.
5. Морозов Е. В., Румянцев А. С. Модели многосерверных систем для анализа вычислительного кластера // Труды Карельского научного центра РАН. 2011. Вып. 5. С. 75–85.
6. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы / Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
7. Morozov E. V. Coupling and stochastic monotonicity of queueing processes. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2013. 72 с.
8. Andronov A. Artificial regeneration points for stochastic simulation of complex systems // Simulation Technology: Science and Art. 10th European Simulation Symposium ESS'98, Proceedings. 1998. P. 34–40.
9. Asmussen S. Applied probability and queues. Springer-Verlag, New York, 2003. doi: 10.1007/b97236
10. Athreya K. B., Ney P. A new approach to the limit theory of recurrent Markov Chains // Transactions of the American Mathematical Society. 1978. Vol. 245. P. 493–501. doi: 10.1090/S0002-9947-1978-0511425-0
11. Borovkov A. A. Asymptotic Methods in Queueing Theory. Wiley, New York, 1984.
12. Charlot F., Ghidouche M., Hamami M. Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des «Temps d'attente» des files GI/G/q // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1978. Vol. 43. P. 187–203.
13. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Wiley, New York, 1950.
14. Feitelson D. G. Workload Modeling for Computer Systems Performance Evaluation. Cambridge University Press, New York, 2015. doi: 10.1017/CBO9781139939690
15. Foss S. G. On the ergodicity conditions for stochastically recursive sequences // Queueing Systems. 1992. Vol. 12. P. 287–296. doi: 10.1007/BF01158804
16. Foss S., Kalashnikov V. Regeneration and renovation in queues // Queueing Systems. 1991. No. 8. P. 211–224. doi: 10.1007/BF02412251
17. Foss S., Konstantopoulos T. An overview of some stochastic stability methods // Journal of the Operations Research Society of Japan. 2004. Vol. 47, no. 4. P. 275–303.
18. Glynn P. Wide-sense regeneration for Harris recurrent Markov processes: an open problem // Queueing Systems. 2011. Vol. 68, no. 3–4. P. 305–311. doi: 10.1007/s11134-011-9238-x
19. Glynn P., Iglehart D. Simulation methods for queues: an overview // Queueing Systems. 1988. Vol. 3. P. 221–256. doi: 10.1007/BF01161216
20. Kalashnikov V. V. Regenerative queueing processes and their qualitative and quantitative analysis // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 113–136. doi: 10.1007/BF02411469
21. Kiefer J., Wolfowitz J. On the theory of queues with many servers // Transactions of the American Mathematical Society. 1955. P. 1–18. doi: 10.1090/S0002-9947-1955-0066587-3
22. Morozov E. Stochastic boundness of some queueing systems. Preprint No R-95-2022, ISSN 0908-1216, Dept. Math. and Computer Sci., Aalborg Univ., Aalborg, Denmark, 1995.
23. Morozov E. The tightness in the ergodic analysis of regenerative queueing processes // Queueing Systems. 1997. Vol. 27. P. 179–203. doi: 10.1023/A:1019114131583
24. Morozov E., Rumyantsev A. Stability Analysis of a MAP/M/s Cluster Model by Matrix-Analytic Method // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9951. P. 63–76. doi: 10.1007/978-3-319-46433-6_5

25. Morozov E., Rumyantsev A., Peshkova I. Monotonicity and stochastic bounds for simultaneous service multiserver systems // 8th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. Institute of Electrical and Electronics Engineers. 2016. P. 294–297. doi: 10.1109/ICUMT.2016.7765374
26. Morozov E., Rumyantsev A., Nekrasova R., Peshkova I. A Regeneration-Based Estimation of High Performance Multiserver Systems // Communications in Computer and Information Science. 2016. Vol. 608. P. 271–282. doi: 10.1007/978-3-319-39207-3_24
27. Nguyen T. A. et al. Availability Modeling and Analysis for Software Defined Networks // 2015 IEEE 21st Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing (PRDC), Zhangjiajie. 2015. P. 159–168. doi: 10.1109/PRDC.2015.27
28. Nummelin E. A Splitting Technique for Harris Recurrent Markov Chains // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1978. Vol. 43. P. 309–318. doi: 10.1007/BF00534764
29. Ross S. Simulation. Academic Press, New York, 1997.
30. Rumyantsev A., Morozov E. Stability criterion of a multiserver model with simultaneous service // Annals of Operations Research. 2017. Vol. 252. No. 1. P. 29–39. doi: 10.1007/s10479-015-1917-2
31. Shedler G. Regeneration and networks of queues. Springer-Verlag, 1987. doi: 10.1007/978-1-4612-1050-4
32. Sigman K. Queues as Harris recurrent Markov chains // Queueing Systems. 1988. Vol. 3. P. 179–198. doi: 10.1007/BF01189048
33. Sigman K., Wolff R. W. A review of regenerative processes // SIAM Review. 1993. Vol. 35, no. 2. P. 269–288. doi: 10.1137/1035046
34. Sutter H. The free lunch is over: A fundamental turn toward concurrency in software // Dr. Dobbs's Journal. 2005. P. 1–9.
35. Kalashnikov V. Topics on regenerative processes. CRC Press, Boca Baton, 1994.
36. Thorrisson H. Coupling, stationarity, and regeneration. Springer-Verlag, New York, 2000. doi: 10.1007/978-1-4612-1236-2
37. Whitt W. Comparing counting processes and queues // Advances in Applied Probability. 1981. Vol. 13, no. 1. P. 207–220. doi: 10.2307/1426475
38. Whitt W. Embedded renewal processes in the GI/G/s queue // Journal of Applied Probability. 1972. Vol. 9. P. 650–658. doi: 10.1017/S0021900200035944

Поступила в редакцию 10.04.2018

REFERENCES

1. Borovkov A. A. Probability Theory. Moscow, 1972 (in Russian).
2. Iglehart D., Shedler G. Regenerative simulation of response times in networks of queues. Moscow: Radio i Svyaz, 1984 (in Russian).
3. Crane M. A., Lemoine A. J. An Introduction to the Regenerative Method for Simulation Analysis. Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
4. Morozov E. V., Delgado R. Stability analysis of regenerative queueing systems. *Avtomatika i telemekhanika*. 2009. Vol. 70. P. 42–58 (in Russian).
5. Morozov E. V., Rumyantsev A. S. Multiserver system models for high performance cluster analysis. *Transactions of Karelian Research Centre of RAS*. 2011. Vol. 5. P. 75–85 (in Russian).
6. Nummelin E. General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators. Moscow: Mir, 1989 (in Russian).
7. Morozov E. V. Coupling and stochastic monotonicity of queueing processes. Petrozavodsk: PetrSU, 2013.
8. Andronov A. Artificial regeneration points for stochastic simulation of complex systems. *Simulation Technology: Science and Art. 10th European Simulation Symposium ESS'98, Proceedings*. 1998. P. 34–40.
9. Asmussen S. Applied probability and queues. Springer-Verlag, New York, 2003. doi: 10.1007/b97236
10. Athreya K. B., Ney P. A new approach to the limit theory of recurrent Markov Chains. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1978. Vol. 245. P. 493–501. doi: 10.1090/S0002-9947-1978-0511425-0
11. Borovkov A. A. Asymptotic Methods in Queueing Theory. Wiley, New York, 1984.
12. Charlot F., Ghidouche M., Hamami M. Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des «Temps d'attente» des files GI/G/q. *Zeitschrift*

für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1978. Vol. 43. P. 187–203.

13. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Wiley, New York, 1950.
14. Feitelson D. G. Workload Modeling for Computer Systems Performance Evaluation. Cambridge University Press, New York, 2015. doi: 10.1017/CBO9781139939690
15. Foss S. G. On the ergodicity conditions for stochastically recursive sequences. *Queueing Systems*. 1992. Vol. 12. P. 287–296. doi: 10.1007/BF01158804
16. Foss S., Kalashnikov V. Regeneration and renovation in queues. *Queueing Systems*. 1991. No. 8. P. 211–224. doi: 10.1007/BF02412251
17. Foss S., Konstantopoulos T. An overview of some stochastic stability methods. *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 2004. Vol. 47, no. 4. P. 275–303.
18. Glynn P. Wide-sense regeneration for Harris recurrent Markov processes: an open problem. *Queueing Systems*. 2011. Vol. 68, no. 3-4. P. 305–311. doi: 10.1007/s11134-011-9238-x
19. Glynn P., Iglehart D. Simulation methods for queues: an overview. *Queueing Systems*. 1988. Vol. 3, P. 221–256. doi: 10.1007/BF01161216
20. Kalashnikov V. V. Regenerative queueing processes and their qualitative and quantitative analysis. *Queueing Systems*. 1990. Vol. 6. P. 113–136. doi: 10.1007/BF02411469
21. Kiefer J., Wolfowitz J. On the theory of queues with many servers. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1955. P. 1–18. doi: 10.1090/S0002-9947-1955-0066587-3
22. Morozov E. Stochastic boundness of some queueing systems. Preprint No R-95-2022, ISSN 0908-1216, Dept. Math. and Computer Sci., Aalborg Univ., Aalborg, Denmark, 1995.
23. Morozov E. The tightness in the ergodic analysis of regenerative queueing processes. *Queueing Systems*. 1997. Vol. 27. P. 179–203. doi: 10.1023/A:1019114131583
24. Morozov E., Rumyantsev A. Stability Analysis of a MAP/M/s Cluster Model by Matrix-Analytic Method. *Lecture Notes in Computer Science*. 2016. Vol. 9951. P. 63–76. doi: 10.1007/978-3-319-46433-6_5
25. Morozov E., Rumyantsev A., Peshkova I. Monotonicity and stochastic bounds for simultaneous service multiserver systems. *8th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. Institute of Electrical and Electronics Engineers*. 2016. P. 294–297. doi: 10.1109/ICUMT.2016.7765374
26. Morozov E., Rumyantsev A., Nekrasova R., Peshkova I. A Regeneration-Based Estimation of High Performance Multiserver Systems. *Communications in Computer and Information Science*. 2016. Vol. 608. P. 271–282. doi: 10.1007/978-3-319-39207-3_24
27. Nguyen T. A. et al. Availability Modeling and Analysis for Software Defined Networks. *2015 IEEE 21st Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing (PRDC), Zhangjiajie*. 2015. P. 159–168. doi: 10.1109/PRDC.2015.27
28. Nummelin E. A Splitting Technique for Harris Recurrent Markov Chains. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. 1978. Vol. 43. P. 309–318. doi: 10.1007/BF00534764
29. Ross S. Simulation. Academic Press, New York, 1997.
30. Rumyantsev A., Morozov E. Stability criterion of a multiserver model with simultaneous service. *Annals of Operations Research*. 2017. Vol. 252, no. 1. P. 29–39. doi: 10.1007/s10479-015-1917-2
31. Shedler G. Regeneration and networks of queues. Springer-Verlag, 1987. doi: 10.1007/978-1-4612-1050-4
32. Sigman K. Queues as Harris recurrent Markov chains. *Queueing Systems*. 1988. Vol. 3. P. 179–198. doi: 10.1007/BF01189048
33. Sigman K., Wolff R. W. A review of regenerative processes. *SIAM Review*. 1993. Vol. 35, no. 2. P. 269–288. doi: 10.1137/1035046
34. Sutter H. The free lunch is over: A fundamental turn toward concurrency in software. *Dr. Dobbs's Journal*. 2005. P. 1–9.
35. Kalashnikov V. Topics on regenerative processes. CRC Press, Boca Raton, 1994.
36. Thorrisson H. Coupling, stationarity, and regeneration. Springer-Verlag, New York, 2000. doi: 10.1007/978-1-4612-1236-2
37. Whitt W. Comparing counting processes and queues. *Advances in Applied Probability*. 1981. Vol. 13, no. 1. P. 207–220. doi: 10.2307/1426475
38. Whitt W. Embedded renewal processes in the GI/G/s queue. *Journal of Applied Probability*. 1972. Vol. 9. P. 650–658. doi: 10.1017/S0021900200035944

Received April 10, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Пешкова Ирина Валерьевна

и.о. зав. кафедрой прикладной математики
и кибернетики, к. ф.-м. н.
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,
Россия, 185910
эл. почта: iaminova@petsu.ru
тел.: (8142) 719606

Румянцев Александр Сергеевич

научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических
исследований КарНЦ РАН,
Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: ar0@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

CONTRIBUTORS:

Peshkova, Irina

Petrozavodsk State University
33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: iaminova@petsu.ru
tel.: (8142) 719606

Rumyantsev, Alexander

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: ar0@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370

УДК 519.83

ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭКСПЛУАТАЦИИ БИОРЕСУРСОВ С ВЕКТОРНЫМИ ПЛАТЕЖАМИ

А. Н. Реттиева

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Исследована теоретико-игровая модель эколого-экономической системы в дискретном времени. В игре участвуют агенты (фирмы или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на конечном промежутке времени. Агенты эколого-экономической системы хотят добиться нескольких целей, поэтому используются векторные функции выигрышей. Предложены концепции определения оптимального некооперативного и кооперативного поведения в многокритериальной динамической игре. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного — арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Целью работы является определение кооперативного поведения участников и применение разработанной схемы для рационального использования биоресурсов водоемов Республики Карелия.

Ключевые слова: задача управления биоресурсами; многокритериальные игры; динамические игры; арбитражное решение Нэша.

A. N. Rettieva. ECOLOGY-ECONOMIC SYSTEM OF BIORESOURCE EXPLOITATION WITH VECTOR PAYOFFS

A discrete time game-theoretic model of an ecology-economic system is considered. Agents (firms or fishermen's artels) that exploit the fish stock on a finite planning horizon are the participants of the game. Agents wish to achieve several goals, hence the vector functions for players' payoffs are considered. The approaches to determining the optimal noncooperative and cooperative behavior in dynamic multicriteria games are constructed. The multicriteria Nash equilibrium is obtained via the Nash bargaining design (Nash products), and the cooperative equilibrium is determined by the Nash bargaining procedure for the entire planning horizon. The main goal of the paper is to define the cooperative behavior of the participants and to apply the procedure for sane exploitation of Karelian bioresources.

Key words: bioresource management problem; multicriteria games; dynamic games; Nash bargaining solution.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи рационального природопользования являются актуальными для Республики Карелия, обладающей большими запасами возобновляемых ресурсов. Одной из таких за-

дач является определение оптимального поведения в случае несимметричности агентов эколого-экономической системы, т. к. возобновляемые ресурсы Республики Карелия подвергаются совместной эксплуатации различными экономическими субъектами.

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, более приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такая ситуация типична для водоемов Республики Карелия, где хозяйствующие субъекты несут различные затраты на эксплуатацию, что влечет за собой различие в ценах для конечного потребителя. При этом участники хотят одновременно и увеличить свою прибыль от продажи эксплуатируемого ресурса, и уменьшить издержки. Такая постановка задачи влечет введение вектор-функций выигрышей участников процесса эксплуатации ресурса и исследование многокритериальных игр.

Ллойд Шепли [7] в 1959 г. ввел понятие многокритериальной игры, т. е. игры с векторными функциями выигрышей участников, и расширил для таких игр концепцию равновесия по Нэшу, получив, таким образом, оптимальность по Парето (сильную и слабую). В последние годы много работ посвящено играм с векторными выигрышами и концепциям их решения. Например, в [8] предложено понятие идеального равновесия по Нэшу, а в [5] предложена концепция Е-равновесия. Классическим способом решения векторных игр является их скаляризация путем оптимизации взвешенной суммы критериев, который неприменим для несравнимых критериев. Тем не менее понятие равновесия по Парето является самой распространенной концепцией решения таких игр. В кооперативных многокритериальных играх для распределения общего кооперативного выигрыша используется естественное расширение вектора Шепли.

Однако все предложенные концепции решений используются только в статических многокритериальных играх. Малоисследованной проблемой является построение равновесий в динамических многокритериальных играх. В работе [6] было формализовано понятие многокритериального равновесия по Нэшу с использованием конструкции арбитражной схемы Нэша и предложены три варианта построения гарантированных выигрышей.

Главной целью представленной работы является исследование кооперативной динамической многокритериальной игры и формализация оптимального решения. Необходимость исследования кооперации связана с тем, что кооперативное поведение благоприятно влияет на эксплуатируемый ресурс. Для определения кооперативного поведения используется разработанный ранее подход построения ко-

оперативного равновесия в теоретико-игровых моделях с несимметричными участниками [2]. А именно – кооперативные стратегии и выигрыши участников определяются из решения арбитражной схемы Нэша для всего периода продолжения игры. При этом точками статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий. Предложенная схема позволяет прогнозировать поведение агентов эколого-экономической системы при заключении между ними кооперативного договора. При этом многокритериальный подход позволяет учесть специфику хозяйствующих субъектов и их влияние на эксплуатируемый возобновляемый ресурс.

Предложенные концепции решения апробированы для популяции сига озера Сямозеро. По имеющимся данным матричным методом оценки запаса была восстановлена численность популяции и параметры функции развития [3]. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Показано, что вариант определения гарантированных выигрышей с помощью равновесных по Нэшу решений является наилучшим для экологической ситуации.

Проведено сравнение состояния экологической системы и прибыли агентов при кооперативном и эгоистическом поведении. Численное моделирование показало, что использование арбитражной схемы для определения кооперативного поведения не только выгодно агентам эколого-экономической системы, что позволит мотивировать хозяйствующих субъектов заключать кооперативные договоры, но и, что самое главное, благотворно влияет на экологическую систему.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Формализуем понятие динамической многокритериальной игры. Рассмотрим бикритериальную динамическую игру с двумя игроками в дискретном времени. Игроки эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть двух различных целей. Динамика развития возобновляемого ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, u_{2t}), \quad x_0 = x, \quad (1)$$

где $x_t \geq 0$ – размер ресурса в момент времени $t \geq 0$, $f(x_t, u_{1t}, u_{2t})$ – функция развития

возобновляемого ресурса, $u_{it} \in U_i$ — стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

Вектор-функции выигрышей игроков на бесконечном промежутке планирования имеют вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^1(u_{1t}, u_{2t}) \\ J_1^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^2(u_{1t}, u_{2t}) \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} J_2^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^1(u_{1t}, u_{2t}) \\ J_2^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^2(u_{1t}, u_{2t}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $g_i^j(u_{1t}, u_{2t}) \geq 0$ — функции «мгновенного» выигрыша, $i, j = 1, 2$, $\delta \in (0, 1)$ — общий коэффициент дисконтирования.

Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре используется подход, предложенный в [6]. А именно — применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво. Предложены три варианта построения гарантированных выигрышей.

В первом из них все гарантированные выигрыши определяются из решений антагонистических игр. В частности, первый гарантированный выигрыш G_1^1 — это решение антагонистической игры, в которой первый игрок стремится максимизировать свой первый критерий, а второй — минимизировать его. Остальные гарантированные точки G_1^2 , G_2^1 , G_2^2 строятся аналогично.

Во втором способе гарантированные точки определяются из решений антагонистических игр с суммами критериев. То есть оба гарантированных выигрыша первого игрока G_1^1 и G_1^2 — это решение антагонистической игры, в которой первый игрок стремится максимизировать сумму своих критериев, а второй — минимизировать его. Аналогично и для второго игрока.

В третьем варианте гарантированные выигрыши строятся как равновесия по Нэшу в играх с первыми и вторыми критериями игроков соответственно.

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек

статус-кво:

$$H_1(u_{1t}, u_{2t}) = (J_1^1(u_{1t}, u_{2t}) - G_1^1)(J_1^2(u_{1t}, u_{2t}) - G_1^2),$$

$$H_2(u_{1t}, u_{2t}) = (J_2^1(u_{1t}, u_{2t}) - G_2^1)(J_2^2(u_{1t}, u_{2t}) - G_2^2).$$

Следующее определение дает предложенную концепцию некооперативного решения динамической многокритериальной игры [6].

Определение 1. Профиль стратегий (u_{1t}^N, u_{2t}^N) является многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (1), (2), если

$$H_1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \geq H_1(u_{1t}, u_{2t}^N) \quad \forall u_{1t} \in U_1,$$

$$H_2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \geq H_2(u_{1t}^N, u_{2t}) \quad \forall u_{2t} \in U_2.$$

Следовательно, как и в классическом равновесии по Нэшу, игрокам невыгодно отклоняться от оптимальной стратегии. При этом они максимизируют произведение отклонений оптимальных выигрышей от гарантированных.

Многокритериальное кооперативное равновесие

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно. Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий. Первая точка — это сумма некооперативных выигрышей по первому критерию, вторая — сумма по второму критерию обоих участников соответственно.

Выигрыши игроков в многокритериальном равновесии по Нэшу (см. определение 1) примут вид

$$J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \\ J_1^{2N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \end{pmatrix},$$

$$J_2^N = \begin{pmatrix} J_2^{1N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \\ J_2^{2N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, следовательно, необходимо решить следующую

щую задачу:

$$\begin{aligned} & (V_1^{1c} + V_2^{1c} - J_1^{1N} - J_2^{1N}) \cdot \\ & \cdot (V_1^{2c} + V_2^{2c} - J_1^{2N} - J_2^{2N}) = \\ & = \left(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^2 g_i^1(u_{1t}^c, u_{2t}^c) - J_1^{1N} - J_2^{1N} \right) \cdot \\ & \cdot \left(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{i=1}^2 g_i^2(u_{1t}^c, u_{2t}^c) - J_1^{2N} - J_2^{2N} \right) \rightarrow \max_{u_{1t}^c, u_{2t}^c}, \quad (4) \end{aligned}$$

где J_i^{jN} — некооперативные выигрыши, определенные в (3), $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Определение 2. Профиль стратегий (u_{1t}^c, u_{2t}^c) является многокритериальным кооперативным равновесием в игре (1), (2), если является решением задачи (4).

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫМИ РЕСУРСАМИ

Исследуется динамическая многокритериальная модель управления биоресурсами. Два игрока (фирмы или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс на протяжении бесконечного промежутка времени. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t}, \quad x_0 = x, \quad (5)$$

где $x_t \geq 0$ — размер популяции в момент времени $t \geq 0$, $\varepsilon \geq 1$ — коэффициент естественного роста, $u_{it} \geq 0$ — стратегия (вылов) игрока i в момент времени $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

Игроки стремятся достичь двух целей — максимизировать доход от продажи ресурса и минимизировать затраты на эксплуатацию. Предполагается, что цена на рынке для участников различна, а затраты равны и зависят от интенсивности эксплуатации обоих игроков. Тогда вектор-функции выигрышей на бесконечном промежутке планирования примут вид

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_1 u_{1t} \\ J_1^2 = - \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} \end{pmatrix}, \\ J_2 &= \begin{pmatrix} J_2^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_2 u_{2t} \\ J_2^2 = - \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} \end{pmatrix}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $p_i \geq 0$ — рыночная цена за единицу ресурса для игрока i , $i = 1, 2$ $c \geq 0$ — затраты на эксплуатацию и $\delta \in (0, 1)$ — общий коэффициент дисконтирования. Предполагается, что параметры таковы, что $\delta \varepsilon \geq 1$.

Гарантированные выигрыши и многокритериальное равновесие по Нэшу

Первый вариант

Используя результаты [6], заключаем, что гарантированные выигрыши для первых критериев обоих игроков равны нулю: $G_1^1 = G_2^1 = 0$, а для вторых критериев принимают вид

$$G_2^2 = G_1^2 = G = -c \frac{\delta \varepsilon^2 - 1}{4\delta} x_0^2.$$

Вследствие того, что первые гарантированные выигрыши равны нулю, для определения многокритериального равновесия по Нэшу в задаче (5), (6) необходимо решить следующую задачу:

$$J_1^1(u_{1t}, u_{2t})(J_1^2(u_{1t}, u_{2t}) - G) \rightarrow \max_{u_{1t}},$$

$$J_2^1(u_{1t}, u_{2t})(J_2^2(u_{1t}, u_{2t}) - G) \rightarrow \max_{u_{2t}}.$$

Используя принцип Беллмана и строя оптимальные стратегии в линейном виде, получим многокритериальное равновесие по Нэшу

$$u_{1t}^N = u_{2t}^N = \frac{(\delta \varepsilon^2 - 1)(\varepsilon - 1)}{\varepsilon \delta^2 - 1 + \delta \varepsilon (\varepsilon - 1)} x_t, \quad (7)$$

и размер ресурса при некооперативном поведении примет вид

$$x_t = \left[\frac{\varepsilon^2 \delta + \varepsilon - 2}{\varepsilon \delta^2 - 1 + \delta \varepsilon (\varepsilon - 1)} \right]^t x_0. \quad (8)$$

Второй вариант

Используя результаты [6], заключаем, что гарантированные выигрыши принимают вид

$$\begin{aligned} G_i^1 &= \frac{p_i(\delta \varepsilon^2 - 1)}{2\delta(\varepsilon - 1)} x_0 - \frac{p_i^2(\delta \varepsilon^2 - 1)}{2c\delta(\varepsilon - 1)^2}, \\ G_i^2 &= -\frac{c(\delta \varepsilon^2 - 1)}{4\delta} x_0^2 + \frac{p_i^2(\delta \varepsilon^2 - 1)}{4c\delta(\varepsilon - 1)^2}, \quad i = 1, 2. \quad (9) \end{aligned}$$

Для определения многокритериального равновесия по Нэшу в задаче (5), (6) необходимо решить задачу

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_1 u_{1t} - G_1^1 \right) \left(- \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} - G_1^2 \right) \rightarrow \max_{u_{1t}}, \\ & \left(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_2 u_{2t} - G_2^1 \right) \left(- \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c u_{1t} u_{2t} - G_2^2 \right) \rightarrow \max_{u_{2t}}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя принцип Беллмана и строя оптимальные стратегии в линейном

виде, получим многокритериальное равновесие по Нэшу

$$\begin{aligned} u_{1t}^N &= \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon - 1)}{\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)}x_t + \\ &+ \frac{\delta\varepsilon p_2 G_1^1(\varepsilon - 1) - G_2^1 p_1(\delta\varepsilon^2 - 1)}{2p_1 p_2(\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1))}, \\ u_{2t}^N &= \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon - 1)}{\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)}x_t + \\ &+ \frac{\delta\varepsilon p_1 G_2^1(\varepsilon - 1) - G_1^1 p_2(\delta\varepsilon^2 - 1)}{2p_1 p_2(\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1))}, \end{aligned} \quad (10)$$

а размер ресурса при некооперативном поведении принимает вид

$$x_t = \left[\frac{\delta\varepsilon^2 + \varepsilon - 2}{\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)} \right]^t x_0 + \frac{p_2 G_1^1 + p_1 G_2^1}{2p_1 p_2(\varepsilon - 1)}. \quad (11)$$

Третий вариант

В третьем варианте построения гарантированных выигрышей G_1^1 и G_2^1 являются равновесием по Нэшу в игре $\langle I, II, U_1, U_2, J_1^1, J_2^1 \rangle$ и принимают вид

$$G_1^1 = \frac{p_1}{\delta} x_0, \quad G_2^1 = \frac{p_2}{\delta} x_0. \quad (12)$$

Аналогично, определяя равновесие по Нэшу в игре со вторыми критериями $J_1^2(u_{1t}, u_{2t})$ и $J_2^2(u_{1t}, u_{2t})$, получены вторые гарантированные выигрыши

$$G_1^2 = G_2^2 = -c \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{4\delta} x_0^2. \quad (13)$$

Многокритериальное равновесие по Нэшу в данном случае имеет такой же вид, как и во втором варианте (10),(11), но с соответствующими гарантированными выигрышами (12),(13).

Сравнение некооперативных решений

Сравним стратегии игроков и размер популяции для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Оказывается, что существуют два случая в зависимости от параметров модели: в первом их них наилучшим для экологии вариантом является второй (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистической игры с суммами критериев), во втором — первый (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистических игр). При этом в обоих случаях наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников является третий вариант построения гарантированных выигрышей (равновесные по Нэшу решения).

Утверждение 1. Если $x_0 < \frac{\min\{p_1, p_2\}}{c(\varepsilon - 1)}$, то

$$\begin{aligned} x_t^{var2} &\leq x_t^{var1} \leq x_t^{var3}, \\ u_{it}^{var2} &\leq u_{it}^{var1} \leq u_{it}^{var3}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Если $x_0 > \frac{\max\{p_1, p_2\}}{c(\varepsilon - 1)}$, то

$$\begin{aligned} x_t^{var1} &\leq x_t^{var2} \leq x_t^{var3}, \\ u_{it}^{var1} &\leq u_{it}^{var2} \leq u_{it}^{var3}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Доказательство. Сравним размер популяции для всех вариантов построения гарантированных выигрышей. Обозначим $x_t^{var1} = \left[\frac{\varepsilon^2 \delta + \varepsilon - 2}{\varepsilon \delta^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)} \right]^t x_0$ размер популяции при использовании первого варианта построения гарантированных выигрышей (8). Тогда во втором и третьем вариантах (11) размер популяции примет вид

$$x_t = x_t^{var1} + \frac{p_2 G_1^1 + G_2^1 p_1}{2p_1 p_2(\varepsilon - 1)},$$

с соответствующими гарантированными выигрышами, определенными в (9) и (12).

Для третьего варианта рассмотрим числитель дроби $\frac{p_2 G_1^1 + G_2^1 p_1}{2p_1 p_2(\varepsilon - 1)}$, получим

$$p_2 G_1^1 + G_2^1 p_1 = \frac{2p_1 p_2}{\delta} x_0 > 0,$$

следовательно, $x_t^{var3} > x_t^{var1}$, $i = 1, 2$.

Для второго варианта также рассмотрим числитель, получим

$$p_2 G_1^1 + G_2^1 p_1 = \frac{p_1 p_2(\delta\varepsilon^2 - 1)}{2\delta(\varepsilon - 1)} \left(2x_0 - \frac{p_1 + p_2}{c(\varepsilon - 1)} \right),$$

следовательно, при $x_0 \geq \frac{p_1 + p_2}{2m(\varepsilon - 1)}$ $x_t^{var2} \geq$

x_t^{var1} , а при $x_0 \leq \frac{p_1 + p_2}{2c(\varepsilon - 1)}$ $x_t^{var2} \leq x_t^{var1}$.

Сравним стратегии игроков для всех вариантов построения гарантированных выигрышей. Обозначим $u_{1t}^{var1} = u_{2t}^{var1} = \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(\varepsilon - 1)}{\varepsilon \delta^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1)} x_t^{var1}$ некооперативные стратегии при использовании первого варианта построения гарантированных выигрышей (7). Тогда во втором и третьем вариантах (10) стратегии примут вид

$$\begin{aligned} u_{1t} &= u_{1t}^{var1} + \frac{(\delta\varepsilon - 1)G_1^1}{2p_1(\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1))}, \\ u_{2t} &= u_{2t}^{var1} + \frac{(\delta\varepsilon - 1)G_2^1}{2p_2(\delta\varepsilon^2 - 1 + \delta\varepsilon(\varepsilon - 1))}, \end{aligned}$$

с соответствующими гарантированными выигрышами, определенными в (9) и (12).

Для третьего варианта из (12) заметим, что числители выражений $\frac{(\delta\varepsilon-1)G_i^1}{2p_i(\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1))}$, $i = 1, 2$, положительны, следовательно, $u_{it}^{var3} > u_{it}^{var1}$, $i = 1, 2$.

Для второго варианта построения гарантированных выигрышей аналогичные числители зависят от знака выражений $x_0 - \frac{p_1}{c(\varepsilon-1)}$ и $x_0 - \frac{p_2}{c(\varepsilon-1)}$, следовательно, $u_{it}^{var2} \geq u_{it}^{var1}$,

$i = 1, 2$, при $x_0 \geq \frac{\max\{p_1, p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$ и $u_{it}^{var2} \leq u_{it}^{var1}$

при $x_0 \leq \frac{\min\{p_1, p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$.

Теперь рассмотрим случай $x_0 \geq \frac{\max\{p_1, p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$, заметим, что при этом выпол-

нено $x_0 \geq \frac{p_1 + p_2}{2c(\varepsilon-1)}$. Сравним стратегии и размер популяции во втором и третьем вариантах построения гарантированных выигрышей. Заметим, что при выполнении данных условий гарантированные выигрыши в третьем варианте (12) больше, чем во втором (9). Следовательно, $u_{it}^{var3} \geq u_{it}^{var2}$, $i = 1, 2$, и $x_t^{var3} \geq x_t^{var2}$, откуда и получаем утверждение. \square

Многокритериальное кооперативное равновесие

Используя первый вариант построения гарантированных выигрышей, определим выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу

$$J_1^{1N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_1 u_{1t}^N = p_1 \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{\delta\varepsilon - 1} x,$$

$$J_2^{1N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_2 u_{2t}^N = p_2 \frac{\delta\varepsilon^2 - 1}{\delta\varepsilon - 1} x,$$

$$\begin{aligned} J_1^{2N} = J_2^{2N} &= -c \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{1t}^N u_{2t}^N = \\ &= -c \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)^2 (\varepsilon - 1)}{(\delta\varepsilon - 1)^2 (3 - \varepsilon)} x^2. \end{aligned}$$

Для построения многокритериального кооперативного равновесия необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} &(V_1^{1c} + V_2^{1c} - J_1^{1N} - J_2^{1N}) \cdot \\ &\cdot (V_1^{2c} + V_2^{2c} - J_1^{2N} - J_2^{2N}) \rightarrow \max_{u_{1t}^c, u_{2t}^c} \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (p_1 u_{1t}^c + p_2 u_{2t}^c) - G_1 x \right) \cdot \\ &\cdot \left(-2c \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{1t}^c u_{2t}^c - G_2 x^2 \right) \rightarrow \max_{u_{1t}^c, u_{2t}^c}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $G_1 = \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)(p_1 + p_2)}{\delta\varepsilon - 1}$,

$$G_2 = -2c \frac{(\delta\varepsilon^2 - 1)^2 (\varepsilon - 1)}{(\delta\varepsilon - 1)^2 (3 - \varepsilon)}.$$

Используя принцип Беллмана и строя стратегии как и ранее в линейном виде, получим следующее утверждение.

Утверждение 2. Кооперативные стратегии в многокритериальной игре (5), (6) имеют вид

$$u_{1t}^c = u_{2t}^c = \frac{2cG_1 + 12\delta\varepsilon A + K}{6c(p_1 + p_2) + 24\delta A} x_t, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} K &= (2cG_1(cG_1 + 12\delta\varepsilon A) - \\ &- 12(cG_2 p^2 + \delta A p(3c\varepsilon^2 + 2G_2)))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

а параметр A является решением следующего уравнения:

$$\begin{aligned} 27A(c(p_1 + p_2) + 4\delta A)^2 &= \frac{K^3}{2} + \\ &+ 4\delta A G_1 G_2 (108\delta A + 45c(p_1 + p_2)) + \\ &+ 18c^2 G_1 (4\varepsilon\delta A G_1 + G_2(p_1 + p_2)^2) - \\ &- 27\varepsilon\delta A (c(p_1 + p_2) - 4\delta A) \cdot \\ &\cdot ((c\varepsilon^2 + 3)(p_1 + p_2) + 3c\varepsilon G_1). \end{aligned}$$

Динамика развития ресурса при кооперативном поведении принимает вид

$$x_t = \left[\frac{3c\varepsilon(p_1 + p_2) - 2cG_1 - K}{3c(p_1 + p_2) + 12\delta A} \right]^t x_0. \quad (17)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПУЛЯЦИИ СИГА ОЗЕРА СЯМОЗЕРО

Для моделирования использовались фактические данные о многотычинковом сиге озера Сямозеро [4]. Для восстановления численности сига был использован матричный метод оценки запаса [1].

Полученные оценки размера популяции за длительный период позволили оценить параметры функции ее развития. Наиболее адекватной ситуации оказалась степенная функция развития [3]. В данной работе будем использовать линейную аппроксимацию функции развития популяции с параметром $\varepsilon = 1, 3$.

Численное моделирование было проведено со следующими параметрами:

$$x_0 = 100000, \delta = 0,8,$$

$$c = 50, p_1 = 100, p_2 = 150.$$

На рисунке 1 показана динамика развития популяции, на рисунке 2 — вылов первого игрока для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Заметим, что, как это и было получено аналитически, наилучшим для экологической обстановки вариантом является первый, он ведет к перелову популяции. А самым лучшим вариантом построения гарантированных выигрышей является третий, когда гарантированные выигрыши — это равновесие по Нэшу, здесь и размер популяции, и интенсивности эксплуатации участников больше.

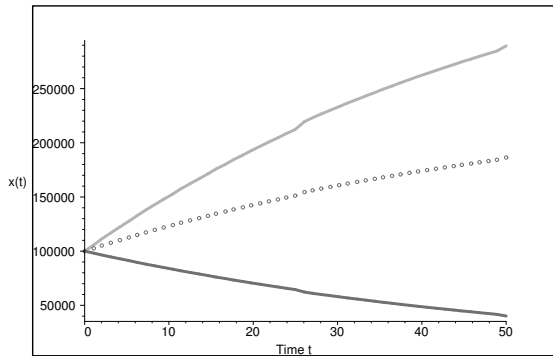


Рис. 1. Размер популяции: темная линия — 1 вариант, пунктир — 2 вариант, светлая линия — 3 вариант

Fig. 1. Size of population: dark line shows 1st variant, dotted line — 2nd variant, light line — 3rd variant

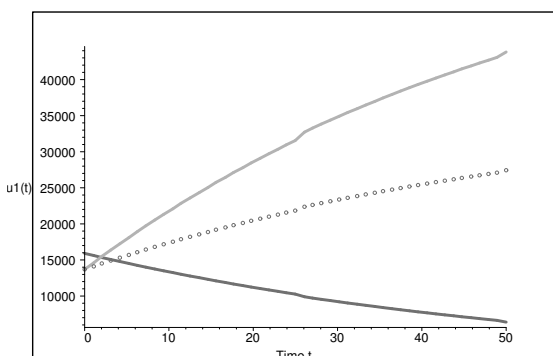


Рис. 2. Вылов первого игрока: темная линия — 1 вариант, пунктир — 2 вариант, светлая линия — 3 вариант

Fig. 2. Catch of player 1: dark line shows 1st variant, dotted line — 2nd variant, light line — 3rd variant

На рисунке 3 представлена динамика развития популяции, а на рисунке 4 — вылов первого игрока при кооперативном и некооперативном поведении. Заметим, что при кооперации экологическая обстановка лучше, и при этом интенсивность эксплуатации игрока выше.

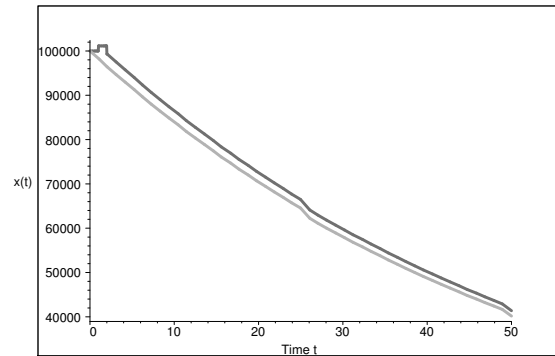


Рис. 3. Размер популяции: темная линия — кооперация, светлая — равновесие по Нэшу
Fig. 3. Size of population: dark line shows cooperation, light line — Nash equilibrium

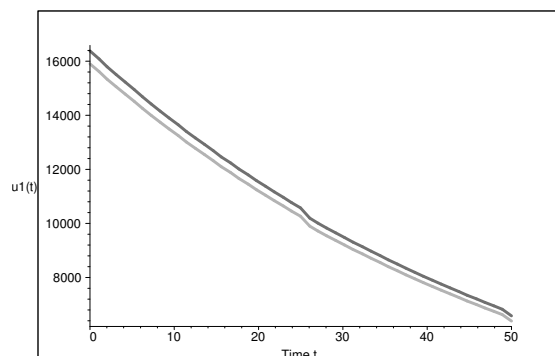


Рис. 4. Вылов первого игрока: темная линия — кооперация, светлая — равновесие по Нэшу
Fig. 4. Catch of player 1: dark line shows cooperation, light line — Nash equilibrium

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы многокритериальные динамические игры в дискретном времени и предложены подходы к определению равновесных стратегий. Для определения многокритериального некооперативного равновесия используются произведения Нэша, а для построения точек статус-кво предложены три варианта. Для иллюстрации предложенной концепции решения исследована динамическая многокритериальная модель управления эколого-экономической системой эксплуатации возобновляемого ресурса. Проведено

сравнение стратегий агентов и размера эксплуатируемого ресурса для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Представлены два случая в зависимости от параметров модели: в первом случае наилучшим для экологической ситуации вариантом является второй (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистической игры с суммами критериев), во втором случае наилучшим для экологии вариантом является первый (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистических игр).

Исследовано кооперативное поведение в многокритериальных динамических играх. Для определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков была использована арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступает многокритериальное равновесие по Нэшу. Концепция решения применена для исследования кооперативного поведения в динамической многокритериальной модели управления эколого-экономической системой эксплуатации возобновляемого ресурса. Предложенная схема позволяет прогнозировать поведение агентов при заключении между ними кооперативного договора. При этом многокритериальный подход позволяет учесть специфику хозяйствующих субъектов и их влияние на эксплуатируемый возобновляемый ресурс.

Для численного моделирования были использованы данные о популяции сига озера Сямозеро. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Показано, что применение арбитражной схемы для определения кооперативного поведения выгодно обоим агентам и при этом благоприятно влияет на состояние экологической системы. Исследованный многокритериальный подход позволяет прогнозировать состояние эксплуатируемой популяции на длительный промежуток времени, что позволит управляющим структурам контролировать состояние экологических систем Республики Карелия и принимать ме-

ры во избежание перелома и гибели популяции.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00183_а, 16-41-100062 р_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абакумов А. И., Кольев Н. В., Максименко В. П., Горр С. В. Матричный метод оценки запаса и прогнозирования вылова популяций морских организмов // Вопросы ихтиологии. 1994. Т. 34, № 3. С. 400–407.
2. Реттиева А. Н. Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 3. С. 72–87.
3. Реттиева А. Н. Эколого-экономическая система эксплуатации биоресурсов с асимметричными участниками // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2016. № 8. С. 91–97. doi: 10.17076/mat441
4. Стерлигова О. П., Павлов В. Н., Ильмаст Н. В., Павловский С. А., Комулайнен С. Ф., Кучко Я. А. Экосистема Сямозера (биологический режим, использование). Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2002. 119 с.
5. Pusillo L., Tjjs S. E-equilibria for multicriteria games // Annals of ISDG. 2013. Vol. 12. P. 217–228.
6. Rettieva A. N. Multicriteria dynamic games // International Game Theory Review. 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.
7. Shapley L. S. Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Research Logistic Quarterly. 1959. Vol. 6. P. 57–61.
8. Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M. Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games // Mathematical Methods of Operations Research. 2000. Vol. 52. P. 65–77.

Поступила в редакцию 23.04.2018

REFERENCES

1. Abakumov A. I., Kol'ev N. V., Maksimenko V. P., Gorr S. V. Matrichnii metod otsenki zapasa i prognozirovanie vylova populatsii morskikh organizmov [A matrix method for marine populations stock assessment and catching prediction]. *Voprosy ikhtiologii* [Journal of Ichthyology]. 1994. Vol. 34, no. 3. P. 400–407.

2. Rettieva A. N. Zadacha upravleniya bioresursami s asimmetrichnymi igrokami [Discrete-time bioresource management problem with asymmetric players]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya* [Mathematical Game Theory and its Applications]. 2013. Vol. 5, iss. 3. P. 72–87.
3. Rettieva A. N. Ekologo-ekonomicheskaya sistema ekspluatatsii bioresursov s asimmetrichnymi uchastnikami [Environmental-economic system of

bioresource use with asymmetric agents]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 91–97. doi: 10.17076/mat441

4. *Sterligova O. P., Pavlov V. N., Il'mast N. V., Pavlovskii S. A., Komulainen S. F., Kuchko Ya. A.* Ecosistema Syamozera (biologicheskii rezhim, ispol'zovanie) [Ecosystem of Lake Syamozero: biological regime and use]. Petrozavodsk: KarRC RAS, 2002. 119 p.

5. *Pusillo L., Tijss S.* E-equilibria for multicriteria games. *Annals of ISDG*. 2013. Vol. 12. P. 217–228.

6. *Rettieva A.N.* Multicriteria dynamic games. *International Game Theory Review*. 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.

7. *Shapley L.S.* Equilibrium points in games with vector Payoffs. *Naval Research Logistic Quarterly*. 1959. Vol. 6. P. 57–61.

8. *Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M.* Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2000. Vol. 52. P. 65–77.

Received April 23, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Реттиева Анна Николаевна

зам. директора по научной работе, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: annaret@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTOR:

Rettieva, Anna

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian
Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Karelia, 185910,
Russia
e-mail: annaret@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

УДК 519.179.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ВЕРШИНЫ В УСЛОВНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ГРАФЕ

И. А. Чеплюкова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими степенное распределение с положительным параметром τ . Изучаются случайные графы при условии, что сумма степеней вершин не превосходит n , а параметр τ есть случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[a, b]$, $1 \leq a < b < \infty$. Найдены предельные распределения максимальной степени вершины в различных областях изменения $N, n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: конфигурационный граф; предельное распределение; степень вершины.

I. A. Chepliukova. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE MAXIMUM VERTEX DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

We consider configuration graphs with N vertices. The degrees of the vertices are independent identically distributed random variables following the power-law distribution with a positive parameter τ . We study random graphs under the condition that the sum of vertex degrees does not exceed n and the parameter τ is a random variable uniformly distributed on the interval $[a, b]$, $1 \leq a < b < \infty$. We obtain the limit distributions of the maximum vertex degree for different relations between the parameters N and n tending to infinity.

Key words: configuration graph; limit distribution; vertex degree.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время исследованию случайных графов, предназначенных для описания структуры и прогнозирования динамики развития сложных сетей коммуникаций, посвящено большое число работ (см., например, [8, 9]). Одна из наиболее известных таких моделей – конфигурационная модель с независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Построение конфигурационных графов

можно разбить на два этапа. На первом этапе определяется степень каждой вершины в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуредер [10], число которых равно степени данной вершины. Все вершины и полуредера различны. На втором этапе построения происходит образование ребер: на каждом шаге выбираются два ребра равновероятно и, соединившись, образуют ребро. Если

сумма степеней нечетна, то вводится вспомогательная вершина, степень которой равна 1. Очевидно, что при таком построении допустимы появления петель и кратных ребер.

Пусть N обозначает число вершин графа, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ – случайные величины, равные степеням вершин с номерами $1, 2, \dots, N$ соответственно. Мы будем рассматривать модель конфигурационного графа, предложенную в [10]. В этой модели предполагается, что степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, распределение которых имеет вид:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots$$

Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали (см., например, [8]), что модели с распределением степеней вершин (1) адекватно описывают сети, при этом $\tau \in (1, 2)$. Однако исследования случайных графов при других значениях параметра τ также вызывают интерес. В последнее время стали появляться работы (см., например, [7]), в которых отмечается, что по мере развития сетей распределения степеней вершин могут меняться и даже носить случайный характер.

В [2] рассматриваются условные конфигурационные графы при условии, что сумма степеней вершин графа известна и равна n , а параметр τ распределения (1) является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Тогда из (1) следует, что случайные величины ξ_1, \dots, ξ_N , равные степеням вершин, имеют распределение

$$p_1 = \mathbf{P}\{\xi_i = 1\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(b-a)\ln 2} \left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b} \right), \quad (2)$$

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{1}{(b-a)\ln k} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b} \right) -$$

$$- \frac{1}{(b-a)\ln(k+1)} \left(\frac{1}{(k+1)^a} - \frac{1}{(k+1)^b} \right), \quad (3)$$

где $k = 2, 3, \dots$; $i = 1, 2, \dots, N$. Нетрудно видеть, что при $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{a}{(b-a)k^{a+1} \ln k}. \quad (4)$$

В [2] получены предельные распределения максимальной степени вершины таких условных конфигурационных графов в различных зонах изменения параметров N и n , при $N, n \rightarrow \infty$. В основе доказательств этих

результатов лежит обобщенная схема размещения частиц по ячейкам [1]. В настоящей работе мы решаем подобную задачу для условных конфигурационных графов при условии, что сумма степеней всех вершин ограничена сверху.

Рассмотрим условные конфигурационные графы, степени вершин которых имеют распределение, определенное в равенствах (2) и (3) при $1 \leq a < b < \infty$, при условии, что сумма степеней всех вершин $\xi_1 + \dots + \xi_N \leq n$. Пусть случайные величины η_1, \dots, η_N равны степеням вершин с номерами $1, \dots, N$ в таком условном графе. Эти случайные величины зависимы и для целых $k_1, \dots, k_N \geq 1$ таких, что $k_1 + \dots + k_N \leq n$, выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} =$$

$$(5)$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N \leq n\}.$$

Совокупность двух наборов случайных величин (ξ_1, \dots, ξ_N) и (η_1, \dots, η_N) , удовлетворяющих соотношению (5) и таких, что случайные величины ξ_1, \dots, ξ_N независимы и $\eta_1 + \dots + \eta_N \leq n$, в работе [5] названы аналогом обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам. Впервые такие условные конфигурационные графы с распределением степеней вершин (1) и фиксированным τ были исследованы в [4]. А для рассматриваемых условных графов с распределением (2) – (3) степеней вершин в [3] получены предельные распределения числа вершин заданной степени в различных зонах изменения параметров N и n при $N, n \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\eta_{(N)}$ случайную величину, равную максимальной степени вершины в рассматриваемом графе. Для этой характеристики степенной структуры графа ниже будут доказаны предельные теоремы при N и n , стремящихся к бесконечности. Во втором разделе сформулированы основные результаты (теоремы 1 и 2), в третьем разделе получены вспомогательные утверждения (леммы 2–7), с помощью которых в последнем разделе доказываются теоремы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем необходимые обозначения:

$$B_N = \begin{cases} (N/\ln N)^{1/a}, & 1 < a < 2; \\ \sqrt{N \ln \ln N}, & a = 2; \\ \sigma\sqrt{N}, & a > 2, \end{cases}$$

$$m = \mathbf{E}\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1,$$

$$H(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^x \ln k}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$,

$$r^a = \frac{Na}{\gamma(b-a) \ln N} (1 + o(1)), \quad 0 < \gamma < \infty$$

и выполнено одно из условий:

1. $a = 1, n/N \geq C_1 > (b - H(b))/(b - 1)$;
2. $a > 1, (n - mN)/B_N \geq -C_2 > -\infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = e^{-\gamma} (1 + o(1)).$$

Пусть

$$y = \frac{n - ((b - H(b))/(b - 1) + q(N)) N}{N / \ln N}, \quad (6)$$

где стремящаяся к нулю числовая последовательность $q(N)$ задана условиями ниже сформулированной леммы 4.

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty, a = 1, r = N/(\gamma(b-1) \ln N)(1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty$. Тогда при $-\infty < C_3 \leq y \leq C_4 < \infty$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \sim \\ & \sim 1 + \left(\frac{1}{\pi} \arctan \frac{2y(b-1)}{\pi} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \times \\ & \quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} J_k(y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_k(y) &= \frac{2^{k/2+1} \pi^{k/2}}{(b-1)^{k-1}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^y \int_{B_k} \frac{(x_1 \dots x_k)^{-2} dx_1 \dots dx_k dx}{\pi^2 + 4(x - x_1 - \dots - x_k)^2 (b-1)^2}, \\ B_k &= \left\{ x_i \geq \frac{1}{\gamma(b-1)}, i = 1, \dots, k, \right. \\ & \quad \left. x_1 + \dots + x_k \leq x \right\}. \end{aligned}$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$, распределение которых имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leq r\}, \\ k &= 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Положим также

$$\begin{aligned} \zeta_N &= \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, \\ P_r &= \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}. \end{aligned}$$

В [6] показано, что для случайной величины $\eta_{(N)}$ следствием из равенства (5) является следующее утверждение.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_N^{(r)} \leq n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}}.$$

Учитывая, что предельные распределения суммы ζ_N получены в [3], из леммы 1 следует, что для оценки вероятностей $\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\}$ необходимо знать асимптотическое поведение суммы $\tilde{\zeta}_N^{(r)}$ и вероятности P_r . Исследование этих величин приведено ниже в леммах 2–6.

Лемма 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty, r^a = Na/(\gamma(b-a) \ln N)(1 + o(1)), a \geq 1, 0 < \gamma < \infty$. Тогда справедливо

$$NP_r \rightarrow \gamma.$$

Доказательство. Из (2), (3) и (4) получаем, что при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P_r &= \sum_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(b-a) \ln k} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(b-a) \ln(k+1)} \left(\frac{1}{(k+1)^a} - \frac{1}{(k+1)^b} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{(b-a)(r+1)^a \ln(r+1)} \left(1 - \frac{1}{(r+1)^{(b-a)} \right) = \\ &= \frac{1 + o(1)}{(b-a)r^a \ln r}. \end{aligned}$$

Отсюда и следует утверждение леммы. \square

Введем обозначения

$$E(t, \gamma) = \frac{1}{b-1} \int_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty} \exp\{ity\} \frac{1}{y^2} dy, \quad (7)$$

$$I_0(x) = \frac{2(b-1)}{\pi^2 + 4(b-1)^2 x^2}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \frac{2^{(k+2)/2} \pi^{k/2}}{(b-1)^{k-1}} \times \\ & \times \int_{B_k} \frac{(x_1 \dots x_k)^{-2} dx_1 \dots dx_k}{\pi^2 + 4(b-1)^2 (x - x_1 - x_2 - \dots - x_k)^2}, \quad (9) \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots$ и B_k определены в теореме 2.

Лемма 3. Пусть $N \rightarrow \infty, a = 1, r = N/(\gamma(b-1) \ln N)(1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - \left(\frac{b-H(b)}{b-1} + q(N) \right) N \right) \frac{\ln N}{N},$$

где $q(N)$ – стремящаяся к нулю последовательность, слабо сходится к распределению с плотностью

$$g(x) = e^{E(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(x).$$

При доказательстве этой леммы мы будем использовать лемму 3 [3]. Сформулируем ее в следующем утверждении.

Лемма 4. Пусть $N \rightarrow \infty, a = 1$. Тогда распределение случайной величины

$$\left(\zeta_N - \left(\frac{b-H(b)}{b-1} + q(N) \right) N \right) \frac{\ln N}{N},$$

где $q(N)$ – стремящаяся к нулю последовательность, слабо сходится к распределению Коши с характеристической функцией $\exp\{-\pi|t|/(2(b-1))\}$.

Теперь докажем лемму 3.

Доказательство. Пусть $\Psi_r(u)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - \left(\frac{b-H(b)}{b-1} + q(N) \right) N \right) \frac{\ln N}{N},$$

где стремящаяся к нулю числовая последовательность $q(N)$ определена в лемме 4. Через $\varphi(u)$ и $\tilde{\varphi}_r(u)$ обозначим характеристические функции случайных величин ξ_1 и $\tilde{\xi}_1^{(r)}$ соответственно. Тогда

$$\tilde{\varphi}_r(u) = \frac{\varphi(u) - \sum_{k>r} e^{iuk} p_k}{1 - P_r}. \quad (10)$$

Отсюда и из леммы 4 получаем, что для любого фиксированного u

$$\begin{aligned} \Psi_r(u) &= \\ &= \exp \left\{ -i \frac{((b-H(b))/(b-1) + q(N))N}{N/\ln N} u \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times (1 - P_r)^{-N} \left(\varphi \left(\frac{u}{N/\ln N} \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{k>r} p_k \exp \left\{ i \frac{u \ln N}{N} k \right\} \right)^N = \\ &= (1 - P_r)^{-N} \exp \left\{ -\frac{\pi|u|}{2(b-1)} \right\} \times \\ &\times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k>r} p_k \exp \left\{ i \frac{u \ln N}{N} k \right\} \right)^N. \quad (11) \end{aligned}$$

Рассмотрим $\sum_{k>r} p_k \exp\{iuk \ln N/N\}$. Заменяя $y = k \ln N/N$ и переходя к интегрированию, из (4) находим, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k>r} p_k \exp \left\{ i \frac{u \ln N}{N} k \right\} = \frac{1 + o(1)}{b-1} \times \\ &\times \int_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\} \ln N}{(\ln y + \ln N - \ln \ln N) N y^2} dy = \\ &= \frac{1 + o(1)}{(b-1)N} \left(\int_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \frac{\exp\{iuy\} \ln N dy}{(\ln y + \ln N - \ln \ln N) y^2} + \right. \\ &\left. + \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\} \ln N}{(\ln y + \ln N - \ln \ln N) y^2} dy \right), \quad (12) \end{aligned}$$

где ε некоторая положительная постоянная, выбор которой будет ясен из дальнейшего. Нетрудно видеть, что при достаточно малом ε

$$\begin{aligned} &\left| \int_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \frac{\exp\{iuy\} \ln N}{(\ln y + \ln N - \ln \ln N) y^2} dy \right| = \\ &= \left| \int_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \exp\{iuy\} \frac{1 + o(1)}{y^2} dy \right| \leq \\ &\leq \int_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \frac{1 + o(1)}{y^2} dy = -\gamma(b-1) + o(1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\left| \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\} \ln N}{(\ln y + \ln N - \ln \ln N) y^2} dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{iuy\} \frac{1}{y^2} dy \right| = o(1). \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл

$$\int_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\} \ln N dy}{(\ln y + \ln N - \ln \ln N)y^2}$$

сходится и равен

$$\int_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty} \exp\{iuy\} \frac{1}{y^2} dy.$$

Отсюда и из соотношений (7), (11) и (12) находим, что

$$\Psi_r(u) = (1 - P_r)^{-N} \exp\left\{-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\} \times \\ \times (1 - (1 + o(1))N^{-1}E(u, \gamma))^N (1 + o(1)). \quad (13)$$

Кроме того, легко показать, что

$$P_r = \frac{1}{N} E(0, \gamma)(1 + o(1)). \quad (14)$$

Отсюда и из (13) получаем, что

$$\Psi_r(u) = \exp\left\{-\frac{\pi|u|}{2(b-1)} - E(u, \gamma) + E(0, \gamma)\right\} (1 + o(1)). \quad (15)$$

Из (7) следует, что $E(u, \gamma)$ является преобразованием Фурье функции

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{(b-1)y^2}, & y \geq \frac{1}{\gamma(b-1)}; \\ 0, & y < \frac{1}{\gamma(b-1)}. \end{cases} \quad (16)$$

Разлагая $\exp\{-E(u, \gamma)\}$ в ряд по степеням $E(u, \gamma)$, из (7) и (15) находим, что

$$\Psi_r(u) = e^{E(0, \gamma)} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\} (-1)^k \frac{E^k(u, \gamma)}{k!} (1 + o(1)).$$

Согласно формуле обращения плотность такого распределения имеет вид:

$$g(x) = \frac{1 + o(1)}{2\pi} e^{E(0, \gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{iux - \frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\} E^k(u, \gamma) du.$$

Учитывая формулу обращения, нетрудно видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{iux - \frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\} E^k(u, \gamma) du$$

есть плотность суммы случайных величин $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{k+1}$, где ν_1 имеет плотность распределения Коши:

$$g_1(x) = \frac{2(b-1)}{\pi^2 + 4(b-1)^2 x^2},$$

а случайные величины $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{k+1}$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $f(x)$, определенной в (16).

Используя формулу свертки для k слагаемых, получаем, что $\Psi_r(u)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью:

$$g(x) = e^{E(0, \gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k,$$

где I_k заданы соотношениями (8) и (9), что и завершает доказательство леммы. \square

Лемма 5. Пусть $N \rightarrow \infty, 1 < a < 2, r = (Na/(\gamma(b-a)\ln N))^{1/a}(1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - \left(1 + \frac{H(a) - H(b)}{b-a}\right)N\right) \left(\frac{\ln N}{N}\right)^{1/a}$$

слабо сходится к устойчивому закону с характеристической функцией

$$\exp\left\{-\frac{a}{(b-a)(a-1)}\Gamma(1-a)\left(\cos\frac{\pi a}{2}\right)|t|^a \times \right. \\ \left. \times \left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)\right\}.$$

Доказательство. При доказательстве леммы 4 [3] показано, что при $u \rightarrow 0$

$$\varphi(u) = 1 + iu \left(1 + \frac{H(a) - H(b)}{b-a}\right) - \\ - \frac{1}{(b-a)(a-1)}\Gamma(1-a)\left(\cos\frac{\pi a}{2}\right) \frac{|u|^a}{\ln(1/|u|)} \times \\ \times \left(1 - i\frac{u}{|u|}\tan\frac{\pi a}{2}\right) (1 + o(1)). \quad (17)$$

Из леммы 2 и соотношений (4), (10) и (17) находим, что при $u \rightarrow 0$

$$\tilde{\varphi}_r(u) = \left(\varphi(u) - P_r + O\left(\frac{u}{r^a \ln r}\right)\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{\gamma}{N}(1 + o(1))\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + iu \left(1 + \frac{H(a) - H(b)}{b - a} \right) - \\
&- \frac{1}{(b - a)(a - 1)} \Gamma(1 - a) \left(\cos \frac{\pi a}{2} \right) \frac{|u|^a}{\ln(1/|u|)} \times \\
&\times \left(1 - i \frac{u}{|u|} \tan \frac{\pi a}{2} \right) (1 + o(1)). \quad (18)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого фиксированного t

$$\begin{aligned}
&\ln \tilde{\varphi}_r^N \left(\frac{t}{(N/\ln N)^{1/a}} \right) = \\
&= it(\ln N)^{1/a} N^{1-1/a} \left(1 + \frac{H(a) - H(b)}{b - a} \right) - \\
&- \frac{a\Gamma(1 - a)|t|^a}{(b - a)(a - 1)} \left(\cos \frac{\pi a}{2} \right) \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi a}{2} \right) \times \\
&\quad \times (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана. \square

Аналогично лемме 5, используя явный вид характеристической функции $\varphi(u)$, полученный при доказательстве леммы 5 [3], нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 6. Пусть $N \rightarrow \infty, a = 2, r = (2N/(\gamma(b - 2) \ln N))^{1/2}(1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины

$$(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - mN) / \sqrt{N \ln \ln N}$$

слабо сходится к нормальному закону с характеристической функцией

$$\exp\{-t^2/(b - 2)\}.$$

Лемма 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty, a > 2, r = (aN/(\gamma(b - a) \ln N))^{1/a}(1 + o(1)), 0 < \gamma < \infty$. Тогда распределение случайной величины

$$(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - mN) / (\sigma\sqrt{N})$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Используя равенство

$$e^{iuk} = 1 + \delta(k), |\delta(k)| < ku,$$

из леммы 2, соотношений (4) и (10) находим, что при $u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_r(u) &= \left(\varphi(u) - \sum_{k>r} (1 + \delta(k)) p_k \right) \frac{1}{1 - P_r} = \\
&= (1 + ium - u^2(\sigma^2 + m^2)/2 + O(u^3) - P_r + \\
&\quad + O(u \sum_{k>r} kp_k)) (1 + \gamma/N(1 + o(1))) = \\
&= 1 + ium - u^2(\sigma^2 + m^2)/2 + \\
&\quad + O(u/N + u^3) + o(1/N).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого фиксированного t

$$\ln \tilde{\varphi}_r^N \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) = \frac{itm\sqrt{N}}{\sigma} - \frac{t^2}{2} + o(1),$$

лемма 7 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Пусть выполнены условия теоремы 1. Из лемм 1, 3 и 4 получаем, что при $a = 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = \\
&= (1 - P_r)^N \frac{\int_y^{-\infty} g(x) dx}{\int_{-\infty}^{-\infty} g_1(x) dx} (1 + o(1)), \quad (19)
\end{aligned}$$

где y определено в (6), плотность $g(x)$ задана в лемме 3 и $g_1(x)$ – плотность распределения Коши:

$$g_1(x) = \frac{2(b - 1)}{\pi^2 + 4(b - 1)^2 x^2}.$$

Согласно условию теоремы 1 в этом случае

$$\frac{n}{N} \geq C_1 > \frac{b - H(b)}{b - 1},$$

тогда из (6) нетрудно получить, что

$$y = \left(\frac{n}{N} - \frac{b - H(b) + q(N)}{b - 1} \right) \ln N \rightarrow \infty.$$

Отсюда, из леммы 2 и соотношения (19) следует утверждение теоремы 1 при $a = 1$. Осталось доказать теорему 1 для случая $a > 1$. Из лемм 1, 2, 5 и леммы 4 [3] следует справедливость теоремы 1 при $1 < a < 2$. Из лемм 1, 2, 6 и леммы 5 [3] вытекает утверждение теоремы 1 при $a = 2$.

Пусть $a > 2$. Из лемм 1, 7 и центральной предельной теоремы получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^{N \frac{\int_x^\infty p(z) dz}{\int_{-\infty}^x p(z) dz}} (1 + o(1)),$$

где $x = (n - mN)/(\sigma\sqrt{N})$,

а $p(z)$ – плотность стандартного нормального распределения. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы 1 для случая $a > 2$. Теперь теорема 1 доказана полностью.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Вычисляя интегралы, стоящие в правой части (19), находим, что

$$\int_{-\infty}^y g_1(x) dx = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2y(b-1)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

и

$$\int_{-\infty}^y g(x) dx = e^{E(0,\gamma)} \left(\frac{1}{\pi} \arctan \frac{2y(b-1)}{\pi} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^y I_k(x) dx \right),$$

где $E(0, \gamma)$ и $I_k(x)$ определены в соотношениях (8) и (9) соответственно. Отсюда и из (14), (19) вытекает утверждение теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00005а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 209 с.

REFERENCES

1. Kolchin V. F. Random mapping. Springer. New York, 1986.
2. Pavlov Yu. L. Ob uslovnykh konfiguratsionnykh grafakh so sluchainymi raspredeleniyami stepenei vershin [On conditional configuration graphs with random distribution of vertex degrees]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 62–72. doi: 10.17076/mat313
3. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. On the asymptotics of degree structure of configuration

2. Pavlov Yu. L. Ob uslovnykh konfiguratsionnykh grafakh so sluchainymi raspredeleniyami stepenei vershin // Труды Карельского научного центра РАН. 2016. № 8. С. 62–72. doi: 10.17076/mat313

3. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число циклов // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

4. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/ms8512

5. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

6. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

7. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

8. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch. On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

9. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Volume One. Cambridge University Press, 2017. 337 p.

10. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0155-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 05.03.2018

graphs with bounded number of edges. *Discrete Mathematics and Applications* (in print).

4. Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V. On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *Sbornik: Mathematics*. 2016. Vol. 207, iss. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/ms8512

5. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Mathematics and Applications*.

2012. Vol. 22, iss. 1. P. 101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

6. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum cell load. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012. Vol. 22, iss. 3. P. 307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020

7. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

8. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communications*. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

9. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge University Press. 2017. 337 p.

10. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0155-53/6(3)00097-x

Received March 5, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н., доцент
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 551.465.45

ОСОБЕННОСТИ СОПРЯЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ МОРЯ И МОРСКОЙ ЭКОСИСТЕМЫ BFM

И. А. Чернов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются вопросы взаимодействия численных моделей, описывающих состояние моря или океана как физической системы, и моделей морской экосистемы. В качестве последней выбрана модель BFM, которая сопрягалась с тремя отечественными моделями для трех водоемов разного масштаба: Белого моря (JASMINE), Северного Ледовитого океана (FEMAO) и Мирового океана в составе модели Земной системы (INMCM). Наряду с техническими подробностями реализации и организации вычислений обсуждаются вопросы скорости вычислений и чувствительности модельной системы к реализации морского льда и граничным значениям. В модели могут быть учтены экосистемы пелагиали, бентоса и морского льда.

Ключевые слова: численное моделирование; морские экосистемы; Белое море; Арктика; Мировой океан; биохимия льда.

I. A. Chernov. COUPLING GENERAL OCEAN CIRCULATION MODELS WITH THE BFM MARINE ECOSYSTEM MODEL

The coupling of numerical geophysical models of a sea with marine ecosystem models is considered. For the latter, BFM was chosen and coupled with three Russian models for three seas of different spatial scales: the White Sea (JASMINE), the Arctic Ocean (FEMAO), and the global ocean as a part of the Earth system (INMCM). We describe technical details of implementation and discuss important questions of the computing efficiency and sensitivity of the model to the sea-ice subsystem and boundary values. The ecology model can simultaneously embrace pelagic, benthic, and sympagic ecosystems.

Keywords: numerical modeling; marine ecosystems; the White Sea; the Arctic; the World Ocean; ice biochemistry.

ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие вычислительной техники — рост производительности процессоров, емкости устройств хранения данных и скорости коммуникационных сетей, снижение стоимости устройств и повышение их доступности — открыло недоступные прежде возможности

численного моделирования сложных систем, в том числе в науках о Земле. Разумеется, математические модели широко применялись для изучения озер, морей, океанов, атмосферы и других крупных природных объектов. Следует отметить, что сложность этих объектов и сравнительно ограниченный объем потенци-

ально доступной информации о них не позволяет стремиться к одной единственно правильной модели. Как правило, имеется несколько конкурирующих моделей, различных не только технически, но и в выборе баланса между детальностью описания и сложностью модели. Существуют проекты сравнения моделей, например FAMOS¹ (продолжение АОМIP — проекта по сравнению моделей Арктики), группы, использующие несколько моделей для обоснования своих выводов (например, IPCC²), а также обзоры имеющихся моделей, не отдающие предпочтения какой-то одной и приветствующие разработку новых. Например, обзоры моделей экосистемы морей Европы [23] и Балтийского моря [26] дают представление о разнообразии и многообразии моделей морских экосистем.

Современная модель водоема учитывает много различных взаимодействующих процессов, которые могут по-разному аппроксимироваться дискретной моделью и быть различно реализованы численно. Особую важность для взаимодействия с моделью экосистемы представляет схема переноса скалярных полей, реализация граничных условий, описание речного стока и солнечной радиации, а также модель морского льда.

Состояние моря в модели описывается некоторым конечномерным вектором x_t . Форсинг — это конечномерный вектор f_t , описывающий все влияющие на море факторы, не выражаемые через состояние моря. Термогидродинамическая модель — это отображение $x_{t+\tau} = M(x_t, f_t)$, сопоставляющее состоянию моря и форсингу состояние моря (через один шаг по времени τ). Состояние экосистемы в модели также описывается конечномерным вектором B_t , а форсингом являются некоторые компоненты физической модели (можно считать, что состояние моря в данный момент) и часть компонент форсинга (можно считать, что весь), в частности, солнечная радиация и ветер. Возможно обратное влияние экосистемной модели на гидротермодинамическую — через изменение прозрачности воды (или льда). В этом случае состояние экосистемы входит в форсинг термогидродинамической модели.

Иными словами, состояние моря — это набор сеточных функций, имеющих смысл температуры или солёности воды, компонент вектора скорости и т. п., а состояние экосистемы — это тоже сеточные функции, на той же сетке, что и скаляры гидродинамической моде-

ли. Модель обычно описывает ряд процессов, изменяющих одно или несколько полей; это может быть композиция отображений — поле изменяется один раз в силу всех процессов — или сложная функция, когда одно преобразование имеет аргументом результат другого. Этот подход называется расщеплением по процессам [6]. Необходимо согласование алгоритмов расчета трехмерного переноса, диффузии, гравитационного осаждения, потока вещества с речным стоком, реализация граничных условий между гидродинамической и экосистемной моделями. Иными словами, биогеохимические поля изменяются как в силу биогеохимических (питание, размножение, разложение, фотосинтез, обмен веществ, хищничество), так и в силу гидрофизических (адвекция, диффузия, осаждение, речной сток) причин.

В этой статье детально описано сопряжение моделей динамики Белого моря (JASMINE), Арктики (FEMAO) и Мирового океана (INMOM) с моделью пелагической морской экосистемы BFM³. Эта работа выполнялась в ряде проектов. Поскольку модели имеют много общего, поучительно рассмотреть их совместно в сравнении между собой.

ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

JASMINE — модель Белого моря

Моделированию Белого моря уделялось относительно мало внимания (по сравнению, например, с соседним Балтийским морем). Достаточно полный обзор моделей приводится в [1] и [14]. Активно используется система оперативного мониторинга [2, 5]. Модель И. А. Неелова с блоком экосистемы (ныне развивается в составе моделей BALTSEM и SPBEM) в настоящее время для Белого моря не поддерживается.

Разработанный и развиваемый нами программный комплекс JASMINE для численного моделирования состояния Белого моря основан на модели FEMAO Северного Ледовитого океана Н. Г. Яковлева (ИВМ РАН) и способен рассчитывать скорости течений и дрейфа льда, термохалинные поля, объемы льда и снега для 14 градаций льда по толщине, сплоченность льда этих градаций и уровень моря.

Система JASMINE взаимодействует с BFM, образуя комплексную модель термогидродинамики моря и пелагической экосистемы. Таких моделей для Белого моря, насколько нам известно, нет, тогда как для таких «интернациональных» морей, как Средиземное

¹<https://web.whoi.edu/famos/>

²<http://www.ipcc.ch/>

³<http://bfm-community.eu>

или Балтийское (а также Мирового океана), их множество, в том числе и несколько термогидродинамических моделей, сопряженных с ВФМ. С одной стороны, это обстоятельство повышает актуальность развития современной модели Белого моря, а с другой — обосновывает выбор хорошо зарекомендовавших себя моделей ФЕМАО и ВФМ.

Термогидродинамическая модель (включая и блок льда) описана в [8–11] достаточно подробно. Отметим здесь несколько существенных для дальнейшего моментов. Система координат — правая, оси направлены на восток, на юг и вертикально вниз. В отличие от модели Арктики, в которой оси повернуты, используются географические координаты (поскольку полюс не попадает в расчетную область). Область представляет собой цилиндр над сферой. Сетка на поверхности — регулярная, с постоянными шагами в угловой метрике (шаги порядка 8 либо 5 км). Шаг по времени составляет 6 минут. Горизонты вертикальной сетки (их 16) сгущаются у поверхности: $\mathbf{h} = 0, 2,5, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 75, 100, 150, 200, 250, 300$ м. Толщина ячеек D_i определяется следующим образом: $D_i = d_i - d_{i-1}, d_0 = h_1,$

$$d_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}, \quad 1 \leq i < 16, \quad d_{16} = h_{16}.$$

Поэтому значения полей на уровне 1 являются поверхностными, а максимальный индекс в данной точке акватории прилегает к дну. Дно в модели кусочно-горизонтальное.

Дискретизация по пространству — конечно-элементная. Используется расщепление по процессам, то есть поля за шаг по времени модифицируются несколько раз. Рассматривается две области спектра солнечной радиации: коротковолновая и длинноволновая части, угасающие с глубиной экспоненциально с факторами $0,83 \text{ м}^{-1}$ и $0,0357 \text{ м}^{-1}$ и занимающие 68 и 32 % спектра. Для экосистемы Белого моря, вода которого сравнительно непрозрачна [4], используется 50 % спектра (предполагается, что доступная для фотосинтеза радиация составляет эту долю) и экспоненциальный фактор $0,84 \text{ м}^{-1}$.

Лед описан как ансамбль движущихся льдин. Непрерывные распределения их характеристик приближаются дискретными с носителем \tilde{H} из 13 значений: 10, 20, 30, 50, 70, 100, 150, 200, 300, 400, 500, 600, 1000 см. Четырнадцатое значение объединяет все более толстые льды. Характеристики льда — объем льдин V_{ig} данной градации g относительно площади ячейки, объем снега V_{sg} на льдинах данной градации g (символы i и s не являются число-

выми индексами), а также сплоченность льда A_g . Сплоченность льда рассчитывается для 15 градаций (включая нулевую градацию — открытую воду) — это доля площади подо льдом данной градации (площадь льда относительно площади ячейки). Считается, что лед полностью блокирует солнечный свет; для льда со снегом это достаточно точно, поэтому такое предположение оправданно, пока не подключена модель экосистемы морского льда. Полная сплоченность льда, очевидно, равна сумме сплоченностей всех градаций. Именно она передается модели ВФМ. Размерность величин-объемов льда и снега — см ($\text{см}^3/\text{см}^2$), то есть это — средняя толщина льда/снега по ячейке. Разумеется, для льда эта величина не может превосходить значения \tilde{H}_g . Чтобы получить среднюю толщину льда или снега по площади, занятой льдом, следует нормировать величину на занятую льдом площадь, то есть на сплоченность (она безразмерна): V_{ig}/A_g , аналогично для снега. Так можно получить среднюю толщину льдин каждой градации, а также среднюю по распределению льдин толщину льда или снега на нем:

$$H_i = \sum_{g=1}^{14} V_{ig} \left(\sum_{g=1}^{14} A_g \right)^{-1}.$$

Отметим, что сумма всех градаций по смыслу равна единице (и градации могут рассматриваться как вероятностное распределение — вероятность встретить льдину с толщиной из заданного диапазона), поэтому знаменатель равен $1 - A_0$.

Реки описываются как локальные осадки. Задается годовой сток реки и распределение по месяцам. Полученный месячный сток равномерно распределяется по шагам по времени. Зная сток и температуру воды, можно рассчитать поток тепла в верхний слой воды. Аналогично для соли (речная вода пресная), а для биогеохимических переменных вычисляется, на основе объема речного стока и заданных концентраций, поток вещества в воду, который равномерно распределяется по всему столбу воды. Так можно задать не только реки, но и, например, поток вещества с берега, что может быть актуально для заболоченных берегов: многочисленные ручьи и речки несут в море сравнительно небольшое количество воды, однако поток биогенного вещества и органики может быть заметным. Температура речной воды и биогеохимические концентрации кусочно-постоянные среднемесячные.

Граничные условия на границе Баренцева и Белого морей, за которую принята ли-

ния 67° северной широты, описаны уравнением Флезера [15]. При втекании воды используются заданные величины температуры, солености и биогеохимических полей, а при вытекании — фактические значения на границе. Заданные граничные условия также среднемесячные, кусочно-постоянные.

Начальные условия пространственно-постоянные на каждом горизонте. Лед отсутствует, течений нет.

Прилив описан как колебание внешнего уровня моря на границе Белого и Баренцева морей с линейным запаздыванием с запада на восток от 0 (у Терского берега) до 1/12 периода прилива M_2 , равного 12,42 часа, у Канинского берега.

Схема переноса — с коррекцией по потоку, является условно-монотонной, что важно для расчета адвекции малых концентраций. Алгоритм расчета реализует и граничные условия, а также горизонтальную турбулентную диффузию. Вертикальная диффузия рассчитывается отдельно и учитывает потоки из дна (важно для обмена веществом с бентосом) и с поверхности (актуально при подключении модели экосистемы морского льда и для потока вещества из атмосферы), а также снос в силу гравитационного осаждения. Отметим, что реализация алгоритма расчета переноса инвариантна по отношению к размерности переносимого поля. Диффузия, очевидно, также инвариантна; однако размерность потоков, заданных на границе (на поверхности и на дне), уже играет роль и должна быть согласована. Поскольку единицей длины в термогидродинамической модели является сантиметр, а в BFM — метр, были приняты меры по автоматической конвертации величин.

В термогидродинамической модели требуется перенос четырех полей: температуры, солености и двух вспомогательных полей для описания турбулентности. Добавление нескольких десятков биогеохимических полей делает использование высокопроизводительных вычислительных средств совершенно необходимым.

Особенности параллельной реализации

Программная реализация JASMINE выполнена на стандартном Фортране-90 с использованием парадигмы MPI и технологии модульного программирования. Основные расчеты ведутся одним головным процессором, который раздает задания остальным (служебным) процессорам. Поскольку наиболее затратной процедурой является трехмерный перенос, который рассчитывается независимо для каждого поля, все поля, включая че-

тыре поля термогидродинамической модели и несколько десятков биогеохимических, поровну распределяются по доступным служебным процессорам: первые — с конца списка, вторые — с начала. Если процессоров достаточно (4 рабочих и один мастер), чтобы выделить по одному на каждое поле, ни один процессор не получит два поля, хотя распределяются они независимо. Все процессоры получают служебную информацию, необходимую для расчета адвекции: поле скоростей и т. п. Помимо трехмерного переноса отдельно рассчитывается вертикальная диффузия с учетом потока неорганики из дна и гравитационного осаждения. Здесь важно учитывать, что поток органического вещества на дно рассчитывается одними процессорами, а из дна — учитывается другими, поэтому необходимо передавать поток соответствующего поля неорганики тому процессору, который осуществляет расчет переноса этого поля. Поток в дно рассчитывается дважды: процессором, вычисляющим диффузию с осаждением, и головным процессором, контролирующим бентосные аккумуляторы (структуры данных, хранящие информацию о накопленном на дне органическом веществе).

Аналогичным образом распределяются двумерные поля, описывающие лед, для расчета двумерной адвекции. Их всего 43: по 14 градаций для объемов льда и снега и 15 градаций (включая чистую воду) для распределения сплоченности. Здесь головной процессор распределяет 42 поля, а адвекцию поля сплоченности чистой воды рассчитывает сам.

Кроме того, вертикальные колонки для каждого узла сетки на акватории распределяются между всеми процессорами для расчета динамики экосистемы. Они получают значения фазовых переменных и форсинг во всех ячейках колонки, а возвращают головному процессору производные фазовых переменных, избранные диагностические значения (например, первичную продукцию) и скорости гравитационного осаждения для фитопланктонных групп.

Хронометраж кластера КарНЦ РАН
KRC RAS computing cluster chronometry

Проц. CPUs	1 шаг 1 step	Лед Ice	Перенос Advect	БГХ Bio
1	96 ms	25 %	63 %	—
5	45 ms	40 %	25 %	—
43	40 ms	20 %	30 %	—
55	76 ms	16 %	37 %	21 %

Трехмерный перенос наиболее затратен с точки зрения вычислительной сложности. В таблице приведен хронометраж для кластера КарНЦ РАН⁴ для нескольких режимов. Расчет одних суток в среднем, с учетом ввода/вывода на диск среднесуточных и среднемесячных данных, занимает 14 с при использовании 5 ядер и 12 с на 43 ядрах. Подключение биогеохимического блока и расчет на 55 ядрах (50 биогеохимических полей, 4 гидрофизических поля и один мастер) требует 19,5 с на сутки.

Модель Арктики FEMAO

В статье [24] сравнивается пять сопряженных моделей Северного Ледовитого океана из проекта АОМIP; также этот океан описывается, разумеется, глобальными моделями.

Модель Северного Ледовитого океана FEMAO лежит в основе комплекса JASMINE, поэтому термогидродинамическая модель существенно не отличается. Шаги горизонтальной сетки: 1°, система координат повернута так, чтобы полюс оказался на экваторе; в итоге шаги по осям координат приблизительно одинаковы (в км). Шаг по времени 1 час.

Для всех рек заданы биогеохимические граничные значения Северной Двины, а для всех жидких границ — значения границы Белого и Баренцева морей.

Пока отключено взаимодействие с донными отложениями — реминерализацию осуществляют пелагические бактерии.

Поскольку программная реализация является более хрупкой по сравнению с JASMINE, был выбран более автономный метод сопряжения моделей. Специальный модуль предоставляет перечисленные далее функции.

1. Инициализатор, который создает трехмерные массивы для всех необходимых полей.
2. Шаг по времени, принимающий форсинг в ячейке сетки и, в частности, накапливающий солнечную радиацию за предыдущие сутки.
3. Функция, предоставляющая по номеру биогеохимического поля трехмерный массив скорости его гравитационного осаждения и другую информацию, необходимую для расчета трехмерных переносов.

Также имеются функции для получения числа биогеохимических полей и их возможных

значений в устьях рек или на границах морей, расчета полных значений ряда величин (хлорофилла, биомасс фито- и зоопланктона, количества азота, фосфора, кремния в живых организмах, органике, неорганических соединениях).

Таким образом, модель экосистемы максимально инкапсулирована. К коду термогидродинамической модели добавляется вызов инициализатора, цикл по ячейкам сетки с передачей состояния в них (освещенности *in situ* и т. п.) и цикл по полям (число которых доступно в модуле) с целью расчета трехмерных переносов, в том числе вертикальной диффузии и гравитационного осаждения. Необходимые для этого данные (скорости осаждения, потоки вещества из дна и т. п.), разумеется, доступны. При необходимости можно сохранять мгновенные значения полей или осреднять их за желаемый интервал: сутки, месяц и т. д. Параллельная реализация расчета биогеохимических процессов в разных ячейках сетки и переноса разных полей также возлагается на термогидродинамическую модель. Недостатком такого подхода является задание граничных условий. Пространственно-однородные кусочно-постоянные во времени значения являются, очевидно, грубым приближением. Более точные значения следует задавать при расчете переносов, а для этого требуется понимание смысла отдельных полей. По этой причине полная инкапсуляция модели биогеохимии моря представляется затруднительной.

Модель Мирового океана INMOM

Модель Мирового океана INMOM в составе модели Земной системы ИВМ РАН (INMCM) описана в монографии [3] (см. также ссылки в ней). Там же дан обзор глобальных моделей биогеохимии океана.

Модель INMOM использует σ -систему координат и разнесенную сетку, а Северный полюс смещен на сушу (на территорию Сибири). Используется одна градация льда. Сток рек, осадки и т. д. вычисляются в моделях других компонент Земной системы и передаются модели океана. Жидкие границы отсутствуют. Горизонтальная сетка регулярная, с шагами $2^\circ \times 2,5^\circ$. По вертикали — 33 равномерных сигма-горизонта. Шаг по времени равен 1 часу.

Для сопряжения модели BFM с этой термогидродинамической моделью использовался промежуточный подход. Модуль, обеспечивающий взаимодействие моделей, связан с

⁴<http://cluster.krc.karelia.ru>

компонентами модели океана: в частности, он имеет доступ к полям температуры, солёности, сплоченности льда, географическим координатам точки, а также к процедуре расчета плотности воды как функции температуры и солёности. В основном цикле по времени термогидродинамической модели вызываются процедуры расчета шага по времени экосистемы в каждом узле сетки и сохраняется солнечная радиация на поверхности (однако угасание с глубиной рассчитывается независимо: используется экспоненциальное ослабление с фактором $0,0357 \text{ м}^{-1}$). Кроме того, осуществляется трехмерный перенос всех полей и гравитационное осаждение.

Процедура гравитационного осаждения была реализована специально для биогеохимических полей. Она осуществляет схему переноса первого порядка для уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, z) = -\frac{\partial w_g(t, z)x(t, z)}{\partial z}, \quad x(t, z) \geq 0.$$

Ось z направлена вертикально вниз, начало отсчета на поверхности, а скорость осаждения на поверхности $w_g(t, 0) = 0$. Если учитывается обмен веществом с донными отложениями, плотность потока вещества в дно $w_g(t, z_{\max})x(t, z_{\max})$ следует сохранять и учитывать в схемах реминерализации. Сейчас реализовано захоронение вещества на дне, то есть поток вещества в дно отличен от нуля, но оно не сохраняется и не реминерализуется (однако подсчитывается его полный поток для контроля консервативности и диагностических целей). Возможен чисто пелагический вариант модели, при котором скорость осаждения в придонных узлах сетки положена равной нулю, так что вещество задерживается в нижнем слое и закон сохранения выполняется. Отметим, что наличие потока вещества с реками означает монотонное нарастание количества вещества в чисто пелагической версии модели Мирового океана.

Термогидродинамическая модель обращается к структурам данных биогеохимического модуля для осреднения за месяц и сохранения на диск. Для экономии дискового пространства сохраняются не все поля, а лишь те, которые представляют особый интерес. Их номера задаются в конфигурационных файлах.

В модели Мирового океана включен цикл железа, в связи с чем число полей возросло на девять: это неорганические соединения железа, железо в составе фитопланктона и органического вещества различного рода.

Алгоритм расчета модели Земной системы распараллелен по схеме декомпозиции области, причем четыре группы процессоров ответственны за расчет динамики океана, атмосферы, атмосферных аэрозолей и биогеохимических процессов в океане. Изменение алгоритма с целью выделить дополнительные процессоры для трудоемкого расчета трехмерного переноса затруднительно, в связи с чем скорость расчета модели сравнительно низка: 24 месяца в сутки на кластере ИВМ РАН⁵.

МОДЕЛЬ ПЕЛАГИЧЕСКОЙ МОРСКОЙ ЭКОСИСТЕМЫ BFM

Модели морской экосистемы очень разнообразны [23]. Выбранная нами модель BFM⁶ [33] входит в комплекс NEMO [34], сопряжена с MITgcm [13] и POM [19], используется в проектах MyOcean, GREENSEAS, GEOCARBON, MEECE и других, применялась для Средиземного моря и его периферийных морей и заливов [17], Мирового океана [31, 32] (см. также работу [22], в которой изучается фитопланктон севера Тихого океана в составе модели Земной системы), ведется работа по адаптации модели для Балтийского моря [29].

Модель использует стехиометрический подход. При этом «функциональная группа», описывающая группу организмов со сходным метаболизмом либо растворенное или взвешенное в воде вещество, представляется набором скалярных полей, имеющих смысл концентраций углерода, азота, фосфора, кремния, железа и хлорофилла в составе группы. Возможна гибкая настройка модели с включением и отключением отдельных полей или целых групп; в частности, цикл железа по умолчанию выключен, но добавлен для описания экосистемы Мирового океана. Далее описана используемая нами конфигурация [33]. Группа описывается буквой и номером, а отдельные поля, входящие в группу, — буквой, характеризующей химический элемент. Например, P_1 — группа диатомовых водорослей, включающая в себя концентрации углерода P_1c , фосфора P_1p , азота P_1n , кремния P_1s , хлорофилла P_1l (он считается псевдоэлементом и неконсервативен) и, возможно, железа P_1f . Для фитопланктона предусмотрено четыре группы P_1 – P_4 , отвечающие:

- диатомовым водорослям (одноклеточные водоросли-эукариоты с кремневым экзоскелетом, размером от 20 до 200 $\mu\text{м}$, поедаемые микро- и мезозoopланктоном)

⁵<http://www.inm.ras.ru/cluster.htm>

⁶bfm-community.eu

- автотрофным нанофлагеллятам (эукариотические жгутиковые клетки от 2 до 20 $\mu\text{м}$)
- пикофитопланктону (прокариоты размером от 0,2 до 2 $\mu\text{м}$, включая цианобактерий)
- динофлагеллятам (крупный одноклеточный фитопланктон размером более 100 $\mu\text{м}$).

Диатомовые водоросли единственные (в модели) потребляют соединения кремния и содержат кремний в своем составе. Также имеется четыре группы зоопланктона, Z_3 – Z_6 :

- хищный зоопланктон
- всеядный зоопланктон (большой частью это копеподы)
- микрозоопланктон (размер от 20 до 200 $\mu\text{м}$, исключая жгутиконосцев и личинок многоклеточного планктона и бенгоса)
- гетеротрофные жгутиконосцы (нанофлагелляты) размером от 2 до 20 $\mu\text{м}$, поедающие пикофитопланктон и бактерий.

Пелагические нефотосинтезирующие бактерии, аэробные и анаэробные, представлены одной группой B_1 . Биогенные неорганические вещества описаны несколькими группами, содержащими по одному полю: N_1p — фосфаты, N_3n — нитраты и нитриты, N_4n — аммоний, N_5s — силикаты, N_6r — сероводородные ионы. Группа O_4n описывает растворенный в воде азот, но, поскольку в настоящее время азотфиксирующие бактерии в модели не описаны, это поле, по существу, пассивно. Поля O_3c и O_3h описывают распределение неорганического углерода CO_2 и щелочности морской воды, а O_2o — кислорода. Взвешенное в воде органическое вещество представлено несколькими группами: R_1 — лабильное вещество, R_2 — полублабильное, R_3 — трудноусваиваемое, R_6 — детрит.

Единица измерения всех углеродных величин — $\text{мг}/\text{м}^3$, как и хлорофилла. Для железа единица — $\text{микромоль}/\text{м}^3$. Все остальные поля измеряются в миллимолях на м^3 . Отметим, что для вычисления массы следует умножать молярную концентрацию на молярную массу элемента: 14 для азота, 31 для фосфора и т. п., независимо от химического состава. Например, для фосфата PO_4 молярная масса молекулы равна 63 г/моль, однако один миллимоль/ м^3 фосфатов соответствует 31 $\text{мг}/\text{м}^3$. Все переменные BFM описаны во вставочном файле `BFM_variables.h`.

Модель описывает потоки вещества между группами (о чем говорит ее название BFM — Biogeochemical Flux Model) в силу размножения, поедания, разложения, фотосинтеза и других процессов. Таким образом, поле концентрации вещества той или иной группы может изменяться из-за биогеохимических потоков вещества, а также в силу трехмерного переноса, источников (речной сток), потока из донных отложений и атмосферы, диффузии и гравитационного осаждения. Потоки биогеохимической природы описывает BFM, а перенос, диффузию и прочие физические процессы должна реализовать модель моря.

Помимо переменных (фазового вектора) BFM вычисляет большое число (более 100) функций от фазового вектора, называемых диагностиками. В их числе полная концентрация хлорофилла, биомасса фитопланктона и зоопланктона, первичная и вторичная продукция, дыхание различных групп планктона, отношения различных элементов к углероду в составе разных групп. Кроме того, фитопланктон имеет тенденцию тонуть в воде с переменной скоростью, которая также вычисляется, а компоненты детрита имеют постоянную вертикальную скорость относительно воды, равную 5 м в сутки. Таким образом, обращение к функциям BFM позволяет получить производные по времени фазового вектора экосистемной модели, четыре скорости гравитационного осаждения (для четырех групп фитопланктона) и многочисленные диагностические переменные.

В работе [34] (как и в самой BFM [33]) используется накопление производных, то есть приращения компонент в силу различных процессов, как гидрологических, так и биогеохимических, складываются для получения эффективного приращения за шаг. Мы выбрали схему расщепления по процессам, при которой процессы рассчитываются последовательно (и все биогеохимические процессы трактуются как один, подробности которого скрыты в BFM).

Параметры уравнений динамики экосистемы вынесены в файлы списков имен (namelist — технология задания параметров, предусмотренная в стандарте языка Фортран).

Форсингом для модели экосистемы являются десять величин:

1. Температура воды в $^{\circ}\text{C}$.
2. Соленость воды в промилле.
3. Плотность воды в $\text{кг}/\text{м}^3$.

4. Сплоченность льда (доля площади подо льдом).
5. Средняя освещенность за сутки в милликанделях на м² в с.
6. Фотопериод: длительность светлого времени суток в часах.
7. Концентрация углекислого газа в атмосфере (часть на миллион).
8. Вертикальная толщина ячейки в м.
9. Скорость ветра в м/с.
10. Оценка рН-фактора воды.

Первые четыре относятся к состоянию вод и льда моря в данной точке. Освещенность используется средняя за сутки. В ходе расчета накапливается освещенность в каждой точке поверхности, и затем средняя за сутки величина используется для расчета следующих суток. Конвертация освещенности из Вт/м² в милликандели на м²/с делением на константу 0,217, что соответствует длине волны около 555 нм (зеленый свет).

Отметим, что из всего потока радиации нужно выделить пригодную для фотосинтеза часть спектра: от 40 до 60 %.

Под фотопериодом Φ понимается длительность между восходом и заходом солнца; рассеянный свет белых ночей пока не используется. Формулы для расчета фотопериода таковы (θ — широта местности, d — номер дня в году):

$$\delta = 23,44^\circ \cos 2\pi \frac{172 - d}{365},$$

$$\Phi = \frac{24}{\pi} \left(\pi - \arccos(\operatorname{cut}(\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \delta)) \right),$$

$$\operatorname{cut}(x) = \max(-1, \min(1, x)).$$

Оценка рН-фактора воды является начальным значением для итерационного алгоритма. Практика показывает, что он сходится при постоянном начальном значении 8. В числе диагностик есть вычисленное значение рН, которое можно использовать как начальное приближение для следующего шага. В целом же в ВФМ имеется целый ряд переменных, описывающих неорганический углерод в морской воде, включая фазовые переменные O_3h (щелочность) и O_3c (полный растворенный неорганический углерод), и диагностические переменные для концентраций растворенного углекислого газа CO_2 , карбонатных и бикарбонатных ионов, парциального давления углекислого газа и фактор рН.

Для каждой ячейки сообщается, является ли она приповерхностной или придонной; для первых имеют значение характеристики льда, ветра, углекислого газа в воздухе. Модель ВФМ осуществляет газообмен с атмосферой, эти потоки доступны как диагностики. Кроме того, признак поверхностной ячейки важен для взаимодействия с моделью экосистемы морского льда. Придонные ячейки обмениваются веществом с донными отложениями, если включена модель бентосной экосистемы.

ОБМЕН ВЕЩЕСТВА С ДОННЫМИ ОТЛОЖЕНИЯМИ

Хотя ВФМ содержит модели бентосной экосистемы разной степени сложности [18], был избран способ параметрического описания обмена веществом между пелагиалью и бентосом [25]. Отметим, что чисто пелагиальная модель замкнута и обеспечивает цикл всех элементов за счет реминерализации органики пелагическими бактериями. При этом тонущее вещество должно задерживаться в нижнем слое воды. Если скорость осаждения на дне не равна нулю, имеет место поток вещества в дно, нарушающий сохранение вещества. Можно трактовать это как захоронение органики в донном грунте. Такое предположение сделано в модели Мирового океана: донные отложения в модели призваны скомпенсировать поток вещества с речным стоком в долгосрочной перспективе.

Чтобы закон сохранения вещества выполнялся, нужно учитывать падающее на дно вещество. Все углеродные тонущие величины объединяются в одну (тонущая органика); аналогично для других элементов — фосфора, азота, кремния и железа. Тонущая органика, кроме соединений кремния, делится на две фракции — быстро реминерализуемой и медленно реминерализуемой органики — в эмпирической пропорции 3:1. Однако соединения кремния (всего два поля: P_1s и R_6s) не делятся на фракции. Скорость реминерализации пропорциональна плотности количества вещества x (на м²) и константе реминерализации $\beta(T)$, которая экспоненциально зависит от температуры донного слоя T (она считается равной температуре воды в придонном слое):

$$\frac{dx}{dt} = -\beta_0 2^{T-\hat{T}} x.$$

Константа $\beta_0 = \ln 2/t_{0,5}$ выражается через период $t_{0,5}$ полуреминерализации при температуре $\hat{T} = 10$ °С, равный 5,5 года для медленных компонент, 32 дня для быстрых и 72 дня —

для кремниевых⁷. Параметр $\tau = 0,05$, что соответствует ускорению реминерализации в два раза на 20 °С.

Убывание вещества в донных отложениях, связанное с реминерализацией, означает выделение неорганических соединений обратно в пелагическую экосистему — в придонный слой воды. Поэтому плотность потока неорганических соединений из дна равна сумме правых частей уравнения по всем фракциям (с обратным знаком).

Инициализация бентосной системы более важна, по сравнению с пелагической, из-за больших временных масштабов (особенно это касается медленных фракций). Мы используем предположение о квазиравновесии: поток неорганических соединений данного элемента в силу реминерализации данной фракции полагается равным потоку соответствующей фракции из-за гравитационного осаждения детрита (его скорость осаждения постоянна, а компоненты фитопланктона в придонном слое изначально отсутствуют). Получается уравнение

$$\beta_0 2^{\tau(T(0)-\hat{T})} x(0) = w_g \lambda C(0),$$

где $T(0)$ — начальная температура воды в придонном слое (в данной точке моря), $x(0)$ — начальное количество данной фракции в донных отложениях, w_g — скорость оседания детрита (5 м в сутки, возможно, выраженная в м/с), λ — эмпирическая доля органики данной фракции (0,75 для быстрых фракций для углерода, азота и фосфора, 0,25 для медленных фракций, 1 для кремния), $C(0)$ — начальная концентрация соответствующей компоненты детрита в придонном слое.

О модели экосистемы морского льда

Модель экосистемы морского льда BFM-SI [27, 30] в настоящее время включается в состав BFM. Мы использовали неопубликованную версию системы для подготовки системы сопряжения моделей для комплекса JASMINE.

Морской лед содержит каналы и полости, заполненные рассолом — морской водой с повышенной соленостью. Эти полости могут соединяться друг с другом, что необходимо для обмена веществ и, таким образом, для функционирования экологического сообщества. В модели BFM-SI рассматривается один населенный слой морского льда, определяемый эмпирически как лед с пористостью не ниже 5 %. Потоки обмена веществом между биоактивным слоем льда и водой не описаны; вместо

этого предполагается, что растущий лед захватывает из воды вещество, а тающий — выделяет вещество в воду. Учитывая, что граница между водой и льдом неподвижна лишь в очень частном и малоинтересном случае строгого равновесия (температура воды и льда одинакова и равна температуре таяния), такое предположение оправданно.

Структура модели в целом такая же, как BFM. Рассматриваются группы полей (теперь двумерных), объединяемых по ключевому элементу, и описаны потоки между группами в силу различных биохимических процессов.

В число групп входят:

1. Группа фитопланктона S_1 , соответствующая приспособленным к жизни во льду диатомовым водорослям с размером от 20 до 200 $\mu\text{м}$. Эта группа содержит кремний — поле S_1s — и может быть лимитирована его наличием.
2. Группа выживающих во льду водорослей S_2 — в основном жгутиконосцев с размером от 2 до 20 $\mu\text{м}$. Эти водоросли не зависят от кремния, но менее приспособлены к жизни во льду по сравнению с предыдущими.
3. Одна группа зоопланктона X_1 .
4. Одна группа бактерий T_1 .
5. Поля биогенной неорганики I_1p, I_3n, I_4n, I_5s , полностью соответствуют аналогичным полям пелагической модели (фосфаты, нитраты и нитриты, аммоний, силикаты).
6. Группы растворенной (U_1) органики и органики в виде частиц (U_6).
7. Поле углекислого газа (F_3c) и кислорода (F_2o).

Форсинг модели экосистемы льда содержит девять величин:

1. Толщину биологически активного слоя льда в м.
2. Пористость этого слоя: отношение объема полостей к объему слоя.
3. Температура рассола, равная температуре льда.
4. Соленость рассола в промилле.
5. Освещенность в биологически активном слое льда в миллиэйнштейнах на м^2 в с — средняя за сутки.

⁷Константы подобраны совместно с Паоло Ладзари, OGS.

6. Соленость льда в промилле.
7. Скорость роста (утолщения) льда в м/с.
8. Скорость роста толщины слоя снега на льду в м/с.
9. Скорость движения границы между снегом и льдом (м/с); пока не используется.

В работе [27] описан алгоритм определения характеристик биологически активного льда. Предполагается, что рассол находится в термодинамическом равновесии с кристаллами льда и, следовательно, его температура равна температуре льда и температуре замерзания соленой воды с данной соленостью. Зависимость температуры замерзания соленой воды от солености известна; в [27] применяется линейное приближение

$$T^* = -\gamma S, \quad \gamma = 0,054.$$

В термогидродинамической модели используется нелинейное выражение для температуры замерзания, которое труднее обращать. Предварительные численные эксперименты показывают, что линейное приближение в данном случае оправданно (поскольку обратной связи с термогидродинамической моделью нет). Температура льда известна из термогидродинамической модели, а следовательно, можно определить соленость рассола в полостях структуры льда. Зная соленость льда и предполагая кристаллы льда пресными, мы можем вычислить относительный объем, занимаемый заполненными рассолом полостями.

Предположим, что температура льда линейно меняется от верхней поверхности льда до нижней, причем на границе с воздухом или снегом температура известна, а на границе с водой она равна температуре замерзания воды с данной соленостью. Тогда можно определить пористость льда как функцию вертикальной координаты и толщину активного слоя как область, в которой эта пористость превосходит 5 %. Понятно, что она всегда положительна. В самом деле, на нижней поверхности температура льда равна температуре воды, поэтому соленость раствора близка к солености воды; следовательно, пористость льда есть отношение солености льда (4 промилле) к солености воды, которая заведомо меньше 80 промилле. В случае теплого льда активный слой может занимать всю толщу льда.

После определения толщины активного слоя необходимо вычислить средние показатели температуры и солености льда, солености рассола и пористости льда. Получим формулы

для случая линейного профиля температуры и постоянной солености льда S_i (4 промилле). Направим ось координат вниз от верхней поверхности льда. Зная температуру льда $T_i(z)$ на глубине z , мы можем рассчитать соленость рассола S_b и пористость льда ν :

$$S_b = -\frac{T_i(z)}{\gamma}, \quad \nu = -\frac{\gamma S_i}{T_i(z)}. \quad (1)$$

Критическая температура льда равна температуре замерзания рассола, занимающего 5 % объема льда и соленость которого обеспечивает соленость льда S_i :

$$T_{cr} = -\frac{\gamma S_i}{0,05}.$$

Пусть T_i — температура верхней поверхности льда, T_w — температура воды на границе со льдом, а $\nabla T_i = T_w - T_i$ — градиент линейного профиля. Относительная толщина \tilde{H}_b активного слоя льда тогда равна

$$\tilde{H}_b = \max\left(1, \frac{T_w - T_{cr}}{\nabla T_i}\right).$$

Если $H_b = 1$, то вся толща льда биологически активна. Зная толщину H_i льда, определим толщину активного слоя $H_b = \tilde{H}_b H_i$.

Среднюю пористость льда $\bar{\delta}_i$ получим интегрированием (1):

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_i &= -\frac{1}{H_b} \int_{1-\tilde{H}_i}^{H_i} \frac{\gamma S_i}{T_i(z)} dz = \\ &= -\frac{\gamma S_i}{\nabla T_i \tilde{H}_b} \cdot \ln\left(1 - \frac{\nabla T_i}{T_w} \tilde{H}_b\right). \end{aligned}$$

Среднюю температуру льда — интегрированием профиля $T_i(z)$ по активному слою:

$$\bar{T}_i = T_w - \frac{\nabla T_i \tilde{H}_i}{2}.$$

Средняя соленость рассола получается из условия равенства средней температуры рассола (льда) температуре замерзания:

$$\bar{S}_b = -\frac{\bar{T}_i}{\gamma}.$$

В модели BFMSI рассматривается одна экосистема морского льда. Однако в моделях FEMAO (для Северного Ледовитого океана) и основанной на ней модели JASMINE (для Белого моря) рассматривается несколько градаций льда по толщине. В каждой градации свой профиль температуры и различный снежный покров, следовательно, толщина и характеристики биоактивного слоя будут различны.

В будущем предполагается развитие модели BFMSI введением дополнительного измерения для различных типов льда. Пока же приходится рассматривать лед с усредненными по ансамблю льдин характеристиками. Для этого распределение сплоченности по градациям рассматривается как вероятностное распределение (вероятность встретить льдину данной толщины). Отметим, что имеется нулевая градация для открытой воды, поэтому необходима перенормировка распределения. Располагая вероятностным распределением льдин, можно вычислять среднюю температуру и толщину льда (объем льда относительно площади ячейки). То же самое делается для скоростей прироста объема снега и льда, которые скрыто вычисляются в соответствующем модуле и были объявлены публичными специально для этой цели.

Остановимся подробнее на вычислении освещенности за предыдущие сутки. Для каждой градации рассчитывается толщина льда и снега (как отношение объема льда/снега к площади подо льдом данной градации). Поток света, проникающий в лед, задается в термогидродинамической модели с учетом эмпирики распределения снега на льдинах. Задано экспоненциальное угасание света во льду ($1,5 \text{ м}^{-1}$) и снеге (30 м^{-1}) и, следовательно, известна освещенность на нижней поверхности льда, частично покрытого снегом. Доля площади снега f_s вычисляется по эмпирической формуле [16]

$$f_s = \frac{H_s}{H_s + 2},$$

где H_s — толщина снега в см. Вычисленная освещенность осредняется по распределению льда по градациям, аналогично описанным выше величинам. Освещенность на нижней кромке льда считается освещенностью в толще биоактивного слоя льда. В случае толстого льда и высокой температуры на его верхней поверхности (то есть достаточно большой толщины биоактивного слоя), возможно, адекватнее вычислять среднюю освещенность по биоактивному слою для каждой градации и затем средний показатель по распределению льда.

ВЛИЯНИЕ МОРСКОГО ЛЬДА И ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НА ЭКОСИСТЕМУ

Ледяной покров играет существенную роль для пелагической экосистемы, поэтому необходимо адекватное его описание в модели. В первую очередь, лед экранирует солнечный

свет (есть и другие факторы, такие как изменение газообмена с атмосферой или засев пелагиали органикой или живыми организмами из таящего льда). Угасание света в толще чистого льда сравнительно быстрое ([28] дает $1,5\text{--}17 \text{ м}^{-1}$), снег существенно снижает прозрачность (параметр порядка 30 м^{-1}), а развивающийся в толще льда планктон также способен снизить прозрачность льда.

Даже если принять в качестве приближения непрозрачный лед, полностью блокирующий поток света, точное описание ледяного покрова остается чрезвычайно важным — особенно существенно описание сплоченности. Достаточно отметить, что завышенное значение сплоченности или ошибки в описании полыней означают заниженную освещенность, приводящую к неправильному описанию первичной, а следовательно, и вторичной продукции. Если же поток света через лед учитывается (что необходимо для учета экосистемы льда), наряду со сплоченностью необходимо точное описание толщины льда, а также и снега на нем. Особенно актуально это для Белого моря с его однолетними сравнительно тонкими (и потому относительно прозрачными) льдами.

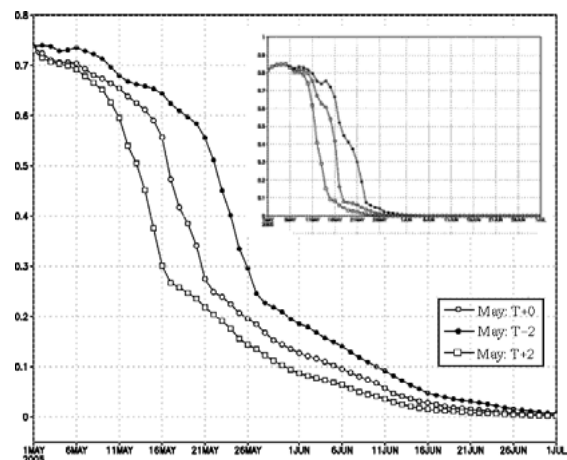


Рис. 1. Сплоченность льда по акватории моря и Онежского залива (врезка) для трех сценариев
Fig. 1. Sea-ice concentration, total average and over the Oneghsky Bay (the inset) for three scenarios

В случае Белого моря зимой активность планктона низка, поскольку средняя суточная солнечная радиация низка из-за облачности и малого возвышения солнца над горизонтом (а для северных областей моря часть года равна нулю). Гетеротрофный зоопланктон не может развиваться при отсутствии фитопланктона. Летом, напротив, активность высока, однако Белое море летом свободно ото льда. Поэто-

му особую важность имеет период схода льда. В Белом море он примерно соответствует росту фотопериода, поэтому очень важно точное описание этого процесса, а следовательно — и всей гидротермодинамики водоема. На рисунке 1 показаны графики средней по всей акватории моря и Онежскому заливу (на врезке) среднесуточной сплоченности морского льда (сумма по градациям) за 2005 г. Видно, что период интенсивного разрушения льда весьма короткий. Средняя кривая — результат обычного расчета; две другие получены в ходе численного эксперимента, в котором в течение мая 2005 г. температура воздуха была завышена/занижена на 2 °С. На рисунке 2 показаны графики среднесуточной концентрации хлорофилла на поверхности моря, средней по акватории, за 2005 г., полученные в тех же условиях. Май — месяц, когда сходит лед, и потому он наиболее критичен для экосистемы. В холодной воде хлорофилла больше (что подтверждается также работами [20, 21]), однако при холодном сценарии льда больше, освещенность ниже, и потому планктон развивается позже. Отметим, что далее графики совпадают, то есть начальное возмущение забывается: пелагическая экосистема управляется текущим состоянием.

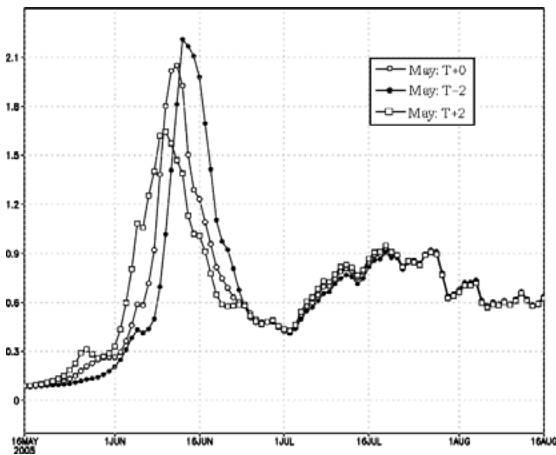


Рис. 2. Средняя концентрация хлорофилла *a* по поверхности Белого моря для трех сценариев
 Fig. 2. Surface-average chlorophyll-*a* concentration for three scenarios in the White Sea

Вопрос о влиянии значений на границе также важен. В модели Земной системы жидкие границы отсутствуют, а в моделях Арктики и Белого моря на них задано краевое условие Флезера [15]: при втекании воды ее характеристики заданы, а при вытекании используются актуальные вычисленные в точках границы значения. Задать многочисленные компо-

ненты экосистемы сложно, поскольку данные измерений *in situ* вблизи границы доступны не для всех моментов времени и не на любых горизонтах. Поэтому важно оценить чувствительность модели к граничным значениям.

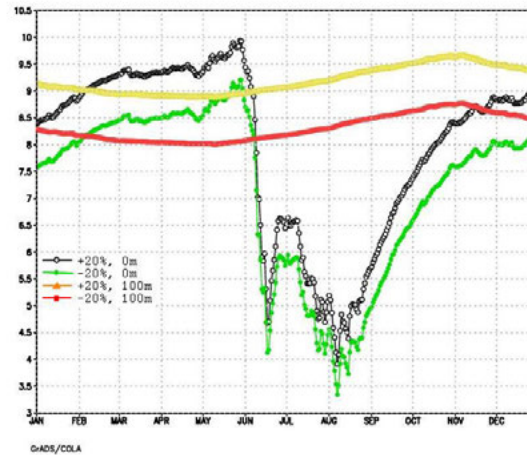


Рис. 3. Средние по акватории Белого моря концентрации соединений NO_x для поверхности и горизонта 100 м для двух экспериментов
 Fig. 3. Surface-average and 100 m horizon-average concentrations of NO_x compounds in the White Sea water for two experiments

Для Белого моря имеются оценки водообмена с Баренцевым морем [1], согласно которым эффективный поток воды направлен из Белого моря в Баренцево. Этот вывод подтверждается оценками баланса осадков и испарения (в любом случае испарение не доминирует) и речного стока (порядка 4 % объема моря в год [1]) и подтверждает предположение об определенной устойчивости модели к граничным данным. Численное определение времени очищения моря от пассивной примеси, изначально концентрированной в узле сетки [12], также свидетельствует о выносе вод из моря. С другой стороны, индуцированные приливы заносят соль и пассивные поля из Баренцева моря, что хорошо видно на модельных картах [7]. Мы провели два расчета модели на срок 2000–2007 с повышением и понижением всех биогеохимических значений на границе Белого и Баренцева морей на 20 %. Результаты показывают, что концентрации биогенных веществ осциллируют вокруг некоторого среднего значения (рис. 3) (график для фосфатов выглядит сходно).

Однако такой параметр, как хлорофилл, реагирует на изменения граничных значений в среднем несущественно. На рисунке 4 приведено осредненное за июнь 2007 г. поверхност-

ное распределение (выраженное в процентах) величины

$$\Delta = \frac{c_-}{c_+} - 1,$$

где c_{\pm} — концентрации хлорофилла при повышенных/пониженных граничных значениях. Рисунок показывает, что пелагическая экосистема мало реагирует на вариации граничных значений. Большие отклонения вблизи границы связаны с граничными значениями величин, относящихся к хлорофиллу, — иными словами, характеристик баренцевоморского фитопланктона. Быстрое убывание разницы при отдалении от границы подтверждается выводами о слабом проникновении баренцевоморского планктона в Белое море. Мы не приводим распределение биомассы планктона, поскольку оно выглядит аналогично.

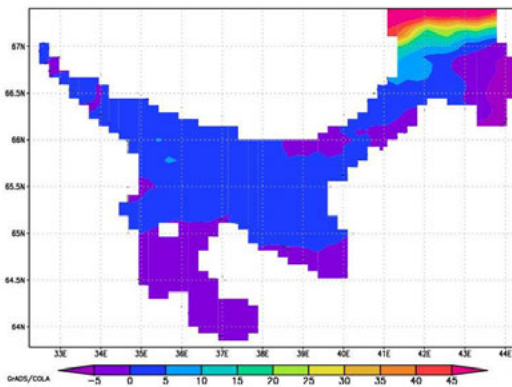


Рис. 4. Среднее за июнь 2007 г. распределение относительной разницы концентраций хлорофилла на поверхности моря для двух экспериментов
Fig. 4. Relative difference of chlorophyll-a surface concentrations for two experiments, averaged over June 2007

Следует учесть также эффект «перезагрузки» пелагической экосистемы в зимний период: концентрации веществ в составе живых организмов снижаются почти до нуля независимо от граничных условий (однако значения не равны нулю, поскольку в благоприятных весенних условиях наблюдается экспоненциальное восстановление концентраций). Обмен с бентосом играет роль памяти, однако к числу тонущих трассеров относятся только компоненты фитопланктона и детрита, которые, при типичной скорости осаднения 5 м/сутки и средней глубине моря 67 м, достигают дна за время около двух недель.

Сток рек существенно влияет на концентрацию биогенного вещества в заливах и в море в целом. Особенно заметно это для

Двинского залива. Также значительным может быть влияние бентоса: малая глубина моря и особенно некоторых заливов означает быстрый обмен вещества: тонущая органика быстро достигает дна, а выделяемые неорганические соединения эффективно перемешиваются, попадая в верхние слои воды, населенные фитопланктоном. В глубоких губах (таких, как Кандалакшская) деятельность бентоса обогащает придонные слои воды, создавая запасы вещества в течение холодного периода. По предварительным соображениям, при расчете Северного Ледовитого океана или Мирового океана на небольшие сроки учет бентоса не является необходимым. При типичной глубине порядка нескольких километров, скорости осаднения около 5 м/сутки и скорости реминерализации бактериями $0,1 \text{ сутки}^{-1}$ большая часть органики будет реминерализована в толще воды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанные программные средства открывают широкие возможности для моделирования биогеохимических процессов в океанах и морях совместно с их гидрологическим и ледовым режимом. При взаимодействии моделей важную роль играет баланс инкапсуляции — автономности моделей — и гибкости и эффективности.

Опыт взаимодействия моделей термогидродинамики и экосистемы моря показывает, что настройка моделей с целью получить ответы на актуальные вопросы требует сотрудничества между специалистами разного профиля.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН): настройка, тестирование и отладка модели для условий Белого моря, реализация параллельного расчетного алгоритма. Разработка комплексной модели, апробация и настройка ее для различных водоемов (Арктика, Мировой океан) поддержана грантом РФФ № 14-27-00126 «Исследование климата Земли с помощью перспективной модели Земной системы». Проведение численных экспериментов для модели Белого моря выполнено в рамках гранта РФФИ № 16-45-100162 «Разработка сценариев отклика гидрологических характеристик и экосистемных параметров Белого моря на условия меняющегося климата с помощью математического и компьютерного моделирования». Исследования выполнены на

научном оборудовании Центра коллективного пользования Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белое море* и его водосбор под влиянием климатических и природных факторов / Под ред. Н. Н. Филатова, А. Ю. Тержевика. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2007. 349 с.
2. *Волженский М. Н., Родионов А. А., Семенов Е. В., Филатов Н. Н., Зимин А. В., Булатов М. Б.* Опыт верификации оперативной модели для мониторинга гидрофизических полей Белого моря // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2009. Т. 3. С. 33–41.
3. *Володин Е. М., Галин В. Я., Грицун А. С., Гусев А. В., Дианский Н. А., Дымников В. П., Ибраев Р. А., Калмыков В. В., Кострыкин С. В., Кулямин Д. В., Лыкосов В. Н., Мортников Е. В., Рыбак О. О., Толстых М. А., Фадеев Р. Ю., Чернов И. А., Шашкин В. В., Яковлев Н. Г.* Математическое моделирование Земной системы / Ред. Н. Г. Яковлев. М.: МАКС Пресс, 2016. 392 с.
4. *Лисицын А. П., Кравчишина М. Д., Копелевич О. В., Буренков В. И., Шевченко В. П., Вазюля С. В., Кловиткин А. А., Новигатский А. Н., Политова Н. В., Филиппов А. С., Шеберстов С. В.* Пространственно-временная изменчивость концентрации взвеси в деятельном слое Белого моря // *Доклады АН*. 2013. Т. 453, № 4. С. 440–445.
5. *Родионов А. А., Семенов Е. В., Зимин А. В.* Развитие системы мониторинга и прогноза гидрофизических полей морской среды в интересах обеспечения скрытности и защиты кораблей ВМФ // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2012. Т. 5, № 2. С. 89–108.
6. *Саркисян А. С., Залесный В. Б., Дианский Н. А., Ибраев Р. А., Кузин В. И., Мошонкин С. Н., Семенов Е. В., Тамсалу Р., Яковлев Н. Г.* Математические модели циркуляции океанов и морей // *Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования*. Т. 2. Математическое моделирование. М.: Наука, 2005. С. 174–278.
7. *Толстиков А. В.* Изменчивость температуры поверхностного слоя Белого моря. М.: ГЕОС, 2016.
8. *Чернов И. А., Толстиков А. В., Яковлев Н. Г.* Комплексная модель Белого моря: гидротермодинамика вод и морского льда // *Труды КарНЦ РАН. Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»*. 2016. № 8. С. 116–128. doi: 10.17076/mat397
9. *Яковлев Н. Г.* Совместная модель общей циркуляции вод и эволюции морского льда в Северном Ледовитом океане // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2003. Т. 39, № 3. С. 394–409.
10. *Яковлев Н. Г.* Воспроизведение крупномасштабного состояния вод и морского льда Северного Ледовитого океана в 1948–2002 гг. Часть 1: численная модель и среднее состояние // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2009. Т. 45, № 3. С. 1–16.
11. *Яковлев Н. Г.* О воспроизведении полей температуры и солености Северного Ледовитого океана // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2012. Т. 48, № 1. С. 100–116.
12. *Chernov I., Tolstikov A., Yakovlev N.* Modelling of tracer transport in the White Sea // *Proceed. of the 11th Int. Scientific and Practical Conference «Environment. Technology. Resources»*. Vol. I. Rezekne, Latvia, 2017. P. 54–58.
13. *Cossarini G., Querin S., Solidoro C., Sannino G., Lazzari P., Di Biagio V., Bolzon G.* Development of BFMCOUPLER (v1.0), the coupling scheme that links the MITgcm and BFM models for ocean biogeochemistry simulations // *Geoscientific Model Development*. 2017. Vol. 10, no. 4. P. 423–1445.
14. *Zdorovenkov R. E., Nazarova L. E., Tolstikov A. V., Bashmachnikov I. L., Bobylev L. P., Brizgalo V. A., Chernook V. V., Denisov V. V., Donchenko V. K., Druzhinin P. V., Evensen G., Filatov A. N., Ingebeikin J. I., Ivanov V. V., Johannessen O. M., Kaitala S., Korosov A. A., Krasnov J. V., Kuosa H., Leonov A. V., Litvinenko A. V., Makarevich P. R., Miles M. W., Melentuev V. V., Neelov I. A., Pettersson L. H., Pozdnyakov D. V., Rastoskuev V. V., Salo Yu. A., Savchuk O. P., Shalina E. V., Shavykin A. A., Stipa T., Stuliy A. N., Volkov V. A., Terzhevik A. Yu., Filatov N. N.* White Sea. Its Marine Environment and Ecosystem Dynamics Influenced by Global Change. Springer-Verlag London Ltd, 2005. 444 p.
15. *Flather R. A.* A tidal model of the northwest European continental shelf // *Memories de la Societe Royale des Sciences de Liege*. 1976. Vol. 6, no. 10. P. 141–164.
16. *Hunke E. C., Lipscomb W. H.* CICE: the Los Alamos Sea Ice Model Documentation and Software User's Manual. Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, 2010.
17. *Lazzari P., Solidoro C., Salon S., Bolzon G.* Spatial variability of phosphate and nitrate in the mediterranean sea: A modeling approach // *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*. 2016. Vol. 108. P. 39–52.
18. *Mussap G., Zavatarelli M.* A numerical study of the benthic–pelagic coupling in a shallow shelf

sea (Gulf of Trieste) // Regional Studies in Marine Science. 2017. Vol. 9. P. 24–34.

19. *Mussapa G., Zavatarelli M., Pinardi N., Celio M.* Management oriented 1-d ecosystem model: Implementation in the Gulf of Trieste (Adriatic Sea) // Regional Studies in Marine Science. 2016. Vol. 6. P. 109–123.
20. *O'Connor M. I., Gilbert B., Brown C. J.* Theoretical predictions for how temperature affects the dynamics of interacting herbivores and plants // The American Naturalist. 2011. No. 5. P. 626–638.
21. *O'Connor M. I.* Warming strengthens an herbivore-plant interaction // Ecology. 2009. Vol. 90, no. 2. P. 388–398.
22. *Patara L., Vichi M., Masina S.* Impacts of natural and anthropogenic climate variations on north pacific plankton in an Earth system model // Environmental Modelling. 2012. Vol. 244. P. 132–147.
23. *Piroddi Ch., Teixeira H., Lynam Ch. P., Smith C., Alvarez M. C., Mazik K., Andonegi E., Churilova T., Tedesco L., Chifflet M., Chust G., Galparsoro I., Garcia A. C., Kamari M., Kryvenko O., Lassalle G., Neville S., Niquil N., Papadopoulou N., Rossberg A. G., Sustin V., Uyarra M. C.* Using ecological models to assess ecosystem status in support of the european marine strategy framework directive // Ecological Indicators. 2015. Vol. 58. P. 175–191.
24. *Popova E., Yool A., Coward A. C., Dupont F., Deal C., Elliott S., Hunke E., Jin M., Steele M., Zhang J.* What controls primary production in the Arctic Ocean? Results from an intercomparison of five general circulation models with biogeochemistry // Journal of Geophysical Research. 2012. Vol. 117. P. C00D12.
25. *Soetaert K., Herman P. M. J., Middelburg J. J.* A model of early diagenetic processes from the shelf to abyssal depths // Geochimica et Cosmochimica Acta. 1996. Vol. 60, no. 6. P. 1019–1040.

26. *Tedesco L., Piroddi Ch., Kamari M., Lynam Ch.* Capabilities of Baltic sea models to assess environmental status for marine biodiversity // Marine Policy. 2016. Vol. 70. P. 1–12.
27. *Tedesco L., Vichi M., Haapala J., Stipa T.* A dynamic biologically-active layer for numerical studies of the sea ice ecosystem // Ocean Modelling. 2010. Vol. 35. P. 89–104.
28. *Tedesco L., Vichi M., Haapala J., Stipa T.* An enhanced sea ice thermodynamic model applied to the Baltic Sea // Boreal Environment Research. 2009. Vol. 14. P. 68–80.
29. *Tedesco L., Miettunen E., An B. W., Happpala J., Kaartokallio H.* Long-term mesoscale variability of modelled sea-ice primary production in the northern Baltic sea // Elem Sci Anth. 2017. Vol. 5. P. 5–29.
30. *Tedesco L., Vichi M., Thomas D. N.* Process studies on the ecological coupling between sea ice algae and phytoplankton // Ecological Modelling. 2012. Vol. 226. P. 120–138.
31. *Vichi M., Masina S., Navarra A.* A generalized model of pelagic biogeochemistry for the global ocean ecosystem. Part II: numerical simulations // Journal of Marine Systems. 2007. Vol. 64. P. 110–134.
32. *Vichi M., Pinardi N., Masina S.* A generalized model of pelagic biogeochemistry for the global ocean ecosystem. Part I: theory // Journal of Marine Systems. 2007. Vol. 64. P. 89–109.
33. *Vichi M., Cossarini G., Gutierrez M. E. et al.* The Biogeochemical Flux Model (BFM): Equation description and user manual. Bologna: BFM Consortium, 2013.
34. *Vichi M., Lovato T., Gutierrez Mlot E., McKiver W.* Coupling BFM with Ocean models: the NEMO model (Nucleus for the European Modelling of the Ocean). Bologna: BFM Consortium, 2015.

Поступила в редакцию 02.04.2018

REFERENCES

1. Beloe more i ego vodosbor pod vliyaniem klimaticheskikh i prirodnykh faktorov [The White Sea and its watershed under influence of climate and antropogenic factors]. Petrozavodsk: KarRC RAS, 2007. 349 p.
2. *Chernov I. A., Tolstikov A. V., Yakovlev N. G.* Kompleksnaya model' Belogo morya: gidrotermodynamika vod i morskogo l'da [Comprehensive model of the White Sea: hydrothermodynamics of water and sea ice]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 116–128.

3. *Lisitsyn A. P., Kravchishina M. D., Kopelevich O. V., Burenkov V. I., Shevchenko V. P., Vazyulya S. V., Klyuwitkin A. A., Novigatskii A. N., Politova N. V., Filippov A. S., Sheberstov S. V.* Spatial and temporal variability in suspended particulate matter concentration within the active layer of the White Sea. *Dokl. Earth Sciences*. 2013. Vol. 453, no. 4. P. 440–445.
4. *Rodionov A. A., Semenov E. V., Zimin A. V.* Razvitie sistemy monitoringa i prognoza gidrofizicheskikh polei morskoi sredy v interesakh obespecheniya skrytnosti i zashchity korablei VMF [Development of the system for monitoring and forecasting hydrophysical fields of the marine

environment for stealthy and safety of the Navy]. *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika* [Fundamental and applied hydrophysics]. 2012. Vol. 5, no. 2. P. 89–108.

5. Sarkisyan A. S., Zalesnyi V. B., Dian-skii N. A., Ibraev R. A., Kuzin V. I., Moshonkin S. N., Semenov E. V., Tamsalu R., Yakovlev N. G. Matematicheskie modeli tsirkulyatsii okeanov i morei. Sovremennye problemy vychislitel'noi matematiki i matematicheskogo modelirovaniya [Mathematical models of circulation of oceans and seas. Modern problems of numerical mathematics and mathematical modelling]. Vol. 2. Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modelling]. Moscow: Nauka, 2005. P. 174–278.

6. Tolstikov A. V. Izmenchivost' temperatury poverkhnostnogo sloya Belogo morya [Variability of the surface layer temperature of the White Sea]. Moscow: GEOS, 2016.

7. Volzhenskii M. N., Rodionov A. A., Semenov E. V., Filatov N. N., Zimin A. V., Bulatov M. B. Opyt verifikatsii operativnoi modeli dlya monitoringa gidrofizicheskikh polei Belogo morya [Experience of verifying the operative model for monitoring hydrophysical fields of the White Sea]. *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika* [Fundamental and Applied Hydrophysics]. 2009. Vol. 3. P. 33–41.

8. Volodin E. M., Galin V. Ya., Gritsun A. S., Gusev A. V., Dian-skii N. A., Dymnikov V. P., Ibraev R. A., Kalmykov V. V., Kostykin S. V., Kulyamin D. V., Lykosov V. N., Mortikov E. V., Rybak O. O., Tolstykh M. A., Fadeev R. Yu., Chernov I. A., Shashkin V. V., Yakovlev N. G. Matematicheskoe modelirovanie Zemnoi sistemy [Mathematical modelling of the Earth system]. Moscow: MAKS Press, 2016.

9. Yakovlev N. G. Coupled model of ocean general circulation and sea ice evolution in the Arctic Ocean. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2003. Vol. 39, no. 3. P. 394–409.

10. Yakovlev N. G. Reproduction of the large-scale state of water and sea ice in the Arctic Ocean in 1948–2002: Part I. Numerical model. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2009. Vol. 45, no. 3. P. 1–16.

11. Yakovlev N. G. On the simulation of temperature and salinity fields in the Arctic Ocean. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2012. Vol. 48, no. 1. P. 100–116.

12. Chernov I., Tolstikov A., Yakovlev N. Modelling of tracer transport in the White Sea. *Proceed. of the 11-th Int. Scientific and Practical Conference «Environment. Technology. Resources»*. Vol. I. Rezekne, Latvia, 2017. P. 54–58.

13. Cossarini G., Querin S., Solidoro C., Sannino G., Lazzari P., Di Biagio V., Bolzon G.

Development of BFMCOUPLER (v1.0), the coupling scheme that links the MITgcm and BFM models for ocean biogeochemistry simulations. *Geoscientific Model Development*. 2017. Vol. 10, no. 4. P. 423–1445.

14. Zdorovenov R. E., Nazarova L. E., Tolstikov A. V., Bashmachnikov I. L., Bobylev L. P., Brizgalo V. A., Chernook V. V., Denisov V. V., Donchenko V. K., Druzhinin P. V., Evensen G., Filatov A. N., Ingebeikin J. I., Ivanov V. V., Johannessen O. M., Kaitala S., Korosov A. A., Krasnov J. V., Kuosa H., Leonov A. V., Litvinenko A. V., Makarevich P. R., Miles M. W., Melent'ev V. V., Neelov I. A., Pettersson L. H., Pozdnyakov D. V., Rastorskuev V. V., Salo Yu. A., Savchuk O. P., Shalina E. V., Shavykin A. A., Stipa T., Stuliy A. N., Volkov V. A., Terzhevnik A. Yu., Filatov N. N. White Sea. Its Marine Environment and Ecosystem Dynamics Influenced by Global Change. Springer-Praxis, 2005.

15. Flather R. A. A tidal model of the northwest European continental shelf. *Memories de la Societe Royale des Sciences de Liege*. 1976. Vol. 6, no. 10. P. 141–164.

16. Hunke E. C., Lipscomb W. H. CICE: the Los Alamos Sea Ice Model Documentation and Software User's Manual. *Los Alamos National Laboratory*, Los Alamos, 2010.

17. Lazzari P., Solidoro C., Salon S., Bolzon G. Spatial variability of phosphate and nitrate in the mediterranean sea: A modeling approach. *Deep Sea Research*. Part I: Oceanographic Research Papers. 2016. Vol. 108. P. 39–52.

18. Mussap G., Zavatarelli M. A numerical study of the benthic–pelagic coupling in a shallow shelf sea (Gulf of Trieste). *Regional Studies in Marine Science*. 2017. Vol. 9. P. 24–34.

19. Mussapa G., Zavatarelli M., Pinardi N., Celio M. Management oriented 1-d ecosystem model: Implementation in the Gulf of Trieste (Adriatic Sea). *Regional Studies in Marine Science*. 2016. Vol. 6. P. 109–123.

20. O'Connor M. I., Gilbert B., Brown C. J. Theoretical predictions for how temperature affects the dynamics of interacting herbivores and plants. *The American Naturalist*. 2011. No. 5. P. 626–638.

21. O'Connor M. I. Warming strengthens an herbivore-plant interaction. *Ecology*. 2009. Vol. 90, no. 2. P. 388–398.

22. Patara L., Vichi M., Masina S. Impacts of natural and anthropogenic climate variations on north pacific plankton in an Earth system model. *Environmental Modelling*. 2012. Vol. 244. P. 132–147.

23. Piroddi Ch., Teixeira H., Lynam Ch. P., Smith C., Alvarez M. C., Mazik K., Andonegi E.,

- Churilova T., Tedesco L., Chifflet M., Chust G., Galparsoro I., Garcia A. C., Kamari M., Kryvenko O., Lassalle G., Neville S., Niquil N., Papadopoulou N., Rossberg A. G., Sustin V., Uyarra M. C. Using ecological models to assess ecosystem status in support of the European marine strategy framework directive. *Ecological Indicators*. 2015. Vol. 58. P. 175–191.
24. Popova E., Yool A., Coward A. C., Dupont F., Deal C., Elliott S., Hunke E., Jin M., Steele M., Zhang J. What controls primary production in the Arctic Ocean? Results from an intercomparison of five general circulation models with biogeochemistry. *Journal of Geophysical Research*. 2012. Vol. 117. P. C00D12.
25. Soetaert K., Herman P. M. J., Middelburg J. J. A model of early diagenetic processes from the shelf to abyssal depths. *Geochimica et Cosmochimica Acta*. 1996. Vol. 60, no. 6. P. 1019–1040.
26. Tedesco L., Piroddi Ch., Kamari M., Lynam Ch. Capabilities of Baltic sea models to assess environmental status for marine biodiversity. *Marine Policy*. 2016. Vol. 70. P. 1–12.
27. Tedesco L., Vichi M., Haapala J., Stipa T. A dynamic biologically-active layer for numerical studies of the sea ice ecosystem. *Ocean Modelling*. 2010. Vol. 35. P. 89–104.
28. Tedesco L., Vichi M., Haapala J., Stipa T. An enhanced sea ice thermodynamic model applied to the Baltic Sea. *Boreal Environment Research*. 2009. Vol. 14. P. 68–80.
29. Tedesco L., Miettunen E., An B. W., Haapala J., Kaartokallio H. Long-term mesoscale variability of modelled sea-ice primary production in the northern Baltic sea. *Elem. Sci. Anth.* 2017. Vol. 5. P. 5–29.
30. Tedesco L., Vichi M., Thomas D. N. Process studies on the ecological coupling between sea ice algae and phytoplankton. *Ecological Modelling*. 2012. Vol. 226. P. 120–138.
31. Vichi M., Masina S., Navarra A. A generalized model of pelagic biogeochemistry for the global ocean ecosystem. Part II: numerical simulations. *Journal of Marine Systems*. 2007. Vol. 64. P. 110–134.
32. Vichi M., Pinardi N., Masina S. A generalized model of pelagic biogeochemistry for the global ocean ecosystem. Part I: theory. *Journal of Marine Systems*. 2007. Vol. 64. P. 89–109.
33. Vichi M., Cossarini G., Gutierrez M. E. et al. The Biogeochemical Flux Model (BFM): Equation description and user manual. Bologna: BFM Consortium, 2013.
34. Vichi M., Lovato T., Gutierrez Mlot E., McKiver W. Coupling BFM with Ocean models: the NEMO model (Nucleus for the European Modelling of the Ocean). Bologna: BFM Consortium, 2015.

Received April 02, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чернов Илья Александрович
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chernov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTOR:

Chernov, Ilya
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian
Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: chernov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

УДК 519.115:519.2

АНАЛИЗ КОМБИНАТОРНЫХ СХЕМ В ДОАСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики, Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Обсуждается специфика и приводится методика и результаты исследования широкого ассортимента конкретных комбинаторных схем в доасимптотической области изменения их параметров. Анализ схем предлагается проводить на основе нетрадиционного качественного анализа исходов схем, частью результатов которого являются их количественные характеристики.

Ключевые слова: перечисление исходов; метод графов; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. ANALYSIS OF COMBINATORIAL SCHEMES IN THE PRE-ASYMPTOTIC REGION OF PARAMETER CHANGE

The paper discusses the specific features and presents the procedure and the results of studying a wide variety of specific combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of their parameter change. It is suggested that the schemes are analyzed by an unconventional quality analysis of their outcomes, the result of which include quantitative characteristics.

Key words: enumeration of outcomes; method of graphs; enumeration problem; modeling.

ВВЕДЕНИЕ

Статья представляет обзор ранее опубликованных результатов автора. Рассматриваются задачи перечислительной комбинаторики, состоящие или в указании алгоритма перебора исходов комбинаторных схем, или в нахождении их числа и других характеристик.

В литературе широко обсуждаются общие аналитические подходы к решению задач перечислительной комбинаторики, а именно – это метод перечисляющих производящих функций, асимптотических разложений, рекуррентных соотношений, методы разбиения

совокупности на части, теория перечисления Пойя, основанная на методе производящих функций с формализацией понятия неразличимости объектов с точностью до отношения эквивалентности, заданного на этом множестве, для унификации методов перечисления исходов схем рассматривается алгебра инцидентности с использованием функций Мебиуса на частично упорядоченных множествах, представлены числа Стирлинга первого, второго рода и числа Белла с известными комбинаторными интерпретациями, в качестве инструмента решения приводится также перманент матрицы, имеющий в комбинаторике

смысл числа систем различных представителей для заданного семейства подмножеств конечного множества.

Исследования комбинаторных схем алгоритмического характера в доасимптотической области изменения их параметров (в большой степени в силу ограниченности их применения) традиционно не вызывали особого интереса исследователей, поэтому недостаточно представлены в научной литературе и сводятся в основном к общей теории алгоритмирования или к алгоритмическим приемам решения отдельных комбинаторных задач [1–4]. В то же время в условиях постоянно возрастающей сложности изучаемых комбинаторных схем (часто в связи с введением различных ограничений в схеме) и современного бурного роста возможностей электронных вычислительных средств доасимптотическая область для точных численных и алгоритмических расчетов расширяется и практическая потребность в них возрастает, делая их методику все более актуальной. Для практического развития этого доасимптотического направления требуется, с одной стороны, выработка общих принципов и подходов к анализу комбинаторных схем, а с другой стороны, – учет специфики каждой комбинаторной схемы. Соглашаясь с Кнутом [2], который сказал: «Попытка формализовать нечто в виде набора алгоритмов приводит к более глубокому пониманию сути вещей», замечаем, что часто осознание алгоритмической процедуры анализа схем приводит к получению аналитических результатов в виде явных формул или рекуррентных соотношений для ее характеристик, а ее реализация – к числовым результатам.

Разработка этой области комбинаторики диктует следующие последовательные цели исследований: систематизация разрозненных алгоритмических вычислительных приемов анализа комбинаторных схем с формированием достаточно универсальных направлений и подходов к их рассмотрению и выработка методов реализации этих направлений с рассмотрением широкого ассортимента конкретных комбинаторных схем с определенной их классификацией.

В основе анализа схем в доасимптотической области лежит построение алгоритмической процедуры перечисления всех ее исходов с предварительным заданием вида исходов схемы и дисциплины их нумерации. (Естественно, что часть методов и результатов аналитического характера, таких как метод перечисляющих производящих функций, чисел Белла и Стирлинга первого и второго рода,

точных формул для чисел исходов комбинаторных схем и рекуррентных соотношений для них, используются и в наших исследованиях при анализе конкретных комбинаторных схем.)

Для проведения перебора исходов схемы строится итерационный случайный процесс их перечисления с последовательным поединичным добавлением на каждом шаге элементов схемы (для простых, базовых схем, не требующих при перечислении ссылок на другие схемы) или этапов перебора (для более сложных остальных – составных схем) до заданного значения параметра добавления.

Для наглядности представления этого процесса он изображается графом перечисления исходов схемы от шага к шагу, с промежуточными состояниями с меньшим числом элементов, соединенными дугами, на которых указываются вероятности этих переходов. Специфика схемы существенно влияет на структуру графа. Все перечисленные итоговые исходы схемы подряд нумеруются. Возможности проведения дальнейших исследований схемы с использованием графа называем методом графов (МГ), дающим ответ на вопрос не только сколько исходов схемы, но и какие они.

Возможности МГ:

- 1) практическое использование видов исходов схемы;
- 2) визуальный подсчет числа исходов схемы;
- 3) вычисление характеристик исходов схемы;
- 4) визуальный анализ исходов для выявления различных закономерностей в них;
- 5) учет любых ограничений в схеме с определением числа исходов в ней;
- 6) нахождение вероятностей исходов схемы на каждом шаге их перечисления;
- 7) вывод формулы для числа исходов схемы по логике процедуры перечисления всех ее исходов.

Для анализа перечисления исходов схемы методом графов для них решается задача нумерации (ЗН), состоящая в установлении взаимно-однозначного соответствия видов всех исходов с их номерами в двух постановках:

- 1) прямая ЗН – определения вида исхода по его номеру;
- 2) обратная ЗН – определения номера исхода по его виду.

При решении ЗН учет специфики схемы происходит через исследование структуры графа и вида исходов.

Результаты решения ЗН могут быть алгоритмические (табличные, получающиеся методом графов) или аналитические (вида явных формул или рекуррентных соотношений) и имеют следующий смысл:

1) возможность визуальной проверки полноты перебора всех исходов схемы;

2) при аналитическом решении ЗН – это способ компактного хранения информации обо всех исходах схемы;

3) в отличие от обычного моделирования исходов схемы, состоящего в проведении процедуры их непосредственного формирования с учетом специфики схемы, аналитический результат решения прямой ЗН для исходов схемы дает возможность проведения единообразного подхода к моделированию ее исходов – так называемого быстрого моделирования при известном вероятностном распределении исходов путем разыгрывания для каждого по одному случайному числу его номера, определяющего вид исхода, что требует значительно меньшего числа операций;

4) аналитический результат решения обратной ЗН дает формулу для числа исходов схемы, совпадающего с номером последнего исхода, когда его вид очевиден по логике нумерации исходов;

5) при неизвестном числе исходов схемы аналитические результаты решения прямой и обратной ЗН позволяют уточнить его приближенную оценку.

Главным результатом для дальнейших вероятностных исследований схемы является получение вероятностей ее исходов.

Моделирование исходов комбинаторных схем – важный этап в их изучении, т. к. дает возможность статистической проверки теоретических результатов их анализа, выявления закономерностей в них для дальнейшего теоретического обоснования, а также моделирования исходов разных случайных процессов, частью которых они являются. Кроме этого, при отсутствии или технической сложности применения формулы для числа исходов схемы с использованием модели иногда может быть получено его приближенное значение методом пропорций по «близкой» схеме с известным числом исходов, заданных на том же вероятностном пространстве, т. е. по схеме, часть исходов которой составляют все исходы изучаемой схемы.

Прямое перечисление (ПП) исходов схемы с ограничением часто имеет конструктивное значение, а именно: для численного анализа такой схемы все результаты могут быть получены из более общей схемы путем визуаль-

ной отбраковки лишних исходов, в то время как получение аналитических решений задач ее анализа, основанного на закономерностях связей номеров и видов исходов, которые требуют учета как дисциплины нумерации исходов схемы, так и условий отбраковки, легче выявляется при ПП, где остается учесть только дисциплину нумерации исходов схемы. Тогда ПП приводит к получению результатов в схемах с ограничениями того же уровня, что и без них, по которым, например, можно проводить быстрое моделирование исходов изучаемой схемы.

Числовым просчетам на ПРИМЕРАХ уделяется особое внимание, т. к. они выполняют пояснительную и частично проверочную функцию полученных формул и алгоритмов.

Основные направления анализа комбинаторных схем:

1) перечисление исходов методом графов;

2) решение ЗН;

3) нахождение вероятностного распределения исходов схемы;

4) моделирование исходов схемы.

Характер результатов: приближенные, полученные методами стохастического моделирования, или точные численные, при заданных численных значениях параметров схемы (на основе визуального перебора исходов схемы в виде таблично-программного представления изучаемого объекта) и могут иметь вид алгоритмов, или точные аналитические решения задач в виде рекуррентных соотношений или, предпочтительнее, в виде явных формул для интересующих нас характеристик (будем их считать результатами более высокого порядка и стремиться к их получению, т. к. они имеют общий вид для любых значений параметров схемы и удобны в дальнейшем использовании).

Научная новизна предлагаемого подхода состоит в переходе с количественного анализа исходов комбинаторных схем на более информативный качественный, из которого следуют все результаты количественного анализа. К этому приводит явное перечисление исходов изучаемой комбинаторной схемы в доасимптотической области с введением новой терминологии по следующим направлениям: построение процедуры визуального перечисления всех исходов схемы методом графов, решение задачи нумерации в прямой и обратной постановках, построение алгоритмов моделирования исходов схемы.

Это потребовало введения новых понятий, таких как граф перечисления исходов схемы, метод отбраковки, прямой перебор исхо-

дов схемы, базовые и составные схемы, близкая схема, траектория в графе перечисления исходов, траекторная форма исхода, операция по перечислению, схемы одновременных и последовательных действий, широко используемые при анализе многих составных схем, два типа экстремальных характеристик комбинаторных схем со спецификой их анализа, метод дополнительного графа.

1. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СТАТЕЙ

1) Методы анализа комбинаторных схем:

- метод графов (МГ);
- задача нумерации (ЗН);
- анализ схем последовательных действий (ПД);
- обобщенная схема ПД;
- моделирование исходов основных комбинаторных схем;
- исследование двух типов экстремальных характеристик (ЭХ) в комбинаторных схемах;
- метод дополнительного графа (МДГ);
- метод пропорций.

2) Анализ общих (без ограничений) комбинаторных схем:

- схема перестановок;
- схема сочетаний;
- схема размещений;
- схема размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам;
- схема размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам;
- схема перестановок с повторением;
- схемы одновременных и последовательных действий (ОД и ПД) и их обобщение.

3) Анализ комбинаторных схем с ограничениями:

- схемы размещения частиц по ячейкам с ограничениями на уровни их заполнения;
- схемы подстановок с заданной цикловой структурой;
- схема перестановок к запретом подпоследовательности;
- схема перестановок с заданными подряд идущими элементами;
- схемы перестановок с заданным числом инверсий;
- схема подстановок с заданным числом циклов;
- схема подстановок с ограниченным рассеянием;
- схема сочетаний с заданным размахом;
- схема сочетаний с ограниченным сверху размахом;

схема сочетаний с заданным минимальным размахом;

схема размещений с ограниченными степенями;

схемы размещения частиц по ячейкам с ограничениями на уровни их заполнения;

схемы с заданными экстремальными значениями характеристик (ЭХ).

2. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В [5, 6] обсуждается метод графов – один из основных общих методов исследования в работе, который дает наглядную графическую иллюстрацию случайного процесса перебора исходов изучаемой комбинаторной схемы.

В качестве демонстрации метода приведены графы перечисления исходов основных комбинаторных схем, просчитаны примеры и вероятностные распределения их исходов, сделаны выводы о возможностях метода графов для их анализа.

В [6] сформулирована задача нумерации, состоящая в установлении взаимно-однозначного соответствия между номерами и видами всех исходов схемы, и указано применение ее результатов для дальнейших исследований схемы.

В [7] проведен комбинаторный анализ схемы перестановок размера r , состоящий в разных процедурах перечисления $r!$ исходов схемы (методом графов при поединичном (пошаговом) добавлении элементов и перечислении всех исходов схемы на каждом шаге и частные приемы монотонного перечисления исходов с растущими числами, составляющими перестановки). Для всех предложенных процедур перечисления исходов схемы решена задача нумерации в прямой и обратной постановках.

Приведены два способа моделирования исходов схемы перестановок, один из которых – быстрое моделирование на основе решения прямой задачи нумерации.

В [8] проводится комбинаторный анализ схемы сочетаний из n элементов по r с общим числом исходов C_n^r , включающий в себя рассмотрение разных процедур перечисления ее исходов, решение задачи нумерации и приведение разных приемов моделирования всех исходов схемы.

Наряду с уже обсужденным методом графов перечисления исходов схемы сочетаний

предлагается еще пять разных приемов, имеющих частный характер, использующих специфику схемы сочетаний, но, как оказалось, приводящих к тому же порядку перечисления, что и методом графов. Поэтому результаты решения задачи нумерации относятся ко всем приведенным приемам перечисления исходов схемы сочетаний.

В [9] проводится комбинаторный анализ схемы размещений из n элементов по r с общим числом исходов A_n^r . Рассматриваются разные процедуры перечисления ее исходов, решается задача нумерации для всех исходов схемы и приводятся способы моделирования ее реализации.

Исходя из формулы $A_n^r = C_n^r r!$, перечисление ее исходов производится через перечисления исходов схем сочетаний и перестановок как этапов перечисления исходов схемы размещения, для которых все исследования проведены ранее.

Приведены два способа моделирования исходов схемы размещений, один из которых – быстрое моделирование на основе решения прямой задачи нумерации.

В [10] изучается схема размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам.

Различаются случаи общей и частной аналогичной схемы без пустых ячеек, в которых определяются числа исходов соответственно $N^* = N^*(r, n)$ и $N = N(r, n)$.

С учетом формулы связи чисел N^* и N : $N^*(r, n) = N(r + n, n)$ решается задача нахождения числа N .

Для определения числа $N = N(r, n)$ доказывается рекуррентное соотношение

$$N(r, n) = N(r - 1, n) + N(r - n, n)$$

с рядом очевидных свойств для числа $N(r, n)$, которое дает численный способ вычисления числа N .

Путем изучения закономерностей итераций расчета числа N по данной рекурренте найдена явная формула для числа исходов схемы.

Вероятностный анализ схемы проводится методом графов процесса перечисления ее исходов из очевидных одношаговых вероятностей переходов в графе; найдено вероятностное распределение числа пустых ячеек.

Приводятся два способа моделирования исходов схемы: методом маркировки по найденному распределению вероятностей исходов схемы и методом отбраковки исходов близкой схемы с заменой неразличимых ячеек на различимые, моделирование исходов которой известно.

В [11, 12, 29] проводится комбинаторный анализ схемы размещения r различных элементов по n неразличимым ячейкам. Проводится явное перечисление ее исходов, решается задача нумерации, выводится явная формула общего числа всех исходов схемы, находится распределение статистики пустых ячеек, приводятся разные способы моделирования значений реализации схемы.

Приведен граф процесса перечисления исходов схемы, для исследования схемы по которому проведен структурный анализ его пучковой структуры.

Предложено два способа нахождения числа исходов схемы $N_{(r)}$.

Первый способ состоит в представлении числа $N_{(r)}$ как одного из чисел Белла.

Второй способ получения числа $N_{(r)}$ состоит в решении рекуррентных соотношений для чисел $N_{(i)}$, $i = 1, \dots, r$, на основании изученной пучковой структуры графа на i -м шаге $K_i = (k_1^{(1)}, \dots, k_{N_{(i-1)}}^{(i)})$, где $k_j^{(i)}$ – размер j -го пучка на i -м шаге, $N_{(i)}$ – числа всех исходов на i -м шаге, $i = \overline{2, r}$. (Очевидно, что $K_1 = (1)$). Под пучком и его размером здесь понимается соответственно совокупность дуг графа, выходящих из данного состояния, и их число.

Тогда число исходов схемы на каждом шаге будем получать как сумму размеров всех пучков из состояний предшествующего шага процесса.

Приведено моделирование исходов схемы размещений, одно из которых – быстрое на основе решения прямой задачи нумерации, второе – прямое моделирование исходов схемы путем разыгрывания числа k непустых ячеек по ранее полученному распределению с моделированием значения схемы сочетаний из n по k , считая их минимальными номерами частиц в k непустых ячейках и разыгрывая размещение остальных $(r - k)$ частиц по k непустым ячейкам, не изменяющих выбранные минимальные номера частиц в них.

В [13] анализируется схема перестановок с повторениями при делении различных элементов на данное число групп заданных численностей. В классической схеме перестановок с повторением и в близкой (второй) схеме с укрупненными исходами, объединяющими группами исходы первоначальной схемы, решаются задачи явного перечисления всех исходов схем и их моделирования.

Классическая схема перестановок с повторением возникает при делении n различных элементов на k различных частей (групп) (в данном ниже порядке перечисления их раз-

меров), численностями $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, что соответствует схеме размещений n различных частиц по k различным ячейкам с заданными уровнями их заполнения: $n_1, n_2, \dots, n_k, (\sum_{i=1}^k n_i = n)$.

Наряду с этой схемой рассматривается аналогичная схема, отличная от первой неразличимостью порядка частей при делении элементов или неразличимостью ячеек при размещении частиц. Указанные отличия схем и означают укрупнение состояний второй схемы по сравнению с первой. Для краткости называем первую схему схемой A , а вторую – схемой B .

Число N_A исходов схемы A известно, а число исходов схемы B вычисляется по формуле

$$N_B = \frac{N_A}{w},$$

где $w = \prod_{i=1}^t (\mu_i!)$, где $t = \max\{n_k\}$, где μ_i – число частей деления в схеме A размером i . Предлагаются две процедуры перечисления исходов схемы A , использующих перебор исходов схемы перестановок или схем сочетаний, следующих из известной формулы для N_A . Перечисление исходов схемы B , частично объединяющих исходы схемы A , производится из их перечисления исходов путем перезаписи в форме исходов схемы B с отбрасыванием вторяющихся.

Прямая и обратная задачи нумерации в схеме A решены следующими теоремами.

Теорема 1. Пусть в схеме с параметрами k, \bar{n} дан номер N исхода. Тогда его вид $R = (R_1, \dots, R_k)$, где R_1, \dots, R_k – исходы i схем составляющих изучаемую схему сочетаний, определяемые номерами исходов в этих схемах N_1, \dots, N_k по результатам решения прямой задачи нумерации в них находится по рекуррентным формулам

$$N_v = t_v + d_v I(t_v),$$

где d_i – размер пучка на i -й итерации, содержащего траекторию T в графе перечисления исходов схемы от ее начального исхода к исходу на k -й итерации; $I(Z) = 1$ при $Z = 0$ и $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$; s_i – номер исхода в T на i -й итерации; $t_i = s_i \bmod d_i$;

$$s_{i-1} = \left\lfloor \frac{s_i + d_i - 1}{d_i} \right\rfloor.$$

Теорема 2. Пусть в схеме с параметрами k, \bar{n} дан вид $R = (R_1, \dots, R_k)$ исхода, компоненты которого по результатам обратной задачи нумерации в схеме сочетаний из п.1.3 определяют их номера в этой схеме

N_1, \dots, N_k . Тогда номер N исхода данного вида изучаемой схемы A вычисляется по формуле

$$N = \sum_{i=1}^{k-1} (N_i - 1) \prod_{l=i}^k d_{l+1} + N_k.$$

В схеме A алгоритмически решена задача моделирования ее исходов.

В [14] введены в рассмотрение **схемы одновременных и последовательных действий (ОД и ПД)**, объясняется почти полное совпадение их анализа с разным смыслом их исходов, и далее, исключая повторы в рассуждениях, проведен комбинаторный анализ схемы k ПД, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Пусть i -е действие ($i = \overline{1, k}$) совершается n_i числом способов.

Под комбинаторным анализом схемы здесь понимается определение числа конечных исходов схемы после выполнения всех действий, их явное перечисление, решение задачи нумерации для всех исходов и приемы их моделирования.

Общее число N исходов схемы известно и задано формулой

$$N = \prod_{i=1}^k n_i.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij} , где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид R_{ij} определяется характером действия. Исход в результате совершения r действий ($r \leq k$) обозначен в виде $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{rj_r}\}$. Тогда окончательный исход схемы получен при $r = k$ в виде $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{kj_k}\}$.

Для явного перечисления исходов схемы по методу графов (см. [10]) строится случайный процесс пошагового последовательного поединичного добавления действий с исходами всех предшествующих действий, изображаемого графом.

Нумерация исходов на каждом шаге проведена в порядке роста номеров упорядоченных в схеме действий и в порядке роста номеров исходов, заданных по каждому действию, который при конкретизации действий известен.

При решении задачи нумерации запись вида исхода на каждом шаге представляет собой траекторию переходов процесса из состояния в состояние, т. к. первый индекс каждой компоненты указывает номер шага (действия), а второй – номер исхода в пучке этого шага. Считаем решенными задачи нумерации для схем всех действий.

Прямая задача нумерации

Теорема 1. Пусть в схеме с параметрами n_1, \dots, n_k дан номер $N^{(k)}$ ее исхода. Тогда вид исхода $R^{(k)} = \{R_{j_1}^{(1)}, \dots, R_{j_k}^{(k)}\}$, определяемый номерами (j_1, \dots, j_k) исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1, k}$ находится по формуле

$$j_i = t_i + I(Z)n_i,$$

где $t_i = N^{(i)} \bmod n_i$; $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$ и $I(Z) = 1$ при $Z = 0$;

$$N^{(i-1)} = \left\lfloor \frac{N^{(i)} + n_i - 1}{n_i} \right\rfloor,$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z и $i = k, k-1, \dots, 1$; $N^{(0)} = 1$.

Обратная задача нумерации

Теорема 2. Пусть в схеме с параметрами n_1, \dots, n_k дан вид ее исхода $R^{(k)} = \{R_{j_1}^{(1)}, \dots, R_{j_k}^{(k)}\}$, определяющий номера (j_1, \dots, j_k) исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1, k}$. Тогда его номер вычисляется по формуле

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^k n_i + j_k.$$

В качестве примеров рассмотрены схемы делегаций (выбор из совокупности различных элементов по одному элементу от каждой из составляющих ее различных групп заданных размеров), перестановок с повторением и последовательного выбора.

Для моделирование исхода схемы ПД предложено два способа: прямое и быстрое.

В [15] рассматривается обобщенная схема последовательных действий. Обобщение результатов [14] анализа схем одновременных и последовательных действий (ОД и ПД) относится к случаю зависимости числа исходов следующего действия не только от самого действия, но и от предсостояния, т. е. от результата предыдущего действия. Результатом этого являются разные размеры пучков в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему.

Проведен комбинаторный анализ обобщенных схем ОД и ПД, включающий в себя явное перечисление их исходов, решение задачи нумерации, определение их числа, моделирование исходов схемы в условиях неравных размеров пучков на каждом шаге, т. е. после каждого действия в графе перечисления исходов схемы.

Явное перечисление исходов схемы производится методом графов.

Анализ схемы последовательных действий приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится k последовательных действий, i -е из которых ($i = \overline{1, k}$) на i -м шаге совершается $N^{(i)}$ способами. Тогда число исходов этих k действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\bar{n}^{(i)} = (n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \dots, n_{N^{(k-1)}}^{(i)})$, т. е. общее число $N = N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} n_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij_i} , где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной задаче нумерации для каждого из k действий и известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы, т. е. с известными числами исходов (размерами пучков) при каждом действии на каждой итерации. Вводится понятие траектории T (последовательности исходов), ведущей в графе перечисления исходов от начала к исследуемому на последней итерации исходу.

Прямая и обратная задачи нумерации решены следующими теоремами.

Теорема 1. Пусть совершается k действий и задан номер исхода $N_*^{(k)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории T в содержащих их пучках от первой до k -й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для j_i ($i = \overline{1, k}$)

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)} - 1} n_l^{(i)},$$

где

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t : \left(\sum_{l=1}^t n_l^{(k)} = A_k \leq N_*^{(k)} \right),$$

где $\delta = 0$ при $A_k = N_*^{(k)}$ и $\delta = 1$ при $A_k < N_*^{(k)}$; заменяя k на i , приходим по рекурренте до первого шага.

По решенной задаче нумерации для всех действий находим из $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(k)}$.

Теорема 2. Пусть совершается k действий и задан вид исхода $R_*^{(k)} = \{j_1, \dots, j_k\}$. Тогда его номер $N_*^{(k)}$ определяется по рекуррентной формуле при $i = k, i = \overline{1, k}$

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} n_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.

Для моделирования исходов схемы предложено два способа: через моделирование исходов действий, как в [14], и по результату решения прямой задачи нумерации – быстрое разыгрывание его номера по одному случайному числу.

В [16] проводится анализ схем размещения частиц по ячейкам с ограничениями на уровни заполнения ячеек, включающий в себя решение задач нахождения количеств исходов в схемах размещения различных и неразличимых частиц по различным и неразличимым ячейкам с ограничениями для уровней заполнения $\{\eta_i\}$, $i = \overline{1, n}$ вида $l_1 \leq \eta_i \leq l_2$, l_1 и l_2 – целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leq l_1 < l_2 \leq n$ при числе частиц в пределах $nl_1 \leq r \leq nl_2$.

1. В схеме размещения различных частиц по различным ячейкам путем перебора составов ячеек и допустимых уровней заполнения получена точная формула для числа исходов N_1 данной схемы.

Перебор составов частиц при их фиксированных количествах $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ задается в порядке нумерации ячеек числами

$$C_r^{\eta_1}, C_{r-\eta_1}^{\eta_2}, C_{r-\sum_{i=1}^2 \eta_i}^{\eta_3}, \dots,$$

$$C_{r-\sum_{i=1}^{n-2} \eta_i}^{\eta_{n-1}}, C_{r-\sum_{i=1}^{n-1} \eta_i}^{\eta_n} = 1,$$

а перебор допустимых уровней заполнения определяется суммированием для ячеек от первой до n -й соответственно в пределах, допускающих возможность заполнения с заданными ограничениями остальных ячеек, т. е. в

пределах от $L_1^{(i)}$ до $L_2^{(i)}$, где i – номер ячейки, а эти пределы принимают следующие значения:

$$L_1^{(1)} = l_1, L_2^{(1)} = l_2;$$

$$L_1^{(2)} = \max(l_1, r - \eta_1 - (n-1)l_2),$$

$$L_2^{(2)} = \min(l_2, r - \eta_1 - (n-1)l_1);$$

$$L_1^{(3)} = \max(l_1, r - \sum_{i=1}^2 \eta_i - (n-2)l_2),$$

$$L_2^{(3)} = \min(l_2, r - \sum_{i=1}^2 \eta_i - (n-2)l_1);$$

...

$$L_1^{(j)} = \max(l_1, r - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i - (n-j+1)l_2),$$

$$L_2^{(j)} = \min(l_2, r - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i - (n-j+1)l_1);$$

...

$j = \overline{1, n}$. В обозначениях $R_j = r - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i$, $j = \overline{1, n}$, для искомого числа N_1 получена формула:

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} C_{R_1}^{\eta_1} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} C_{R_2}^{\eta_2} \dots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} C_{R_n}^{\eta_n} = \\ &= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} \dots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} \frac{r!}{\eta_1! \eta_2! \dots \eta_n!}. \end{aligned}$$

Общее число исходов схемы N_1 определяется всеми допустимыми по ограничениям вариантами заполнения ячеек по их численностям и составам в следующей теореме.

Теорема 1. Для числа N_1 верна формула

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} C_{R_1}^{\eta_1} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} C_{R_2}^{\eta_2} \dots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} C_{R_n}^{\eta_n} = \\ &= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} \dots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} \frac{r!}{\eta_1! \eta_2! \dots \eta_n!}, \end{aligned}$$

где $R_j = r - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i$, $j = \overline{1, n}$.

2. В схеме размещения r неразличимых частиц по n различным ячейкам с данными ограничениями известна точная формула для числа исходов схемы N_2 как коэффициента при x^{r-nl_1} в разложении функции $\varphi(x) = ((1-x^s)/(1-x))^n$, где $s = l_2 - l_1 + 1$.

В [17] получена явная формула для числа исходов схемы размещения неразличимых шаров по различным ящикам с ограничением уровня их заполнения N_2 (в обозначении $N(r, n, l)$ из [17]), где $l = l_2 + 1$ и $l_1 = 1$, т. е. при $l_1 = 1$, $l_2 = l - 1$, приведенного в лемме, из которого пересчитывается искомое число N_2 .

Лемма. При $l_1 = 1$, $l_2 = l - 1$ для чисел $N(r, n, l)$ выполняется рекуррентное соотношение

$$N(r, n, l) = \sum_{i=1}^n C_n^i N(r - n, n - i, l - 1).$$

Для расчета $N(r, n, l)$ по этой рекурренте приведем начальные значения функции $N(r, n, l)$:

$N(r, n, l) = 1$ при любом из условий $n = 1, r \leq l$; $r = nl$, или

$N(r, n, l) = 0$ при любом из условий $r < n$; $l = 1$; $r > nl$.

Теорема 2. Для числа исходов схемы N_2 верно представление

$$N_2 = N(r - n(l - 1), n, l_2 - l_1 + 1).$$

Искомое число N_2 в общем случае данных ограничений легко пересчитывается и принимает следующий явный вид

$$N_2 = \sum_{L_{k-2}} \sum_{L_{k-3}} \dots$$

$$\sum_{L_2} C_n^{L_{k-2}} C_{L_{k-2}}^{L_{k-3}} C_{L_3}^{L_2} C_{L_2}^{r - n(l_1 - 1) - n - \sum_{i=2}^{k-2} L_i}$$

при $nl_1 \leq r \leq n(l_2 - 1)$ ($N_2 = 0$ в противном случае), где L_j — число непустых ячеек, когда в каждой $< j$ частиц, $L_{j*} \leq L_j \leq L_j^*$, $[Z]$ — целая часть числа Z ;

$$L_{j*} = \left\lfloor \frac{r - n - \sum_{i=j+1}^{k-2} L_i + j - 1}{j} \right\rfloor;$$

$$L_j^* = \min(n, r - n - \sum_{i=j+1}^{k-2} L_i).$$

3. В схеме размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам с данными ограничениями общее число исходов схемы N_3 вычислено в явном виде в [6] в обозначении $N_3 = N(r, n)$ с односторонним ограничением $l_1 = 1$. В случае одностороннего нижнего предела для заполнения ячеек вида $\eta \geq l_1$ число исходов схемы пересчитывается из результата

$N(r, n)$ в [10] при ограничениях $l_1 \leq \eta \leq l_2 = r$ в обозначениях [10] по формуле:

$$N_3 = N(r - (l_1 - 1)n, n).$$

В общем случае при $l_2 \leq r$ число исходов схемы с данными ограничениями определяется методом графов, т. е. путем построения графа случайного процесса последовательного равновероятного поединичного размещения частиц по ячейкам с нумерацией состояний процесса в порядке попадания последней размещенной частицы в ячейку с растущим уровнем заполнения на предыдущем шаге путем отбраковки не соответствующих ограничениям исходов. Граф полного перебора исходов схемы приведен в [10] и [5].

4. В схеме размещения r различных частиц по n неразличимым ячейкам с данными ограничениями для анализа используется общая схема размещения r различных частиц по n неразличимым ячейкам без ограничений, рассмотренная в [11], где приведен алгоритм перечисления ее исходов. Перечисление исходов нашей схемы будем производить отбраковкой исходов общей схемы по данному ограничению.

Для нахождения вероятностного распределения исходов общей схемы в [11] предложен численный метод по графу перечисления ее исходов. Отсюда вероятности исходов нашей схемы находятся путем деления вероятностей их исходов в общей схеме на сумму их вероятностей в общей схеме.

В [18] приведены результаты деления совокупности элементов на заданное число частей по определению чисел исходов схем, их перечислению методом графов и решению задачи нумерации с варьированием свойств элементов и частей по их различимости или неразличимости.

В [19, 20] проведен анализ случайных подстановок размера n заданных цикловых структур, т. е. с разными ограничениями на них. Перечислим эти конкретные ограничения и приведем полученные результаты по их численностям N в терминах перестановок их нижних строк, которыми они задаются и общее число которых при размере подстановки n без ограничений есть $n!$.

1. Число одноцикловых подстановок $N = (n - 1)!$.

2. Число подстановок без единичных циклов

$$N = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

3. Число подстановок с ровно k единичными циклами

$$N = C_n^k (n-k)! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k)!} \right).$$

4. Число подстановок с ровно k единичными циклами и одним циклом размером $(n-k)$

$$N = C_n^k (n-k-1)!$$

5. Число подстановок с заданной цикловой структурой $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α_i – число циклов размера i , $i = \overline{1, n}$; $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ – число циклов подстановки, а $\sum_{i=1}^n i\alpha_i = n$

$$\begin{aligned} N &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i\alpha_i)!} \prod_{i=1}^n \frac{(i\alpha_i)! ((i-1)!)^{\alpha_i}}{(i!)^{\alpha_i} (\alpha_i)!} = \\ &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i)^{\alpha_i} (\alpha_i)!}. \end{aligned}$$

Во всех случаях, опираясь на процедуры перечисления и моделирования схем перестановок и сочетаний, получены соответствующие процедуры полного перебора и моделирования подстановок с заданными ограничениями.

В [21] проведен анализ случайных перестановок нижней строки подстановок размера n с s -запретами, т. е. с перестановкой, не содержащей подпоследовательность \bar{P}_s с фиксированным порядком элементов в ней размера $s < n$. Определено число $M = n! - (n-s+1)!$ таких перестановок. Для их перечисления предложено два способа: отбраковки несоответствующих ограничению из всех полученных в [7] в схеме перестановок $n!$ исходов и прямым перебором исходов с данным ограничением. Идея прямого перебора состоит в перечислении всех перестановок из $(n-1)$ -го элемента подстановки без последнего, принадлежащего \bar{P}_s , с последующим добавлением его по методу графов лишь в те места перестановок, которые не приводят к нарушению ограничения. Для запретных мест добавлений в теоремах доказаны рекуррентные соотношения.

В результате получено рекуррентно-алгоритмическое решение задачи нумерации для всех допустимых исходов схемы.

В [22] проведен анализ случайных перестановок размера n с заданным числом t подряд идущих фиксированных элементов в произвольном порядке между собой.

Предложена процедура явного прямого перечисления исходов данной схемы перестановок с определенной дисциплиной их нумерации. На этой основе проведено исследование

по следующим направлениям: приведена теоретическая формула общего числа ее исходов, решена задача нумерации исходов с проверкой совпадения номера последнего исхода с числом всех исходов схемы, найдено их вероятностное распределение, построен алгоритм быстрого (по одному случайному числу) моделирования исходов схемы.

Перечислим полученные здесь результаты.

Число N исходов схемы есть $N = (n-t+1)!(t)!$.

Процедура перебора благоприятных исходов построена методом графов по схеме перечисления исходов (каждого с каждым) двух последовательных перестановок размерами $(n-t+1)$ и t , алгоритм перебора исходов которых представлен в [7], а анализ схемы последовательных действий (реализаций двух перестановок) проведен в [14].

Задача нумерации решается здесь на основании формул, полученных в [14] при анализе схемы последовательных действий, которыми в данной схеме являются соответствующие схемы перестановок. Получены явные формулы решения ЗН.

Вероятность выполнения данного ограничения p вычисляется по формуле:

$$p = \frac{(n-t+1)!t!}{n!} = \frac{n-t+1}{C_n^t}.$$

Предлагается два способа моделирования исходов схемы.

В [23] проведено исследование числа инверсий в случайных перестановках и проведен их анализ с фиксированным числом инверсий.

Под инверсией в перестановке будем понимать нарушение порядка монотонности возрастания номеров ее элементов. Числом инверсий для данного элемента перестановки будем называть число номеров меньше данного, стоящих правее него. Числом инверсий $I = I_n = I_v = I_{v_n}$ для перестановки будем считать суммарное число инверсий всех ее элементов.

В порядке перечисления исходов схемы перестановок методом графов (см. [5] и [7]) выявлены закономерности их соответствия с числом инверсий в них в виде следующих теорем.

Теорема 1. Числа инверсий по итерациям в пучках графа перечисления исходов схемы перестановок поединично убывают в порядке перечисления исходов в них.

Теорема 2. Числа инверсий в итерациях в первых исходах пучков графа перечисления исходов схемы перестановок поединично убывают в порядке перечисления пучков, порожа-

даемых исходами каждого пучка предыдущей итерации.

Из утверждений теорем для подсчета инверсий в исходах перестановки выведено итерационное **правило: при переходе от k -го шага перебора исходов перестановки для нахождения чисел инверсий в исходах $(k + 1)$ -го шага нужно ко всем числам инверсий k исходов каждого пучка k -го шага прибавить соответственно числа $\bar{b}_k = k, k - 1, \dots, 1, 0$.**

Таким образом, для подсчета чисел инверсий всех исходов схемы перестановок размера k в графе перечисления его исходов по шагам получена возможность, не приводя видов исходов, вычислять по тому же графу числа инверсий всех исходов схемы перестановок на всех шагах, руководствуясь приведенным правилом, указывая в графе в качестве исходов процесса числа инверсий в них.

На этой основе предложен алгоритм вычисления вероятностного распределения числа инверсий в исходах схемы перестановок и алгоритмическое решение задачи нумерации для схемы перестановок с фиксированным числом инверсий. В результате получена картина соответствия всех пронумерованных исходов схемы перестановок с числами их инверсий.

По табличному результату решения прямой задачи нумерации предложено проводить быстрое моделирование исходов этой нашей схемы перестановок.

По модели методом пропорций со вспомогательной общей схемой перестановок получено приближенное значение числа исходов нашей схемы с оценкой надежности приближения с заданной точностью.

В [24] проведен анализ случайных перестановок фиксированного размера с ограниченным рассеянием. Все исследования схемы проводятся на основе прямого перечисления ее исходов, а именно: определяется число ее исходов и вероятностное распределение, решается задача нумерации для исходов схемы, что дает возможность быстрого моделирования их возможных значений и приближенного вычисления числа исходов схемы методом пропорций.

Вводится понятие рассеяния для подстановки размера n , как максимальной разности по модулю вертикальных значений ее столбцов, т. е., т. к. ее верхняя строка есть числа $(1, 2, \dots, n)$, а ее нижняя строка $-\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, где $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (1, 2, \dots, n)$, рассеянием подстановки является число $S = \max |k - i_k|$, $k \in (1, 2, \dots, n)$. Нас интересуют подстановки со значением $S < s$.

Приведен алгоритм 1 прямого перечисления исходов схемы с ограничением допустимых мест добавления следующего номера элемента в переборе исходов схемы перестановок без ограничений [7] для $i \geq s + 2$ элементов.

Предложен численный рекуррентный метод (алгоритм 2) вычисления числа M_n исходов схемы, использующий алгоритм 1 прямого перечисления ее исходов по анализу мест расположения в перестановках предшествующих шагов их перечисления элементов с номерами, отличающимися от добавленного на данном шаге перебора исходов схемы на число $\geq s$ (см. [7]). Найдено вероятностное распределение числа инверсий в n -размерной перестановке.

По результату решения прямой задачи нумерации, решенной алгоритмически, предлагается проводить быстрое моделирование исходов нашей схемы. По модели методом пропорций с использованием вспомогательной общей схемы n -мерной подстановки получено приближенное значение числа исходов нашей схемы с оценкой надежности этого приближения с заданной точностью.

В [25] проведен анализ схемы сочетаний из n элементов по r с ограниченным размахом. Вводится понятие размаха R исходов схемы сочетаний как максимальной разности между номерами выбранных элементов. Определяется число исходов схемы с ограниченным размахом $R \leq t$, производится их перечисление и решается для них задача нумерации, обсуждается моделирование исходов схемы.

Условие ограничения $R \leq t$ выполняется, если в схеме сочетаний из n элементов по r их извлекают из $n \leq t + 1$ элементов. При $n > t + 1$ для перечисления исходов нашей схемы выбираем r элементов не из n элементов, а из участков подряд идущих поединично растущих $(t + 1)$ номеров, суммируя числа всех разных вариантов таких выборов по всем участкам с единичными сдвигами, начиная с номера 1, для определения числа исходов схемы, или объединяя их в совокупность исходов при перечислении.

Для исключения повторов исходов при выборах по r из номеров каждого следующего участка длины $(t + 1)$ включаем в выбор номер последнего элемента участка. Тогда, обозначив через N_t искомое число исходов схемы, доказана формула:

$$N_t = C_{t+1}^r + (n - t - 1)C_t^{r-1}.$$

Перечисление всех N_t исходов нашей схемы, как было сказано выше, построено на той же

идее организации всех разных исходов выбора по схеме сочетаний с ограниченным размахом из номеров элементов с определенных ранее участков номеров со ссылкой на [8], где построена процедура перечисления исходов схемы сочетаний (без ограничений). Объединяя результаты всех исходов схем сочетаний из номеров элементов первого участка по r и всех остальных участков по $(r - 1)$ с принудительным добавлением последнего номера участка, получены все исходы нашей схемы. Найдено вероятностное распределение размаха в исходе схемы сочетаний: $P(R = k) = (N_t - N_{t-1})/C_n^r$, где $k = \bar{r} - 1, n - 1$.

Задача нумерации численно решена на основе результатов ее решения для используемых схем сочетаний без ограничений [8] и на алгоритме перечисления предварительно пронумерованных в порядке их получения исходов нашей схемы. По результату табличного решения прямой задачи нумерации можно проводить быстрое моделирование ее исходов.

В [26] проведен анализ схемы размещений из n элементов по r с ограниченными степенями $\leq S$, под которыми понимаются абсолютные разности всех соседних элементов исходов схемы. В основе этих исследований лежит процедура перечисления всех исходов схемы, которая проводится в два этапа по частям в зависимости от сравнения значения данного S с размахом R (максимальной абсолютной разности элементов исхода схемы, совпадающей с размахом исхода схемы сочетаний, состоящего из тех же элементов) исходов схемы. Тогда все исходы схемы получают объединением этих частей перечисления с суммарным по частям числом ее исходов.

В первой части исходов схемы при $R < S$ с использованием результатов из [26] анализа схемы сочетаний с ограниченным размахом R получено число первой части исходов схемы $M_1 = (C_{S+1}^r + (n - S - 1)C_S^{r-1})r!$. А перечисление этой части исходов схемы получается в результате двух последовательных действий (из [14]): перечисления всех исходов схемы сочетаний с ограниченным размахом, полученных в [25], и схемы перестановок в каждом исходе первого действия, изученных в [7]. Для второй части исходов схемы при $R \geq S$ построен алгоритм перечисления ее исходов с формулой вычисления их числа M_2 , который здесь не приводится из-за необходимости введения для этого большого числа обозначений из алгоритма. Найдено вероятностное распределение максимального степеня в исходе схемы размещений.

Задача нумерации решена здесь алгоритмически (таблично), по результатам ее решения в прямой постановке предложено проведение быстрого моделирования ее исходов. По модели методом пропорций с использованием вспомогательной общей схемы размещений из n элементов по r получено приближенное значение числа исходов нашей схемы с оценкой надежности этого приближения с заданной точностью.

Установлена связь результатов исследования схемы с анализом подстановок с ограниченным рассеянием из [24].

В [27] проведен анализ схемы сочетаний из n элементов по r с заданным минимальным размахом S выборки. В [25] понятие размаха схемы сочетаний определено. Все исследования схемы основаны на процедуре прямого перечисления ее исходов. Для этого варьируются все возможные значения минимального элемента m в исходе схемы от 1 до $(n - S)$, который определяет диапазон перебора значений его максимального элемента от $(m + S)$ до n , а остальные $(r - 2)$ элементов исхода выбираются по схеме сочетаний из элементов от $(m + 1)$ до $(M - 1)$. Из логики перечисления исходов схемы получено их число

$$N = \sum_{m=1}^{n-S} \sum_{M=m+S}^n C_{M-m-1}^{r-2}.$$

Задача нумерации в прямой и обратной постановках решена аналитически в терминах известных из [8] результатов анализа схемы сочетаний. На основании результата решения прямой задачи нумерации и равновероятности исходов схемы предлагается проводить их быстрое моделирование.

В [28] для рационализации исследования схем разработан и предложен метод дополнительного графа (МДГ), состоящий в получении аналитических формул пересчета всех ее результатов перечислительного анализа из аналогичных по более общей и дополнительной к ней схемам: число исходов, перечисление исходов, их вероятностное распределение, решение задачи нумерации и моделирование исходов.

Введены обозначения: N_* , N_d , N_0 – соответственно чисел исходов в общей, дополнительной и данной изучаемой схемах, где первые два числа считаются известными.

Очевидно, что число исходов схемы $N_0 = N_* - N_d$. Для получения графа перечисления исходов схемы МДГ из исходов – состояний последнего шага графа перечисления общей схе-

мы удаляем все исходы, относящиеся к дополнительной схеме.

Считая, что все вероятности переходов из состояния в состояние в графах перечисления исходов в общей и дополнительной схемах известны, для указания вероятностей на дугах построенного графа перечисления исходов изучаемой схемы находим их из соответствующих вероятностей в графе общей схемы делением их на суммарную вероятность всех исходов конкретного шага общей схемы, составляющих исходы изучаемой схемы.

Считая решенной задачу нумерации для общей и дополнительной схем и используя их результаты, будем пересчитывать из них решения прямой и обратной задач нумерации в нашей схеме, т. е. соответствие конкретного номера конкретному исходу нашей схемы в обе стороны.

S^* , S^d , S – соответственно обозначения для общей, дополнительной и нашей изучаемой схем.

Прямая задача нумерации. Пусть дан номер N^0 исхода нашей схемы. Требуется найти его вид R^0 .

Шаги решения:

1. по всем исходам схемы S^* находим номера исходов схемы S^d , пусть это будут номера $\{N_i^d\}$, $i = \overline{1, N_d}$;
2. в схеме S^* находим число k исходов схемы S^d до искомого исхода схемы S по формуле

$$k = \max j : \left\{ \sum_{i=1}^j (N_i^d - N_{i-1}^d - 1) \leq N^0 \right\},$$

где $N_0^d = 0$;

3. находим номер данного исхода N^* в схеме S^* по формуле $N^* = N^0 + k$;
4. по решенной прямой задаче нумерации в схеме S^* находим его вид R^* , который совпадает с искомым видом исхода R^0 исследуемой схемы.

Обратная задача нумерации. Пусть дан вид R^0 исхода нашей схемы. Требуется найти его номер N^0 .

Шаги решения:

1. по данному виду исхода $R^0 = R^*$ по решенной обратной задаче в схеме S^* находим его номер N^* ;
2. для всех известных исходов схемы S^d находим по решенной обратной задаче нумерации в схеме S^* их номера $\{N_i^{(d)}\}$, $i = \overline{1, N_d}$;

3. находим число k исходов схемы S^d в схеме S^* до исхода с номером N^* по формуле

$$k = \max j : \left\{ \sum_{i=1}^j (N_i^d - N_{i-1}^d) \leq N^* \right\},$$

где $N_0^d = 0$;

4. искомым номер N^0 в схеме S получаем по формуле $N^0 = N^* - k$.

Предлагается быстрое моделирование исхода схемы S , т. е. при известном вероятностном распределении ее исходов по одному случайному числу методом маркировки разыгрывается номер исхода схемы, по которому по результату решения прямой задачи нумерации для схемы предъявляется его вид.

В [30] в интерпретации схемы домино представлен анализ схемы сочетаний с повторением и той же схемы с соответствующим ограничением. Определяется схема домино как схема случайного заполнения фишки обобщенного домино с r концами и n цифрами от 0 до $(n-1)$ на концах фишек всех возможных составов с повторениями без учета их порядка. Проводится исследование этой схемы и аналогичной с фиксированной минимальной цифрой $\geq m$ в исходе случайного выбора фишки из полного набора домино по следующим направлениям перечислительной комбинаторики: построения процедуры перечисления нумерованных исходов схемы, определения их числа, решения для них задачи нумерации, нахождения их вероятностного распределения и моделирования возможных исходов. Рассматривается два подхода к анализу схемы домино на основе прямого непосредственного перечисления ее исходов или с пересчетом результатов исследования в [8] схемы сочетаний. Схема домино с данным выше ограничением изучается по тем же, указанным в аннотации направлениям с использованием результатов схемы домино без ограничений. Задача нумерации решена аналитически для общей схемы домино и с аналитическим пересчетом для данного в схеме ограничения. На этой основе предложено проводить быстрое моделирование исходов обеих схем.

В [31] приведены авторские алгоритмы моделирования значений некоторых простейших комбинаторных схем, на которые, как на известные, в остальных публикациях делаются ссылки, – это моделирование исходов схем перестановок, сочетаний, размещений с повторением, перестановок с повторением, сочетаний с повторением

и ее частный случай – без пустых ячеек в интерпретации размещений частиц по ячейкам.

3. Выводы

1. Разработан новый универсальный алгоритмически-аналитический подход к анализу комбинаторных схем в доасимптотической области значений параметров по направлениям: построения процедуры полного перечисления их исходов; решения для них задачи нумерации; нахождения для них вероятностного распределения; моделирования исходов.

2. Определены объекты исследования с применением предложенного подхода – это комбинаторные схемы общего вида (без ограничений), схемы с ограничениями, с заданными экстремальными значениями характеристик в схемах и схемы с ограничениями на них.

3. По всем рассмотренным в работе схемам по выбранным направлениям перечислительной комбинаторики получены новые результаты разных уровней для характеристик схем: приближенные оценки, численные методы расчета, алгоритмические процедуры, аналитические результаты в виде рекуррентных соотношений или явных формул.

4. Области практического применения результатов предложенного подхода могут быть: быстрое моделирование исходов схемы, компактное хранение информации о всех исходах схемы при аналитическом решении ЗН; математические вычисления по некоторым числовым наборам с любыми ограничениями; криптография (при переборе ключей); криминалистика (при следственном анализе версий, связанных с числовыми наборами); в учебном процессе.

5. Разработаны приемы моделирования исходов всех рассмотренных комбинаторных схем, в том числе – общий способ быстрого моделирования по результату решения прямой ЗН.

6. В связи с усложняющимися задачами анализа комбинаторных схем и бурным развитием возможностей электронных вычислительных средств, расширяющих доасимптотическую область значений параметров схем, ожидается рост востребованности предложенного подхода к их анализу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536 с.

2. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Т. 1–3. М.: Мир, 1976–1978. 728 с.

3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

4. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.

5. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. № 8. 2014. С. 15–21.

6. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Об одном подходе к решению задач перечислительной комбинаторики // Инновация на основе информационных и коммуникационных технологий: Межд. науч.-практ. конференция. Сочи, 1–10 октября, 2015. С. 251–252.

7. Колчин А. В., Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.

8. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

9. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы размещений // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 9. С. 34–39.

10. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В. Анализ схем размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 143–154.

11. Энатская Н. Ю. Комбинаторное представление схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 126–135. doi: 10.4213/dm1410.

12. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Анализ схемы равновероятного размещения различных частиц по неразличимым ячейкам // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 1. С. 19–24.

13. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2017. № 2. С. 19–22.

14. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.

15. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 25–27.

16. Энатская Н. Ю. Анализ схем размещения частиц по ячейкам с ограничением на заполне-

ние ячеек // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 5. С. 42–45.

17. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Определение числа N размещений неразличимых шаров по различимым ящикам с ограничением уровня их заполнения // Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий: Межд. науч.-практ. конференция. Прага, апрель 23–27. С. 341–347.
18. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Деление совокупности элементов на заданное число различных частей // Инновации информационных технологий: Третья Межд. науч.-практ. конф. Прага, апрель 21–25. С. 341–347.
19. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ случайных подстановок заданных цикловых структур // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 11. С. 29–34.
20. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Комбинаторный анализ случайных подстановок заданных цикловых структур // Инновация на основе информационных и коммуникационных технологий: Межд. науч.-практ. конф. Сочи, 1–10 октября. 2015. С. 252–253.
21. Энатская Н. Ю. Анализ случайных перестановок с s -запретами // Труды КарНЦ РАН. 2015. № 4. С. 131–136. doi: 10.17076/mat247
22. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы перестановок с заданным числом подряд идущих фиксированных элементов // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 141–146. doi: 10.17076/mat412
23. Энатская Н. Ю. О числе инверсий в исходах схемы перестановок и ее анализ с фиксированным числом инверсий // Труды КарНЦ РАН. 2015. № 4. С. 137–144. doi: 10.17076/mat246

24. Энатская Н. Ю. Анализ случайных подстановок фиксированного размера с ограниченным рассеянием // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 7. С. 32–36.

25. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 10. С. 28–31.

26. Энатская Н. Ю. Анализ схемы размещения с ограниченными степенями и его применение для изучения рассеяния подстановки // Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 94–100. doi: 10.17076/mat563

27. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с заданным минимальным размахом выборки // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 136–140. doi: 10.17076/mat411

28. Энатская Н. Ю. Метод дополнительного графа для решения задач перечислительной комбинаторики // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 6. С. 25–28.

29. Энатская Н. Ю., Колчин В. Ф., Колчин А. В. Схема размещения различных частиц по неразличимым ячейкам // Третий Русско-Финский симпозиум по дискретной математике. Петрозаводск, сентябрь 2014 г. С. 15–18.

30. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы домино и случай фиксированной минимальной цифры на фишке домино // Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 86–93. doi: 10.17076/mat562

31. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

Поступила в редакцию 12.12.2017

REFERENCES

1. Aho A., Hopcroft D., Ulman D. Postroenie i analiz vychislitel'nykh algoritmov [Construction and analysis of computing algorithms]. Moscow: Mir, 1979.
2. Knuth D. E. Iskusstvo programmirovaniya na EVM [Art of programming on ECM]. Vol. 1–3. Moscow: Mir, 1976–1978.
3. Kristofides N. Teoriya grafov. Algoritmicheskii podkhod [Graph theory. Algorithm method]. Moscow: Mir, 1978.
4. Reingold E., Nivergelt Ju., Deo N. Kombinatornye algoritmy, teoriya i praktika [Combinatorial algorithms. Theory and practice]. Moscow: Mir, 1980.
5. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi

kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2014. No. 8. P. 15–21.

6. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Ob odnom podkhode k resheniyu zadach perechislitel'noi kombinatoriki [On a method for solving problems of enumerative combinatorics]. *Mezhd. nauchno-prakt. konf. Innovatsiya na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologii* [Int. scientific-pract. conf. Innovations based on Information and Communication Technologies], Sochi, October 1–10, 2015. P. 251–252.

7. Enatskaya N. Yu., Kolchin A. V. Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of the permutations

- scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 80–86.
8. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.
 9. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy razmeshchenii [Combinatorial analysis of the arrangement scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and controllers]. 2015. No. 9. P. 34–39.
 10. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V.* [Analysis of a scheme of allocating distinguishable particles to indistinguishable cells]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 143–154.
 11. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornoe predstavlenie skhemy rasmeshcheniya razlichnykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Combinatorial representation of the scheme of distinguishable particles arrangement to indistinguishable cells]. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics]. 2017. Vol. 29, no. 1. P. 126–135. doi: 10.4213/dm1410.
 12. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Analiz skhemy ravnoveroyatnogo razmeshcheniya razlichimyykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Analysis of the scheme of equiprobable placement of distinguishable particles on indistinguishable cells]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2015. No. 1. P. 19–24.
 13. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok s povtoreniem i blizkoi skhemy [Combinatorial analysis of the permutation scheme with repetition and close scheme]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika] [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2017. No. 2. P. 19–22.
 14. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy odnovremennykh i posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the scheme of simultaneous and sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 2. P. 35–41.
 15. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz obobshchennoii skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of the sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 4. P. 25–27.
 16. *Enatskaya N. Yu.* Analiz skhem razmeshcheniya chastits po yacheikam s ogranicheniem na zapolnenie yacheek [The analysis scheme of arrangement with restriction on the filling of cells]. *Promyshlennye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and Controllers]. 2017. No. 5. P. 42–45.
 17. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Opredelenie chisla N razmeshchenii nerazlichimyykh sharov po razlichimym yashchikam s ogranicheniem urovnya ikh zapolneniya [Determination of number N allocation of indistinguishable balls to distinguishable boxes with restriction of level their filling]. *Innovatsii na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologii: Mezhd. nauch.-prakt. conf.* [Int. Scientific-Pract. Conf. Innovations based on Information and Communication Technologies]. Prague, April 23–27. P. 341–347.
 18. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Delenie sovokupnosti elementov na zadannoe chislo razmeshchennykh chastey [Division of population of elements into a given number of discernible parts]. *Innovatsii informatsionnykh tekhnologii: Tret'ya Mezhd. nauch.-prakt. conf.* [3-rd Int. Scientific-Pract. Conf. Innovative Information Technologies]. Prague, April 21–25. P. 282–290.
 19. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz sluchainyykh podstanovok zadannykh tsiklovyykh struktur [Combinatorial analysis of random permutations of given structures of cycle]. *Promyshlennye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and Controllers]. 2017. No. 11. P. 29–34.
 20. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Kombinatornyi analiz sluchainyykh podstanovok zadannykh tsiklovyykh struktur [Combinatorial analysis of random permutations of given structures of cycle]. *Innovatsiya na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologii: Mezhd. nauch.-prakt. conf.* [Int. Scientific-Pract. Conf. Innovations based on Information and Communication Technologies]. Sothi, October 1–10, 2015. P. 252–253.
 21. *Enatskaya N. Yu.* Analiz sluchainyykh podstanovok c s-zapretami [The analysis of random permutations with s-prohibition]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2015. No. 4. P. 131–136. doi: 10.17076/mat247
 22. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy podstanovok s zadannym chislom podryad idushchikh fiksirovannykh elementov [Combinatorial analysis of a permutation circuit with a given number of consecutive fixed elements]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 141–146. doi: 10.17076/mat412
 23. *Enatskaya N. Yu.* O chisle inversii v iskhodakh skhemy perestanovok i ee analiz c fiksirovannym chislom inversii [On the number of inversion outcomes of the permutation scheme and its analysis with fixed number of inversions]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarNTs RAS]. 2015. No. 4. P. 137–144. doi: 10.17076/mat246

24. *Enatskaya N. Yu.* Analiz sluchainykh podstanovok fiksirovannogo razmera s ogranichennym rasseyaniem [The analysis of a random permutations of a fixed size with a limited dispersion]. *Promyshlennyye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 7. P. 32–36.
25. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s ogranichennym razmakhom [The analysis of the combination scheme with a limited range]. *Promyshlennyye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 10. P. 28–31.
26. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy razmeshchenii s ogranichennymi stepami i ego primenenie dlya izucheniya rasseyaniya podstanovki [Combinatorial analysis of arrangement scheme with a limited steps and its application for study of dispersion of permutation]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 94–100. doi: 10.17076/mat563
27. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s zadannym minimal'nym razmakhom [Combinatorial analysis combinations circuit with given minimal range of sample]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 136–140. doi: 10.17076/mat411.
28. *Enatskaya N. Yu.* Metod dopolnitel'nogo grafa dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [The method of the additional graph for the solution of problems of the enumerational combinatorial analysis]. *Promyshlennyye ASU i kontrolyery* [Industrial ACS and Controllers]. No. 6. 2016. P. 25–28.
29. *Enatskaya N. Yu., Kolchin V. F., Kolchin A. V.* Skhema rasmescheniya razlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [On a scheme of distinguishable particles arrangement to indistinguishable cells]. *Tretii Russo-Finskii simpozium po diskretnoi matematike* [Third Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics]. Petrozavodsk, September 2014. P. 15–18.
30. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy domino i sluchai fiksirovannoi minimal'noi tsifry na fishke domino [Combinatorial analysis of scheme of domino and case of fixed minimal figure on board of domino]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 86–93. doi: 10.17076/mat562
31. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

Received December 12, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
 доцент Департамента прикладной
 математики, к. ф.-м. н.
 Московский институт электроники и математики
 Национального исследовательского университета
 «Высшая школа экономики»
 ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
 эл. почта: nat1943@mail.ru
 тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
 Moscow Institute of Electronics and Mathematics
 National Research University
 Higher School of Economics
 34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
 e-mail: nat1943@mail.ru
 tel.: 89037411345

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СТЕПАМИ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики, Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Вводится новая характеристика исхода схемы сочетаний – ее стёпы, под которыми понимаются разности между соседними элементами исхода, расположенными в возрастающем порядке. Рассматривается процедура перечисления всех исходов схемы сочетаний с заданным ограничением, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними и их номерами, приводится моделирование возможных значений реализаций схемы.

Ключевые слова: схема сочетаний с ограниченными стёпами; перечисление исходов; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A COMBINATION SCHEME WITH RESTRICTED STEPS

We introduce a new characteristic of the outcome of a combination scheme, i.e. its steps, defined as differences between the neighboring elements of the outcome arranged in the order of increase. We consider the procedure of enumerating all outcomes of a combination scheme with a given restriction, establish the one-to-one correspondence between the outcomes and their numbers generated in the enumeration procedure, and give some methods to simulate the possible outcomes of the scheme.

Key words: combination scheme with restricted steps; enumeration of outcomes; enumeration problem; simulation.

ВВЕДЕНИЕ

Схема сочетаний возникает при выборе r элементов из n различных (нумерованных) элементов без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц по одной по n различным ячейкам и является одной из наиболее распространенных комбинаторных схем, широко используемой в теории и практике, т. к. участвует во многих важных распространенных математических формулах и в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем. Число исходов схемы сочетаний есть C_n^r . Комбинаторный анализ схемы сочета-

ний (по указанным в аннотации направлениям для данной схемы) проведен в работах [6] и [2], а при ограничениях на ее размах R – в [3] и [4].

Исход схемы сочетания из n элементов по r представляет собой набор r номеров выбранных элементов в возрастающем порядке: $R_* = \bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$. В изучаемой схеме вводится верхнее ограничение на абсолютные разности соседних элементов в исходах схемы сочетаний, называемые далее СТЕПАМИ (в терминологии [1] они являются спейсингами выборки исхода схемы сочетаний), обозначаемые вектором $\bar{s} = (s_1, \dots, s_{r-1})$, где $s_i = n_{i+1} - n_i$.

Тогда данное ограничение состоит в условии $\max_i s_i \leq S$. Это ограничение путем отбраковки из всех исходов схемы сочетаний, перечисленных в [6], можно учесть по результатам непосредственного подсчета степеней каждого его исхода при численном анализе схемы. Но для получения аналитических результатов по всем направлениям исследования схемы для выявления необходимых закономерностей для указанных направлений анализа схемы потребуется строить процедуру прямого перечисления ее исходов.

Возможность реализации схемы должна обеспечиваться следующим условием для ее параметров

$$r - 1 \leq R \leq S(r - 1). \quad (1)$$

1. Число исходов схемы и их прямое перечисление

Прямое перечисление исходов нашей схемы производим процессом поединичного выбора его элементов в возрастающем порядке равновероятно в диапазонах, обеспечивающих их возрастание, возможность выбора остальных элементов и заданную ограниченность степеней в исходе схемы:

$$1 \leq n_1 \leq (n - r + 1) = L_1;$$

$$n_1 + 1 \leq n_2 \leq \min(n - r + 2, n_1 + S) = L_2;$$

$$n_2 + 1 \leq n_3 \leq \min(n - r + 3, n_2 + S) = L_3$$

и т. д., откуда следует, что

$$n_{i-1} + 1 \leq n_i \leq \min(n - r + i, n_{i-1} + S) = L_i, \quad (2)$$

где на i -м шаге добавляется элемент n_i , $i = \overline{1, r}$.

Конкретное значение n_i зависит от выбора n_{i-1} .

Представим процедуру перечисления исходов схемы при указанном выше поединичном (пошаговом) добавлении элементов в виде графа. Пучками графа назовем множество возможных переходов (дуг) из каждого состояния в состояния следующего шага. Размеры пучков на каждом шаге определяются числами исходящих из всех состояний дуг и на i -м шаге процесса перечисления $a_i(n_{i-1})$ зависят от последнего n_{i-1} -го добавленного элемента, и из (2) $a_1(n_0) = a_1 = n - r + 1$, а для $i = 2, 3, \dots, r$ вычисляются по формуле

$$a_i(n_{i-1}) = L_i - n_{i-1}. \quad (3)$$

Число исходов каждого шага (итерации) равно числу пучков исходов следующего шага, т. е. N_i – число исходов i -го шага ($i = \overline{1, r}$)

по N_{i-1} -му пучку. Введем вектор добавленных элементов на i -м шаге в порядке их добавления $\vec{m}_i = (m_{i1}, \dots, m_{iN_{i-1}})$, так, что в каждом j -м пучке ($j = \overline{1, N_{i-1}}$) значения добавленных элементов перечисляются подряд в возрастающем порядке из соответствующего по (2) диапазона для n_i при j -м выборе в порядке поединичного роста значения n_{i-1} из своего диапазона.

Массив подряд идущих размеров пучков на $(i - 1)$ -м шаге перечисляем в порядке перечисления исходов в виде вектора $\vec{a}_i^* = (a_{i1}^*, \dots, a_{iN_{i-1}}^*)$, где a_{ij}^* – размер j -го пучка на $(i - 1)$ -м шаге графа, и называем пучковой структурой графа на этом шаге.

Процедура перечисления исходов схемы может быть изображена графом обобщенной схемы последовательных действий поэлементного набора исхода схемы сочетаний [2] с данным ограничением на ее степи и характеризуем своей пучковой структурой, данной в (3) (см. рис. 1).

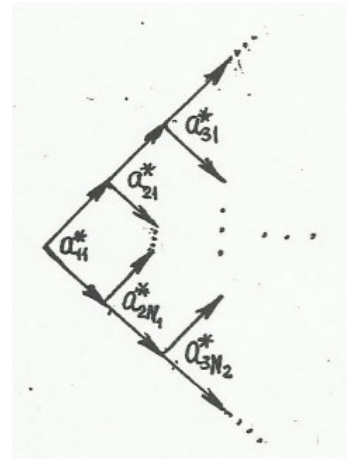


Рис. 1. Пучковая структура графа перечисления исходов схемы

Fig. 1. Cluster structure of the enumeration graph of the scheme outcomes

Число исходов схемы N определяется путем последовательных вычислений численностей пошаговых исходов схемы по рекуррентной формуле для N_i – числа исходов i -го шага их перечисления:

$$N_i = \sum_{j=1}^{N_{i-1}} a_{ij}^*, \quad (4)$$

где $N_0 = 1$, $N_1 = n - r + 1$, а $N = N_r$ – число исходов схемы.

Приведем числовой пример перечисления исходов схемы и вычисления числа N .

Пример 1. Пусть $n = 8$, $r = 3$, $S = 3$. Вычислим по (2) диапазоны варьирования пошаговых добавлений элементов в исход схемы нахождением их крайних значений при каждой фиксации предшествующего добавленного в исход элемента, указывая его в круглых скобках после номера последнего элемента:

n_1 от 1 до $(8 - 3 + 1) = 6$;
 $n_2(1)$ от 2 до $\min(8 - 3 + 2, 1 + 3) = 4$; $n_2(2)$ от 3 до $\min(8 - 3 + 2, 2 + 3) = 5$;
 $n_2(3)$ от 4 до $\min(8 - 3 + 2, 3 + 3) = 6$; $n_2(4)$ от 5 до $\min(8 - 3 + 2, 4 + 3) = 7$;
 $n_2(5)$ от 6 до $\min(8 - 3 + 2, 5 + 3) = 7$; $n_2(6)$ от 7 до $\min(8 - 3 + 2, 6 + 3) = 7$;
 $n_3(2)$ от 3 до $\min(8 - 3 + 3, 2 + 3) = 5$; $n_3(3)$ от 4 до $\min(8 - 3 + 3, 3 + 3) = 6$;
 $n_3(4)$ от 5 до $\min(8 - 3 + 3, 4 + 3) = 7$; $n_3(5)$ от 6 до $\min(8 - 3 + 3, 5 + 3) = 8$;
 $n_3(6)$ от 7 до $\min(8 - 3 + 3, 6 + 3) = 8$; $n_3(7)$ от 8 до $\min(8 - 3 + 3, 7 + 3) = 8$.

Отсюда по (3) получаем последовательности всех размеров пучков по шагам перечисления исходов, указанным в индексе, и по всем конкретным значениям из диапазона изменения предшествующего добавленного элемента, указанного в скобках:

$a_1 = 6 - 1 + 1 = 6$; а пучковая структура 1-го шага $\bar{a}_1^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$;
 $a_2(1) = 4 - 1 = 3$; $a_2(2) = 5 - 2 = 3$; $a_2(3) = 6 - 3 = 3$; $a_2(4) = 7 - 4 = 3$; $a_2(5) = 7 - 5 = 2$; $a_2(6) = 7 - 6 = 1$; т. е. пучковая структура 2-го шага $\bar{a}_2^* = (3, 3, 3, 3, 2, 1)$;
 $a_3(2) = 5 - 2 = 3$; $a_3(3) = 6 - 3 = 3$; $a_3(4) = 7 - 4 = 3$;
 $a_3(5) = 3$; $a_3(6) = 3$; $a_3(7) = 8 - 5 = 3$;
 $a_3(8) = 3$; $a_3(9) = 3$; $a_3(10) = 8 - 6 = 2$;
 $a_3(11) = 3$; $a_3(12) = 2$; $a_3(13) = 8 - 7 = 1$;
 $a_3(14) = 2$; $a_3(15) = 1$; $a_3(16) = 1$;
т. е. пучковая структура 3-го шага $\bar{a}_3^* = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 1)$, что по (4) дает $N = 36$.

Добавленные элементы в пучках всех трех шагов в обозначениях $\bar{m}_i = (m_{i1}, \dots, m_{iN_{i-1}})$, i – номер шага, соответственно равны

$$\bar{m}_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6);$$

$$\bar{m}_2 = (2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 6, 7, 7); \quad (5)$$

$$\bar{m}_3 = (3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 7, 8, 6, 7, 8, 7, 8, 8, 7, 8, 8, 8).$$

Представим граф перечисления исходов схемы в примере, где в итерациях будем указывать следующий добавленный элемент в исходе схемы, которым является набор добавленных элементов по траектории графа – последовательность добавленных элементов; на рисунке 2 все исходы приведены в графе.

Число исходов по графу $n = 36$ совпало с вычисленным по (4), а виды исходов – с полученными значениями по (5).

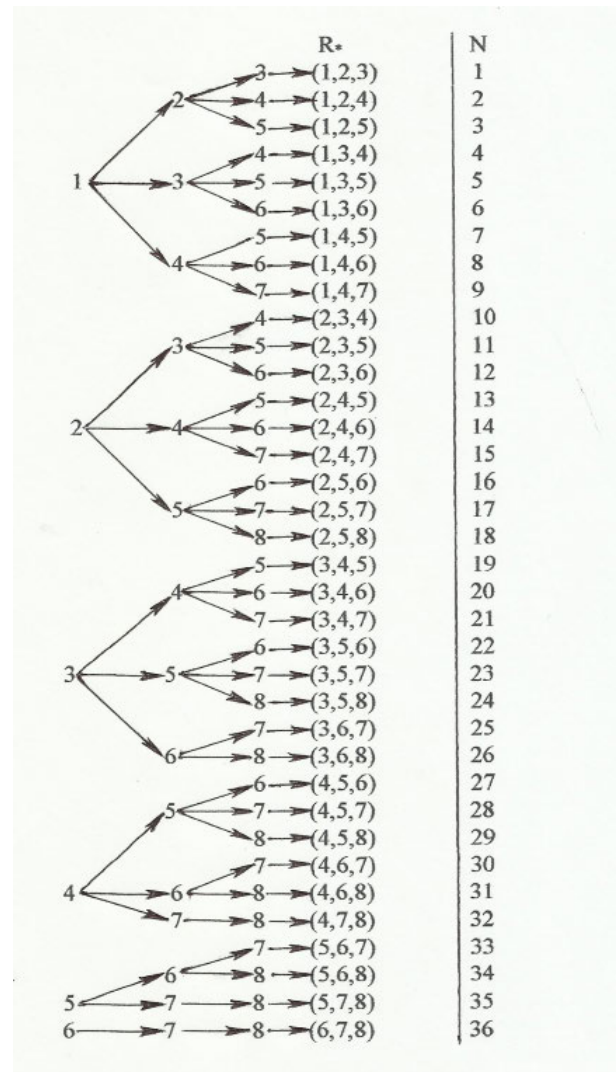


Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы в примере 1

Fig. 2. Enumeration graph of the scheme outcomes in example 1

2. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ

Принципиально задача нумерации (ЗН) решена в [5] с последовательными зависимыми действиям выбора по одному элементу в исходе схемы сочетаний в нашей схеме. С учетом характера этих действий по пучковой структуре графа перечисления ее исходов, исследованной в п. 1, решение ЗН будет здесь приведено.

Прямая задача нумерации

Пусть задан номер $N_* = N_*^{(r)}$ исхода схемы. Требуется найти его вид $R_* = R_*^{(r)}$ при полученных в п. 1 пучковых структурах графа на каждом шаге. Для этого решаем следующие подзадачи (шаги):

1) ищем номер пучка, содержащего искомый исход, что совпадает с номером $N_*^{(r-1)}$ предшествующего состояния на $(r-1)$ -м шаге:

$$N_*^{(r-1)} = \delta + \max t : \left(\sum_{j=1}^t a_{rj}^* = A_r^{(i)} \leq N_*^{(r)} \right), \quad (6)$$

где $\delta = 0$ при $A_r = N_*^{(r)}$ и $\delta = 1$ при $A_r < N_*^{(r)}$; заменяя в (6) r на i , доходим по рекурренте (2) до первого шага;

2) по (6) ищем номера $\{p_i\}$, $i = \overline{1, r}$ состояний, предшествующих искомому в пучках при $N_*^{(0)} = 1$:

$$p_i = N_*^{(i)} - A_i; \quad (7)$$

3) из логики перечисления и нумерации исходов схемы и из рекуррентных формул (2) и (3) соответственно диапазонов выбора элемента исхода на i -м шаге и размеров пучков графа перечисления исходов схемы и из (5) по результату п. 2) получаем исход i -го действия

$$n_i = p_i + m_{iN_*^{(i-1)}}, \quad i = \overline{1, r}; \quad (8)$$

4) объединяя результаты п. 3) всех r действий, находим R_* .

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 $N_* = 16$. Тогда по графу на рисунке 2 визуально получаем $R_*^{(3)} = (2, 5, 6)$.

Проверим этот результат по формулам (6), (7) и (8):

по виду \bar{a}_i^* из п. 1 в примере 1 и (6) $N_*^{(2)} = 5 + 1 = 6$; по (7) $p_3 = 16 - 15 = 1$; из \bar{m}_3 и (8) получаем $n_3 = 1 + 5 = 6$;

по виду \bar{a}_i^* из п. 1 в примере 1 и (6) $N_*^{(1)} = 1 + 1 = 2$; по (7) $p_2 = 6 - 3 = 3$; из \bar{m}_2 и (8) получаем $n_2 = 3 + 2 = 5$;

по виду \bar{a}_i^* из п. 1 в примере 1 и (6) $N_*^{(0)} = 1 + 1 = 2$; по (7) $p_1 = 2 - 1 = 1$; из \bar{m}_1 и (8) получаем $n_1 = 1 + 1 = 2$;

объединяя результаты значений n_1, n_2, n_3 , получаем искомый вид исхода схемы $R_*^{(3)} = (2, 5, 6)$, что совпадает с визуальным результатом.

Обратная задача нумерации

Пусть дан вид исхода $R_* = (n_1, \dots, n_r)$. Нужно найти его номер N_* .

Задача решается по траектории от начального состояния к искомому в графе перечисления исходов схемы путем определения на каждом шаге номера пучка и номера в пучке прохождения этой траектории, который в [5] не найден. Тогда по полученной в п. 1 пучковой структуре графа с известными размерами пучков на каждом шаге искомый номер получаем как сумму размеров предшествующих пучков искомого состояния траектории r -го шага, сложенной с его номером в содержащем его пучке на r -м шаге. Таким образом, решение задачи проводится в три шага:

1) нахождение номеров последовательных состояний траектории в пучках графа перечисления исходов схемы $\{l_i\}$, $i = \overline{1, r}$, по рекуррентной формуле:

$$l_i = n_i - n_{i-1} \quad (9)$$

при $n_0 = 0$;

2) нахождение номеров последовательных пучков, предшествующих пучкам прохождения траектории в графе от начального исхода к конечному данного вида, т. е. перечисления исходов схемы $\{q_i\}$, $i = \overline{1, r}$, по формулам:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = n_1 - 1, \quad q_i = \sum_{j=1}^{q_{i-1}} I(a_{ij}^*) + l_{i-1} - 1, \quad (10)$$

где $I(z) = 0$ при $z = 0$ и $I(z) = 1$ при $z \geq 0$;

3) вычисление искомого номера исхода по номеру содержащего его пучка и его номера в этом пучке при известных из п. 1 размерах пучков по формуле:

$$N_* = \sum_{j=1}^{q_r} a_{rj}^* + l_r. \quad (11)$$

Пример 3. Пусть в условиях примера 1 $R_*^{(3)} = (2, 5, 6)$. Тогда по графу на рисунке 2 визуально получаем $N_*^{(3)} = 16$. Проверим этот результат по формулам (9)–(11) при $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$: по (9) $l_1 = 2$, $l_2 = 5 - 2 = 3$, $l_3 = 6 - 5 = 1$; из примера 1 $\bar{a}_1^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $\bar{a}_2^* = (3, 3, 3, 3, 2, 1)$, $\bar{a}_3^* = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$ и по (10) $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_3 = 3 + 2 = 5$;

по данным выше $\bar{a}_1^*, \bar{a}_2^*, \bar{a}_3^*, l_3, q_2$ и по (11) $N_* = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 16$, что совпадает с визуальным результатом.

3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Вероятности исходов схемы вычисляются по графу перечисления исходов схемы по формуле умножения вероятностей последовательных наборов их элементов из данных в (2) диапазонов в соответствии с процедурой их перечисления, описанной в п. 1. Неравные вероятности исходов возникают в связи с уменьшением части диапазонов варьирования правых границ вариантов значений элементов исхода схемы сочетаний по мере их роста в порядке перебора в соответствии с (2). Для иллюстрации приведем вычисление вероятностей исходов схемы примера 1 (см. рис. 2), обозначая их в порядке перечисления исходов схемы через $(p_1, p_2, \dots, p_{36})$:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{24} = p_{27} = p_{28} = p_{29} = (1/6)(1/3)(1/3) = 1/54;$$

$$p_{25} = p_{26} = p_{30} = p_{31} = (1/6)(1/3)(1/2) = 1/36;$$

$$p_{32} = (1/6)(1/3) \cdot 1 = 1/18;$$

$$p_{33} = p_{34} = (1/6)(1/2)(1/2) = 1/24;$$

$$p_{35} = (1/6)(1/2) \cdot 1 = 1/12;$$

$$p_{36} = (1/6) \cdot 1 \cdot 1 = 1/6.$$

Проверка на распределение: $\sum_{i=1}^{36} p_i = (27/54) + (4/36) + (1/18) + (2/24) + (1/12) + (1/6) = 1$.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

В отличие от обычного моделирования исходов схемы, состоящего в проведении процедуры их непосредственного формирования с учетом специфики схемы, аналитический результат решения прямой ЗН для исходов схемы дает возможность проведения единообразного подхода к моделированию ее исходов – так называемого быстрого моделирования при известном вероятностном распределении исходов путем разыгрывания для каждого по одному случайному числу его номера методом маркировки (см. [7]), определяющего вид исхода, что требует меньшего числа операций.

5. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЧИСЛА ИСХОДОВ СХЕМЫ ПО МОДЕЛИ

Моделируем по [7] N_A исходов схемы сочетаний из n различных элементов по r без учета их порядка из C_n^r . Для каждого исхода вычисляем его степ и определяем среди смоделированных число M исходов со степенями $< S$. Тогда искомое число исходов нашей схемы приближенно определяется методом пропорций по формуле

$$N \approx \frac{MC_n^r}{N_A} = \tilde{N},$$

где достаточно большое значение числа N_A определяется требуемыми точностью и надежностью оценки для N из нижеприведенных неравенств. Исследуем качество полученной оценки \tilde{N} для N исходов нашей схемы, где M/N_A – наблюдаемая частота успеха опыта – появления ее исхода среди N_A исходов схемы размещений. Число M можно представить в виде $M = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_A}$, где при $i = \overline{1, N_A}$ $\{X_i\}$ – случайные величины, имеющие распределение Бернулли с вероятностью успеха $p = N/C_n^r$. Тогда по уточненной по неравенству Чебышева теореме Бернулли выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \gamma &= P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{C_n^r}\right| < \varepsilon^*\right) = \\ &= P\left(\left|\frac{MC_n^r}{N_A} - N\right| < \varepsilon^* C_n^r = \varepsilon\right) = \\ &= P(|\tilde{N} - N| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{N_A(\varepsilon^*)^2} \geq 1 - \frac{(C_n^r)^2}{4N_A\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

где для оценки \tilde{N} числа N исходов нашей схемы ε – ее точность, а $\gamma \geq 1 - \frac{(C_n^r)^2}{4N_A\varepsilon^2}$ – оценка ее надежности γ с этой точностью. Для получения нетривиальной оценки для γ потребуем, чтобы $N_A > (C_n^r)^2/4\varepsilon^2$.

Более точную оценку надежности γ с заданной точностью ε оценки \tilde{N} числа N исходов нашей схемы можно получить по следствию из теоремы Муавра-Лапласа из соотношений

$$\begin{aligned} \gamma &= P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{C_n^r}\right| \leq \varepsilon^*\right) = \\ &= P\left(\left|\frac{MC_n^r}{N_A} - N\right| \leq \varepsilon^* C_n^r = \varepsilon\right) = \\ &= P(|\tilde{N} - N| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon^* \sqrt{N_A/p(1-p)}\right) \geq \\ &\geq 2\Phi(2\varepsilon\sqrt{N_A/C_n^r}), \end{aligned}$$

где $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^x \exp^{-x^2/2} dx$ – табличная функция Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дейвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 335 с.
2. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 9. С. 33–38.
3. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 10. С. 28–31.

4. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с заданным минимальным размахом выборки // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 136–140. doi: 10.17076/mat411
5. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 25–27.

6. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 8. С. 15–21.
7. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

Поступила в редакцию 12.12.2017

REFERENCES

1. David H. Poryadkovye statistiki [Order statistics]. Moscow: Nauka, 1979. 335 p.
2. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontroliery* [Industrial Automatic Control Systems and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.
3. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s ogranichennym razmakhom [The analysis of the combination scheme with a limited range]. *Industrial Automatic Control Systems and Controllers*. 2015. No. 10. P. 28–31.
4. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s zadannym minimal'nyim razmakhom vyborke [Combinatorial analysis of a combinations circuit with given minimal range of sample]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans.

KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 136–140. doi: 10.17076/mat411

5. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz obobshchennoi skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of simultaneous and sequential actions]. *Industrial Automatic Control Systems and Controllers*. 2016. No. 4. P. 25–27.
6. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Method graphs for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2014. No. 8. P. 15–21.
7. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

Received December 12, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталья Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: 89037411345

УДК 519.179.4

LIMIT DISTRIBUTIONS OF VERTEX DEGREES IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

I. A. Chepliukova, Yu. L. Pavlov

*Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre
of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russia*

The configuration graph where vertex degrees are independent identically distributed random variables is often used for modeling of complex networks such as the Internet. We consider a random graph consisting of N vertices. The random variables η_1, \dots, η_N are equal to the degrees of vertices with the numbers $1, \dots, N$. The probability $\mathbf{P}\{\eta_i = k\}$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$, is equivalent to $h(k)/k^\tau$ as $k \rightarrow \infty$, where $h(x)$ is a slowly varying function integrable in any finite interval, $\tau > 1$. We obtain the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree under the condition that the sum of degrees is equal to n and $N, n \rightarrow \infty$.

Key words: configuration graph; the limit distribution; vertex degree.

И. А. Чеплюкова, Ю. Л. Павлов. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН В УСЛОВНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ГРАФЕ

Конфигурационный граф, степени вершин которого являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, часто используют для моделирования сложных сетей, таких как Интернет. Мы рассматриваем случайный граф с N вершинами. Случайные величины η_1, \dots, η_N равны степеням вершин с номерами $1, \dots, N$. Вероятность $\mathbf{P}\{\eta_i = k\}$, $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$, пропорциональна величине $h(k)/k^\tau$ при $k \rightarrow \infty$, где $h(x)$ – интегрируемая на любом конечном интервале медленно меняющаяся функция и $\tau > 1$. Найдены предельные распределения максимальной степени вершин и числа вершин заданной степени при условии, что сумма степеней равна n при $N, n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: конфигурационный граф; предельное распределение; степень вершины.

INTRODUCTION

The study of random graphs has been causing growing interest in connection with the wide use of these models for the description of complex networks (see, e. g. [3, 6, 11]). Such models can be used to adequately describe the topology of transport, electricity, social, telecommunication networks and global Internet. Observations on

real networks showed that their topology can be described by random graphs with vertex degrees being independent identically distributed random variables with power-law distribution. In [3] it was suggested that for large k the number of vertices with the degree k is proportional to $k^{-\tau}$, where $\tau > 1$. That is why in [11] it was suggested that the distribution of the vertex degree η is

$$\mathbf{P}\{\eta \geq k\} = h(k)k^{-\tau+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

where $h(k)$ is a slowly varying function.

We consider a random graph consisting of $N+1$ vertices. Let random variables η_1, \dots, η_N be equal to the degrees of vertices with the numbers $1, \dots, N$. Each vertex is assigned a certain degree in accordance with the distribution (1). The vertex degree is the number of stubs (or semiedges) that are numbered in an arbitrary order. Stubs are vertex edges for which adjacent nodes are not yet determined. The vertex 0 is auxiliary and has degree 0 if the sum of all other vertices is even, else the degree is 1. It is clear that we need to use the auxiliary vertex 0 for the sum of degrees to be even. The graph is constructed by joining all the stubs pairwise equiprobably to form links.

There are many papers where the results describing the limit behaviour of different random graph characteristics were obtained. The authors of [11] were sure (without proof) that the function $h(k)$ in (1) does not influence the limit results, and that to study the configuration graph one can replace $h(k)$ with the constant 1. In our work we will show that the role of the slowly varying function $h(k)$ is more complicated.

We consider the subset of random graphs under the condition $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$. Such conditional graphs can be useful for modeling of networks for which we can estimate the number of communications. They are useful also for studying networks without conditions on the number of links by averaging the results of conditional graphs with respect to the distribution of the sum of degrees. Conditional random graphs were first analyzed in [9], where $h(k) \equiv 1$. Obviously, the limit behaviour of a random graph depends on the degree structure. In [9] the limit distributions were obtained for the maximum vertex degree and the number of vertices of a given degree as N and n tend to infinity in such a way that $1 < n/N < \zeta(\tau)$, where $\zeta(\tau)$ is the value of the Riemann's zeta-function at the point τ . For other zones of parameters analogous results were obtained in papers [7, 8, 10].

Here we extend the results on the maximum vertex degree and the number of vertices of a given degree to the configuration graphs with degree distribution (1), where $h(k)$ is not constant. In the following section the main results are formulated, then auxiliary statements are

proved. And the last section contains proofs of the main results.

MAIN RESULTS

In the paper we assume that the distributions of node degrees are

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{h(k)}{k^\tau \Sigma(1, \tau)}, \quad (2)$$

where $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$, $\tau > 1$, $h(k)$ is a slowly varying function integrable in any finite interval and

$$\Sigma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k h(k) k^{-y}. \quad (3)$$

We denote also by ξ_1, \dots, ξ_N the auxiliary independent identically distributed random variables such that

$$p_r(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \lambda^k p_k \Sigma(1, \tau) / \Sigma(\lambda, \tau), \quad (4)$$

where $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$ and the parameter $\lambda = \lambda(n, N)$ belongs to the interval $(0, 1)$. From (2)–(4) we obtain

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \Sigma(\lambda, \tau - 1) / \Sigma(\lambda, \tau), \quad (5)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 = \Sigma(\lambda, \tau - 2) / \Sigma(\lambda, \tau) - m^2.$$

Let the parameter $\lambda = \lambda(n, N)$ of the distribution (4) be determined by the relation

$$m = \Sigma(\lambda, \tau - 1) / \Sigma(\lambda, \tau) = n/N. \quad (6)$$

We denote by $\eta_{(N)}$ and μ_r the maximum vertex degree and the number of vertices with the degree r , respectively. We get the following results.

Theorem 1. *Let $n, N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow 1, (n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$ and let r be such that*

$$\frac{N\lambda^{r-1}h(r)}{r^\tau} \rightarrow \infty, \quad \frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda, \tau)(r+1)^\tau} \rightarrow \gamma,$$

where γ is a nonnegative constant. Then

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma},$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r + 1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}.$$

We introduce the conditions:

- (A1) $\tau > 4$;
(A2) $3 < \tau \leq 4$, $(1 - \lambda)^{\tau-4-\varepsilon}/\sqrt{N} \rightarrow 0$;
(A3) $5/2 < \tau \leq 3$, $N(1 - \lambda)^{11-3\tau+\varepsilon} \geq C_3 > 0$;
(A4) $\tau = 5/2$, $N(-\ln(1 - \lambda))^2(1 - \lambda)^{7/2+\varepsilon} \geq C_4 > 0$;
(A5) $1 < \tau < 5/2$, $N(1 - \lambda)^{6-\tau+\varepsilon} \geq C_5 > 0$,

where ε is some sufficiently small positive constant.

Theorem 2. Let $N, n \rightarrow \infty, n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, one of the following conditions (A1) – (A5) is fulfilled, and $r = r(N, n)$ take values in such a way that

$$\frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{(r+1)^\tau \Sigma(\lambda, \tau)(1-\lambda)} \rightarrow \gamma,$$

where γ is a positive constant. Then

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = e^{-\gamma}(1 + o(1)).$$

Theorem 3. Let $n, N \rightarrow \infty$ and one of the following conditions is fulfilled

1. $n/N \rightarrow 1$, $r = 1, 2$, $(n - N)^2/N \rightarrow \infty$;
2. $n/N \rightarrow 1$, $r \geq 3$, $N\lambda^{r-1} \rightarrow \infty$;
3. $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, parameters τ, N, n are determined by one of the conditions (A1) – (A5).

Then for a nonnegative integer k uniformly with respect to $u = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ lies in any fixed finite interval

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-u^2/2}(1 + o(1)),$$

where

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda) \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(n/N - r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) \right).$$

Theorem 4. Let $n, N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow 1, n - N \rightarrow \infty, r \geq 2$. Then

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{k!} (Np_r(\lambda))^k \exp\{-Np_r(\lambda)\}$$

uniformly with respect to $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ lies in any fixed finite interval. This assertion remains true for $r \rightarrow \infty$ if $1 < n/N < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$ under one of the following conditions:

1. $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$;

2. $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, parameters τ, N, n are determined by one of the conditions (A1) – (A5).

Remark. In [2], a case of these theorems under the condition $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$ was proved.

AUXILIARY RESULTS

We prove some auxiliary statements (Lemmas 1–6), and use them to prove Theorems 1–5. The technique of obtaining these theorems is based on the generalized allocation scheme suggested by V. F. Kolchin [5]. It is readily seen that for our subset of random graphs

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \\ & = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \end{aligned}$$

Therefore, the conditions of the generalized allocation scheme are valid (see [5]). Let $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ and $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ be two sets of independent identically distributed random variables such that

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leq r\}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \neq r\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

We also put

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)},$$

$$\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}.$$

It is shown in [5] that

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &= \binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times \\ & \times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \end{aligned} \quad (9)$$

From (2)–(6) we can deduce the next lemma.

Lemma 1. Let $N, n \rightarrow \infty$. The next assertions are true:

1. if $n/N \rightarrow 1$ then $\lambda = ((n/N - 1)p_1/p_2)(1 + o(1))$;
2. if $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$ then $\lambda \rightarrow 1$.

Let us consider the limit behaviour of ζ_N .

Lemma 2. *Under the conditions of Theorems 1–4*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}$$

uniformly with respect to integers k such that $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ lies in any fixed finite interval.

Proof. Let $\varphi(t)$ be the characteristic function of the random variable ξ_1 . Then

$$\varphi(t) = \Sigma(e^{it}\lambda, \tau)/\Sigma(\lambda, \tau). \quad (10)$$

Further we will need an explicit form of the third derivative of $\ln \varphi(t)$. From (4) it is not hard to get that

$$\begin{aligned} (\ln \varphi(t))''' &= i \left(-\frac{\Sigma(e^{it}\lambda, \tau - 3)}{\Sigma(e^{it}\lambda, \tau)} + \right. \\ &+ 3 \frac{\Sigma(e^{it}\lambda, \tau - 2)\Sigma(e^{it}\lambda, \tau - 1)}{\Sigma^2(e^{it}\lambda, \tau)} - \\ &\left. - 2 \frac{\Sigma^3(e^{it}\lambda, \tau - 1)}{\Sigma^3(e^{it}\lambda, \tau)} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Let $n/N \rightarrow 1$. From (2)–(4) it is easy to obtain that

$$\sigma^2 = O(\lambda), \quad |(\ln \varphi(t))'''| \leq C_3 \lambda. \quad (12)$$

Let $\varphi_N(t)$ be the characteristic function of the random variable $(\zeta_N - n)/(\sigma\sqrt{N})$. Then

$$\begin{aligned} \ln \varphi_N(t) &= -\frac{int}{\sigma\sqrt{N}} + N \ln \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) = \\ &= -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3 Q(t/(\sigma\sqrt{N}))}{6\sigma^3\sqrt{N}}. \quad (13) \end{aligned}$$

Then from Lemma 1, (12) and (13) follows relation

$$\ln \varphi_N(t) = -t^2/2 + o(1). \quad (14)$$

Let $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$. It is well known (see e.g. [4]) that the slowly varying

function integrable in any finite interval has the following properties:

1. $h(x) > 1/\sqrt{x}$ for sufficiently large x ;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x+t)/h(x) = 1, \quad t \geq 0$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)/x^\varepsilon = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)x^\varepsilon = \infty$ for any $\varepsilon > 0$;
4. $h(x) = c(x) \exp\left\{\int_\alpha^x \varepsilon(t)/tdt\right\}$, where $\alpha > 0, c(x) \rightarrow c \neq 0, \varepsilon(x) \rightarrow 0$, as $x \rightarrow \infty$.

Using the properties (15) and Lemma 1 we can deduce that for $j = 0, 1, 2, 3$

$$|\Sigma(e^{it}\lambda, \tau - j)| \leq C_4 \lambda \Phi(\lambda, \tau - j, 1) + \lambda \Phi(\lambda, \tau - j - \varepsilon, 1), \quad (16)$$

$$|\Sigma(e^{it}\lambda, \tau)| \geq C_5 \quad \text{as } t \rightarrow 0, \quad (17)$$

where $\Phi(x, s, a)$ is the Lerch transcendent function:

$$\Phi(x, s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k (k+a)^{-s}. \quad (18)$$

It is well known (see e.g. [1]) that for the Lerch transcendent function the following properties are valid:

1. $\lambda \Phi(\lambda, 1, 1) = -\ln(1 - \lambda),$
 $(1 - \lambda)\Phi(\lambda, 0, 1) = 1;$
2. $(1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1) = O((1 - \lambda)^\tau),$
 $\tau < 1, \quad \lambda \rightarrow 1.$

From (3), (5), (11), (16)–(19) it is not hard to get that

$$\sigma^2 \geq \begin{cases} C_6 > 0, & \tau > 5/2; \\ C_7(-\ln(1 - \lambda)), & \tau = 5/2; \\ C_8(1 - \lambda)^{\tau-5/2}, & 1 < \tau < 5/2, \end{cases} \quad (20)$$

$$\sigma^2 \leq \begin{cases} C_9 > 0, & \tau > 3; \\ C_{10}(1 - \lambda)^{\tau-3-\varepsilon}, & 1 < \tau \leq 3, \end{cases} \quad (21)$$

$$|\varphi'''(t)| = \begin{cases} O(1), & \tau > 4; \\ O((1 - \lambda)^{\tau-4-\varepsilon}), & 1 < \tau \leq 4. \end{cases} \quad (22)$$

The next expression is valid for a sufficiently small t :

$$\begin{aligned} \ln \varphi(t) &= t (\ln \varphi(t))'|_{t=0} + \frac{t^2}{2} (\ln \varphi(t))''|_{t=0} + \\ &+ \frac{t^3}{6} Q(t), \quad (23) \end{aligned}$$

where $|Q(t)| \leq 2 \max_{|u| \leq |t|} |(\ln \varphi(u))'''|$.

Using (13), (20)–(23) and (A1)–(A5) we get (14).

According to the inversion formula we represent the probability $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ as the integral

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt,$$

where $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$. Since

$$(\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-z^2/2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt-t^2/2} dt, \quad (24)$$

the difference

$$R = 2\pi[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}]$$

can be rewritten as the sum of four integrals: $R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, where

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-izt} [\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}] dt, \\ I_2 &= \int_{A < |t| < a\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, \\ I_3 &= \int_{a\sigma\sqrt{N} \leq |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, \\ I_4 &= - \int_{A < |t|} e^{-izt-t^2/2} dt, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{a\sigma\sqrt{N} \leq |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, \\ I_4 &= - \int_{A < |t|} e^{-izt-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

$$B(\lambda, \tau) = \begin{cases} (1 - \lambda)^{-\tau+4+\varepsilon}, & 5/2 < \tau \leq 4; \\ (-\ln(1 - \lambda))(1 - \lambda)^{3/2+\varepsilon}, & \tau = 5/2; \\ (1 - \lambda)^{3/2+\varepsilon}, & 1 < \tau < 5/2. \end{cases} \quad (27)$$

From (13) we get that

$$\begin{aligned} &\ln \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) = \\ &= \frac{itm}{\sigma\sqrt{N}} - \frac{t^2}{2N} + \frac{t^3}{6\sigma^3 N^{3/2}} Q \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right), \end{aligned}$$

where

$$|Q(t/(\sigma\sqrt{N}))| \leq 2 \max_{|u| \leq |t/(\sigma\sqrt{N})|} |\ln''' \varphi(u)|.$$

In the integration domains of the integral I_2' $t/(\sigma\sqrt{N}) \rightarrow 0$, then from Lemma 1, (17), (20) and (27) we obtain:

$$\left| \frac{t}{(\sigma^3\sqrt{N})} Q \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq a.$$

the positive constants A and a will be chosen later. Lemma 2 will be proved if we show that by choosing sufficiently large n, N the difference R can be made arbitrarily small. From (14) we get that $I_1 \rightarrow 0$. Moreover,

$$|I_4| \leq \int_{A < |t|} e^{-t^2/2} dt, \quad (26)$$

and the integral I_4 is as small as desired, provided that A is large enough.

Let us estimate the integral I_2 . From (23) and (12) we obtain that for sufficiently small a $|\varphi_N(t)| \leq e^{-C_{11}t^2}$ as $n/N \rightarrow 1$, therefore the next estimate is true $|I_2| \leq \int_{A < |t|} e^{-C_{11}t^2} dt$, and the integral I_2 is small for large enough A . From (13), (17) and (20) we obtain the same estimate as $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, $\tau > 4$.

Let $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, $\tau \leq 4$. We divide I_2 into integrals I_2' and I_2'' , where the integration domains are

$$\{t : A < |t| \leq aB(\lambda, \tau)\sigma\sqrt{N}\}$$

and

$$\{t : aB(\lambda, \tau)\sigma\sqrt{N} < |t| \leq a\sigma\sqrt{N}\},$$

where

It follows that for small enough a $|\varphi_N(t)| \leq \exp\{-C_{12}t^2\}$. Therefore

$$|I_2'| \leq 2 \int_{A < |t|} e^{-C_{12}t^2} dt,$$

and the integral I_2' is as small as desired, provided that A is large enough. To estimate the integral I_2'' we expand the function $\Sigma(\lambda z, \tau)$, where $z = e^{it/(\sigma\sqrt{N})}$ in the Taylor series near the point $z = 1$. Then

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 - (1 + o(1))\Sigma(\lambda, \tau - 1)\Sigma^{-1}(\lambda, \tau) \times \\ &\quad \times (1 - \cos(t/(\sigma\sqrt{N})) - i \sin(t/(\sigma\sqrt{N}))). \end{aligned}$$

Therefore

$$|\varphi_N(t)| \leq |\varphi^N(t/(\sigma\sqrt{N}))| \leq$$

$$\leq \exp\{C_{13}N(1 - \cos(t/(\sigma\sqrt{N})))\}.$$

Using (27), the conditions (A1) – (A5) and the inequality

$$1 - \cos(t/(\sigma\sqrt{N})) \geq 1 - (1 - C_{14}t^2/(\sigma^2N)),$$

$$|t| < a\sigma\sqrt{N},$$

we can show that

$$\begin{aligned} |I_2''| &\leq \int_{aB(\lambda,\tau)\sigma\sqrt{N}}^{\infty} e^{-C_{14}t^2/\sigma^2} dt \leq \\ &\leq C_{15} \frac{\sigma}{aB(\lambda,\tau)\sqrt{N}} e^{-C_{14}a^2B^2(\lambda,\tau)N} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Let us consider the integral I_3 . For $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$ the inequality

$$|\varphi(t)| \leq e^{-C_{16}} \quad (28)$$

is valid. Then under the condition that $n/N \rightarrow 1$ it can be shown that

$$\varphi(t) = e^{it} (1 + \lambda p_2(e^{it} - 1)/p_1) + o(\lambda^2).$$

From this and Lemma 1 we get that for $\varepsilon \leq |t|/(\sigma\sqrt{N}) \leq \pi$

$$|\varphi(t/(\sigma\sqrt{N}))| \leq e^{-C_{17}\lambda}.$$

Therefore using relations (12) and (25) it is not hard to see that

$$|I_3| \leq C_{18}\sqrt{n-N} \exp\{-C_{19}(n-N)\} \rightarrow 0.$$

Let $n/N \rightarrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$. From the conditions (A1) – (A5), (21) and (28) we get that

$$|I_3| \leq C_{20}\sigma\sqrt{N}e^{-C_{21}N} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Thus Lemma 2 is proved. \square

Let $\varphi_r(t)$ be the characteristic function of the random variable $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Lemma 3. *Let $n, N \rightarrow \infty$. Then uniformly with respect to t in any fixed finite interval the next conclusions are true*

1. if $n/N \rightarrow 1, (n-N)^3/N^2 \rightarrow \infty, NP_{r-1} \rightarrow \infty, NP_r \rightarrow \gamma$, where γ is a nonnegative constant, then for $s = 0, \pm 1$ $\varphi_{r+s}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$;
2. if $n/N \rightarrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau), NP_r \rightarrow \gamma$, where γ is a positive constant, parameters τ, N, n are determined by the conditions (A1) – (A5) then $\varphi_r(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$.

Proof. From (7) and (10) it is easy to see that

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) &= \quad (30) \\ &= \exp\left\{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}\right\} (1 - P_r)^{-N} \varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \times \\ &\times \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda) \exp\left\{\frac{itk}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\right)^N. \end{aligned}$$

It is not hard to get that

$$\begin{aligned} \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda) \exp\left\{tk/(\sigma\sqrt{N})\right\} &= \\ &= P_r + R(t), \quad (31) \end{aligned}$$

where $R(t) \leq |t/\sigma\sqrt{N}| \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda)k$.

Let $n/N \rightarrow 1$. It is clear that

$$NP_r = N \sum_{i \geq 0} p_{r+i+1}(\lambda) =$$

$$= N \left(\sum_{i=0}^M p_{r+i+1}(\lambda) + \sum_{i \geq M+1} p_{r+i+1}(\lambda) \right), \quad (32)$$

the positive constant M will be chosen later. For the fixed integer r we get from Lemma 1, (2)–(4) and (15) that

$$\sum_{i=0}^M p_{r+i+1}(\lambda) = \frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda, \tau)(r+1)^\tau} (1 + o(1))$$

and for large enough N

$$\sum_{i \geq M+1} p_{r+i+1}(\lambda) = O\left(\sum_{i \geq 0}^M p_{r+i+1}(\lambda)\right).$$

Therefore

$$NP_r = \frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda, \tau)(r+1)^\tau} (1 + o(1)). \quad (33)$$

Using $NP_r \rightarrow \gamma$ we obtain that for fixed integer r

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k>r} kp_k(\lambda) = o(N^{-1}). \quad (34)$$

As $r \rightarrow \infty$ we can deduce from Lemma 1, (2)–(4) and (15) the relation (33) is valid.

From (2)–(4), (15) and the relation $NP_r \rightarrow \gamma$ we can get that as $r \rightarrow \infty$

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k>r} kp_k(\lambda) \leq C_{22}t(r+1)p_r(\lambda)/(\sigma\sqrt{N}).$$

Since $NP_{r-1} \rightarrow \infty$ it is not hard to show that $r = o(\sqrt{n-N})$. From this, (31), (35) it follows that

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k>r} kp_k(\lambda) = o(N^{-1}).$$

Therefore, for $n/N \rightarrow 1$ the relation $\varphi_r(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ holds.

For $s = 1$ we get that $NP_{r+1} \rightarrow 0$. Therefore in this case the assertion of Lemma 3 follows from (30) by substituting r with $r + 1$.

Let $s = -1$. By analogy with the estimate (34) we can obtain that as $r \rightarrow \infty$

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k \geq r} p_k(\lambda)k \leq C_{23}rp_r(\lambda)/(\sigma\sqrt{N}).$$

Using (15) and the condition $(n-N)^3/N^2 \rightarrow \infty$ the relation (34) follows from this and (2)–(4). By analogy with this estimate for fixed integer r we can get that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k \geq r} p_k(\lambda)k = \\ & = \frac{trp_r(\lambda)}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k \geq r} \lambda^{k-r} \left(\frac{r}{k}\right)^{\tau-1} \frac{h(k)}{h(r)} \leq \\ & \leq C_{24} \frac{trp_r(\lambda)}{\sigma\sqrt{N}} = o\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Therefore, as $n/N \rightarrow 1$, the relation $\varphi_{r-1}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ holds.

Let $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$. Using (2)–(4), the properties of the slowly varying function (15), Lemma 1 and (32) we can deduce that

$$\sum_{i=0}^M p_{r+i+1}(\lambda) = p_{r+1}(\lambda) \sum_{i=0}^M \lambda^i (1 + o(1)). \quad (36)$$

From (15) it is not hard to get

$$\sum_{i \geq M+1} p_{r+i+1}(\lambda) = o\left(\sum_{i=0}^M p_{r+i+1}(\lambda)\right). \quad (37)$$

From the condition $NP_r \rightarrow \gamma$ it follows that $r \rightarrow \infty$. Then from (32), (36), (37) we get that

$$NP_r = \frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda, \tau)(r+1)^\tau(1-\lambda)}(1 + o(1)). \quad (38)$$

Using Lemma 1, (15), (38) and the condition $NP_r \rightarrow \gamma$ it is not hard to see that

$$\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{k \geq r+1} p_k(\lambda)k \leq C_{25} \frac{t(r+1)p_{r+1}(\lambda)}{\sigma\sqrt{N}(1-\lambda)} \leq$$

$$\leq C_{26} \frac{t(r+1)\gamma}{\sigma N^{3/2}}. \quad (39)$$

From (38) and the condition $NP_r \rightarrow \gamma$ it is easy to see that

$$\frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{(\Sigma(\lambda, \tau)(r+1)^\tau(1-\lambda))} \rightarrow \gamma > 0. \quad (40)$$

Using the conditions (A1)–(A5), (20) and (40) we get that $(r+1)/(\sigma\sqrt{N}) = o(1)$. From this and (39) we can obtain that

$$t(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{k \geq r+1} p_k(\lambda)k = o(N^{-1}).$$

Then the assertion of Lemma 3 follows from (30) and (31). \square

Lemma 4. *Let $n, N \rightarrow \infty$ and one of the following conditions be fulfilled*

1. $n/N \rightarrow 1, (n-N)^3/N^2 \rightarrow \infty, NP_{r-1} \rightarrow \infty, NP_r \rightarrow \gamma$, where γ is a nonnegative constant;
2. $n/N \nearrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau), NP_r \rightarrow \gamma$, where γ is a positive constant and parameters τ, N, n are determined by one of the conditions (A1)–(A5).

Then

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}$$

uniformly with respect to integers k such that $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ lies in any fixed finite interval.

Proof. We follow the scheme of proving Lemma 2. We represent the probability $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\}$ as the integral

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_r(t) dt,$$

where $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ and $\varphi_r(t)$ is the characteristic function of the random variable $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma\sqrt{N})$. Using (24) the difference

$$R = 2\pi[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}]$$

can be rewritten as the sum of four integrals: $R = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4$, where I_4 is given by (25) and $I_1^{(r)} - I_3^{(r)}$ are constructed similarly to $I_1 - I_3$ by substituting $\varphi_r(t)$ instead of $\varphi_N(t)$ in (25).

From Lemma 3 it follows that $I_1^{(r)} \rightarrow 0$. From, (12), (20)–(23) and (30) we get that

$$|\varphi_r(t)| \leq (1 - P_r)^{-N} (\exp \{C_{27}t^2/N\} + C_{28}/N)^N.$$

Therefore, $|I_2^{(r)}| \leq C_{29} \int_A^\infty e^{-C_{30}t^2} dt$. It is clear that $I_2^{(r)}$ can be made arbitrarily small by choosing a sufficiently large A .

It is easy to show that we can estimate the integral $I_3^{(r)}$ by analogy with I_3 in Lemma 2. For I_4 we can use the estimation (26). This completes the proof of Lemma 4.

It is not hard to see that the conclusion of Lemma 4 is true when replacing r with $r - 1$ and $r + 1$ as $n/N \rightarrow 1$. In these cases the proofs are similar to the proof of Lemma 4. \square

From (4) and (7) we have that

$$\begin{aligned} m_r &= \mathbf{E}\xi_1^{\tilde{r}(r)} = (m - rp_r(\lambda))/(1 - p_r(\lambda)), \\ \sigma_r^2 &= \mathbf{D}\xi_1^{\tilde{r}(r)} = \frac{\sigma^2}{(1 - p_r(\lambda))^2} \times \\ &\times \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda)\right). \end{aligned} \quad (41)$$

Let $\tilde{\varphi}_r(t)$ be the characteristic function of the random variable $(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$. By analogy with Lemmas 2–4 it is not hard to prove the following assertions.

Lemma 5. *Let $n, N \rightarrow \infty$ and one of the following conditions be fulfilled*

1. $n/N \rightarrow 1, r = 1, (n - N)^2/N \rightarrow \infty$;
2. $n/N \rightarrow 1, r = 2, (n - N)^2/N \rightarrow \infty$;
3. $n/N \rightarrow 1, r \geq 3, n - N \rightarrow \infty$;
4. $n/N \rightarrow \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$ and parameters τ, N, n are determined by one of the conditions (A1)–(A5).

Then for $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$

$$\tilde{\varphi}_r(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$$

uniformly with respect to t in any fixed finite interval.

Lemma 6. *Under the conditions of Lemma 5 for $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$*

$$\mathbf{P} \left\{ \tilde{\zeta}_S^{(r)} = k \right\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}} e^{-z^2/2} (1 + o(1))$$

uniformly with respect to integers k such that $z = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ lies in any fixed finite interval.

PROOFS OF THEOREMS

We are now ready to prove Theorems 1–4. Using Lemmas 2 and 4 we obtain

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1. \quad (42)$$

The assertion of Theorem 1 follows from $NP_r \rightarrow \gamma, NP_{r-1} \rightarrow \infty$, (8), (33) and (42). The assertion of Theorem 2 follows from (8), (38) and (42).

According to the normal approximation of the binomial distribution under the condition $Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda)) \rightarrow \infty$ Theorem 3 follows from (9), (41) and Lemmas 2, 6.

Using Poisson approximation of the binomial distribution as $p_r(\lambda) \rightarrow 0$, Lemmas 2, 6 and relations (9), (41) we can obtain the assertion of Theorem 4.

The study was carried out under state order to the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS) and supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 16-01-00005a.

REFERENCES

1. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. New York; Toronto; London: McGraw-hill book company, inc, 1953. 317 p.
2. *Cheplyukova I. A.* On limit distributions of vertex degrees in a configuration graph. *Trans. KarRC RAS.* 2015. No. 10. P. 123–130. doi: 10.17076/mat138 (in Russian)
3. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communications Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
4. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1971. 443 p.
5. *Kolchin V. F.* Random Mapping. New York: Springer, 1986. 207 p.
6. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. Y.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications. *Physical Review E.* 2001. E 64, 026118. doi: 10.1103/PhysRevE.64.026118
7. *Pavlov Yu.* On the limit distributions of the vertex degrees of conditional Internet graphs. *Discrete Mathematics and Applications.* 2009. Vol. 19, iss. 4. P. 349–359. doi: 10.1515/dma.2009.023
8. *Pavlov Yu.* On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Mathematics and Applications.* 2010. Vol. 20, iss. 5–6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031

9. *Pavlov Yu., Cheplyukova I.* Random graphs of Internet type and the generalized allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/dma.2008.033

10. *Pavlov Yu., Dertishnikova E.* On the limit distribution of the maximum vertex degree of

random graph of the Internet type. *Trans. KarRC RAS*. 2010. No. 3. P. 59–65 (in Russian).

11. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received January 31, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Павлов Юрий Леонидович

главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Чеплюкова Ирина Александровна

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н., доцент
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTORS:

Pavlov, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

Cheplyukova, Irina

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 81.32

WSD ALGORITHM BASED ON A NEW METHOD OF VECTOR-WORD CONTEXTS PROXIMITY CALCULATION VIA ε -FILTRATION

A. N. Kirillov, N. B. Krizhanovskaya, A. A. Krizhanovsky

Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences

The problem of word sense disambiguation (WSD) is considered in the article. Set of synonyms (synsets) and sentences with these synonyms are taken. It is necessary to automatically select the meaning of the word in the sentence. 1285 sentences were tagged by experts, namely, one of the dictionary meanings was selected by experts for target words. To solve the WSD problem, an algorithm based on a new method of vector-word contexts proximity calculation is proposed. A preliminary ε -filtering of words is performed, both in the sentence and in the set of synonyms, in order to achieve higher accuracy. An extensive program of experiments was carried out. Four algorithms are implemented, including the new algorithm. Experiments have shown that in some cases the new algorithm produces better results. The developed software and the tagged corpus have an open license and are available online. Wiktionary and Wikisource are used. A brief description of this work can be viewed as slides (<https://goo.gl/9ak6Gt>). A video lecture in Russian about this research is available online (<https://youtu.be/-DLmRkepf58>).

Key words: synonym; synset; corpus linguistics; word2vec; Wikisource; WSD; RusVectores; Wiktionary.

А. Н. Кириллов, Н. Б. Крижановская, А. А. Крижановский. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ WSD-ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ НОВОГО СПОСОБА ВЫЧИСЛЕНИЯ БЛИЗОСТИ КОНТЕКСТОВ С УЧЕТОМ ε -ФИЛЬТРАЦИИ СЛОВ

Рассмотрена задача разрешения лексической многозначности (WSD), а именно: по известным наборам синонимов (синсеты) и предложений с этими синонимами требуется автоматически определить, в каком значении использовано слово в предложении. Экспертами были размечены 1285 предложений, выбрано одно из заранее известных значений (синсетов). Для решения WSD-задачи предложен алгоритм, основанный на новом способе вычисления близости контекстов. При этом для более высокой точности выполняется предварительная ε -фильтрация слов, как в предложении, так и в наборе синонимов. Проведена обширная программа экспериментов. Реализовано четыре алгоритма, включая предложенный. Эксперименты показали, что в ряде случаев новый алгоритм показывает лучшие результаты. Разработанное программное обеспечение и размеченный корпус с открытой лицензией доступны онлайн. Использованы синсеты Викисловаря и тексты Викитеки. Краткое описание работы в виде слайдов доступно по ссылке (<https://goo.gl/9ak6Gt>), видео с докладом также доступно онлайн (<https://youtu.be/-DLmRkepf58>).

Ключевые слова: синоним; синсет; корпусная лингвистика; word2vec; Викитека; WSD; RusVectores; Викисловарь.

INTRODUCTION

The problem of word sense disambiguation (WSD) is a real challenge to computer scientists and linguists. Lexical ambiguity is widespread and is one of the obstructions in natural language processing.

In our previous work “Calculated attributes of synonym sets” [6], we have proposed the geometric approach to mathematical modeling of synonym set (synset) using the word vector representation. Several geometric characteristics of the synset words were suggested (synset interior, synset word rank and centrality). They are used to select the most significant synset words, i.e. the words whose senses are the nearest to the sense of the synset.

The topic related to polysemy, synonyms, filtering and WSD is continued in this article. Let us formulate the mathematical foundations for solving the problems of computational linguistics in this article.

Using the approach proposed in the paper [2], we present the WSD algorithm based on a new context distance (proximity) calculation via ε -filtration. The experiments show the advantages of the proposed distance over the traditional average vectors similarity measure of distance between contexts.

NEW ε -PROXIMITY BETWEEN FINITE SETS

It is quite evident that the context distance choice is one of the crucial factors influencing WSD algorithms. Here, in order to classify discrete structures, namely contexts, we propose a new approach to context proximity based on Hausdorff metric and symmetric difference of sets: $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

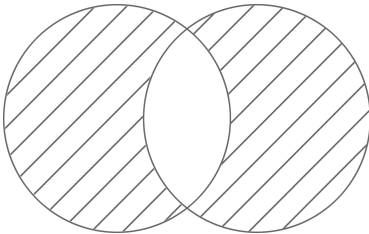


Fig. 1. The set $A\Delta B$ is the shaded part of circles

Recall the notion of Hausdorff metric. Consider a metric space (X, ρ) where X is a set, ρ is a metric in X . Define the ε -dilatation $A + \varepsilon$ of a set $A \subset X$

$$A + \varepsilon = \cup\{\overline{B_\varepsilon(x)} : x \in A\},$$

where $\overline{B_\varepsilon(x)}$ is a closed ball centered at x with the radius ε .

The Hausdorff distance $\rho_H(A, B)$ between compact nonempty sets A and B is

$$\rho_H(A, B) = \min\{\varepsilon > 0 : (A \subset B + \varepsilon) \wedge (B \subset A + \varepsilon)\},$$

where $A + \varepsilon, B + \varepsilon$ are the ε -dilatations of A and B . Consider the following sets (Fig. 2):

$$A(\varepsilon) = A \cap (B + \varepsilon), \quad B(\varepsilon) = B \cap (A + \varepsilon).$$

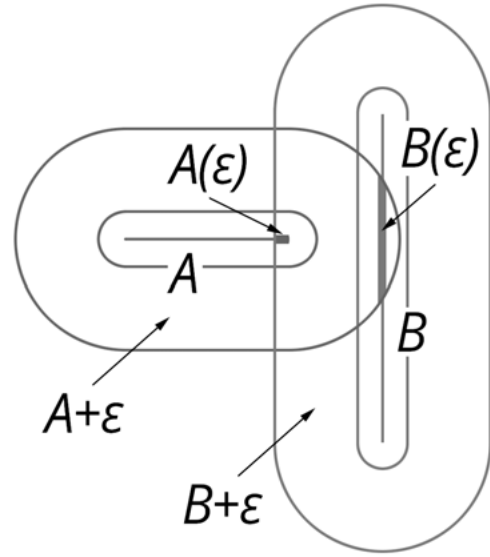


Fig. 2. Two sets $A + \varepsilon$ and $B + \varepsilon$ are the ε -dilatations of segments A and B , and two new proposed set-valued maps $A(\varepsilon)$ and $B(\varepsilon)$ were inspired by Hausdorff distance

Then

$$\rho_H(A, B) = \min\{\varepsilon > 0 : A(\varepsilon) \cup B(\varepsilon) = A \cup B\}.$$

Consider two contexts $W_1 = \{w_{11}, \dots, w_{1m}\}$, $W_2 = \{w_{21}, \dots, w_{2n}\}$, where w_{1i}, w_{2j} are words in the contexts, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Denote by $V_1 = \{v_{11}, \dots, v_{1m}\}, V_2 = \{v_{21}, \dots, v_{2n}\}$ the sets of vectors v_{1i}, v_{2j} corresponding to the words w_{1i}, w_{2j} . Recall that generally in WSD procedures, the distance between words is measured by similarity function, which is a cosine of angle between vectors representing words: $sim(v_1, v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{\|v_1\| \|v_2\|}$, where (v_1, v_2) is a scalar (inner) product of vectors v_1, v_2 , and $\|v_i\|$ is a norm of vector, $i = 1, 2$. In what follows, $sim(v_1, v_2) \in [-1, 1]$. Thus, the less distance the more similarity. Keeping in mind the latter remark, we introduce the following ε -proximity

of vector contexts V_1, V_2 . Given $\varepsilon \geq 0$, construct the sets

$$C(V_1, V_2, \varepsilon) = \{u, v : u \in V_1, v \in V_2, \text{sim}(u, v) \geq \varepsilon\}.$$

$$D(V_1, V_2, \varepsilon) = (V_1 \cup V_2) \setminus C(V_1, V_2).$$

Supposing that sim plays the role of a metric, then $C(V_1, V_2, \varepsilon)$ is analogous to the expression $A(\varepsilon) \cup B(\varepsilon)$ in the definition of the Hausdorff distance.

Denote by $|Y|$ the power of a set $Y \subset X$, $\mathbb{R}_+ = \{x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

Definition 1. The K -proximity of contexts V_1, V_2 is the function

$$K(V_1, V_2, \varepsilon) = \frac{|C(V_1, V_2, \varepsilon)|}{|V_1 \cup V_2|}.$$

It is clear that $K(V_1, V_2, \varepsilon) \in [0, 1]$. We also define the following function.

Definition 2. The \tilde{K} -proximity of contexts V_1, V_2 is the function

$$\tilde{K}(V_1, V_2, \varepsilon) = \frac{|C(V_1, V_2, \varepsilon)|}{1 + |D(V_1, V_2, \varepsilon)|},$$

describing the ratio of “near” and “distant” elements of sets.

The definition implies that $\min \tilde{K}(V_1, V_2, \varepsilon) = 0$, $\max \tilde{K}(V_1, V_2, \varepsilon) = |V_1 \cup V_2|$. The presence of 1 in the denominator permits to avoid zero denominator when $|D(V_1, V_2, \varepsilon)| = 0$.

The ubiquitous distance ϱ between contexts V_1, V_2 is based on the similarity of average vectors: $\varrho(V_1, V_2) = \text{sim}(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$. But the example (Fig. 3) shows that for two geometrically distant and not too similar structures $\varrho(V_1, V_2) = 1$, that is the similarity ϱ takes the maximum value.

Example

Consider the sets $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1\}$ pictured in Fig. 3, where $a_1 + a_3 = \vec{0}$, $a_2 = b_1$. Then, $\text{sim}(A, B) = \text{sim}(\frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), b_1) = \text{sim}(a_2, b_1) = 1$, $\tilde{K}(A, B, \varepsilon) = \frac{2}{3}$, $K(A, B, \varepsilon) = \frac{1}{2}$.

The equality of average vectors does not mean the coincidence of A and B , which are rather different (Fig. 3).

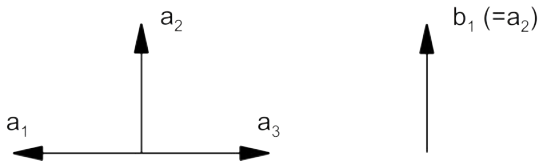


Fig. 3. An example of similar average vectors ($\bar{A} = a_2 = b_1 = \bar{B}$) and totally different sets of vectors: $\{a_1, a_2, a_3\}$ and $\{b_1\}$

AVERAGE ALGORITHM WITH SYNONYMS ε -FILTRATION

Consider a sentence $S_w = (w_1 \dots w_i^* \dots w_n)$ containing a target word w_i^* (denote it as w^*), and a vector representation $S = (v_1 \dots v_i^* \dots v_n)$ of S_w , where w_j is a word, v_j is a vector representation of w_j . Denote v_i^* as v^* . Suppose the target word w^* has l senses. Denote by syn_k^w a synset corresponding to k -th sense, $k = 1, \dots, l$, $\text{syn}_k^w = \{w_{k1}, \dots, w_{ki_k}\}$, where w_{kp} are synonyms. Let $\text{syn}_k = \{v_{k1}, \dots, v_{ki_k}\}$ be a set of vector representations of synonyms w_{kp} , $p = 1, \dots, i_k$.

In what follows, we introduce a procedure of ε -filtration, the idea of which is borrowed from the paper [2].

The synset filtration is the formation of a so called candidate set which consists of those synonyms whose similarity with the words from a sentence is higher than a similarity threshold ε .

The first average algorithm 1, described below, uses average vectors of words of sentences and average vectors of the candidate set of synonyms in synsets.

This algorithm contains the following lines.

Line 1. Calculate the average vector of words of the sentence S

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j$$

Lines 3–6. Given $\varepsilon > 0$, let us construct the filtered set of synonyms for each synset

$$\text{cand}_k(\varepsilon) = \{u \in \text{syn}_k : u \neq v^*, \text{sim}(u, v^*) > \varepsilon\}.$$

Denote by $s_k(\varepsilon) = |\text{cand}_k(\varepsilon)|$ the power of a set $\text{cand}_k(\varepsilon)$.

Line 7. Calculate for $s_k(\varepsilon) > 0$ the average vector of the synset candidates

$$\overline{\text{syn}}_k(\varepsilon) = \frac{1}{s_k(\varepsilon)} \sum_{u \in \text{cand}_k(\varepsilon)} u.$$

If $s_k(\varepsilon) = 0$, then let $\overline{\text{syn}}_k(\varepsilon)$ be equal to the zero vector.

Line 8. Calculate the similarity of the average vectors of the sentence and the k -th filtered synset

$$\text{sim}_k(\varepsilon) = \text{sim}(\overline{\text{syn}}_k(\varepsilon), \bar{S}).$$

Line 10–11. Suppose $\max_{k=1, \dots, l} \{\text{sim}_k(\varepsilon)\} = \text{sim}_{k^*}(\varepsilon)$, i.e. $k^* \in \{1, \dots, l\}$ is the number of the largest $\text{sim}_k(\varepsilon)$. If k^* is not unique, then take

Algorithm 1: Average algorithm with synonyms ε -filtration

Data: v^* – vector of the target word w^* with l senses (synsets),
 $v_i \in S$, S – sentence with the target word w^* , $v^* \in S$,
 $\{syn_k\}$ – synsets of the target word, that is $syn_k \ni v^*$, $k = \overline{1, l}$.

Result: $k^* \in \{1, \dots, l\}$ is the number of the sense of the word w^* in the sentence S .

```

1  $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j$ , the average vector of words of the sentence  $S$ 
2 do
3   take  $\varepsilon > 0$ 
4   foreach synset of the target word
5     foreach  $syn_k \ni v^*$  do
6       construct the filtered set  $cand_k(\varepsilon)$  of the synset  $syn_k$ :
7        $cand_k(\varepsilon) = \{u \in syn_k : u \neq v^*, sim(u, v^*) > \varepsilon\}$ 
8        $s_k(\varepsilon) = |cand_k(\varepsilon)|$ , number of candidates of synonyms
9       the average vector of synset candidates:
10       $\overline{syn}_k(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{s_k(\varepsilon)} \sum_{u \in cand_k(\varepsilon)} u, & \text{if } s_k(\varepsilon) > 0 \\ \vec{0}, & \text{if } s_k(\varepsilon) = 0 \end{cases}$ 
11      the similarity of average vectors of the sentence and the  $k$ -th filtered synset:
12       $sim_k(\varepsilon) = sim(\overline{syn}_k(\varepsilon), \bar{S})$ 
13    end
14     $sim_{k^*}(\varepsilon) = \max_{k=1, \dots, l} \{sim_k(\varepsilon)\} \Rightarrow k^* \in \{1, \dots, l\}$ ,  $k^*$  is the number of the largest  $sim_k(\varepsilon)$ 
15  while  $k^*$  is not unique
  
```

another $\varepsilon > 0$ and repeat the procedure from line 3.

Result: the target word w^* has the sense corresponding to the k^* -th synset $syn_{k^*}^w$.

Remark: in the case $\varepsilon = 0$, we denote this algorithm as \bar{A}_0 -algorithm. In this case, the traditional averaging of similarity is used.

Note. \bar{A}_0 -algorithm was used in our experiments, it was implemented in Python.¹

\bar{A}_0 -algorithm example

A simple example and figures 4–6 will help to understand how this \bar{A}_0 -algorithm works.

Take some dictionary word w_2 with several senses and several synonym sets (for example, syn_1 and syn_2) and the sentence S with this word (Fig. 4). The task is to select a meaning (synset) of w_2 (that is the target word is w_2^*) used in the sentence S via the \bar{A}_0 -algorithm.

Let us match the input data and the symbols used in the \bar{A}_0 -algorithm. The word “служить” (sluzhit’) corresponds to the vector v_2 .

Wiktionary: **служить** *sluzhit'*

1. First meaning, set of synonyms:
 $v_{syn_1}^1$: работать, *to work*,
 $v_{syn_1}^2$: помогать *to serve*

2. Second meaning, set of synonyms:
 $v_{syn_2}^1$: использоваться, *to be used (for)*,
 $v_{syn_2}^2$: предназначаться *to serve (for)*

Wiktionary: entry v_2^*

1. First synset:
 $syn_1 = \{v_{syn_1}^1, v_{syn_1}^2\}$

2. Second synset:
 $syn_2 = \{v_{syn_2}^1, v_{syn_2}^2\}$

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \neq 2}^n v_i$$

$$\overline{syn}_1 = \frac{1}{2} (v_{syn_1}^1 + v_{syn_1}^2)$$

$$\overline{syn}_2 = \frac{1}{2} (v_{syn_2}^1 + v_{syn_2}^2)$$

Fig. 4. Digest of the Wiktionary entry “служить” (sluzhit’) and mean vectors \overline{syn}_1 and \overline{syn}_2 of the synonyms sets syn_1 , syn_2 and the sentence S with this word w_2^*

¹ See the function `selectSynsetForSentenceByAverageSimilarity` in the file https://github.com/componavt/wcorpus.py/blob/master/src/test_synset_for_sentence/lib_sfors/synset_selector.py

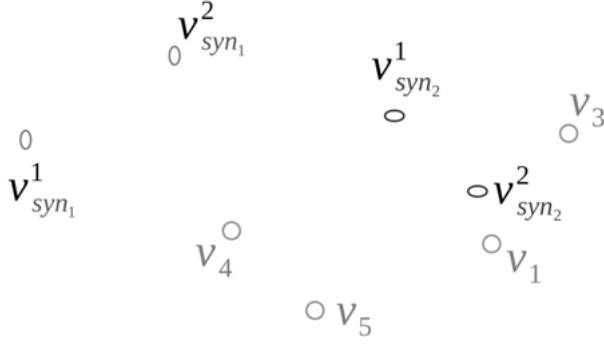


Fig. 5. Sample source data are (1) vertices $v_1 \dots v_5$ corresponding to words of the sentence S , the vertex v_2 was excluded since it corresponds to the target word w_2^* , and (2) the target word w_2^* with two synsets syn_1 and syn_2 (Fig. 4), (3) vertices (vectors correspond to words) of the first synset are $\{v_{syn_1}^1, v_{syn_1}^2\}$ and the second synset – $\{v_{syn_2}^1, v_{syn_2}^2\}$

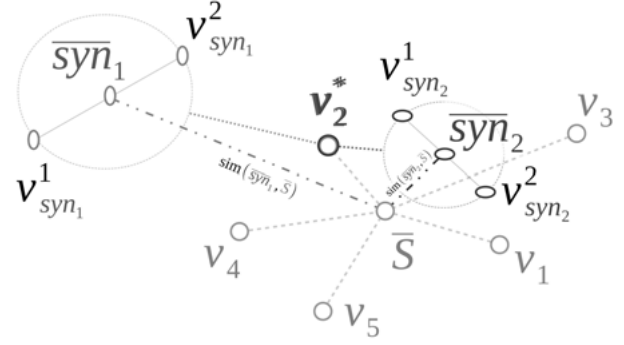


Fig. 6. Similarity between the mean value of vectors of the sentence and the first synonym set is lower than the similarity with the second synset, that is $sim(\overline{syn_1}, \bar{S}) < sim(\overline{syn_2}, \bar{S})$. Thus, the second sense of the target word w_2^* (the second synset syn_2) will be selected in the sentence S by \bar{A}_0 -algorithm

There is a dictionary article about this word in the Wiktionary, see Fig. 4 (a parsed database of Wiktionary is used in our projects).²

Two synonym sets of this Wiktionary entry are denoted by syn_1 and syn_2 .

Mean values of the vectors corresponding to synonyms in these synsets will be denoted as $\overline{syn_1}$ and $\overline{syn_2}$, and \bar{S} is the mean vector of all vectors corresponding to words in the sentence S containing the word “служить” (sluzhit’).

AVERAGE ALGORITHM WITH SENTENCE AND SYNONYMS ε -FILTRATION (\bar{A}_ε)

This algorithm 2 is a modification of algorithm 1. The filtration of a sentence is added to synset filtration. Namely, we select a word from the sentence for which the similarity with at least one synonym from the synset is higher than the similarity threshold ε . Then, we average the set of selected words forming the set of candidates from the sentence. Let us explain algorithm 2 line by line.

Lines 2–5. Given $\varepsilon > 0$, let us construct the set of words of the sentence S filtered by synonyms of the k -th synset syn_k

$$cand_k S(\varepsilon) = \{v \in S : \exists u \in syn_k, sim(v, u) > \varepsilon, v \neq v^*, u \neq v^*\}$$

Denote by $S_k(\varepsilon) = |cand_k S(\varepsilon)|$ the power of the set $cand_k S(\varepsilon)$.

Line 6. Calculate the average vector of words of the filtered sentence

$$\overline{cand_k S}(\varepsilon) = \frac{1}{S_k(\varepsilon)} \sum_{v \in cand_k S(\varepsilon)} v$$

²See section “Web of tools and resources” on page 156.

³ See the function `selectSynsetForSentenceByAverageSimilarityModified` in the file https://github.com/companavt/wcorpus.py/blob/master/src/test_synset_for_sentence/lib_sfors/synset_selector.py

If $S_k(\varepsilon) = 0$, then let $\overline{cand_k S}(\varepsilon)$ be equal to the zero vector.

Lines 7–8. Construct filtered sets of synonyms

$$cand\ syn_k(\varepsilon) = \{u \in syn_k : \exists v \in S, sim(u, v) > \varepsilon, u \neq v^*, v \neq v^*\}.$$

Denote by $s_k(\varepsilon) = |cand\ syn_k(\varepsilon)|$ the power of the k -th filtered synonym set.

Line 9. Calculate for $s_k(\varepsilon) > 0$ the average vector of the k -th synset of candidates

$$\overline{cand\ syn_k}(\varepsilon) = \frac{1}{s_k(\varepsilon)} \sum_{u \in cand\ syn_k(\varepsilon)} u.$$

If $s_k(\varepsilon) = 0$, then $\overline{cand\ syn_k}(\varepsilon)$ equals to the zero vector.

Line 10. Calculate the similarity of the average vectors of the filtered sentence and the k -th filtered synset

$$sim_k(\varepsilon) = sim(\overline{cand_k S}(\varepsilon), \overline{cand\ syn_k}(\varepsilon)).$$

Lines 12–13. Suppose $max_{k=1, \dots, l} \{sim_k(\varepsilon)\} = sim_{k^*}(\varepsilon)$, i.e. $k^* \in \{1, \dots, l\}$ is the number of the largest $sim_k(\varepsilon)$. If k^* is not unique then take another $\varepsilon > 0$ and repeat the procedure from line 2.

Result: the target word w^* in the sentence S has the sense corresponding to the k^* -th synset $syn_{k^*}^w$.

This algorithm was implemented in Python.³

Algorithm 2: Average algorithm with sentence and synonyms ε -filtration (\overline{A}_ε)

Data: v^* – vector of the target word w^* with l senses (synsets),

$v_i \in S$, S – sentence with the target word w^* , $v^* \in S$,

$\{syn_k\}$ – synsets of the target word, that is $syn_k \ni v^*$, $k = \overline{1, l}$.

Result: $k^* \in \{1, \dots, l\}$ is the number of the sense of the word w^* in the sentence S .

```
1 do
2   take  $\varepsilon > 0$ 
   foreach synset of the target word
3   foreach  $syn_k \ni v^*$  do
     construct the set of words of the sentence  $S$  filtered by synonyms of the  $k$ -th synset
      $syn_k$ :
4      $cand_k S(\varepsilon) = \{v \in S : \exists u \in syn_k, sim(v, u) > \varepsilon, v \neq v^*, u \neq v^*\}$ 
5      $S_k(\varepsilon) = |cand_k S(\varepsilon)|$ , number of candidates of the sentence;
     the average vector of sentence candidates:
6      $\overline{cand_k S}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{S_k(\varepsilon)} \sum_{v \in cand_k S(\varepsilon)} v, & \text{if } S_k(\varepsilon) > 0 \\ \vec{0}, & \text{if } S_k(\varepsilon) = 0 \end{cases}$ 
      $\varepsilon$ -filtration of the synset  $syn_k$  by the sentence  $S$ :
7      $cand\ syn_k(\varepsilon) = \{u \in syn_k : \exists v \in S, sim(u, v) > \varepsilon, u \neq v^*, v \neq v^*\}$ 
8      $s_k(\varepsilon) = |cand\ syn_k(\varepsilon)|$ , number of candidates of synonyms
     the average vector of synset candidates:
9      $\overline{cand\ syn_k}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{s_k(\varepsilon)} \sum_{u \in cand\ syn_k(\varepsilon)} u, & \text{if } s_k(\varepsilon) > 0 \\ \vec{0}, & \text{if } s_k(\varepsilon) = 0 \end{cases}$ 
     the similarity of the average vectors of the sentence and the  $k$ -th filtered synset:
10     $sim_k(\varepsilon) = sim(\overline{cand_k S}(\varepsilon), \overline{cand\ syn_k}(\varepsilon))$ 
11  end
12   $sim_{k^*}(\varepsilon) = \max_{k=1, \dots, l} \{sim_k(\varepsilon)\} \Rightarrow k^* \in \{1, \dots, l\}$ ,  $k^*$  is the number of the largest  $sim_k(\varepsilon)$ 
13 while  $k^*$  is not unique
```

 K -ALGORITHM BASED ON ε -DILATATION

The algorithm 3 (K -algorithm) is based on the function $\tilde{K}(A, B, \varepsilon)$ (see previous section “New ε -proximity between finite sets” on page 150), where $A = syn_k$, that is k -th synset, and $B = S$, where S is a sentence. The algorithm includes the following steps.

Lines 2–4. Given $\varepsilon > 0$, let us construct the $C_k(\varepsilon)$ set of “near” words of the k -th synset and the sentence S .

Line 5. Denote by $D_k(\varepsilon)$ the set of “distant” words

$$D_k(\varepsilon) = (S \cup syn_k) \setminus C_k(\varepsilon).$$

Line 6. Calculate $\tilde{K}_k(\varepsilon)$ as the ratio of “near” and “distant” elements of the sets

$$\tilde{K}_k(\varepsilon) = \frac{|C_k(\varepsilon)|}{1 + |D_k(\varepsilon)|}.$$

Lines 8–9. Suppose $\max_{k=1, \dots, l} \tilde{K}_k(\varepsilon) = \tilde{K}_{k^*}(\varepsilon)$. If k^* is not unique, then take another $\varepsilon > 0$ and repeat the procedure from line 2.

Algorithm 3: K -algorithm based on ε -dilatation

Data: v^* – vector of target word w^* with l senses (synsets), $v_i \in S$, $v^* \in S$,

$\{syn_k\}$ – synsets of v^* , $k = \overline{1, l}$.

Result: $k^* \in \{1, \dots, l\}$ is the number of the sense of the word w^* in the sentence S .

```
1 do
2   take  $\varepsilon > 0$ 
   foreach synset of the target word
3   foreach  $syn_k \ni v^*$  do
     set of near words:
4      $C_k(\varepsilon) = \{u, v : u \in syn_k, v \in S, sim(u, v) > \varepsilon\}$ 
     set of distant words:
5      $D_k(\varepsilon) = (S \cup syn_k) \setminus C_k(\varepsilon)$ 
     ratio of ‘near’ and ‘distant’
     elements of the sets:
6      $\tilde{K}_k(\varepsilon) = \frac{|C_k(\varepsilon)|}{1 + |D_k(\varepsilon)|}$ 
7   end
   get the number of the largest ratio  $k^*$ 
8    $\tilde{K}_{k^*}(\varepsilon) = \max_{k=1, \dots, l} \tilde{K}_k(\varepsilon)$ 
9 while  $k^*$  is not unique
```

Result: the target word w^* has the sense corresponding to the k^* -th synset $syn_{k^*}^w$.

An example of constructing C and D sets is presented in Fig. 7 and Table. It uses the same source data as for the \bar{A}_0 -algorithm, see Fig. 5.

Remark. This algorithm is applicable to the K -function described in the previous section³ as well. This algorithm was implemented in Python.⁴

More details for this example (Fig. 7) are presented in Table, which shows C and D sets with different ε and values of the \tilde{K} -function.

Bold type of word-vertices in Table indicates new vertices. These new vertices are captured by a set of “near” vertices C and these vertices are

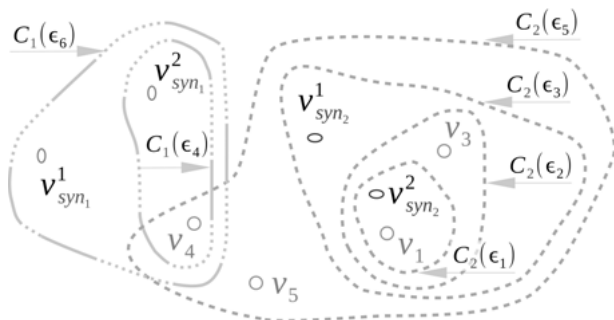


Fig. 7. An example of series of $C_k(\varepsilon)$ (sets of words of k -th synset which are close and near to the sentence S) in the K -algorithm based on ε -dilatation. The growth of the dilation of the vertices of the second synset $\{v_{syn_2}^1, v_{syn_2}^2\}$ captures the vertices of the sentence $S = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ faster than the dilation of the vertices of the first synset. In other symbols: $(syn_2 + \varepsilon) \cap S \supset (syn_1 + \varepsilon) \cap S$. That is, according to the K -algorithm, the second value of the word-vector v_2 , represented by the synset syn_2 , will be selected for the sentence S

excluded from the set of “distant” vertices D with each subsequent dilatation extension with each subsequent ε . For example, in the transition from ε_1 to ε_2 the set $D_2(\varepsilon_1)$ loses the vertex v_3 . During this transition $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$ the set $C_2(\varepsilon_2)$ gets the same vertex v_3 in comparison with the set $C_2(\varepsilon_1)$.

In Fig. 8, the function $\tilde{K}_1(\varepsilon)$ shows the proximity of the sentence S and the synset syn_1 , the function $\tilde{K}_2(\varepsilon)$ – the proximity of S and the synset syn_2 . It can be seen in Figure 8 that with decreasing ε , the value of $\tilde{K}_2(\varepsilon)$ grows faster than $\tilde{K}_1(\varepsilon)$.

Therefore, the sentence S is closer to the second synset syn_2 . The same result can be seen in the previous Fig. 7.

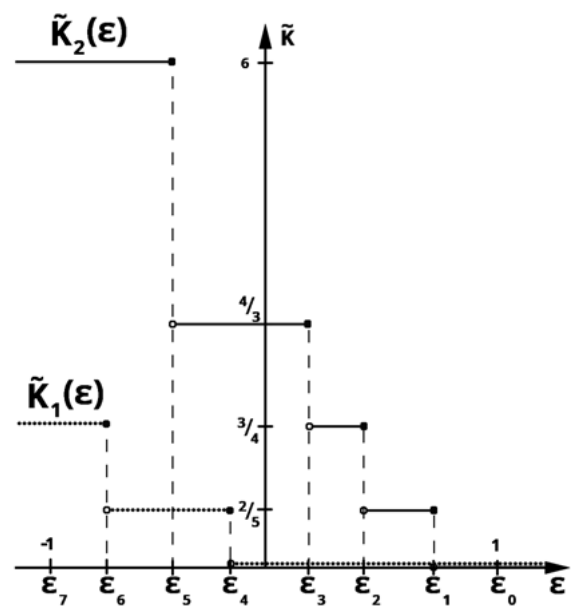


Fig. 8. Left-continuous step functions $\tilde{K}_1(\varepsilon)$, $\tilde{K}_2(\varepsilon)$ show that the sentence S is closer to the second synset syn_2

⁴ See the function `selectSynsetForSentenceByAlienDegree` in the file https://github.com/componavt/wcorpus.py/blob/master/src/test_synset_for_sentence/lib_sfors/synset_selector.py

An example of the K -algorithm treating the word w_2 , which has two synsets syn_1 , syn_2 and the sentence S , where $w_2 \in S$, see Fig. 4. The number of the algorithm iteration corresponds to the index of ε . Let the series of ε be ordered so that $1 = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_7 = -1$. It is known that $|C_1 \cup D_1 \setminus v_2| = |S \setminus v_2| = 6$, that is the total number of words in the synsets and in the sentence are constants.

ε	$C_2(\varepsilon)$	$D_2(\varepsilon)$	$ C_2 $	$ D_2 $	$\tilde{K}_2(\varepsilon)$
ε_0	\emptyset	$v_1, v_3, v_4, v_5, v_{syn_2}^1, v_{syn_2}^2$	0	6	0.0
ε_1	$v_1, v_{syn_2}^2$	$v_3, v_4, v_5, v_{syn_2}^1$	2	4	$\frac{2}{5}$
ε_2	$v_1, v_{syn_2}^2, v_3$	$v_4, v_5, v_{syn_2}^1$	3	3	$\frac{3}{4}$
ε_3	$v_1, v_{syn_2}^2, v_3, v_{syn_2}^1$	v_4, v_5	4	2	$\frac{4}{3}$
	$C_1(\varepsilon)$	$D_1(\varepsilon)$	$ C_1 $	$ D_1 $	$\tilde{K}_1(\varepsilon)$
ε_4	$v_{syn_1}^2, v_4$	$v_{syn_1}^1, v_1, v_3, v_5$	2	4	$\frac{2}{5}$
	$C_2(\varepsilon)$	$D_2(\varepsilon)$	$ C_2 $	$ D_2 $	$\tilde{K}_2(\varepsilon)$
ε_5	$v_1, v_{syn_2}^2, v_3, v_{syn_2}^1, v_4, v_5,$	\emptyset	6	0	6
	$C_1(\varepsilon)$	$D_1(\varepsilon)$	$ C_1 $	$ D_1 $	$\tilde{K}_1(\varepsilon)$
ε_6	$v_{syn_1}^2, v_4, v_{syn_1}^1$	v_1, v_3, v_5	3	3	$\frac{3}{4}$

EXPERIMENTS

Web of tools and resources

This section describes the resources used in our research, namely: Wikisource, Wiktionary, WCorpus and RusVectores.

The developed WCorpus⁵ system includes texts extracted from Wikisource and provides the user with a text corpus analysis tool. This system is based on the Laravel framework (PHP programming language). MySQL database is used.⁶

Wikisource. The texts of Wikipedia have been used as a basis for several contemporary corpora [5]. But there is no mention of using texts from Wikisource in text processing. Wikisource is an open online digital library with texts in many languages. Wikisource sites contains 10 millions of texts⁷ in more than 38 languages.⁸ Russian Wikisource (the database dump as of February 2017) was used in our research.

Texts parsing. The texts of Wikisource were parsed, analysed and stored to the WCorpus database. Let us describe this process in detail. The database dump containing all texts of Russian Wikisource was taken from “Wikimedia Downloads” site.⁹ These Wikisource database files were imported into the local MySQL database titled “Wikisource Database” in Fig. 9,

where “WCorpus Parser” is the set of WCorpus PHP-scripts which analyse and parse the texts in the following three steps.

1. First, the title and the text of an article from the Wikisource database are extracted (560 thousands of texts). One text corresponds to one page on Wikisource site. It may be small (for example, several lines of a poem), medium (chapter or short story), or huge size (e.g. the size of the page with the novella “The Eternal Husband” written by Fyodor Dostoyevsky is 500 KB). Text preprocessing includes the following steps:
 - Texts written in English and texts in Russian orthography before 1918 were excluded; about 12 thousands texts were excluded.
 - Service information (wiki markup, references, categories and so on) was removed from the text.
 - Very short texts were excluded. As a result, 377 thousand texts were extracted.
 - Texts splitting into sentences produced 6 millions of sentences.
 - Sentences were split into words (1.5 millions of unique words).

⁵<https://github.com/comonavt/wcorpus>

⁶See WCorpus database scheme: https://github.com/comonavt/wcorpus/blob/master/doc/workbench/db_scheme.png

⁷<https://stats.wikimedia.org/wikisource/EN/TablesWikipediaZZ.htm>

⁸<https://stats.wikimedia.org/wikisource/EN/Sitemap.htm>

⁹<https://dumps.wikimedia.org/backup-index.html>

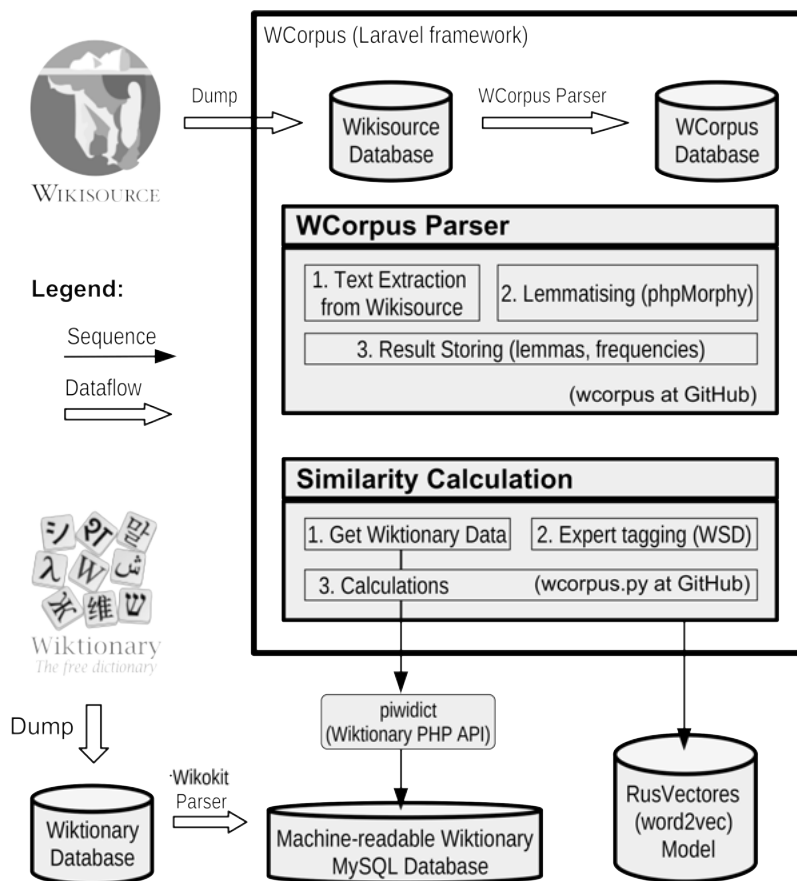


Fig. 9. The architecture of WCorpus system and the use of other resources

3. Secondly, word forms were lemmatized using phpMorphy¹⁰ program (0.9 million lemmas).
4. Lastly, lemmas, wordforms, sentences and relations between words and sentences were stored to WCorpus database (Fig. 9).

In our previous work “Calculated attributes of synonym sets” [6] we also used neural network models of the great project RusVectors¹¹, which is a kind of a word2vec tool based on Russian texts [9].

Context similarity algorithms evaluation

In order to evaluate the proposed WSD algorithms, several words were selected from a dictionary, then sentences with these words were extracted from the corpus and tagged by experts.

Nine words

Only polysemous words which have at least two meanings with different sets of synonyms are suitable for our evaluation of WSD algorithms.

The following criteria for the selection of synonyms and sets of synonyms from Russian Wiktionary were used:

1. Only single-word synonyms are extracted from Wiktionary. This is due to the fact that the RusVectors neural network model “ruscorpora_2017_1_600_2” used in our research does not support multiword expressions.
2. If a word has meanings with equal sets of synonyms, then these sets were skipped because it is not possible to discern different meanings of the word using only these synonyms without additional information.

¹⁰<https://packagist.org/packages/componavt/phpmorphy>

¹¹<http://rusvectors.org/en/>

¹²<http://whinger.krc.karelia.ru/soft/wikokit/index.html>

¹³<https://github.com/componavt/piwidict>

¹⁴See information about the subcorpus in the section “Sentences of three Russian writers” on page 158.

A list of polysemous words was extracted from the parsed Russian Wiktionary¹² using PHP API piwidict¹³ (Fig. 9).

Thus, 9 polysemous Russian words (presented in the subcorpus¹⁴) were selected by experts from this Wiktionary list, namely: “бездна” (bezdna), “бросать” (brosat’), “видный” (vidnyy), “до-

нести” (donesti), “доносить” (donosit’), “занятие” (zanyatiye), “лихой” (likhoi), “отсюда” (otsyuda), “удачно” (udachno). The tenth word “служить” (sluzhit’) was left out of consideration, because there are 1259 of 1308 sentences with this frequent word to be tagged by experts in the future (Fig. 10).

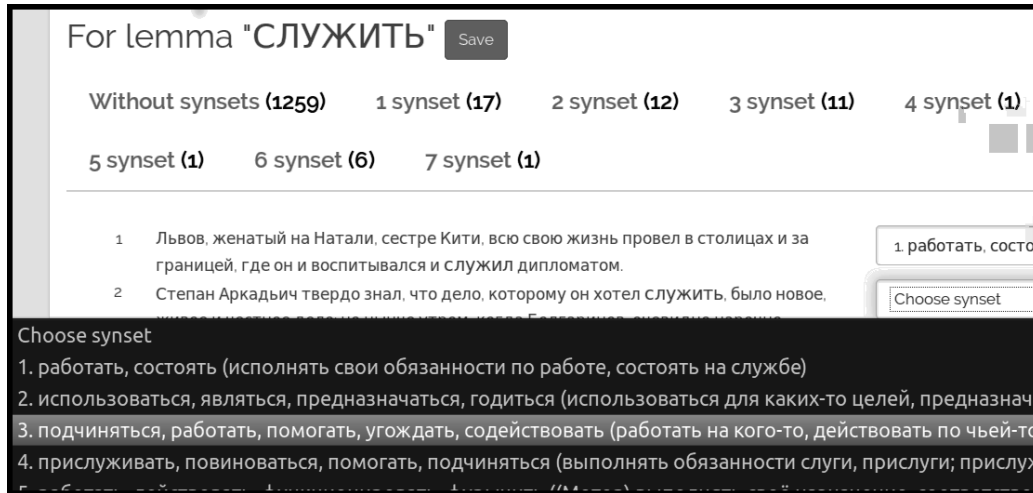


Fig. 10. Russian verb “служить” (sluzhit’) has seven meanings and seven synsets in the developed system WCorpus. 49 sentences are already linked to relevant senses of this verb. 1259 sentences remain to be tagged by experts

Sentences of three Russian writers

The sentences which contain previously defined 9 words were to be selected from the corpus and tagged by experts. But the Wikisource corpus was too huge for this purpose. So, in our research a subcorpus of Wikisource texts was used. These are the texts written by Fyodor Dostoevsky, Leo Tolstoy and Anton Chekhov.

Analysis of the created WCorpus database with texts of three writers shows that the subcorpus contains:¹⁵

- 2635 texts;
- 333 thousand sentences;
- 215 thousand wordforms;
- 76 thousand lemmas;
- 4.3 million wordform-sentence links;

Texts of this subcorpus contain 1285 sentences with these 9 words, wherein 9 words have in total 42 synsets (senses). It was developed A graphical user interface (webform) of the WCorpus system (Fig. 10) was developed, where experts selected

one of the senses of the target word for each of the 1285 sentences.

This subcorpus database with tagged sentences and linked synsets is available online [7].

Text processing and calculations

These 1285 sentences were extracted from the corpus. Sentences were split into tokens. Then wordforms were extracted. All the wordforms were lowercase and lemmatized. Therefore, a sentence is a bag of words. Sentences with only one word were skipped.

The phpMorphy lemmatizer takes a wordform and yields possible lemmas with the corresponding part of speech (POS). Information on POS of a word is needed to work with the RusVectores’ prediction neural network model “ruscorpora_2017_1_600_2”, because to get a vector it is necessary to ask for a word and POS, for example “serve_VERB”. Only nouns, verbs, adjectives and adverbs remain in a sentence bag of words, other words were skipped.

The computer program (Python scripts) which works with the WCorpus database and RusVectores was written and presented in the

¹⁵See SQL-queries applied to the subcorpus <https://github.com/comonavt/wcorpus/wiki/SQL>

¹⁶<https://github.com/comonavt/wcorpus.py>

form of the project *wcorpus.py* at GitHub.¹⁶ The source code in the file *synset_selector.py*¹⁷ implements three algorithms described in the article, namely:

- \bar{A}_0 -algorithm implemented in the function *selectSynsetForSentenceByAverageSimilarity()*;
- K -algorithm – function *selectSynsetForSentenceByAlienDegree()*;
- \bar{A}_ε -algorithm – function *selectSynsetForSentenceByAverageSimilarityModified()*.

These three algorithms calculated and selected one of the possible synsets for each of 1285 sentences.

Two algorithms (K and \bar{A}_ε) have an input parameter of ε , therefore, a cycle with a step of

0.01 from 0 to 1 was added, which resulted in 100 iterations for each sentence.

Then, answers generated by the algorithms were compared with the synsets selected by experts.

The number of sentences with the sense correctly tagged by the K -algorithm for nine Russian words presented in Fig. 11.

The legend of this figure lists target words with numbers in brackets (X, Y), where X is the number of sentences with these words, Y is the number of senses.

The curves for the words “ЗАНЯТИЕ” (“ZANYATIYE”, solid line with star points) and “ОТСЮДА” (“OTSYUDA”, solid line with triangle points) are quite high for some ε , because (1) there are many sentences with these words (352 and 308) in our subcorpus, (2) these words have few meanings (3 and 2).

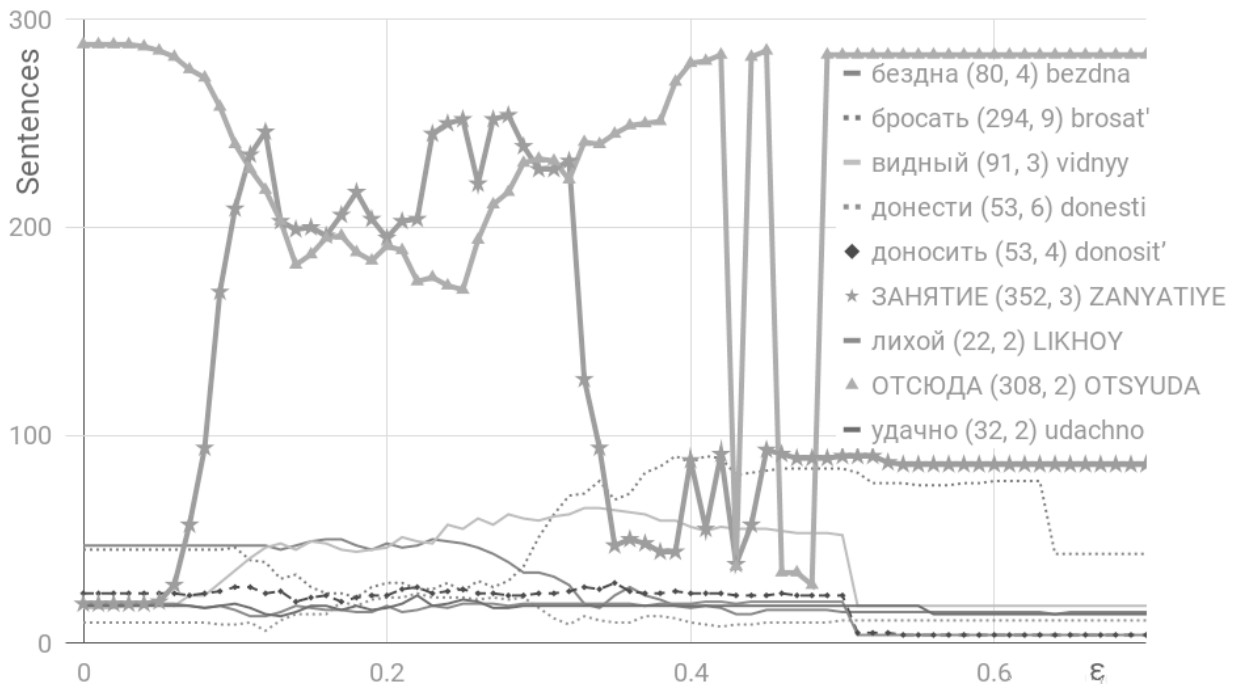


Fig. 11. Number of sentences with the correct tagged sense for nine Russian words by the K -algorithm

¹⁷https://github.com/comonavt/wcorpus.py/blob/master/src/test_synset_for_sentence/lib_sfors/synset_selector.py

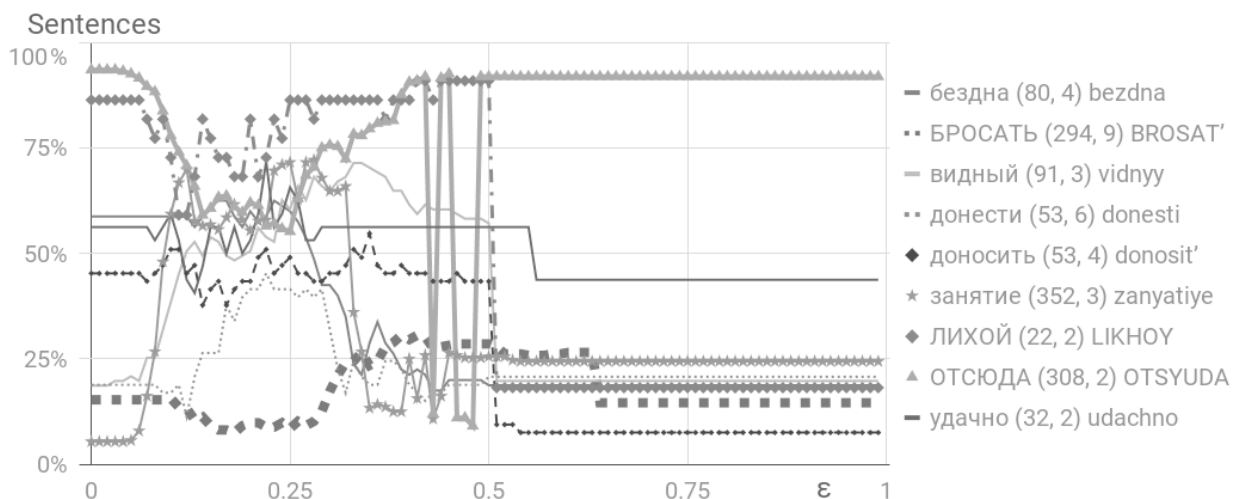


Fig. 12. Normalised data with the fraction of sentences with correctly tagged sense for nine Russian words

More meanings, poorer results.

If a word has more meanings, then the algorithm yields even poorer results. It is visible in the normalised data (Fig. 12), where examples with good results are “ОТСЮДА” (OTSYUDA) and “ЛИХОЙ” (ЛИХОУ, dash dot line with diamond points) with 2 meanings; the example “БРОСАТЬ” (BROSAT', bold dotted line) with 9 meanings has the worst result (the lowest dotted curve).

Comparison of three algorithms

Let us compare three algorithms by summing the results for all nine words. Fig. 13 contains the

following curves: \bar{A}_0 -algorithm – long dash line; K -algorithm – solid line; \bar{A}_ε -algorithm – dash line.

The \bar{A}_0 -algorithm does not depend on ε . It showed mediocre results.

The K -algorithm yields better results than \bar{A}_ε -algorithm when $\varepsilon > 0.15$.

The K -algorithm showed the best results on the interval $[0.15; 0.35]$. Namely, more than 700 sentences (out of 1285 human-tagged sentences) were properly tagged with the K -algorithm on this interval (Fig. 13).

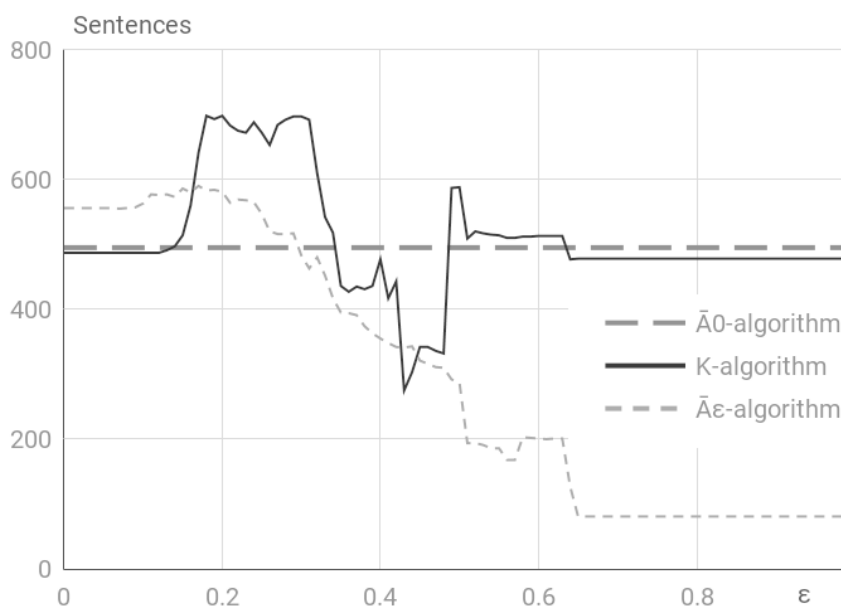


Fig. 13. Comparison of \bar{A}_0 -algorithm, K -algorithm, \bar{A}_ε -algorithm

Comparison of four algorithms as applied to nine words

Let us compare the results of running four algorithms for each word separately (Fig. 14): \bar{A}_0 -algorithm – long dash line with triangle points; K -algorithm – solid line with square points; \bar{A}_ε -algorithm – dash line with circle points; “Most frequent meaning” – dashed line with X marks.

The simple “most frequent meaning” algorithm was added to compare the results. This algorithm does not depend on the variable ε , it selects the meaning (synset) that is the most frequent in our corpus of texts. In Fig. 14 this algorithm corresponds to a dashed line with X marks.

The results of the “most frequent meaning” algorithm and \bar{A}_0 -algorithm are similar (Fig. 14).

The K -algorithm is the absolute champion in this competition, that is for each word

there exists an ε such that the K -algorithm outperforms other algorithms (Fig. 14).

Let us explain the calculation of the curves in Fig. 14.

For the \bar{A}_0 -algorithm and the “most frequent meaning” algorithm, the meaning (synset) is calculated for each of the nine words on the set of 1285 sentences. Thus, $1285 \cdot 2$ calculations were performed.

And again, the \bar{A}_ε -algorithm and the K -algorithm depend on the variable ε . But how can the results be shown without the ε axis? If at least one value of ε gives a positive result, then we suppose that the WSD problem was correctly solved for this sentence by the algorithm.

The value on the Y axis for the selected word (for \bar{A}_ε -algorithm and K -algorithm) is equal to the sum of such correctly determined sentences (with different values of ε) in Fig. 14.

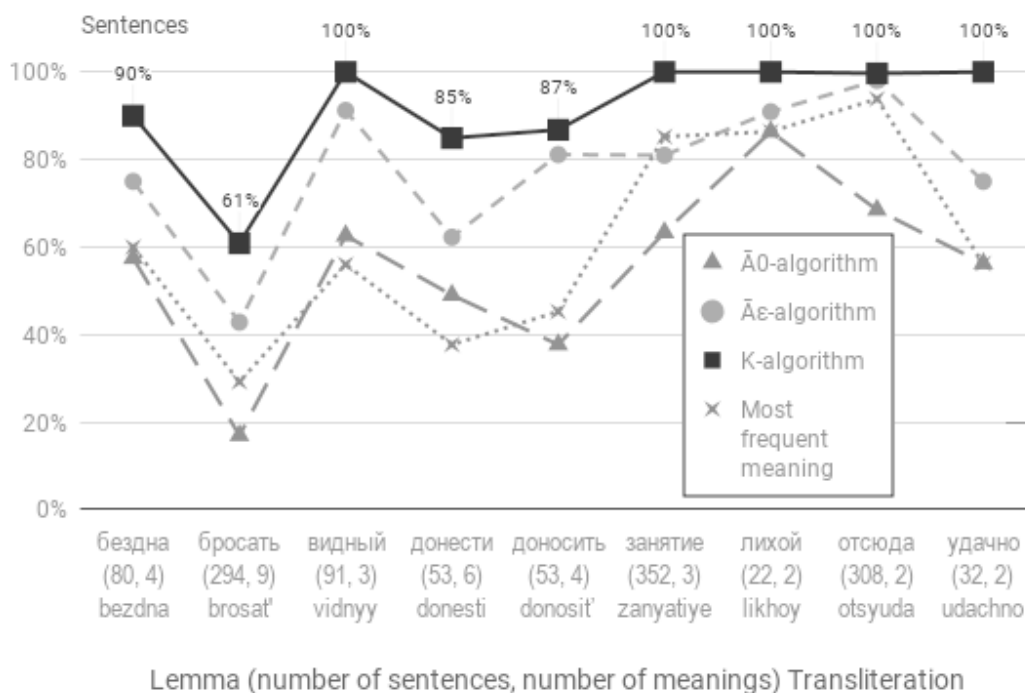


Fig. 14. Comparison of \bar{A}_0 -algorithm, K -algorithm, \bar{A}_ε -algorithm and the most frequent meaning

Perhaps it would be more correct to fix ε corresponding to the maximum number of correctly determined sentences. Then, the result will not be so optimistic.

To show the complexity of comparing and evaluating ε -algorithms (that is, algorithms that depend on ε), let us try to analyze the results of the K -algorithm, shown in Fig 15.

The percentage (proportion) of correctly determined 1285 sentences for 9 words by the K -algorithm, where the ε variable changes from 0

to 1 in increments of 0.01, is presented in Fig. 15. Thus, $1285 \cdot 100$ calculations were performed.

These proportions are distributed over a set of possible calculated results from 0% (no sentence is guessed) to 100% (all sentences are guessed) for each of nine words.

This Figure 15 does not show which ε -values produce better or poorer results, although it could be seen in Figures 11–13. But the Figure does show the set and the quality of the results obtained with the help of the K -algorithm. For

example, the word “лихой” (likhoj) with 22 sentences and 100 different ε has only 8 different outcomes of the K -algorithm, seven of which lie in the region above 50%, that is, more than eleven sentences are guessed at any ε .

For example, the word “бросать” (brosat') has the largest number of meanings in our data set, it has 9 synonym sets in our dictionary and 11 meanings in Russian Wiktionary.¹⁸ All

possible results of the K -algorithm for this word are distributed in the range of 10–30%. The maximum share of guessed sentences is 30.61%. Note that this value is achieved when $\varepsilon = 0.39$, and this is clearly shown in Figure 12, see the thick dotted line.

All calculations, charts drawn from experimental data and results of the experiments are available online in Google Sheets [8].

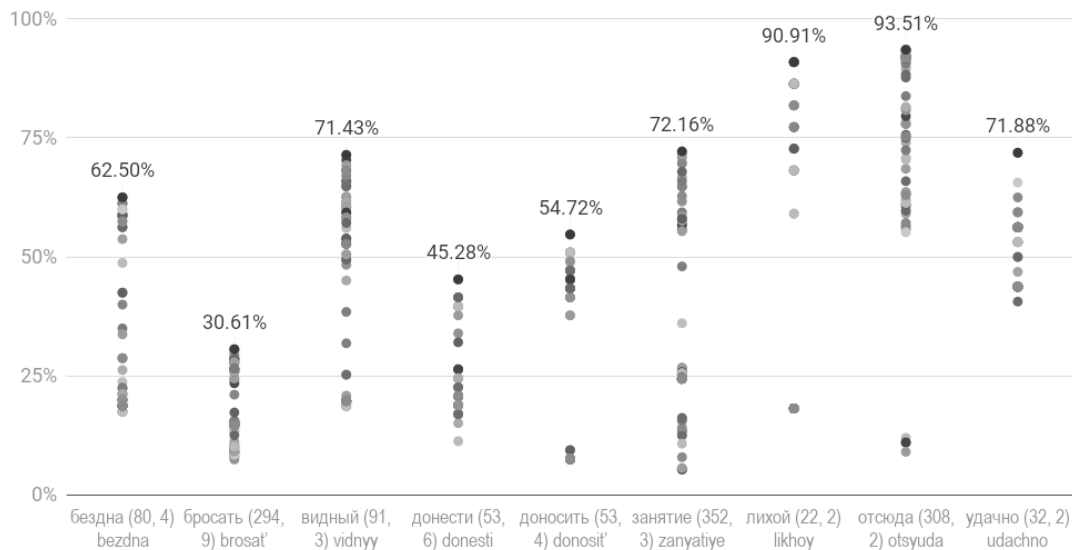


Fig. 15. Proportions of correctly guessed sentences distributed over a set of possible calculated results

CONCLUSIONS

The development of the corpus analysis system WCorpus¹⁹ was started. 377 thousand texts were extracted from Russian Wikisource, processed and uploaded to this corpus.

Context-predictive models of the RusVectors project are used to calculate the distance between lemmas. Scripts in Python were developed to process RusVectors data, see the *wcorpus.py* project on the GitHub website.

The WSD algorithm based on a new method of vector-word contexts proximity calculation is proposed and implemented. Experiments have shown that in a number of cases the new algorithm shows better results.

The future work is matching Russian lexical resources (Wiktionary, WCorpus) to Wikidata objects [11].

¹⁸<https://ru.wiktionary.org/wiki/бросать>

¹⁹<https://github.com/componavt/wcorpus>

The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-012-00117.

REFERENCES

1. Arora S., Liang Y., Ma T. A simple but tough-to-beat baseline for sentence embeddings. *In Proceedings of the ICLR*, 2017. P. 1–16. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/3fc9/7768dc0b36449ec377d6a4cad8827908d5b4.pdf> (access date: 3.04.2018).
2. Chen X., Liu Z., Sun M. A unified model for word sense representation and disambiguation. *In Proceedings of the EMNLP*, 2014. P. 1025–1035. doi: 10.3115/v1/d14-1110. URL: <http://www.aclweb.org/anthology/D14-1110> (access date: 3.04.2018).
3. Choi S. S., Cha S. H., Tappert C. C. A survey of binary similarity and distance measures. *Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics*. 2010. Vol. 8. no. 1. P. 43–48. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.>

352.6123&rep=rep1&type=pdf (access date: 3.04.2018).

4. *Hausssler D.* Convolution kernels on discrete structures. *Technical report, Department of Computer Science, University of California at Santa Cruz.* 1999. URL: <https://www.soe.ucsc.edu/sites/default/files/technical-reports/UCSC-CRL-99-10.pdf> (access date: 3.04.2018).

5. *Jurczyk T., Deshmane A., Choi J.* Analysis of Wikipedia-based corpora for question answering. *arXiv preprint arXiv:1801.02073.* 2018. URL: <http://arxiv.org/abs/1801.02073> (access date: 3.04.2018).

6. *Krizhanovskiy A., Kirillov A.* Calculated attributes of synonym sets. *arXiv preprint arXiv:1803.01580.* 2018. URL: <http://arxiv.org/abs/1803.01580> (access date: 3.04.2018).

7. *Krizhanovskiy A., Kirillov A., Krizhanovskaya N.* WCorpus mysql database with texts of 3 writers. *figshare.* 2018. URL: <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.5938150.v1> (access date: 3.04.2018).

8. *Krizhanovskiy A., Kirillov A., Krizhanovskaya N.* Assign senses to sentences of 3 writers. *Google*

Sheets. 2018. URL: <http://bit.ly/2I14QIT> (access date: 27.04.2018).

9. *Kutuzov A., Kuzmenko E.* Texts in, meaning out: neural language models in semantic similarity task for Russian. *arXiv preprint arXiv:1504.08183.* 2015. URL: <https://arxiv.org/abs/1504.08183> (access date: 3.04.2018).

10. *Lesot M-J., Rifqi M., Benhadda H.* Similarity measures for binary and numerical data: a survey. *International Journal of Knowledge Engineering and Soft Data Paradigms.* 2009. Vol. 1. no. 1. P. 63–84. doi: 10.1504/ijkesdp.2009.021985. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.212.6533&rep=rep1&type=pdf> (access date: 3.04.2018).

11. *Nielsen F.* Linking ImageNet WordNet Synsets with Wikidata. *In WWW '18 Companion: The 2018 Web Conference Companion.* 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1803.04349.pdf> (access date: 18.04.2018).

Received March 31, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Крижановская Наталья Борисовна
ведущий инженер-исследователь
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: nataly@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Крижановский Андрей Анатольевич
рук. лаб. информационных компьютерных
технологий, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр
«Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: andew.krizhanovsky@gmail.com
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Krizhanovskaya, Natalia
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: nataly@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Krizhanovsky, Andrew
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: andew.krizhanovsky@gmail.com
tel.: (8142) 766312

ХРОНИКА

ТРЕТЬЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «BOINC-BASED HIGH PERFORMANCE COMPUTING: FUNDAMENTAL RESEARCH AND DEVELOPMENT»

(Петрозаводск, 28 августа – 1 сентября 2017 г.)

В августе 2017 г. на базе ИПМИ КарНЦ РАН состоялась третья, уже традиционная международная конференция «BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development» (BOINC:FAST).

Конференция собрала тридцать семь человек из самых разных уголков планеты, от европейских Литвы и Швейцарии до экзотических для нас Мексики, Колумбии, Нигерии. Большое количество участников представляли разные города России.



На конференции обсуждались вопросы использования программной платформы BOINC в организации высокопроизводительных вычислений на базе Desktop Grid – грид-систем, создаваемых из персональных компьютеров.

Особый интерес вызвали доклады «LHC@Home: a BOINC-based volunteer computing infrastructure for physics studies at CERN» (докладчик Igor Zacharov) об использовании добровольных вычислений при исследованиях в CERN, «Using Volunteer Computing for Sound Speed Profile Estimation in Underwater Acoustics» (докладчик Oleg

Zaikin) о новом проекте по акустике, «Parallel Processing of Images in Mobile Devices Using BOINC» (докладчик Mariela Curiel) о необычном применении BOINC, а также ряд других.

Труды конференции опубликованы сервисом CEUR Workshop Proceedings, а избранные работы – в журнале Open Engineering. Презентации докладов доступны на официальном сайте мероприятия boincfast.ru

Следующая конференция BOINC:FAST намечена на осень 2019 года.

Е. Е. Ивашко

ЮБИЛЕИ И ДАТЫ

ТАМАРА ПЕТРОВНА ТИХОМИРОВА (к 70-летию со дня рождения)



Тамара Петровна Тихомирова родилась 6 ноября 1948 г. в пос. Ладва Прионежского района Карельской АССР. Отец был военнослужащий, поэтому в школе пришлось учиться в разных городах нашей страны (нашей страной в то время был единый СССР). После окончания средней школы № 9 г. Петрозаводска поступила на физико-математический факультет Петрозаводского государственного университета, который окончила в 1971 году по специальности «математика». По распределению приступила к работе в Карельском филиале Академии наук СССР (в настоящее время Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»), в котором работает уже 47 лет.

Т. П. Тихомирова имеет ученую степень кандидата технических наук (2003 г.), ученое звание доцента по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (2005 г.).

Молодой специалист Т. П. Тихомирова начала свою трудовую деятельность в лаборато-

рии Г. А. Борисова, которому принадлежала ведущая роль в стране по постановке научно-технических проблем по применению математических методов и ЭВМ в области лесотранспортного и лесомелиоративного проектирования. На основе математических методов (вариационного исчисления, теории оптимизации и нелинейного программирования) были построены оригинальные модели, эффективные методы и технологии автоматизированного проектирования с помощью ЭВМ. Алгоритмы решения соответствующих экстремальных задач были доведены до востребованного отраслью комплекса программ и практической реализации (что большая редкость, особенно в нынешних экономических условиях).

Тамара Петровна участвовала в создании семи Систем автоматизированного проектирования (САПР), являясь ответственным исполнителем, техническим руководителем, руководителем раздела. Эти системы были внедрены и эксплуатировались более чем в 10 проектных организациях страны. САПР, руководителем которой была Т. П. Тихомирова, награждена серебряной медалью ВДНХ. Старшее поколение знает не только смысл этих аббревиатур, но и цену такого успеха.

С 1994 г. Тамара Петровна занимается математическим моделированием проблем региональной энергетики. Результаты расчетов топливно-энергетического баланса вошли в итоговые материалы совместного Российско-Финляндского проекта «Энергетический мастер-план Республики Карелия». Кроме того, результаты исследований использовались в международных проектах ТАСИС ERUS, в Российско-Скандинавском проекте по разработке сценариев устойчивого развития топливно-энергетического комплекса Северного экономического района РФ, в других международных программах. В 2005 г. Т. П. Тихомирова была ответственным исполнителем хозяйственной работы с Костомукшским ГОК по исследованию и прогно-

зу путей энергообеспечения Костомукшского промышленного района на период до 2020 года. Созданная гипертекстовая система по топливно-энергетическому комплексу использовалась при проведении ряда исследований по проблемам энергетики, в том числе в Концепции социально-экономического развития Республики Карелия на период до 2010 г.

Результаты научной деятельности докладывались на всероссийских и международных научных конференциях и симпозиумах. По результатам исследований опубликовано более 70 научных работ.

Работая в должности ученого секретаря Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН с 2002 г., Т. П. Тихомирова обеспечивает подготовку планов научных исследований и государственных заданий, организует контроль за их выполнением и обеспечивает подготовку отчетов о деятельности учреждения, организует работу Ученого совета, курирует в институте работу по обучению в аспирантуре, готовит материалы по аккредитации направлений подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, организует контроль за выполнением учебных планов и представлением отчетных материалов по обучению в аспирантуре. А по отзывам аспирантов многих поколений – защищает их интересы и активно помогает им решать «неразрешимые» организационные проблемы.

Т. П. Тихомирова является секретарем Ученого совета института, ответственным секретарем серии «Математическое моделирование и информационные технологии» журнала «Труды Карельского научного центра РАН». Ни одна статья не проскочит мимо ее «рентгеновского просвечивания» и доброжелательной редакционной помощи.

Научную и административную работу Тамара Петровна успешно сочетает с педагогической деятельностью. Она читала курсы лекций (математические основы информатики, компьютерные сети и др.) в Петрозаводском государственном университете и в Карельской государственной педагогической академии (КГПА), руководила курсовыми и дипломными проектами. Прошла дополнительную профессиональную подготовку и получила свидетельства (2006, 2008 гг.) по программе Intel «Обучение для будущего». Неоднократно являлась членом Государственной аттестационной комиссии КГПА.

За успехи в научной и научно-организационной деятельности Т. П. Тихомирова награждена Почетной грамотой Президиума РАН и Профсоюза работников РАН

(1999 г.), Почетной грамотой РАН (2009 г.), Почетной грамотой Республики Карелия (2013 г.).

Тамара Петровна является ценителем классической музыки, особенно фортепианной, старается не пропускать концерты признанных мастеров оперного пения. Интересуется живописью, неизменно посещая (лучшая часть отпуска!) музеи и выставки, не забывая и наш родной Музей изобразительных искусств. Это определяет неизменную элегантность и ровный деловой стиль общения с коллегами: корректность, доброжелательность, порядочность.

Коллектив института сердечно поздравляет коллегу с текущим юбилеем, отмечая ее многогранный вклад в становление и развитие института, и надеется существенно расширить перечень ее достижений к следующему юбилею, желая Тамаре Петровне здоровья и неиссякаемой энергии!

*Ю. В. Заика, зам. председателя
КарНЦ РАН по научно-организационной работе, д. ф.-м. н., проф.*

СПИСОК НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Т. П. ТИХОМИРОВОЙ

1978. Система автоматизированного проектирования автомобильных дорог «САПАД-2» // Гос. фонд алгоритмов и программ. Алгоритмы и программы. № 6(26). С. 27–28. (Совместно с Р. А. Сюкияйнен, Г. А. Борисовым, В. И. Скрыпником, З. П. Бричевой, О. М. Лайхинен и др.)

1984. Автоматизированное проектирование dna канала в осушительной мелиорации // В сб.: Системы автоматизированного проектирования лесотранспорта и мелиорации. Петрозаводск: Карел. фил. АН СССР. С. 45–50.

1985. Использование ЭВМ при разработке проектов реконструкции лесомелиоративных каналов // Информационный листок ЦНТИ. Вып. 26, № 85-6. С. 1–4. (Совместно с Ю. В. Гвоздовским, З. П. Бричевой, В. П. Шведовой, В. Г. Старковой, А. П. Ганиным.)

1986. Проектирование объектов лесосоупления с помощью ЭВМ типа ЕС // Информационный листок ЦНТИ. Вып. 26, № 25-86. С. 1–4.

Система автоматизированного проектирования объектов лесосоупления «КАНАЛ-ЕС» // В сб.: Применение вычислительной техники в научных исследованиях и проектировании. Петрозаводск: Карел. фил. АН СССР. С. 79–80.

Проектирование каналов на объектах реконструкции лесомелиорации с применением СМ ЭВМ // В сб.: Применение вычислительной техники в научных исследованиях и проектировании. Петрозаводск: Карел. фил. АН СССР. С. 32–34. (Совместно с Ю. В. Гвоздовским, З. П. Бричевой, В. П. Шведовой, В. Г. Старковой.)

1989. Система автоматизированного проектирования объектов лесосушения (КАНАЛ) // Программные средства. Инф. бюллетень. Вып. 2. М.: ВЦ АН СССР (Фонд алгоритмов и программ АН СССР). С. 42.

1990. Автоматизация проектирования транспортного и лесомелиоративного освоения лесных массивов // Фундаментальные науки – народному хозяйству. М.: Наука. С. 703–704. (Совместно с Г. А. Борисовым, С. П. Андреевой, В. Н. Земляченко, В. Д. Кукиным, Т. Ф. Леонтьевой, Р. А. Сюкияйнен.)

1999. Высокоточное численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной формы // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. Вып. 1. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 180–194. (Совместно с Г. И. Сидоренко, Л. В. Солововой.)

2000. Wood Fuel: resources and utilization in Karelia // GREEN ENERGETICS: from the modern technologies to the new philosophy, University of Joensuu. P. 75–88. (Совместно с G. Borisov, E. Vykov, S. Andreeva.)

2001. О концепции развития нетрадиционной энергетики в Республике Карелия // Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. СПб.: Изд-во СПбГТУ. Стр. 40–45. (Совместно с Г. А. Борисовым, Г. И. Сидоренко.)

2002. Оценка антропогенных выбросов CO₂ в Карелии // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. Вып. 3. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 229–236 (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2003. Автоматизация проектирования осушения заболоченных территорий // Обзорные прикладной и промышленной математики. Т. 10, вып. 1. С. 100–101. (Совместно с Г. А. Борисовым, П. А. Семиным.)

2004. Информационное обеспечение топливно-энергетического комплекса Республики Карелия // Обзорные прикладной и

промышленной математики. Т. 11, вып. 1. С. 142–143. (Совместно с С. С. Марченко.)

2005. Логические основы информатики. Учеб. пособие. Петрозаводск: КГПУ. 62 с.

Исследование и прогноз путей энергообеспечения Костомукшского промышленного района // Труды ИПМИ КарНЦ РАН. Вып. 6. С. 35–50. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2009. Структурный анализ потерь энергии в электрическом хозяйстве Карелии // Уч. зап. ПетрГУ. № 9(103). С. 93–97. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2010. Характеристики и свойства потерь энергии и мощности на переделах энергетического хозяйства региона // Труды КарНЦ РАН. № 3. С. 4–10. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2011. Исследование математической модели единичной технологической линии топливно-энергетического хозяйства региона // Труды КарНЦ РАН. № 5. С. 10–17. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2012. Увеличение ресурсов изоляции и подшипников электрических двигателей путем наиболее выгодного распределения нагрузок // Уч. зап. ПетрГУ. Т. 1, № 8. С. 83–85. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

Энергосберегающие методы управления мощностью в энергетическом хозяйстве региона // Обзорные прикладной и промышленной математики. Т. 19, вып. 2. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2013. Методы минимизации потерь энергии и мощности в топливно-энергетическом хозяйстве региона // Труды КарНЦ РАН. № 1. С. 12–16. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2014. Оценка динамической составляющей нагрузочных потерь энергии в элементах электрических сетей // Труды КарНЦ РАН. № 4. С. 25–28. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

Обобщенная и частная задачи минимизации расхода первичной энергии в системе // Обзорные прикладной и промышленной математики. Т. 21, вып. 1. С. 39–41. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2015. Задачи и методы максимального увеличения ресурса изоляции силовых трансформаторов // Труды КарНЦ РАН. № 10. С. 24–27. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

2017. Задачи и методы ресурсосберегающей оптимизации в электроэнергетической системе // Труды КарНЦ РАН. № 8. С. 3–11. (Совместно с Г. А. Борисовым.)

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учетом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редакционные коллегии серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляют за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкеты» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия «Анкеты» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Журнал имеет полноценную электронную версию на базе Open Journal System (OJS), позволяющую перевести предоставление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегией серий и рецензентами в электронный формат и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Редакционный совет журнала «Труды Карельского научного центра РАН» (Труды КарНЦ РАН) определил для себя в качестве одного из приоритетов полную открытость издания. Это означает, что пользователям на условиях свободного доступа разрешается: читать, скачивать, копировать, распространять, печатать, искать или находить полные тексты статей журнала по ссылке без предварительного разрешения от издателя и автора. Учредители журнала берут на себя все расходы по редакционно-издательской подготовке статей и их опубликованию.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

Почтовый адрес редакции: 185 910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762 018.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объем рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объем рисунков не должен превышать 1/4 объема статьи. Рукописи

большого объема (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в двух экземплярах, напечатанных на одной стороне листа формата А4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: *УДК* курсивом на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; инициалы, фамилии всех авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: **Введение. Материалы и методы. Результаты и обсуждение. Выводы** либо **Заключение. Литература**); благодарности и указание источников финансирования выполненных исследований; списки литературы: с библиографическими описаниями на языке и алфавите оригинала (**Литература**) и транслитерированный в латиницу с переводом названий русскоязычных источников на английский язык (**References**).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности, ученые звания, ученые степени авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на наклейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. Ссылки на литературу в тексте даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Заголовки таблиц, заголовки и содержание столбцов, строк, а также примечания приводятся на русском и английском языках. Диаграммы и графики не дублируются в таблицах. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ приводятся на русском и английском языках, должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях, детали на рисунках следует обозначать цифрами или буквами, значение которых также приводится в подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5–2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления (http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.-2008). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

ТРАНСЛИТЕРИРОВАННЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (References). Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Описания русскоязычных работ указываются в латинской транслитерации, рядом в квадратных скобках помещается их перевод на английский язык. Выходные данные приводятся на английском языке (допускается транслитерация названия издательства). При наличии переводной версии источника можно указать ее библиографическое описание вместо транслитерированного. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала. Для составления списка рекомендуется использование бесплатных онлайн-сервисов транслитерации, вариант BSI.

Внимание! С 2015 года каждой статье, публикуемой в «Трудах Карельского научного центра РАН», редакцией присваивается уникальный идентификационный номер цифрового объекта (DOI) и статья включается в базу данных Crossref. **Обязательным условием является указание в списках литературы DOI для тех работ, у которых он есть.**

Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате.tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>.

TABLE OF CONTENTS

A. V. Borodina, V. A. Tishenko. SIMULATION OF A NONHOMOGENEOUS DEGRADATION PROCESS IN A SYSTEM WITH GRADUAL AND INSTANTANEOUS FAILURES	3
Yu. V. Zaika, N. I. Rodchenkova, K. V. Grudova. NUMERICAL MODELLING OF DYNAMICS OF FREE BOUNDARY OF HYDRIDE FORMATION	14
A. V. Ivanov. ALMOST FULLY CLOSED MAPPINGS AND QUASI- <i>F</i> -COMPACTA	25
A. N. Kirillov, A. M. Sazonov. GLOBAL STABILITY IN MODEL OF NON-LINEAR SCHUMPETERIAN DYNAMICS	34
V. D. Kukin. OPTIMIZATION OF STEINER TREES SEARCH IN THE FLOW STEINER TREE PROBLEM	40
M. M. Leri. ON COMPARING CONFIGURATION GRAPHS ROBUSTNESS IN A RANDOM ENVIRONMENT	46
Yu. L. Pavlov. ON CLUSTERING OF CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPHS	57
Yu. L. Pavlov. THE STRUCTURE OF A CONFIGURATION GRAPH WITH A NORMALLY DISTRIBUTED PARAMETER OF THE POWER SERIES DISTRIBUTION OF VERTEX DEGREES	62
I. V. Peshkova, A. S. Rummyantsev. REGENERATIVE SIMULATION METHODS FOR MULTISERVER SYSTEMS	68
A. N. Rettieva. ECOLOGY-ECONOMIC SYSTEM OF BIORESOURCE EXPLOITATION WITH VECTOR PAYOFFS	83
I. A. Chepliukova. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE MAXIMUM VERTEX DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH	92
I. A. Chernov. COUPLING GENERAL OCEAN CIRCULATION MODELS WITH THE BFM MARINE ECOSYSTEM MODEL	100
N. Yu. Enatskaya. ANALYSIS OF COMBINATORIAL SCHEMES IN THE PRE-ASYMPTOTIC REGION OF PARAMETER CHANGE	117
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A COMBINATION SCHEME WITH RESTRICTED STEPS	134
I. A. Chepliukova, Yu. L. Pavlov. LIMIT DISTRIBUTIONS OF VERTEX DEGREES IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH	140
A. N. Kirillov, N. B. Krizhanovskaya, A. A. Krizhanovsky. WSD ALGORITHM BASED ON A NEW METHOD OF VECTOR-WORD CONTEXTS PROXIMITY CALCULATION VIA ε -FILTRATION	149
CHRONICLE	
E. E. Ivashko. The Third International Scientific Conference «BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development» (BOINC: FAST'2017) (Petrozavodsk, August 28 – September 1, 2017)	164
DATES AND ANNIVERSARIES	
Yu. V. Zaika. Tamara P. Tikhomirova (on the 70 th anniversary)	165
INSTRUCTIONS FOR AUTHORS	168

Научное издание

**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**
№ 7, 2018

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

*Печатается по решению Ученого совета
Федерального исследовательского центра
«Карельский научный центр Российской академии наук»*

Выходит 12 раз в год

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций
Регистрационная запись ПИ № ФС 77-72429 от 28.02.2018 г.

Редактор А. И. Мокеева
Компьютерная верстка Е. Н. Спектор
Стилевой файл А. С. Румянцев

Подписано в печать 20.06.2018. Дата выхода 31.07.2018. Формат 60x84^{1/8}.
Гарнитура CMR. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 15,3. Усл. печ. л. 19,9.
Тираж 100 экз. Заказ 498. Цена свободная

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50