

Карельский научный центр
Российской академии наук

ТРУДЫ

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 8, 2016

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Петрозаводск
2016

Научный журнал
**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**
№ 8, 2016
Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Scientific Journal
**Transactions of the Karelian Research Centre of the
Russian Academy of Sciences**
№ 8, 2016
MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION
TECHNOLOGIES Series

Главный редактор

А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; Т. ВИХАВАЙНЕН, доктор истории, проф.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; С. П. ГРИППА, к. г. н., доцент; Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; А. С. ИСАЕВ, академик РАН, д. б. н., проф.; А. М. КРЫШЕНЬ (зам. главного редактора), д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; И. И. МУЛЛОНЕН, д. фил. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. ОКРЕПИЛОВ, академик РАН, д. э. н.; О. Н. ПУГАЧЕВ, член-корр. РАН, д. б. н.; Ю. В. САВЕЛЬЕВ, д. э. н.; Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; S. P. GRIPPA, PhD (Geog.), Assistant Prof.; A. S. ISAEV, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; A. M. KRYSHEN' (Deputy Editor-in-Chief), DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; I. I. MULLONEN, DSc (Philol.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. OKREPILOV, RAS Academician, DSc (Econ.); O. N. PUGACHYOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); Yu. V. SAVELIEV, DSc (Econ.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); T. VIHAVAINEN, PhD (Hist.), Prof.; A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Редакционная коллегия серии

«Математическое моделирование и информационные технологии»

Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; В. Ф. КОЛЧИН, д. ф.-м. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент.

Editorial Board of the «Mathematical Modeling and Information Technologies» Series

YU. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. F. KOLCHIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; YU. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.

ISSN 1997-3217 (печатная версия)
ISSN 2312-4504 (онлайн-версия)

Адрес редакции: 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

тел. (8142)762018; факс (8142)769600

E-mail: trudy@krc.karelia.ru

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>

© Карельский научный центр РАН, 2016

© Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН, 2016

УДК 532.517+532.542

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА И ТРАНСПОРТИРОВКИ ГАЗА ПО МОРСКИМ ГАЗОПРОВОДАМ

Н. Н. Ермолаева

Санкт-Петербургский государственный университет

Предложены нестационарные модели транспортировки газа по морским газопроводам, включающие нестационарные модели теплообмена газа с окружающей средой. Представлены расчеты ряда нестационарных задач, приведены оценки допустимости упрощений модели теплообмена.

Ключевые слова: морские газопроводы; теплообмен; уравнение состояния; численное решение; схема Лакса–Вендроффа.

N. N. Ermolaeva. NON-STATIONARY MODELS OF HEAT EXCHANGE AND GAS TRANSPORTATION THROUGH A MARINE GAS PIPELINE

Non-stationary models of gas transportation through pipelines in the sea, including non-stationary models of heat exchange between the gas flow and the environment are suggested. The calculations for a number of non-stationary problems are presented. The admissibility of simplification of heat exchange models is assessed.

Keywords: marine gas pipelines; heat exchange; equation of state; numerical solution; Lax–Wendroff-type scheme.

ВВЕДЕНИЕ

Для протяженных морских газопроводов, работающих без промежуточных подстанций, характерны большие расходы и сверхвысокие давления [1]. В части газопровода температура газа может опускаться ниже температуры фазового перехода T_* вода-лед. Низкие температуры газа не приводят к оледенению газопровода, если температура морской воды существенно больше температуры T_* . Это имеет место, например, в Черном и Балтийском морях. Целью настоящей работы является моделирование нестационарных процессов транспортировки газа и анализ допустимости упрощения модели теплообмена между потоком и окружающей средой для морских газопроводов, эксплуатируемых в условиях, не допускающих возможности оледенения.

Запишем, следуя работе [2], одномерную нестационарную модель транспортировки смеси газов по морскому газопроводу. Для простоты опустим учет влияния силы тяжести, считая трассу горизонтальной, и положим, что коэффициент гидравлического сопротивления λ постоянный. Обобщение модели на учет этих зависимостей не вызывает принципиальной трудности.

Модель 1

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho u^2) = -\lambda \rho \frac{u|u|}{4R}; \quad (2)$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \right) = -\omega, \quad (3)$$

$$e = \varepsilon + u^2/2; \quad (4)$$

калорическое уравнение

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho); \quad (5)$$

уравнение состояния Редлиха–Квонга

$$p = \frac{h\rho T}{1 - \delta\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)T^{1/2}}, \quad (6)$$

$$h = R_g/M, \quad M = \sum_{i=1}^f \eta_i m_i, \quad \sum_{i=1}^f \eta_i = 1,$$

$$\delta = b/M, \quad c = a/M^2,$$

$$b = \Omega_b R_g T_c / p_c, \quad a = \Omega_a (R_g)^2 T_c^{2.5} / p_c.$$

Здесь z — координата вдоль оси цилиндрического газопровода в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; t — время; $\rho(z, t)$, $u(z, t)$, $p(z, t)$, $T(z, t)$ — плотность, скорость, давление и температура газа соответственно; $e(z, t)$, $\varepsilon(z, t)$ — массовые плотности полной и внутренней энергии газа соответственно; $\omega(z, t)$ — мощность объемного источника (стока) внутренней энергии в потоке газа; h, c, δ — размерные постоянные в уравнении состояния (6); R_g — универсальная газовая постоянная; m_i, η_i — молекулярный вес и доля i -й составляющей газовой смеси соответственно; f — количество компонент газовой смеси; Ω_a, Ω_b — числа, определяемые для заданного химического состава газовой смеси по значениям критических температуры T_c и давления p_c согласно таблицам, приведенным в [3].

Модель 1 написана на языке величин $\rho, u, p, T, e, \varepsilon$, осредненных по сечению газопровода. Система (1)–(6) должна быть дополнена начальными и граничными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче.

В качестве уравнения состояния выбрано уравнение Редлиха–Квонга (6) — аналитическое уравнение состояния, одно из наиболее точных в широком диапазоне изменений ρ, p и T , вплоть до сверхвысоких давлений [3]. Вывод калорического уравнения (5) приведен ниже. Для замыкания модели 1 необходимо найти выражение для слагаемого ω в уравнении энергии (3), моделирующее теплообмен газа с окружающей средой.

МОДЕЛИ ТЕПЛОБМЕНА, РАСЧЕТ ω

Для рассматриваемого круга задач характерны большие числа Рейнольдса: $Re \sim 10^8$.

Интенсивность турбулентных пульсаций в газовом потоке приводит к тому, что в радиальном направлении лимитирующей стадией теплообмена с внешней средой является теплопроводность через многослойную боковую поверхность газопровода. Это позволяет учитывать теплообмен с окружающей средой интегрально. В уравнение энергии вводится слагаемое ω типа мощности объемного источника (стока) внутренней энергии. Величина ω выражается через q_w — радиальную составляющую вектора плотности потока внутренней энергии (вектора потока тепла) на внутренней поверхности газопровода в z -м сечении:

$$\int_{\Omega} \tilde{\omega} dv = - \oint_{S_{\Omega}} \bar{q} \cdot \bar{n} ds, \quad \int_{\Omega} \tilde{\omega} dv = \omega \pi R^2 \delta z,$$

Ω — область, ограниченная поперечными сечениями газопровода, проходящими через z и $z + \delta z$, и боковой поверхностью газопровода между этими сечениями. Тепловые условия на внешней поверхности газопровода на малых расстояниях $\delta z \sim R$ (R — внутренний радиус газопровода) допустимо считать неизменными по z и по t . Дополнительный пульсационный перенос внутренней энергии газа в направлении оси z пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом внутренней энергии в этом направлении. Сказанное позволяет записать:

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in [z, z + \delta z], \quad q_w(\zeta, t) &= q_w(z, t) \rightarrow \\ \rightarrow \oint_{S_{\Omega}} \bar{q} \cdot \bar{n} ds &= \int_0^{2\pi} \int_z^{z+\delta z} q_w(\zeta, t) R d\zeta d\varphi \approx \\ &\approx 2\pi R \delta z q_w(z, t) \rightarrow \\ \rightarrow \omega(z, t) \pi R^2 \delta z &\approx -2\pi R \delta z q_w(z, t), \\ \omega(z, t) &\approx -\frac{2q_w(z, t)}{R}. \end{aligned}$$

Величина $q_w(z, t)$ зависит от z параметрически через зависимость от z температуры газа (при неизменных внешних условиях) и определяется из решения уравнения теплопроводности в области многослойной боковой поверхности газопровода при соответствующих начальных и граничных условиях.

Для установившегося варианта модели 1 в книге [1] приведены явные выражения для потока тепла q_w как при наличии слоя льда на боковой поверхности газопровода, так и при его отсутствии.

Для ряда нестационарных задач при отсутствии слоя льда представляется возможным использование квазистационарной модели теплообмена в нестационарной модели 1.

Анализ допустимости этого является актуальной задачей, например, [4]. В настоящей работе предложена методика оценки допустимости использования квазистационарной модели теплообмена в расчетах нестационарных неизотермических течений смеси реальных газов по морским газопроводам.

Запишем нестационарную модель (модель 2) теплообмена между потоком газа в z -м сечении газопровода и окружающей средой при наличии двух слоев обшивки – внутреннего, состоящего из стали, и внешнего – из бетона. Обобщение на большее количество слоев не вызывает трудности. Положим, что изменения как в окружающей среде, так и в потоке газа в направлении оси z на масштабах $\delta z \sim R$ пренебрежимо малы (это имеет место для большинства практических задач).

Модель 2

При $r \in (R, R_1)$, $t \in (0, \hat{t})$:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 L(T_1); \quad (7)$$

$$t = 0, \quad T_1(r) = T_1^0(r); \quad (8)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R$:

$$T_1 = T(z, t), \quad q_w = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}; \quad (9)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R_1$:

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \quad (10)$$

при $r \in (R_1, R_2)$, $t \in (0, \hat{t})$:

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 L(T_2); \quad (11)$$

$$t = 0, \quad T_2(r) = T_2^0(r); \quad (12)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R_2$:

$$T_2 = T_v, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r}; \quad (13)$$

при $r \in (R_2, R_2 + \delta_*)$, $t \in (0, \hat{t})$:

$$\rho_v c_v \frac{\partial T_v}{\partial t} = \lambda_v L(T_v); \quad (14)$$

$$t = 0, \quad T_v(r) = T_v^0(r); \quad (15)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R_2 + \delta_*$:

$$T_v = T^*. \quad (16)$$

Здесь r – радиальная координата в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; \hat{t} – заданное время процесса; $L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат (r, z, φ) при $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$; δ_1, δ_2 –

толщины первого и второго слоев обшивки газопровода соответственно; $R_1 = R + \delta_1$; $R_2 = R + \delta_1 + \delta_2$ – внешний радиус газопровода.

Индексы: 1 – область первого слоя обшивки (стали); 2 – область второго слоя обшивки (бетона); v – область эффективного теплового погранслоя воды; δ_* – толщина эффективного теплового погранслоя воды; T^* – температура морской воды на удалении от газопровода; $\lambda_i, \rho_i, c_i, T_i^0(r)$ – коэффициент теплопроводности, плотность, удельный коэффициент теплоемкости и начальное распределение температуры в i -м слое соответственно ($i = 1, 2, v$); $T_i = T_i(r, t)$ – распределение температуры в i -м слое.

В модели 2 уравнения (7), (11) и (14) – одномерные линейные уравнения теплопроводности в слоях стали, бетона и в эффективном тепловом погранслое воды толщиной δ_* . В пределах этого погранслоя передача тепла моделируется линейным уравнением теплопроводности (14). Величина δ_* зависит от многих факторов, в частности от донных течений и от условий контакта газопровода с донным грунтом. Информация о δ_* может быть получена из решения обратной задачи. Оценка величины δ_* в установившихся режимах приведена в книге [1].

Расчет по модели 2 позволяет найти $\omega(z, t)$:

$$\omega(z, t) = -\frac{2q_w}{R} = -\frac{2}{R} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (17)$$

Модель 2 входит составной частью в модель 1. В общем случае система уравнений модели 1 не расщепляется.

Если допустимо использовать квазистационарный вариант модели 2, в котором все величины только параметрически зависят от времени, то интегрирование уравнений общей модели 1 существенно упрощается, так как ω явно выражается через $T(z, t)$ и другие параметры задачи.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ 2 В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ВАРИАНТЕ

При условии $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ решениями уравнений теплопроводности (7), (11) и (14) являются логарифмические профили температуры:

$$T_i(r) = A_i + B_i \ln r, \quad i = 1, 2, v.$$

Величины A_i, B_i определяются из граничных условий (9), (10), (13), (16) и имеют следую-

щий вид:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{T^* - T(z, t)}{\ln \frac{R_1}{R} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_v} \ln \frac{R_2 + \delta_*}{R_2}}, \\ A_1 &= T(z, t) - B_1 \ln R, \quad B_2 = (\lambda_1/\lambda_2)B_1, \\ B_v &= (\lambda_1/\lambda_v)B_1, \\ A_v &= T^* - B_v \ln(R_2 + \delta_*), \\ A_2 &= A_v + (B_v - B_2) \ln R_2. \end{aligned}$$

Выражение для потока тепла $q_w = \lambda_1 \frac{dT_1}{dr} \Big|_R$ в квазистационарной модели теплообмена находится в виде явной зависимости от температуры газа $T(z, t)$ и параметров задачи:

$$q_w = \frac{\lambda_1 B_1}{R}. \quad (18)$$

Численное интегрирование системы уравнений нестационарной модели 2 не представляет трудности и может быть проведено с использованием как явных, так и неявных разностных схем. В наших расчетах использовалась неявная разностная схема, основанная на монотонной схеме Самарского [5], аппроксимирующая задачу с первым порядком точности по Δt и вторым по Δr .

КАЛОРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Покажем, следуя работе [6], как связана внутренняя энергия реального газа, поведение которого удовлетворяет уравнению состояния (6), с его температурой и плотностью. Представим внутреннюю энергию ε локально как функцию независимых термодинамических переменных (T, V) , где $V = \frac{1}{\rho}$ — удельный объем. Дифференциал внутренней энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T dV = \\ &= c_v(T, V) dT + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T dV, \end{aligned}$$

где $c_v(T, V)$ — коэффициент удельной теплоемкости реального газа при постоянном объеме.

Выражение для $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T$ задается следующим соотношением:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T = T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right) \right)_V. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует:

$$\varepsilon(T, V) = \varepsilon(T, V_0) + \int_{V_0}^V T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right) \right)_V dV.$$

При условии $V_0 \rightarrow \infty$ плотность газа стремится к 0 и внутренняя энергия реального газа $\varepsilon(T, V_0)$ стремится к внутренней энергии ε_{id} идеального газа, равной $\varepsilon_{id} = \hat{c}_v T$, где \hat{c}_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме идеального газа того же химического состава. Это позволяет записать выражение для внутренней энергии реального газа в следующем виде:

$$\varepsilon(T, V) = \hat{c}_v T + \frac{3}{2} \frac{c}{\delta \sqrt{T}} \ln \left(\frac{V}{V + \delta} \right)$$

или в терминах плотности:

$$\varepsilon(T, \rho) = \hat{c}_v T - \frac{3}{2} \frac{c}{\delta \sqrt{T}} \ln(1 + \delta \rho), \quad (20)$$

где \hat{c}_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме *идеальной* газовой смеси того же химического состава.

ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим нестационарную задачу транспортировки газа, в которой нестационарность обусловлена колебаниями газопотребления.

Начальные условия. Начальными условиями в этой задаче служат распределения плотности $\rho_0(z)$ и температуры $T_0(z)$ в установившемся режиме:

$$t = 0 : \quad y = \rho u = \text{const} = \frac{Q}{\pi R^2},$$

$$\rho(z) = \rho_0(z), \quad T(z) = T_0(z).$$

Функции $\rho_0(z)$, $T_0(z)$ рассчитываются по стационарному варианту модели 1, Q — массовый расход газа, постоянный для установившегося режима. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась численно методом Рунге–Кутты, значение внутренней энергии $\varepsilon_0(z)$ находилось по плотности $\rho_0(z)$ и температуре $T_0(z)$ из уравнения (20), давление $p_0(z)$ — из уравнения состояния (6).

Граничные условия. В рассматриваемой задаче течение газа является дозвуковым, на входе в газопровод задаются неизменные во времени давление и температура газа, по ним из уравнений (6), (20) определяются значения плотности и внутренней энергии газа. На выходе задается закон изменения удельного расхода $y = \rho u$, соответствующий колебаниям газопотребления. Таким образом, граничные условия записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad & \rho(t, 0) = \rho_0, \quad \varepsilon(t, 0) = \varepsilon_0, \\ z = L : \quad & y(t, L) = y_*(t), \end{aligned}$$

L — длина газопровода, $y_*(t)$ — заданный закон изменения удельного расхода газа на выходе из газопровода (рис. 1).

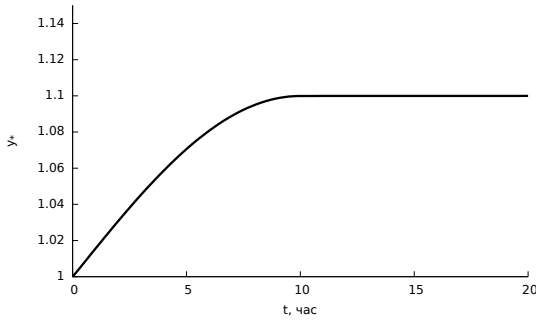


Рис. 1. Закон изменения безразмерного удельного расхода газа $y_*(t)$ на выходе из газопровода

Перейдем от скорости потока u к расходу $y = \rho u$ и запишем в безразмерной форме модель 1 в переменных ρ, y, p, ε , используя для безразмерных переменных те же обозначения.

Модель 1'

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y^2}{\rho} + m_1 p \right) &= -m_2 \frac{y^2}{\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + m_3 \frac{y^2}{\rho} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(y \varepsilon + m_3 \frac{y^3}{\rho^2} + m_4 \frac{y}{\rho} p \right) &= -m_5 \omega, \\ p &= m_6 \frac{\rho T}{(1 - m_{10} \rho)} - m_7 \frac{\rho^2}{(1 + m_{10} \rho) T^{1/2}}, \\ \varepsilon(T, \rho) &= m_8 T - m_9 \frac{\rho}{\sqrt{T}} \ln(1 + m_{10} \rho). \end{aligned}$$

Безразмерные комплексы $m_1 - m_{10}$ выражаются через физические параметры задачи и характерные величины по формулам:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p_x}{\rho_x u_x^2}, \quad m_2 = \frac{\lambda l_x}{4R}, \quad m_3 = \frac{u_x^2}{2\varepsilon_x}, \\ m_4 &= \frac{p_x}{\rho_x \varepsilon_x}, \quad m_5 = \frac{2\lambda_1 t_x}{\rho_x c_v R r_x}, \\ m_6 &= \frac{h \rho_x T_x}{p_x}, \quad m_7 = \frac{c \rho_x^2}{p_x T_x^{1/2}}, \\ m_8 &= \frac{\hat{c}_v T_x}{\varepsilon_x}, \quad m_9 = \frac{3c}{2\delta \varepsilon_x \sqrt{T_x}}, \quad m_{10} = \delta \rho_x, \end{aligned}$$

где $l_x, \rho_x, p_x, T_x, \varepsilon_x = c_v T_x, t_x, u_x = Q/(\rho_x \pi R^2)$ — характерные длина, плотность, давление, температура, внутренняя энергия, время и скорость соответственно, величины ρ_x, p_x, T_x связаны уравнением состояния (6).

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ 1'

Использовалась модифицированная схема Лакса–Вендроффа [7], которая по скорости счета и простоте реализации оказалась предпочтительнее других численных схем для рассматриваемых задач.

Алгоритм состоит из двух этапов. На каждом этапе искомые величины плотности, расхода, внутренней энергии, температуры и давления находятся явно. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \frac{y^2}{\rho} + m_1 p, \\ B &= \rho \varepsilon + m_3 \frac{y^2}{\rho}, \\ C &= y \varepsilon + m_3 \frac{y^3}{\rho^2} + m_4 \frac{y}{\rho} p. \end{aligned}$$

На первом этапе решается следующая система конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(\rho_k^n + \rho_{k+1}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{y_{k+1}^n - y_k^n}{\Delta} &= 0, \\ \frac{y_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(y_k^n + y_{k+1}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{A_{k+1}^n - A_k^n}{\Delta} &= \\ = -m_2 \left(\frac{y^2}{\rho} \right)_{k+1/2}^n, \\ \frac{B_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(B_k^n + B_{k+1}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{C_{k+1}^n - C_k^n}{\Delta} &= \\ = -m_5 \omega_{k+1/2}^n. \end{aligned}$$

Здесь τ, n — величина и номер шага по времени; Δ, k — величина и номер шага по координате z .

Из системы уравнений первого этапа на временном слое $(n + 1/2)$ в узлах $k = 1, \dots, (N - 1)$ явно находятся значения плотности $\rho_k^{n+1/2}$, расхода $y_k^{n+1/2}$ и внутренней энергии $\varepsilon_k^{n+1/2}$, затем по уравнению (20) и уравнению состояния находятся значения температуры $T_k^{n+1/2}$ и давления $p_k^{n+1/2}$.

В узле $k = 0$ значения плотности $\rho_0^{n+1/2}$ и температуры $T_0^{n+1/2}$ известны из граничных условий, величина $\varepsilon_0^{n+1/2}$ определяется по

уравнению (20), $p_0^{n+1/2}$ — из уравнения состояния. Для определения расхода $y_0^{n+1/2}$ используется линейная экстраполяция из внутренних узлов.

В узле $k = N$ значения плотности $\rho_N^{n+1/2}$ и температуры $T_N^{n+1/2}$ определяются линейной экстраполяцией из внутренних узлов, по ним находятся внутренняя энергия $\varepsilon_N^{n+1/2}$ и давление $p_N^{n+1/2}$. Величина расхода $y_N^{n+1/2}$ известна из граничных условий.

На втором этапе решается следующая система конечно-разностных уравнений:

$$\frac{\rho_k^{n+1} - \rho_k^n}{\tau} + \frac{y_{k+1/2}^{n+1/2} - y_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta} = 0,$$

$$\frac{y_k^{n+1} - y_k^n}{\tau} + \frac{A_{k+1/2}^{n+1/2} - A_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta} = -m_2 \left(\frac{y^2}{\rho} \right)_k,$$

$$\frac{B_k^{n+1} - B_k^n}{\tau} + \frac{C_{k+1/2}^{n+1/2} - C_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta} = -m_5 \omega_k^{n+1/2}.$$

Значения величин $\rho_k^{n+1/2}$, $y_k^{n+1/2}$, $\varepsilon_k^{n+1/2}$, $T_k^{n+1/2}$, $p_k^{n+1/2}$, $k = 0 \dots N$ известны из первого этапа. Из системы уравнений второго этапа на $(n+1)$ -м временном слое в узлах $k = 1, \dots, (N-1)$ явно находятся значения плотности ρ_k^{n+1} , расхода y_k^{n+1} и внутренней энергии ε_k^{n+1} , затем по уравнениям (20), (6) находятся значения температуры T_k^{n+1} и давления p_k^{n+1} .

Значения всех величин в граничных узлах $k = 0$ и $k = N$ определяются аналогично схеме первого этапа.

Приведенная модифицированная схема Лакса–Вендроффа имеет второй порядок точности по шагу τ и по шагу Δ , кроме граничных узлов, где использовалась линейная экстраполяция. По заданной точности расчета по пространственной переменной в результате численного эксперимента выбирался оптимальный шаг по времени и была доказана практическая сходимость метода.

ПРИМЕР РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПО МОДЕЛИ 1'

Были проведены расчеты ряда вариантов неизотермического нестационарного течения газа по морскому газопроводу для квазистационарного (18) и нестационарного (модель 2) процессов теплообмена газа с окружающей средой. Рассчитанная погрешность такой замены позволила оценить допустимость замены

нестационарной модели теплообмена ее квазистационарным вариантом. Переход к квазистационарной модели теплообмена при численном интегрировании системы уравнений модели 1' позволил существенно упростить алгоритм вычисления.

В модельной задаче приняты следующие параметры морского газопровода: неизменный внутренний радиус $R = 0,5$ м; параметры первого слоя обшивки: толщина $\delta_1 = 0,04$ м, теплопроводность $\lambda_1 = 24$ Вт/(м·К), параметры второго слоя: толщина $\delta_2 = 0,12$ м, теплопроводность $\lambda_2 = 1,7$ Вт/(м·К); массовый расход Q газа в начальный момент времени равен 400 кг/с; температура T^* окружающей морской воды считается неизменной вдоль газопровода и равной 278,15 К; длина газопровода L принята равной 300 км. Значения характерных величин: $\rho_x = 138,02$ кг/м³, $T_x = 283,15$ К, $l_x = 10$ км, им соответствуют характерное давление $p_x = p(\rho_x, T_x) = 15,2$ МПа и характерная скорость $u_x = Q/(\pi R^2 \rho_x) = 3,69$ м/с.

Значения параметров h , c , δ , μ , c_v выбирались характерными для смеси газов с преобладанием метана, коэффициент гидравлического сопротивления λ принят равным 0,00829. Для указанного варианта параметров значения безразмерных комплексов m_1 – m_{10} равнялись:

$$m_1 = 8087,414, \quad m_2 = 41,488, \quad m_3 = 0,12 \cdot 10^{-6},$$

$$m_4 = 0,194, \quad m_5 = 125,199, \quad m_6 = 1,293,$$

$$m_7 = 0,916, \quad m_8 = 0,856,$$

$$m_9 = 1,056, \quad m_{10} = 0,253.$$

В исследуемых режимах для температуры $T(z, t)$ газовой смеси, как показали расчеты, выполняется условие: $T(z, t) > T_* \quad \forall z \in [0, L]$, где $T_* = 271$ К — температура фазового перехода морская вода-лед. При этом условии оледенение внешней поверхности газопровода невозможно.

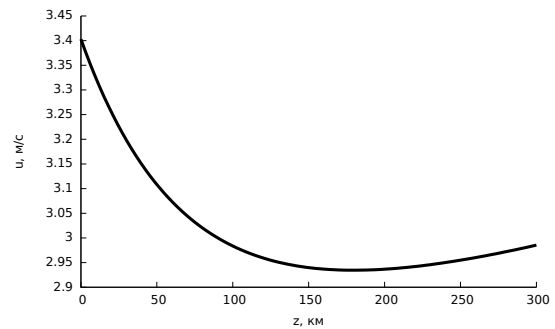


Рис. 2. Изменение размерной величины скорости потока u вдоль газопровода в момент $t = 10$ часов

На рисунке 2 приведено изменение скорости потока (м/с) вдоль газопровода в момент времени $t = 10$ часов, рассчитанное по модели 1 при нестационарной модели теплообмена. На рисунке 3 приведено изменение температуры (К) потока вдоль газопровода в момент $t = 10$ часов, рассчитанное по модели 1 при нестационарной модели теплообмена (1) и при квазистационарной модели (2).

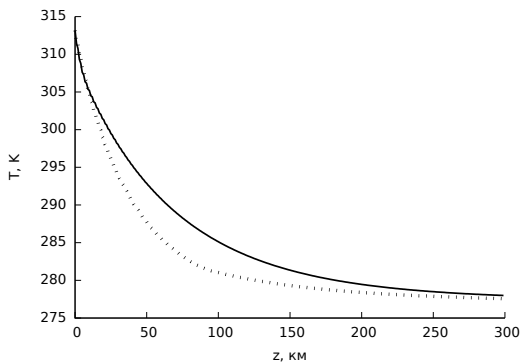


Рис. 3. Изменение температуры T потока вдоль газопровода в момент $t = 10$ часов: 1 — при нестационарной модели теплообмена; 2 — при квазистационарной модели теплообмена

На рисунке 4 приведена зависимость от времени потока тепла q_w [Дж/(с·м²)] в сечении газопровода $z = 10$ км для варианта нестационарной модели теплообмена (2) и квазистационарной модели (1).

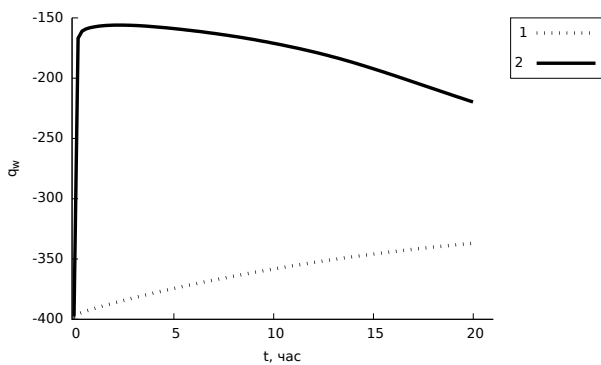


Рис. 4. Изменение потока тепла q_w в сечении газопровода $z = 10$ км: 1 — при квазистационарной модели теплообмена; 2 — при нестационарной модели теплообмена

На рисунке 5 приведено изменение во времени потока тепла q_w [Дж/(с·м²)] при $z = 200$ км.

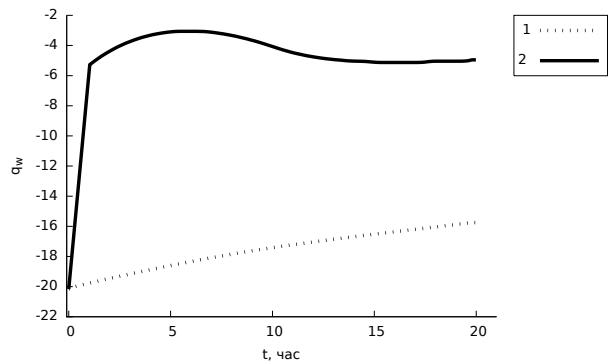


Рис. 5. Изменение потока тепла q_w в сечении газопровода $z = 200$ км: 1 — при квазистационарной модели теплообмена; 2 — при нестационарной модели теплообмена

Выводы

Предложена методика оценки допустимости использования квазистационарной модели теплообмена в расчетах нестационарных неизотермических течений смеси реальных газов по морским газопроводам. Приведен пример расчета нестационарного течения смеси газов по участку модельного морского газопровода при нестационарной и квазистационарной моделях теплообмена. Результаты компьютерного моделирования рассмотренной задачи позволяют определить область допустимости использования квазистационарной модели теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В. и др. Модели морских газопроводов. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2005. 156 с.
2. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Квазиодномерная нестационарная модель процессов в морских газопроводах // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2015. № 3. С. 55–66.
3. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей / пер. с англ.; под ред. Б. И. Соколова. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Химия, Ленингр. отд., 1982. 592 с.
4. Helgaker J. F., Oosterkamp A., Ytrehus T. Transmission of Natural Gas through Offshore Pipelines — Effect of Unsteady Heat Transfer Model [Conference] // MEKIT '13. Trondheim: Tapir, 2013.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Едиториал УРСС, 2005. 384 с.
6. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Анализ подходов к моделированию термодинамических

процессов в газах при высоких давлениях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 1. С. 35–45.

7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1976. 618 с.

Поступила в редакцию 02.06.2016

REFERENCES

1. Kurbatova G. I., Popova E. A., Filippov B. V. et al. Modeli morskikh gazoprovodov [Models of sea gas-pipelines]. St. Petersburg: S.-Peterb. gos. un-t, 2005. 156 p.

2. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I. Qvasiodnomernaja nestacionarnaja model' processov v morskikh gazoprovodah [Quasi-one-dimensional non-stationary model of processes in a sea gas-pipeline]. *Vestnik S.-Peterb. un-ta* [Vestnik of St. Petersburg University]. Ser. 10. 2015. No. 3. P. 55–66.

3. Reid Robert C., Prausnitz John M., Sherwood Thomas K. The properties of gases and liquids. McGraw - Hill Book Company, New York. St. Louis, San Francisco, 1977. 592 p.

4. Helgaker J. F., Oosterkamp A., Ytrehus T. Transmission of Natural Gas through Offshore Pipelines - Effect of Unsteady Heat Transfer Model [Conference]. MEKIT '13. Trondheim: Tapir, 2013.

5. Samarskij A. A., Gulin A. V. Ustojchivost raznostnich shem [Stability of difference schemes]. Moscow: Editorial URSS, 2005. 384 p.

6. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I. Analiz podhodov k modelirovaniju termodinamicheskikh processov v gazah pri visikih davlenijah [The analysis of the approaches to the modeling of thermodynamic processes in gas flow at hyperpressure]. *Vestnik S.-Peterb. un-ta* [Vestnik of St. Petersburg University]. Ser. 10. 2013. No. 1. P. 35–45.

7. Roach P. J. Vichislitel'naja gidrodinamika [Computational Fluid Dynamics]. Moscow: Mir, 1976. 618 p.

Received June 2, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ермолаева Надежда Николаевна

к. ф.-м. н., доцент

Санкт-Петербургский государственный университет

Университетский пр., 35, Петергоф,

Санкт-Петербург, Россия, 198504

эл. почта: n.ermolaeva@spbu.ru

тел.: (812) 4287159

CONTRIBUTOR:

Ermolaeva, Nadezda

Saint Petersburg State University

35 Universitetskii pr., Petergof,

Saint Petersburg, Russia 198504

e-mail: n.ermolaeva@spbu.ru

tel.: (812) 4287159

519.6:539.2

АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ СИСТЕМОЙ ОДУ: УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ

Ю. В. Заика, Е. К. Костикова

*Исследования прикладной математики и информатики
Арельского научно-исследовательского центра Р*

В рамках технологических задач водородного материаловедения (включая проект ITER) ведется интенсивный поиск материалов с заранее заданными пределами водородопроницаемости. Одним из экспериментальных методов является термодесорбционная спектроскопия (ТДС). В работе, насыщенной водородом, дегазируется в условиях вакуумирования и монотонного нагрева. С помощью масс-спектрометра регистрируется десорбционный поток, по величине которого судят о характере взаимодействия иотопов водорода с твердым телом. Интерес представляют такие параметры переноса, как коэффициенты диффузии, растворения, десорбции. В статье представлены распределенная краевая задача термодесорбции и численный метод моделирования ТДС-спектра, требующий лишь интегрирования нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) невысокого порядка. Показано, что метод ускорения сходимости на основе выделения интегрируемо-слабо особенностей.

Ключевые слова: водородопроницаемость; термодесорбция; нелинейные краевые задачи; динамические граничные условия; численное моделирование.

Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. APPROXIMATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION BY ODE SYSTEM: CONVERGENCE ACCELERATION

One of the technological challenges for hydrogen materials science (including ITER project) is the currently active search for structural materials with various potential applications that will have predetermined limits of hydrogen permeability. One of the experimental methods is thermodesorption spectrometry (TDS). A hydrogen-saturated sample is degassed under vacuum and monotone heating. The desorption flux is measured by mass spectrometer to determine the character of interactions of hydrogen isotopes with the solid. We are interested in such transfer parameters as the coefficients of diffusion, dissolution, desorption. The paper presents a distributed boundary value problem of thermal desorption and a numerical method for TDS-spectrum simulation, where only integration of a non-linear system of low order ordinary differential equations (ODE) is required. The method of convergence acceleration based on the allocation of integrable weak singularity is explained. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-01-00744).

Key words: hydrogen permeability; thermal desorption; nonlinear boundary-value problems; dynamical boundary conditions; numerical simulation.

Е ЕНИЕ

интерес к взаимодействию изотопов водорода с различными материалами носит многоплановый характер [1, 2, 5, 6, 10, 12 20].

Исследователи говорят не только о водородной энергетике, но и о водородной экономике [19]. Некоторые частные задачи водородного материаловедения, связанные с темой статьи, исследованы в [21 24]. Экспериментальный опыт показывает, что лимитирующими являются не только диффузия, но и физико-химические процессы на поверхности [1, 2]. Остановимся на моделировании термодесорбции, учитывая лишь основные факторы и информативность рассматриваемого ТДС-эксперимента. Статья является продолжением [4], поэтому представим постановку задачи и модель компактно.

А Е А И Ч Е К А Е Л Е Е Н А

Рассмотрим перенос водорода сквозь образец тестируемого материала (пластину толщиной ℓ). Нагрев медленный, практически равномерный, так что градиент температуры пренебрежимо мал и диффузионный поток можно считать пропорциональным градиенту концентрации. Концентрация растворенного водорода мала. Материал достаточно однороден, чтобы пренебречь взаимодействием H с ловушками (микродефектами структуры, которые могут удерживать водород). Для диффузии примем стандартное уравнение:

$$c_t(t, x) = D(T)c_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in Q_{t_*}, \quad (1)$$

где t — время, $Q_{t_*} = (0, t_*) \times (0, \ell)$; $c(t, x)$ — концентрация диффундирующего водорода (атомарного). Зависимость коэффициента диффузии D от температуры $T(t)$ соответствует закону Френелиуса: $D = D_0 \exp\{-E_D/[RT(t)]\}$.

Трудности численного анализа связаны не с уравнением (1), а с динамическими нелинейными граничными условиями. Пусть пластина контактирует с газообразным H_2 и поверхность является потенциальным барьером (см. [1, с. 177–206; Габис, Компаниец, Курдюмов]). Тогда с учетом (де)сорбционных процессов краевые условия следующие:

$$c(0, x) = \bar{c}(x), \quad x \in [0, \ell], \quad t \in [0, t_*], \quad (2)$$

$$c_0(t) = g(T)q_0(t), \quad c_\ell(t) = g(T)q_\ell(t), \quad (3)$$

$$\dot{q}_0(t) = \mu s(T)p_0(t) - b(T)q_0^2(t) + Dc_x(t, 0), \quad (4)$$

$$\dot{q}_\ell(t) = \mu s(T)p_\ell(t) - b(T)q_\ell^2(t) - Dc_x(t, \ell), \quad (5)$$

$b(T) = b_0 \exp\{-E_b[RT]^{-1}\}$, $s(T) = \dots$, где $c_0(t) \equiv c(t, 0)$, $c_\ell(t) \equiv c(t, \ell)$ — граничные объемные концентрации диффундирующего водорода; $q_0(t)$, $q_\ell(t)$ — концентрации на поверхностях ($x = 0, \ell$); $g(T)$ — параметр локального равновесия между концентрациями на поверхности и в приповерхностном объеме; μ — кинетический коэффициент; $s(T)$ — параметр, отражающий тот факт, что только малая часть «налетающего» водорода окажется в форме атомов на поверхности; $p_0(t)$, $p_\ell(t)$ — давления газа (H_2); $b(T)$ — коэффициент десорбции. Говоря о потоках (в частности, десорбционных $J_{0,\ell} = bq_{0,\ell}^2$), подразумеваем их плотность.

В модели фигурирует как молекулярный, так и атомарный водород. Для единообразия подсчет будем вести в атомах: $[c] = 1/\text{см}^3$, $[q] = 1/\text{см}^2$, $[Dc_x] = [J] = 1/\text{см}^2\text{с}$ ($J = bq^2$). В кинетической теории газов величина μp определяет число частиц (в данном случае молекул H_2), соударяющихся с единичной площадкой поверхности в единицу времени. Но за счет множителя s удобно воспринимать слагаемое $\mu s p$ как плотность потока атомов, оседающих на поверхности. Это интегральный показатель, без разделения процесса на стадии. Вместо s можно написать $2s$ и интерпретировать s как долю адсорбируемых атомов H .

В масштабе рассматриваемого далее ТДС-эксперимента удобно выбрать $[p] = \text{Торр}$, откуда $\mu(T) = (2\pi mkT)^{-1/2} \approx 2,484 \cdot 10^{22} / \bar{T}$. Здесь $[\mu] = 1_{H_2}/(\text{Торр см}^2\text{с})$, $[T] = \text{К}$, k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы водорода. Зависимостью кинетической константы от температуры ($\mu \propto 1/\bar{T}$) часто пренебрегают на фоне экспоненты в $s(T)$.

а е а е. В случае высокой степени пористости разумно уравнения (3)–(5) заменить на

$$\mu s(T)p_{0,\ell}(t) - b(T)c_{0,\ell}^2(t) = \mp D(T)c_x|_{0,\ell}. \quad (6)$$

Плотность потока абсорбции $\mu s p$ (в приповерхностный слой) пропорциональна давлению H_2 снаружи. Формально (6) получается из уравнений (4), (5) при малой скорости накопления на поверхности ($\dot{q} \approx 0$). Коэффициент десорбции обозначается одной буквой, хотя в (6) и (4), (5) это разные величины. Их согласованность понимаем в смысле $b_{\text{surface}} = g^2 b_{\text{volume}}$ (см. (3)). В [10] приводится подробный анализ различных стадий проникновения водорода из газа в металл и обратно. Коэффициент b в условии (6) является **эффективным коэффициентом рекомбинации**.

В камеру с нагретой пластиной из исследуемого металла или сплава подается водород в газовой фазе при сравнительно большом давлении. После того как образец поглотит достаточное количество водорода (до состояния равновесного насыщения), он быстро охлаждается (отключается ток нагрева). В режиме последующего постоянного вакуумирования камеры лента снова нагревается. С помощью масс-спектрометра измеряется давление молекулярного водорода в вакуумной камере, обусловленное десорбцией $J(t) = b(t)q^2(t)$. «Перерасчет» $p(\cdot)$ $J(\cdot)$ определяется характеристиками установки, выходными данными считают функцию $J(t)$. Для упрощения обозначений примем сокращенную запись:

$$b(t) \equiv b(T(t)), \quad D(t) \equiv D(T(t)), \quad s(t) \equiv s(T(t)).$$

Коэффициент g быстрого растворения (локального равновесия «поверхность об ем») считаем константой ($E_{k-} = E_{k+}$) в пределах рассматриваемого ТДС-пика десорбции.

Для метода ТДС выполнена симметрия:

$$p(t) = p_{0,\ell}(t), \quad q(t) = q_{0,\ell}(t), \quad c_0(t) = c_\ell(t), \quad (7)$$

$$D(t)c_x(t, 0) = -D(t)c_x(t, \ell), \quad \bar{c}(x) = \bar{c} = \text{const.}$$

Время t_* окончания эксперимента определим условием практически полной дегазации: $p(t) \approx 0$, $t \geq t_*$, $c(t_*, x) \approx 0$, $x \in [0, \ell]$.

Н Е - И Е ЕН ИАЛ Н Е А НЕНИЕ Е Е ИИ

Принятая модель ТДС-дегазации:

$$c_t = D(t)c_{xx}, \quad c(0, x) = \bar{c}, \quad c_{0,\ell}(t) = gq(t),$$

$$\dot{q}(t) = r(t) - b(t)q^2(t) + D(t)c_x(t, 0),$$

$$r(t) \equiv \mu s(t)p(t), \quad J(t) \equiv b(t)q^2(t).$$

Вакуумную систему считаем достаточно мощной, чтобы после насыщения, на этапе дегазации пренебречь ресорбцией ($r(t) = 0$) в динамическом граничном условии ($\dot{q} = \dots$). Разрешимость краевой задачи (и в более общем случае учета обратимого захвата в об еме) обоснована в [3]. Ограничимся прямой задачей численного моделирования ТДС-спектра $J = J(T)$. тот этап необходим как итерационная составляющая алгоритма идентификации. Нагрев $T(t)$ обычно реализуют линейным ($T(t) = T_0 + vt$). Скорость нагрева v невелика ($< K/c$). По достижении максимальной температуры (если дегазация еще не завершилась) нагрев прекращается: $T(t) = T_{\text{max}}$.

Теперь мы в состоянии математически сформулировать задачу. В [3, 22] представлены разностные схемы решения краевой задачи (в том числе и с учетом ловушек различных типов). Но чтобы сравнивать модельные и экспериментальные ТДС-спектры, нужна только поверхностная концентрация ($J = bq^2$). Естественно попытаться избежать итерационного решения краевой задачи при текущих приближениях параметров модели $D_0, E_D, b_0, E_b, s_0, E_s, g$. С этой целью проведем преобразования, придя в итоге к необходимости интегрировать лишь систему ОДУ невысокого порядка.

Оставив прежнее обозначение t , выполним замену времени $t = \int_0^t D ds$:

$$c_t(t, x) = c_{xx}(t, x), \quad c(0, x) = \bar{c}, \quad c_{0,\ell} = gq(t), \quad (8)$$

$$c_x 0 = -c_x \ell = \dot{q}(t) + [J(t) - r(t)]D^{-1}(t). \quad (9)$$

Считаем $q(t)$ функциональным параметром, а (9) дополнительным соотношением к линейной задаче (8). Сделаем замену, приводящую краевые условия в (8) к однородным:

$$\hat{c} = c(t, x) - gq(t), \quad \hat{c}_t(t, x) = \hat{c}_{xx}(t, x) + f(t),$$

$$f(t) = -g\dot{q}(t), \quad \hat{c}(0, x) = \hat{\varphi}(x) = 0, \quad \hat{c}_{0,\ell} = 0.$$

Запишем решение с помощью функции мгновенного источника (функции Грина) [8, гл. 2]:

$$\hat{c}(t, x) = \int_0^t \int_0^\ell G(x, \xi, t - \tau) f(\tau) d\xi d\tau,$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1} \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right\} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi \xi}{\ell}.$$

В динамические граничные условия входит производная $\hat{c}_x(t, 0)$:

$$\hat{c}_x 0 = -\frac{4g}{\ell} \int_0^t \dot{q}(\tau) \sum \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} (\tau - t) \right\} d\tau,$$

$\sum \equiv \sum_{n=1,3,5,\dots}$. При $\tau = t$ ряд расходится, так что подразумевается почленное интегрирование. В исходном времени t имеем

$$c_x(t, 0) = \hat{c}_x(t, 0) = c_x(t, \ell) = \hat{c}_x(t, \ell), \quad c_x(t, 0) = -\frac{4g}{\ell} \sum \int_0^t \dot{q}(\tau) \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \int_\tau^t D(s) ds \right\} d\tau.$$

Окончательно динамическое граничное условие запишется в форме

$$\dot{q}(t) = r(t) - b(t)q^2(t) - \quad (10)$$

$$-\frac{4gD}{\ell} \sum \int_0^t \dot{q}(\tau) \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \int_\tau^t D(s) ds \right\} d\tau.$$

Уравнение эквивалентно исходной краевой задаче: решение $q(t)$ однозначно определяет $c(t, x)$. Нас интересует отрезок времени $[t_1, t_2] \subset (0, t_*)$, соответствующий выраженному пику термодесорбции (измерения при t близких к $0, t_*$ малоинформативны). Для мощной вакуумной системы ресорбцией пренебрегают ($r(t) = 0$), что упрощает уравнение.

е а е а о а ада

Для численного моделирования удобно перейти к безразмерным переменным, выполнив замены: $t = \int_0^t D(s) ds / \ell^2$, $x = x / \ell$, $v = q / \bar{q}$ ($\bar{c} = g\bar{q}$). Не меняя обозначения t , получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{b}(t) \equiv \frac{b(t)\ell^2\bar{q}}{D(t)}, \quad \dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - \\ - 4g\ell \sum \int_0^t \dot{v}(\tau) \exp\{-n^2\pi^2[t - \tau]\} d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

$v(0) = 1$ (начальные данные). Ограничимся первыми k слагаемыми ряда. Обозначим:

$$z_i(t) = \int_0^t \dot{v}(\tau) \exp\{- (2i - 1)^2\pi^2[t - \tau]\} d\tau.$$

Продифференцируем z_i по t и подставим вместо \dot{v} выражение (11) (сумма до $n = 2k - 1$):

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = -\tilde{b}v^2 - [(2i - 1)^2\pi^2 + 4g\ell]z_i - \\ - 4g\ell(z_1 + \dots + z_{i-1} + z_{i+1} + \dots + z_k). \end{aligned}$$

В итоге получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = -\tilde{b}(t)v^2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \\ - 4g\ell \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

$\alpha_i \equiv 1 + (2i - 1)^2\pi^2 / (4g\ell)$, $v(0) = 1$, $z_i(0) = 0$ (размерность матрицы $(k + 1) \times k$).

И ЛЕНН Е ЕЛИ АНИЕ

Для численных экспериментов использовались данные по никелю и нержавеющей стали марки 12X18H10T. Варьирование параметров позволяет оценить степень чувствительности («производные») ТДС-спектра к выделенным лимитирующим факторам. Для совпадения результатов с решением исходной краевой задачи разностным методом [22] потребовалось

интегрирование системы (12) порядка 10 15 (авторы пользовались пакетом Scilab 5.5). Результаты моделирования представлены в [4].

Данные по никелю [5]: $[E] = \text{Дж/моль}$; $D = 7,5 \times 10^{-3} \exp -40\,000/RT$ [$\text{см}^2/\text{с}$]; $b_{\text{vol}} = 1,53 \times 10^{-18} \exp -43\,200/RT$ [$\text{см}^4/\text{с}$]; $s = 1,8 \times 10^{-2} \exp -61\,400/RT$; $\bar{p} = 37,4$ [Торр]; $\ell = 0,02$ [см]; $\bar{T} = 770$ [К], $T(0) = 295$ [К]; $\dot{T} = 0,5$ [К/с]. Для определенности зафиксируем $b_{0\text{surf}} = 1,53 \times 10^{-14}$ [$\text{см}^2/\text{с}$]; $g = 100$ [1/с].

Данные по стали марки 12X18H10T [5, 18]: $D = 3,09 \times 10^{-4} \exp -27\,780/RT$; $b_{\text{vol}} = 5,05 \times 10^{-13} \exp -97\,140/RT$; $s = 7,05 \times 10^{-2} \exp -59\,510/RT$; $T(0) = 300$ К. Для определенности $b_{0\text{surf}} = 5,05 \times 10^{-9}$; $\ell = 0,1$; $g = 100$; $\bar{p} = 100$; $\bar{T} = 850$, $\dot{T} = 0,5$ [К/с].

ЕЛЕНИЕ ЕНН И И Л К ЕНИ И И

Проанализируем, почему при достаточно точной аппроксимации интегро-дифференциального уравнения (11) системой ОДУ (12) требуется ввести относительно большое количество переменных $z_i(t)$. Функция

$$\Theta(s) = 4 \sum \exp\{-n^2\pi^2 s\}, \quad \sum \equiv \sum_{n=1,3,5,\dots}$$

имеет конечные значения при $s > 0$. Ряд быстро сходится при больших s , а при формальной подстановке $s = 0$ (когда переменная интегрирования τ достигает верхнего предела t) получаем расходящийся ряд. «Спасает» почленное интегрирование. При этом $\max z_i(t) = O(n^{-2})$ ($n = 2i - 1$, $i \geq 1$), что приводит к медленной сходимости. Десяток-другой ОДУ указанного выше типа не является вычислительной проблемой, но является препятствием для использования метода специалистами в области водородного материаловедения. Поставим задачу найти компромисс: ОДУ должно быть немного (4 5), чтобы можно было использовать стандартные пакеты программ (например, свободно распространяемый Scilab). Выделим интегрируемую особенность и соответствующим образом «подправим» параметры в уравнениях. Условно будем вести речь о методе эффективных коэффициентов.

Проведем преобразования, используя тэта-функции Коби. Точнее, нас интересует

$$\theta_3(t, x) = 1 + 2 \sum_{n=1} \exp -n^2\pi^2 t \cos(2n\pi x).$$

При $x = 0$, $t > 0$ имеем альтернативное представление $\theta_3(t, 0)$ (см. [6, с. 179]; [11, с. 353]):

$$1 + 2 \sum_{n=1} \exp -n^2\pi^2 t = \frac{1}{\pi t} \sum_{-} \exp \left\{ -\frac{n^2}{t} \right\}.$$

Ряд слева быстро сходится при больших t , а ряд справа при малых значениях t (которые нас сейчас и интересуют). Если определить $\theta(t) = \sum \exp -\pi n^2 t$ ($n \in \mathbb{Z}, t > 0$), то получим функциональное уравнение для тэта-функции [7, с. 261] $\theta(1/t) = t\theta(t)$, или $t \sum \exp -\pi n^2 t = \sum \exp -\pi n^2/t$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Проведем вспомогательные преобразования, разбивая промежуточную сумму на нечетные и четные слагаемые:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n^2}{t}\right\} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp -n^2 \pi^2 t = \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp -k^2 \pi^2 4t = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} + \frac{1}{4\pi t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n^2}{4t}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда (после вычитания из первого ряда последнего и удвоения) получаем искомое разложение при $s > 0$:

$$\begin{aligned} \Theta(s) &\equiv 4 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-n^2 \pi^2 s\} = \frac{1+S}{\pi s}, \\ S(s) &\equiv 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}, \quad q \equiv -\exp\left\{-\frac{1}{4s}\right\}. \end{aligned}$$

Ряд S очень быстро сходится при малых s . При $s \rightarrow +0$ имеем $S \rightarrow 0$ и интегрируемую особенность $\Theta \approx 1/\pi s$. Ряд еще и знакопеременный, что влечет неравенства $S < 0$ (точнее $S \in (-1, 0)$) и $S \leq 2q$. Последняя оценка грубая (по сравнению с $S_{2m} \geq S \geq S_{2m+1}$ в терминах частичных сумм), но нам ее будет достаточно при относительно малых s . График функции $-S(s)$ имеет S -образный вид кривой насыщения и уже $S(1) \approx -0,999$. В получаемом с помощью описанного представления $\Theta(s)$ уравнении ($t \geq 0, v(0) = 1$) $\dot{v}(t) =$

$$= -\tilde{b}(t)v^2(t) - \varkappa \int_0^t \frac{1+S(t-\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} \dot{v}(\tau) d\tau \quad (13)$$

дробь (слабая особенность под интегралом) быстро убывает от бесконечности ($\tau = t$) до практически нуля ($\tau = t - 1$). Но не учитывать более отдаленную предысторию опасно, поскольку в общем случае ($\tilde{b} \gg 1, \varkappa \ll 1$) функция $\dot{v}(t)$ быстро убывает с ростом t .

Оценим, насколько приемлемым (в контексте ТДС-эксперимента) является приближение $\Theta(s) \approx 1/\pi s$, которое элементарной формулой выделяет интересующую нас особенность ($S \ll 1$ при малых s). Для определенности зададимся уровнем 2% ошибки в числителе: $1+S \approx 1, S \leq 2 \exp -1/4s < 2 \cdot 10^{-2}$.

Округленно получаем $s \leq 1/20$. В экспериментальных работах точность измерений в ТДС-эксперименте априорно оценивается в пределах 10–20%. Это позволяет в рамках принятой модели уравнение (11) переписать в форме

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\tilde{b}(t)v^2(t) - \\ &- 4\varkappa \sum \int_0^{t-h} \dots - 4\varkappa \sum \int_{t-h}^t \dots \quad (14) \end{aligned}$$

($t \geq h, \tilde{b} \equiv \bar{q}b\ell^2/D, \varkappa \equiv g\ell$) и в последней сумме («главной части») воспользоваться аппроксимацией $\Theta(s) \approx 1/\pi s$ ($s = t - \tau$) с приемлемым ограничением $0 \leq s \leq h = 1/20$. Эта оценка в безразмерном («штрихованном») времени. Возвращаясь к исходному физическому времени, имеем $h \sim \int_{t-h}^t D d\xi/\ell^2$. Типичные значения $\ell = 0,02$ см, $D = 10^{-7}(10^{-6})$ см²/с, что приводит к грубой оценке $h \approx 200(20)$ с. Время h не является исчезающе малым в масштабе часов ТДС-эксперимента. Таким образом, изложенный способ выделения главной части интеграла не приводит к дополнительным особенностям математического характера при обработке экспериментальных данных.

Метод е т в о е тов

В исходном уравнении (11) выделим в сумме небольшое число слагаемых (для определенности три с учетом быстрого роста показателя в экспоненте $n^2 = 1, 9, 25$):

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_1 + \sum_2, \\ \sum_1 &\equiv \sum_{n=1,3,5}, \quad \sum_2 \equiv \sum_{n=7,9,\dots} \end{aligned}$$

Для \sum_1 введем, как и ранее, переменные

$$z_i(t) = \int_0^t \dot{v}(\tau) \exp\{-n^2 \pi^2 [t - \tau]\} d\tau, \quad n = 2i - 1,$$

$i = 1, 2, 3; z_i(0) = 0, t > 0 \quad z_i < 0$. Сумму \sum_2 аппроксимируем, воспринимая ее как возмущение. При этом выделим интегрируемую особенность $\Theta(s) \approx 1/\pi s$ ($s = t - \tau \ll 1$) и будем чередовать завышающие оценки с занижающими. Цель: остаться в классе ОДУ невысокого порядка (ценою соответствующей корректировки коэффициентов уравнений).

Фиксируем параметр h «опасного сближения» τ и t ($t - \tau \leq h$) и рассмотрим начальный отрезок времени $t \in [0, h]$. Оценка $1/\pi s$ немного завышена ($S < 0, S \ll 1$), поверхностная концентрация монотонно убывает при вакуумной дегазации ($\dot{v} < 0$). Поэтому

$$-4\varkappa \sum_2 \leq -4\varkappa \sum \leq -\varkappa \int_0^t \dot{v}(\tau) \frac{1}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} d\tau. \quad (15)$$

Считая погрешность оценки малой, вместо уравнения (11) получаем

$$\dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - 4\kappa \sum_{i=1,2,3} z_i(t) - \kappa \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} d\tau, \quad t \in [0, h]. \quad (16)$$

Переменные $z_i(t)$ введены для учета «эффекта накопления» к последующему интегрированию на интервале $t > h$. При малом h и начальных данных $z_i(0) = 0$ ими можно пренебречь (даже уменьшив погрешность, используя сразу правое неравенство в (15)):

$$\dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - \kappa \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} d\tau, \quad (17)$$

$v(0) = 1, t \in [0, h]$. Для переменной $w(t) = \dot{v}(t)$ ($v(t) = 1 + \int_0^t w d\tau$) получили нелинейное интегральное уравнение с так называемой слабой особенностью. Если иметь в виду итерации $\dot{v}_0(t) = -\tilde{b}(t)v_0^2(t)$ ($v_0(0) = 1$), $w_0 = -\tilde{b}v_0^2$,

$$w_{k+1}(t) = -\tilde{b}(t)v_k^2(t) - \kappa \int_0^t \frac{w_{k+1}(\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} d\tau,$$

то можно воспользоваться развитой теорией линейных интегральных уравнений со слабой особенностью [9] или операционным исчислением (справа свертка $w_{k+1}(t) * 1/\overline{\pi t}$). Такие итерации, излишне усложняющие общий вычислительный алгоритм, трудно интерпретировать физически. К тому же использовалась завышенная оценка $\Theta \approx 1/\overline{\pi s}$ в (15).

Заметим, что за счет особенности знаменателя «наибольший вклад» в свертку функций $\dot{v}(t) * 1/\overline{\pi t}$ вносят значения $\dot{v}(\tau)$, $\tau \approx t$. Заменяем под интегралом $\dot{v}(\tau)$ на $\dot{v}(t)$ (с погрешностью дроби $O(\overline{t-\tau})$). С учетом убывания абсолютной величины скорости изменения поверхностной концентрации это приводит к занижению интегрального слагаемого, что является определенной компенсацией предшествующего завышения. Здесь напомним, что плотность термодесорбции определяется как $J = bq^2$, так что монотонное уменьшение $q(t)$ ($v = q/\bar{q}$) с одновременным более интенсивным ростом $b(T(t))$ по мере нагрева приводит к немонотонному ТДС-пику. В итоге, интегрируя особенность, вместо (16) приходим к ОДУ

$$\dot{v}(t)[1 + 2\kappa\sqrt{t/\pi}] = -\tilde{b}(t)v^2(t) - 4\kappa \sum_i z_i(t).$$

В случае (17) сумма z_i будет отсутствовать. Отметим, что коррекция коэффициента при \dot{v}

соответствует физическому смыслу: в исходном уравнении (11) мы убрали в правой части положительные слагаемые, что уменьшает \dot{v} , но множитель $[\dots]$ это компенсирует.

С учетом $\dot{z}_i(t) = -n^2\pi^2 z_i(t) + \dot{v}(t)$ получаем следующую систему ОДУ ($v = v(t)$, $z_i = z_i(t)$):

$$\begin{cases} \dot{v} = -\hat{b}v^2 - 4\hat{\kappa}z_1 - 4\hat{\kappa}z_2 - 4\hat{\kappa}z_3, \\ \dot{z}_1 = -\hat{b}v^2 - [4\hat{\kappa} + \pi^2]z_1 - 4\hat{\kappa}z_2 - 4\hat{\kappa}z_3, \\ \dot{z}_2 = -\hat{b}v^2 - 4\hat{\kappa}z_1 - [4\hat{\kappa} + 9\pi^2]z_2 - 4\hat{\kappa}z_3, \\ \dot{z}_3 = -\hat{b}v^2 - 4\hat{\kappa}z_1 - 4\hat{\kappa}z_2 - [4\hat{\kappa} + 25\pi^2]z_3, \end{cases} \quad (18)$$

для которой $v(0) = 1$, $z_i(0) = 0$, $\hat{b} = \hat{b}(T(t)) \equiv \tilde{b}(T(t))/[1 + 2\kappa\sqrt{t/\pi}]$, $\hat{\kappa} \equiv \kappa/[1 + 2\kappa\sqrt{t/\pi}]$ (когда h относительно мало $[\dots] \approx 1$). По сравнению с исходной системой произошла лишь корректировка коэффициентов за счет анализа особенности при $\tau = t$ в интегралах.

При переходе к интервалу $t > h$ рассмотрим уравнение (14) при $t \geq 0$, для единообразия формально полагая $\dot{v}(\tau) = 0$, $\tau < 0$. В силу относительной малости h во второй сумме воспользуемся аппроксимацией $\Theta(s) \approx 1/\overline{\pi s}$. В первой сумме оставим «главные» первые слагаемые. При этом отбрасываем положительную величину. В порядке компенсации верхний предел интегрирования $t - h$ заменим на близкий t . Приходим к уравнению

$$\dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - 4\kappa \sum_{i=1,2,3} z_i(t) - \kappa \int_{t-h}^t \frac{\dot{v}(\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} d\tau, \quad t \geq 0.$$

Далее с учетом подынтегральной особенности заменяем $\dot{v}(\tau)$ на $\dot{v}(t)$ (памятуя о $\dot{v}(\tau) = 0$, $\tau < 0$) и получаем систему (18). Только при $t > h$ заменяем $[1 + 2\kappa\sqrt{t/\pi}]$ на «установившееся» значение $[1 + 2\kappa\sqrt{h/\pi}]$. При использовании пакетов программ (например, Scilab) можно использовать универсальную запись системы в форме (18) для $t \geq 0$ с применением функции насыщения $\text{sat}[\dots] = 1 + 2\kappa\sqrt{\text{sat}(t/h)h/\pi}$.

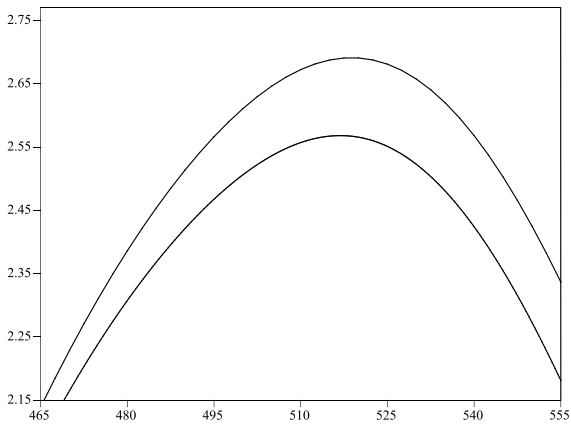
Приведенные рассуждения в совокупности с исходными физико-химическими упрощениями можно подытожить в совокупности: предложена простейшая модель (18) термодесорбции с учетом динамического взаимодействия поверхностных процессов с диффузией. По функции $v(t) = q(t)/\bar{q}$ ($t = t$) после возвращения к физическому времени получаем модельный ТДС-спектр $J(T) = b(T)q^2(t)$ ($T(t) = t$).

Прокомментируем рисунок 1. Увеличение безразмерного параметра h ухудшает аппроксимацию особенности, но улучшает возможно-

сти приближения «хвоста» ($t - \tau > h$) небольшим числом переменных $z_i(t)$. Восходящий фронт ТДС-спектра аппроксимируется с высокой точностью в широком диапазоне h , погрешность накапливается к окрестности пика. Динамика аппроксимации пика немонотонна по h (значения указаны по убыванию max). При этом, например, $h = 0,1$ лучше «выглядит на пике», а $h = 1$ точнее на спаде ($T > 600$ К). С учетом значительной погрешности определения плотности потока термодесорбции минимизация какой-либо невязки непринципиальна. Вычислительные эксперименты приводят к приемлемому диапазону $0,1 < h < 0,8$. Рисунок 2 демонстрирует искомую «седловую точку»: и $h = 0,3$ не мал, и $i \leq 3$ невелико. Более того, система (18) проявляет устойчивость параметрической идентификации в следующем смысле. Возьмем завышенное значение $h = 10$ (в том

числе и при пересчете на реальное время ТДС-эксперимента). Судя по рисунку 1, для компенсации возникшей существенной погрешности формально следует уменьшить запас водорода в образце (уменьшить \bar{c}). Достаточно в приемлемых пределах изменить исходные значения параметров (увеличить предэкспоненту b_0 на 12% или уменьшить g на 11%), чтобы получить удовлетворительное приближение ТДС-спектра. За «эталон» принят график, полученный решением исходной краевой задачи разностным методом [22].

Рисунки 3, 4 демонстрируют возможности аппроксимации в более сложном случае, когда наблюдается двухпиковая структура ТДС-спектра. Отметим, что обычно этот эффект интерпретируется как влияние ловушек с различными энергиями связи (в модели этого нет, хотя технически нетрудно добавить соответствующие слагаемые в уравнение диффузии).



Метод шагов

Вернемся к уравнению (13), полагая (для единообразия) формально $\dot{v}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Поскольку $S(1) \approx -0,999$, то фактически предыстория «длины» более чем $h_0 = 1$ забывается и можно перейти к уравнению

$$\dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - \varkappa \int_{t-h_0}^t \frac{1+S(t-\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} \dot{v}(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Ограничимся сначала отрезком $t \in [0, h]$, $h \leq h_0$. Особенность при $\tau \approx t$ ($S(+0) = 0$) позволяет в первом приближении заменить $\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t)$. Получаем ОДУ:

$$\dot{v}(t) [1 + \sigma(t) + 2 \frac{\tilde{t}}{\tilde{\pi}} \varkappa / \tilde{\pi}] = -\tilde{b}(t)v^2(t), \quad (20)$$

$$\sigma(t) \equiv \int_0^t \frac{S(s)}{\tilde{s}} ds, \quad \frac{S(+0)}{+0} = 0.$$

В силу $S(s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$ ($q = -\exp -1/(4s)$) особенность в нуле подынтегральной функции не существенна. Можно численно интегрировать по $s \in [\varepsilon, t]$, заменив нижний предел на малое $\varepsilon > 0$ (скажем, 10^{-4}). Графики функций $S(s)$ и $S(s)/\tilde{s}$ изображены на рисунке 5. Ряд S быстро сходится при $s \in [0, 1]$, достаточно десятка слагаемых. При переходе к $t > h$, учитывая в (19) только интеграл по $\tau \in [t-h, t]$, следует только «заморозить» коэффициент [...] при $\dot{v}(t)$: $\sigma(t) \approx \sigma(h)$, $\tilde{t} \approx \tilde{h}$. Результат моделирования иллюстрируют рисунки 6, 7. Если обрабатывать данные, соответствующие восходящему фронту ТДС-пика, то уже одного скалярного уравнения (20) достаточно для оценки коэффициентов модели. Для всей кривой нужно пользоваться более точным приближением, чем $\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t)$.

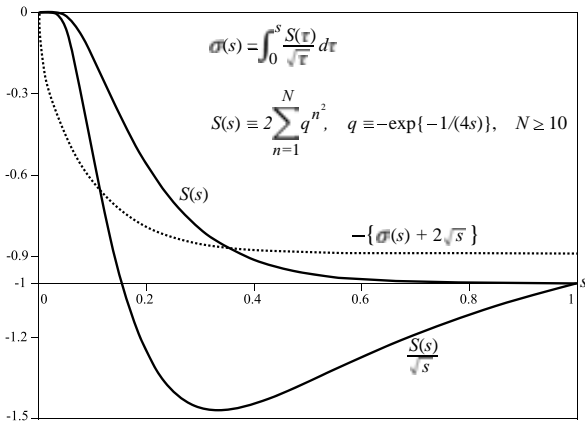


Рис. 5. Функции $S(s)$ и $S(s)/\tilde{s}$

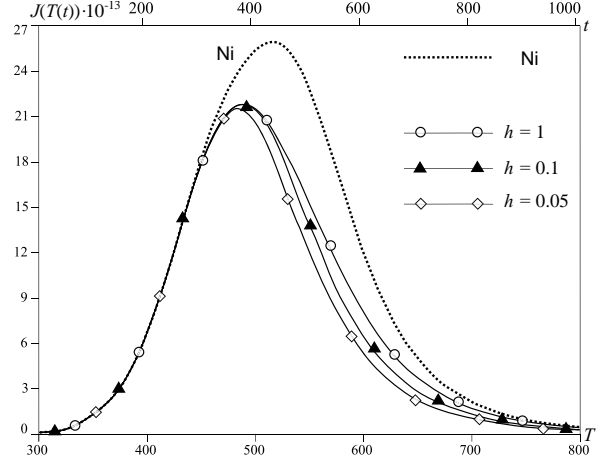


Рис. 6. ТДС-спектр (никель), метод шагов

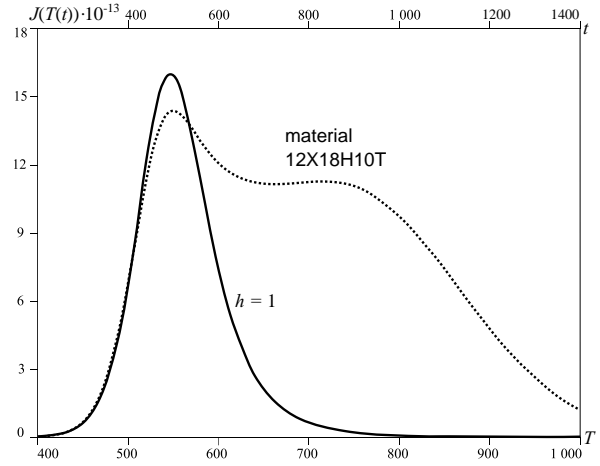


Рис. 7. ТДС-спектр (сталь), метод шагов

Уточнение подынтегральной аппроксимации можно провести следующим образом. Фиксируем шаг h , например $h = h_0$. В уравнении (19) воспользуемся под интегралом линейной интерполяцией $\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) + A[t - \tau]$. Параметр A является константой по отношению к переменной интегрирования τ . На отрезке $[kh, (k+1)h]$ ($k \geq 0$) полагаем $A = -(\dot{v}(t) - \dot{v}(kh))/(t - kh)$, чтобы при $\tau = kh$ получить «предыдущее» значение $\dot{v}(kh)$.

Вместо линейной интерполяции можно воспользоваться квадратичным приближением $\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) + A[t - \tau] + B[t - \tau]^2$. Условия $\tau = t \rightarrow \dot{v}(t)$, $\tau = kh \rightarrow \dot{v}(kh)$ приводят к уточнению: $t \in [kh, (k+1)h]$, $\tau \in [kh, t]$,

$$\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) - \frac{\dot{v}(t) - \dot{v}(kh)}{t - kh} [t - \tau] - B[t - kh][t - \tau] + B[t - \tau]^2.$$

Выбор $B < 0$ позволяет учесть вогнутость функции \dot{v} ($\dot{v} < 0$). Подчиним B условию гладкой склейки уравнений: $\dot{v}((k+1)h-0) = \dot{v}((k+1)h+0)$. Здесь не будем приводить уточняющие математические выкладки.

В заключение приведем реализацию метода шагов при малом h , когда можно пользоваться приближением $\Theta(s) \approx 1/\sqrt{\pi s}$ во втором интеграле в правой части уравнения (14). Ограничимся линейной интерполяцией $\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) + A[t-\tau]$, $A = -(\dot{v}(t) - \dot{v}(kh))/(t - kh)$.

Фиксируем шаг h безразмерного времени ($t = t$) для удовлетворительной аппроксимации $\Theta(s) \equiv 4 \sum \exp\{-n^2 \pi^2 s\} \approx 1/\sqrt{\pi s}$ ($s \in [0, h]$, $s = t - \tau$). Воспользуемся этой оценкой на начальном отрезке $t \in [0, h]$ в исходном интегро-дифференциальном уравнении (11):

$$\dot{v} = -\tilde{b}v^2 - 4g\ell \sum \int_0^t \dots$$

$$\dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - \varkappa \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} d\tau.$$

В свертке $\dot{v}(t) * 1/\sqrt{\pi t}$ вторая функция является оценкой, так что разумно вместо «точного» решения аппроксимировать и первую функцию. Поскольку из-за особенности наибольший вес имеют значения $\dot{v}(\tau)$ при $\tau \approx t$, то после замены $\dot{v}(\tau)$ на $\dot{v}(t)$ приходим к задаче $\dot{v}(t) = -\hat{b}(t)v^2(t)$ ($v(0) = 1$), где $\hat{b} = \tilde{b}/[1 + 2\varkappa\sqrt{t/\pi}]$. В квадратурах получаем конкретные функции v_1, \dot{v}_1 . Подставляя \dot{v}_1 под интеграл, получаем уравнение Риккати $\dot{v} = -\tilde{b}v^2 + f_1(t)$. Итерации можно повторять. Но в итоге получим алгоритм, сравнимый по «энергоёмкости» с решением исходной краевой задачи разностными методами. В целях упрощения воспользуемся под интегралом линейной интерполяцией $\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) + A[t-\tau]$. С учетом $\dot{v}(0) = -\tilde{b}(0)$ получаем значение $A = -[\dot{v}(t) + \tilde{b}(0)]/t$ и уравнение Риккати

$$\dot{v}(t) \left[1 + \frac{4\varkappa}{3} \frac{\bar{t}}{\pi} \right] = -\tilde{b}(t)v^2(t) + \frac{2\varkappa\tilde{b}(0)}{3} \frac{\bar{t}}{\pi},$$

$v(0) = 1$, $t \in [0, h]$. В физических терминах уравнение $\dot{v} = -\tilde{b}v^2$ соответствует быстрой десорбции водорода с поверхности без диффузионной «подкачки» из объема. Дроби корректируют уравнение с учетом растворения и диффузии ($\varkappa = g\ell$, $t = t(D)$): формально уменьшается коэффициент десорбции и появляется положительное слагаемое в правой части.

Переходим к отрезку $t \in [kh, (k+1)h]$ ($k \geq 1$), выделяя при $\tau = t$ особенность:

$$\dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - \varkappa \int_{kh}^t \frac{\dot{v}(\tau)}{\sqrt{\pi[t-\tau]}} d\tau - 4\varkappa\Phi_k(t), \quad (21)$$

$$\Phi_k(t) \equiv \sum \int_0^{kh} \dots =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{jh}^{(j+1)h} \dot{v}(\tau) \exp\{-n^2 \pi^2 [t-\tau]\} d\tau.$$

В уравнении (21) в рамках линейной интерполяции заменяем $(t \in [kh, (k+1)h])$

$$\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) - \frac{\dot{v}(t) - \dot{v}(kh)}{t - kh} [t - \tau]. \quad (22)$$

Заметим, что в силу монотонного стремления к нулю $\dot{v} < 0$ правая часть меньше левой. Чтобы компенсировать завышенные оценки $\Theta(s)$ и $-\dot{v}(\tau)$ в (21), при аппроксимации функции $\Phi_k(t)$ будем пользоваться для интегралов формулой правых прямоугольников:

$$\Phi_k(t) \approx \Psi_k(t) \equiv \sum_{j=1}^k \dot{v}(jh) \Xi(t - jh), \quad t \geq kh,$$

$$\Xi(\xi) \equiv \sum_{1,3,\dots,N} \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 h}}{n^2 \pi^2} e^{-n^2 \pi^2 \xi}, \quad \xi \geq 0.$$

Функция Ξ табулируется предварительно, $N \gg 1$ (формально $N = +$). Влияние предыстории быстро снижается, так что достаточно удерживать несколько последних слагаемых по j ($j = k, j = k-1, \dots$). Применение формулы трапеций не приводит к существенному уменьшению погрешности.

В итоге в качестве упрощенной модели в классе ОДУ предлагается

$$\dot{v}(t) \left[1 + \frac{4\varkappa}{3} \frac{\overline{t - kh}}{\pi} \right] = -\tilde{b}(t)v^2(t) -$$

$$- \frac{2\varkappa}{3} \frac{\overline{t - kh}}{\pi} w_k - 4\varkappa\Psi_k(t), \quad k \geq 0, \quad (23)$$

$$w_k \equiv \dot{v}(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad v(0) = 1$$

$$(\Psi_0(\cdot) = 0, w_0 = -\tilde{b}(0)).$$

Рисунки 8, 9 показывают, что параметр h можно значительно увеличить при явном учете интегральной предыстории функциями $\Phi_k(t)$. На рисунках 10, 11 формальное значение $N = 0$ соответствует отсутствию учета предыстории.

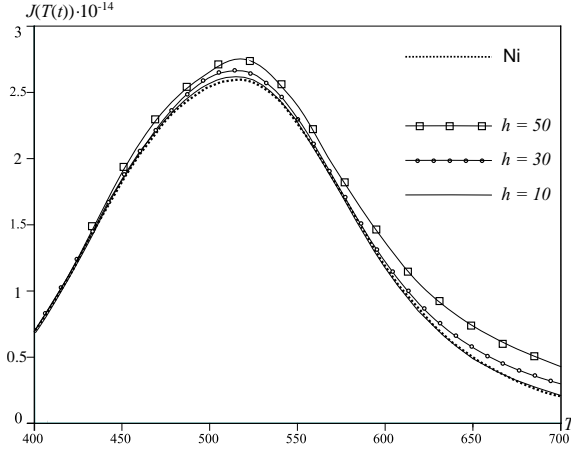


Рис. 8. Модель (23), влияние h

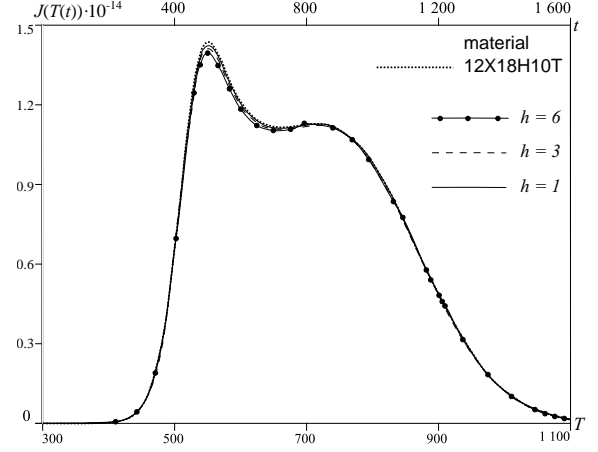


Рис. 9. Модель (23), влияние h

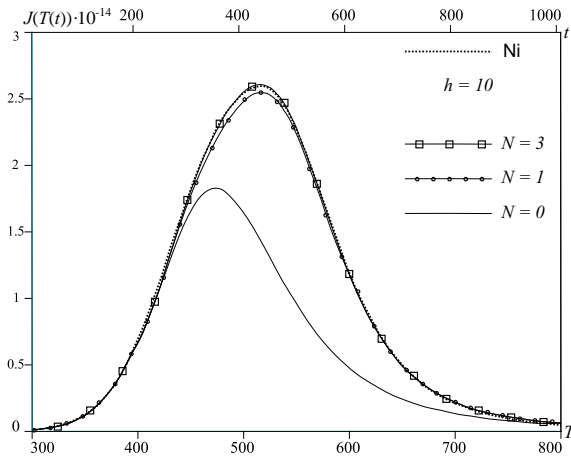


Рис. 10. Модель (23), влияние N

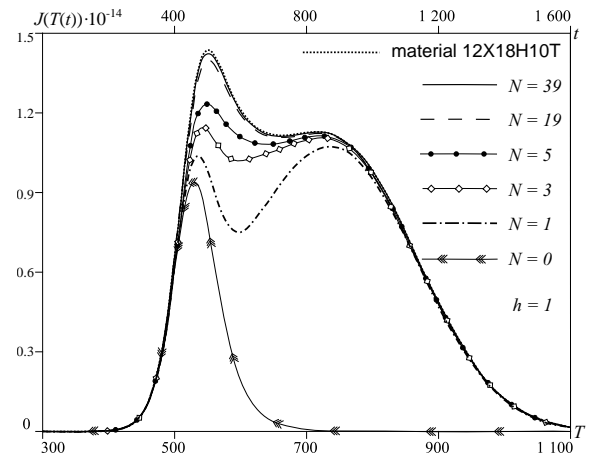


Рис. 11. Модель (23), влияние N

вадратное гладкое. Воспользуемся в (21) вместо линейной интерполяции (22) квадратичной: $\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) + A[t - \tau] + B[t - \tau]^2$. В силу $\tau = t - kh$, $\dot{v}(\tau) = \dot{v}(kh)$ получаем

$$\dot{v}(\tau) \approx \dot{v}(t) - \frac{\dot{v}(t) - \dot{v}(kh)}{t - kh} [t - \tau] - B[t - kh][t - \tau] + B[t - \tau]^2, \quad (24)$$

$t \in [kh, (k+1)h]$, $\tau \in [kh, t]$. Выбор $B < 0$ позволит учесть вогнутость функции \dot{v} ($\dot{v} < 0$). Подберем значение параметра $B < 0$ из условия «гладкой склейки» уравнений (23).

Подстановка вместо (22) квадратичной аппроксимации (24) в (21) приводит к появлению в правой части уравнения (23) дополнительного слагаемого $Q_k(t) \equiv 4B\chi[t - kh]^{5/2}/[15\pi]$:

$$\dot{v}(t) \left[1 + \frac{4\chi}{3\pi} \frac{t - kh}{\pi} \right] = -\tilde{b}(t)v^2(t) - \frac{2\chi}{3\pi} \frac{t - kh}{\pi} w_k - 4\chi\Psi_k(t) + Q_k(t). \quad (25)$$

Сравним теперь k -е уравнение при значении $t = (k+1)h = (k+1)h - 0$ с $(k+1)$ -м уравнением при $t = (k+1)h = (k+1)h + 0$:

$$\dot{v} \left[1 + \frac{4\chi}{3\pi} \frac{\bar{h}}{\pi} \right] = -\tilde{b}v^2 - \frac{2\chi}{3\pi} \frac{\bar{h}}{\pi} w_k + \frac{4B\chi}{15\pi} h^{5/2} - 4\chi\Psi_k((k+1)h), \quad (26)$$

$$\dot{v}((k+1)h) = -\tilde{b}((k+1)h)v^2((k+1)h) - 4\chi\Psi_{k+1}((k+1)h). \quad (27)$$

Замечаем, что $\Psi_{k+1}((k+1)h) =$

$$= \Psi_k((k+1)h) + \dot{v}((k+1)h)\gamma(h),$$

$$\gamma(h) \equiv \sum \frac{1 - e^{-n^2\pi^2 h}}{n^2\pi^2}.$$

Здесь для $\Xi(0)$ полагаем $N = \dots$. Подчиним выбор h и B условиям: $3\pi\gamma(h) = \bar{h}$, $2Bh^2 = 5w_k$. Тогда уравнения (26) и (27) совпадут. Это означает, что при переходе к по-

следующему h -слою по времени будет непрерывной не только траектория $v(t)$ (по построению), но и производная $\dot{v}(t)$. Кроме того, полученное значение $B_k \equiv B$ отрицательное в силу $w_k < 0$, т. е. учитывается вогнутость $\dot{v}(t)$.

Осталось требование $\gamma(h)/\bar{h} = 1/[3\pi]$. При $h \rightarrow 0$ имеем

$$\sum \frac{1 - e^{-n^2\pi^2 h}}{n^2\pi^2} \sim \sum \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6} \quad \frac{\gamma(h)}{\bar{h}} \rightarrow 0.$$

Если $h \rightarrow \infty$, то по правилу Лопиталя $\lim \gamma(h)/\bar{h} = \lim 2/\bar{h} \sum e^{-n^2\pi^2 h} = \lim 2/\bar{h} \times 1/[4\pi\bar{h}] = 1/[2\pi] > 1/[3\pi]$. Подходящее значение $h > 0$ определяется численно. Оценка $h < 1$ для возможности сглаживания «на стыке шагов» согласуется с приведенными выше физическими соображениями.

Рисунок 12 демонстрирует однозначность выбора h из условия сглаживания $\gamma(h) = \bar{h}/[3\pi]$. Рисунки 13 и 14 показывают, что модель (25), требующая лишь численного интегрирования скалярного ОДУ на текущем

отрезке безразмерного времени $t = t[kh, (k+1)h]$, эффективно воспроизводит зависимости, представленные в [22], которые получены «точным» решением исходной краевой задачи разностным методом (или системы (12) порядка ~ 10).

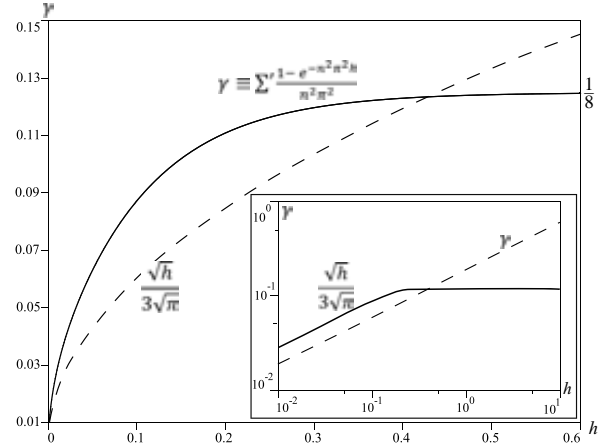


Рис. 12. Модель (25), выбор h

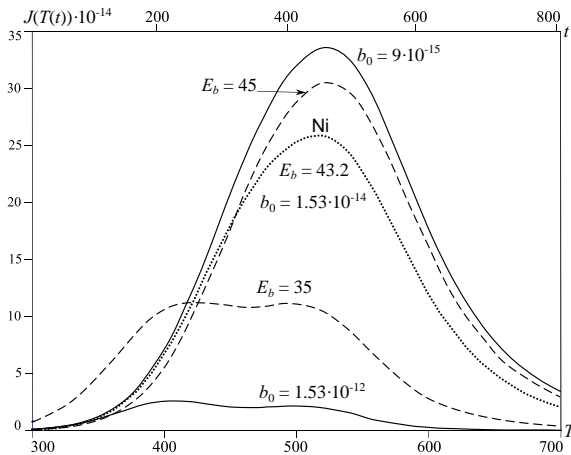


Рис. 13. Модель (25), влияние b_0, E_b

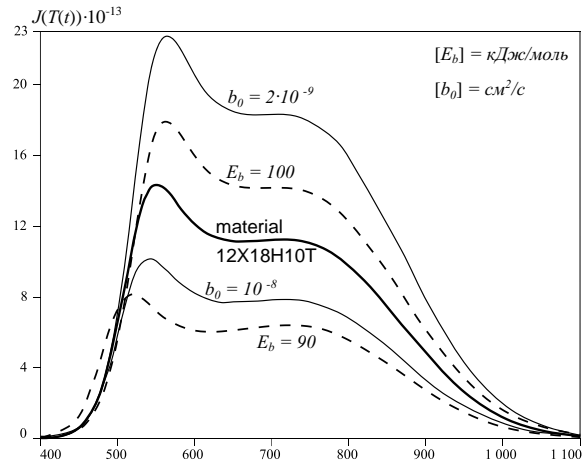


Рис. 14. Модель (25), влияние b_0, E_b

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлена краевая задача термодесорбции с нелинейными динамическими граничными условиями для моделирования ТДС-спектра дегазации конструкционного материала, предварительно насыщенного водородом. Решение прямой задачи необходимо для качественного сопоставления с экспериментальными данными и как итерационная составляющая алгоритма параметрической идентификации. Вариации параметров позволяют оценить чувствительность ТДС-спектра к изменению выделенных лимитирующих факторов. Для моделирования термо-

десорбционного потока предложен вычислительный алгоритм, требующий (вместо приближенного решения распределенной краевой задачи с текущими приближениями параметров) лишь интегрирования нелинейной системы ОДУ невысокого порядка. Представлены различные модификации с целью понижения порядка системы на основе выделения интегрируемой особенности. Приведены результаты вычислительных экспериментов, использующих экспериментальные данные по никелю и стали 12X18H10T.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-00744).

5. *Izotopy vodoroda. Fundamental nye i prikladnye issledovaniya* [Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies]. Ed. A. A. Yukhimchuk. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. 697 p.
6. *Kunin L. L., Golovin A. I., Surovoi Iu. I., Khokhrin V. M.* Problemy degazatsii metallov [Problem of metal degassing]. Moscow: Nauka, 1972. 324 p.
7. *Leng S.* Elliptic functions. Addison–Wesley publishing, 1973.
8. *Martinson L. K., Malov Yu. I.* Di erentsial nye uravneniya matematicheskoi ziki [Differential equations of mathematical physics]. Moscow: MGTU, 2002. 368 p.
9. *Mikhlin S. G., Smolitskii Kh. L.* Priblizhennye metody resheniia di erentsialnykh i integralnykh uravnenii [Approximate differential and integral equation solving]. Moscow: Nauka, 1965. 384 p.
10. *Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarko S. S.* Pronitsaemost vodoroda cherez metally [Hydrogen permeability through metals]. Moscow: MIFI, 2008. 144 p.
11. *Whittaker E. T., Watson G. N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 1996, 612 p.
12. *Cherdantsev Yu. P., Chernov I. P., Tyurin Yu. I.* Metody issledovaniya sistem metall–vodorod [Methods of studying metal–hydrogen systems]. Tomsk: TPU, 2008. 286 p.
13. *Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A.* Kinetics of hydrogen evolution from MgH_2 : experimental studies, mechanism and modelling. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2010. Vol. 35. P. 9060–9069. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.05.092
14. *Gabis I. E.* The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids. *Technical Physics*. 1999. Vol. 44, no. 1. P. 90–94. doi: 10.1134/1.1259257
15. *Handbook of hydrogen storage: new materials for future energy storage.* Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.
16. *Indeitsev D. A., Semenov B. N.* About a model of structure–phase transformations under hydrogen in uence. *Acta Mechanica*. 2008. Vol. 195. P. 295–304. doi: 10.1007/s00707-007-0568-z
17. *Lototskiy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39. P. 5818–5851. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.01.158.
18. *Popov V. V., Denisiv E. A.* Inhibition of hydrogen permeability by TiN: evaluation of kinetic parameters. *Hydrogen Materials Science and Chemistry of Carbon Nanomaterials* Eds T. N. Veziroglu et al. Springer. 2007. P. 671–680. doi: 10.1007/978-1-4020-5514-0
19. *The hydrogen economy.* Eds M. Ball, M. Wietschel. Cambridge Univ. Press, 2009. 646 p.
20. *Varin R. A., Czujko T., Wronski Z. S.* Nanomaterials for solid state hydrogen storage. Springer, New York, 2009. 338 p. doi: 10.1007/978-0-387-77712-2
21. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of a hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, no. 1. P. 1295–1305. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.07.099
22. *Zaika Yu. V., Kostikova E. K.* Computer simulation of hydrogen thermodesorption. *Advances in Materials Science and Applications. World Acad. Publ.* 2014. Vol. 3, iss. 3. P. 120–129. doi: 10.5963/AMSA0303003
23. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: di usion peak of TDS-spectrum of dehydriding. *Applied Mathematical Modelling. Elsevier*. 2009. Vol. 33, no. 10. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018
24. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface. *Mathematical Modelling. Nova Sci. Publishers*. 2013. P. 269–302.

Received May 30, 2016

:

Заика Юрий Васильевич

руководитель лаб., д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Костикова Екатерина Константиновна

научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kostikova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Zaika, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Kostikova, Ekaterina

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: kostikova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

УДК 519.6:539.2

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ: ГИДРИРОВАНИЕ ЦИРКОНИЕВОГО СПЛАВА

Ю. В. Заика, Н. И. Родченкова

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. В зависимости от уровня содержания водорода и температуры эксплуатации водород может находиться в циркониевых сплавах в виде твердого раствора или в виде гидридов. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками образования и развития трещин. Проблема состоит в моделировании динамики свободной границы фазового перехода и оценке распределений концентраций в гидриде и в сплаве. В статье представлены математическая модель гидрирования циркониевого сплава с учетом фазового перехода (гидридообразования), итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи со свободной границей раздела фаз на основе неявных разностных схем и результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: гидрирование; нелинейные краевые задачи со свободной границей; разностные схемы; численное моделирование.

Yu. V. Zaika, N. I. Rodchenkova. BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH FREE BOUNDARY: ZIRCONIUM ALLOY HYDROGENATION

One of the most important requirements for the reactor's active zone materials (made of zirconium alloys) is low hydrogen absorptivity since hydrogen embrittlement may cause zirconium cladding damage. Depending on the hydrogen content and operation temperature, hydrogen may be present in zirconium alloys as a solid solution or as hydrides. Hydrides have the greatest embrittlement effect on alloys as they can form and enlarge cracks. The problem is to model the dynamics of the moving boundary of phase transition and to estimate the concentration distribution in hydride and in solution. This paper presents a mathematical model of zirconium alloy hydrogenation taking into account phase transition (hydride formation), the iterative computational algorithm for solving the nonlinear boundary-value problem with free phase boundary based on implicit difference schemes, and the results of computational experiments. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 15-01-00744).

Key words: hydrogenation; nonlinear boundary-value problems with free phase boundary; difference schemes; numerical simulation.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к взаимодействию изотопов водорода с конструкционными материалами носит многоплановый характер [1–9]. Энтузиасты говорят не только об энергетике, но и о водородной экономике [6]. Некоторые математические модели дегидрирования и водородопроницаемости, связанные с тематикой данной статьи, исследованы в [10–14]. Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. В зависимости от уровня содержания водорода и температуры эксплуатации водород может находиться в циркониевых сплавах в виде твердого раствора или в виде гидридов. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками образования и развития трещин.

При разработке математической модели гидрирования авторы следовали работе [15]. Проблема состоит в моделировании динамики свободной границы фазового перехода и оценке распределений концентраций в гидриде и в сплаве. В статье представлены математическая модель гидрирования пластины из циркониевого сплава с учетом фазового перехода (гидридообразования) и итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи со свободной границей раздела фаз на основе неявных разностных схем.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРИРОВАНИЯ

Вначале кратко опишем условия эксперимента (подробнее см. [15]). Пластина из сплава $Zr-1Nb$ шлифуется с одной стороны, другая сторона практически водородонепроницаема, торцами пренебрегаем; температура образца T и давление газообразного водорода p поддерживаются постоянными (предпринимаются специальные меры охлаждения).

Выделим тонкий объемный слой, в котором при относительно большом давлении напуска ($p \approx 2$ атм) распределение H можно считать равномерным. Только с некоторой начальной глубины ℓ_0 начинает ощущаться диффузионное сопротивление. Когда концентрация растворенного атомарного водорода достигает определенного предела, этот слой образует начальную корку гидрида. Дальнейший перенос водорода в образец уже осуществляется сквозь растущий слой гидрида.

Обозначим: L — толщина пластины; ℓ_0 — толщина слоя, в который водород абсорбиру-

ется относительно легко и еще не ощущается диффузионное сопротивление (будущая начальная корка гидрида); $u(t)$ — концентрация H в ℓ_0 -слое ($1_H/\text{см}^3$); Q — концентрация, по достижении которой решетка перестраивается и раствор преобразуется в гидрид; $c(t, x)$ — концентрация H в $(L - \ell_0)$ -слое; μ — газокинетическая константа. Температура пластины и давление напуска водорода постоянны ($T = \text{const}$, $p = \text{const}$). Схематически обозначения изображены на рисунке 1.

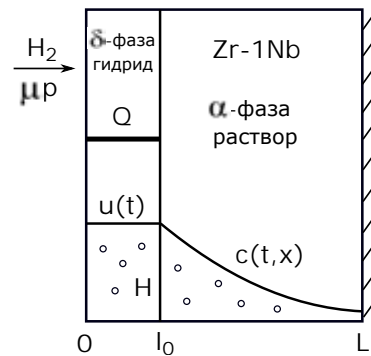


Рис. 1. Этап I (начальное насыщение)

Согласно кинетической теории газов плотность J_p падающего на поверхность потока частиц (в данном случае молекул H_2) связана с давлением p по формуле Герца-Кнудсена: $J_p = p/\sqrt{2\pi mkT}$ (k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы H_2). В контексте эксперимента удобно в качестве единиц измерения выбрать $[x, \ell, L] = \text{см}$, $[p] = \text{Торр}$. Тогда численно получаем зависимость $J_p = \mu p$, $\mu(T) \approx 2,474 \cdot 10^{22}/\sqrt{T}$ ($[\mu] = 1_{H_2}/(\text{Торр см}^2 \text{ с})$, $[T] = \text{К}$, под корнем численное значение). Поскольку диффундирует атомарный водород, то для единообразия подсчет будем вести в атомах H : $J_p = 2\mu p$. Но только малая часть H окажется в абсорбированном состоянии: $J_{\text{abs}} = 2\mu s p$ ($s \ll 1$). Множитель s имеет смысл доли налетающих H , которые оказались в итоге в приповерхностном объеме. Объединяем более элементарные стадии физадсорбции, диссоциации и растворения в одну: s — эффективный коэффициент абсорбции.

Этап I: растворение H в $Zr-1Nb$

Для диффузионного слоя толщины $(L - \ell_0)$ имеем стандартную краевую задачу:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad x \in (\ell_0, L), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$c(0, x) = 0, \quad x \in [\ell_0, L],$$

$$c(t, \ell_0) = u(t), \quad \partial_x c(t, L) = 0. \quad (2)$$

Граничное условие $c(t, \ell_0) = u(t)$ отражает непрерывность распределения H в сплаве, а $\partial_x c|_L = 0$ — непроницаемость стороны пластины $x = L$. Здесь и в дальнейшем считаем, что коэффициенты подчиняются закону Аррениуса по температуре, в частности $D = D_0 \exp\{-E_D/[RT]\}$. В течение одного эксперимента поддерживается $T = \text{const}$.

Для концентрации $u(t)$ запишем ОДУ, исходя из баланса потоков:

$$\dot{u}(t)\ell_0 = 2\mu sp - bu^2 + D\partial_x c|_{\ell_0}, \quad u(0) = 0. \quad (3)$$

Содержательный смысл: за одну секунду через 1 см^2 абсорбировалось за счет давления $2\mu sp$ атомов H , но есть встречный поток десорбции bu^2 (b — эффективный коэффициент рекомбинации) и диффузионный отток. Расогласование плотностей этих потоков идет на накопление атомов водорода в ℓ_0 -слое ($\dot{u}\ell_0$). Уравнение (3) нужно рассматривать совместно с (1)–(2), поскольку $u(t)$ определяет граничную концентрацию в (2). При небольшом p (без образования гидрида) в равновесии (когда производные равны нулю) имеем

$$2\mu sp - b\bar{u}^2 = 0 \Rightarrow \bar{u} = \Gamma\sqrt{p}, \quad \Gamma \equiv \sqrt{2\mu s/b}.$$

Следовательно, динамика (3) в статике согласуется с законом Сиверта $\bar{u} \propto \sqrt{p}$, Γ — коэффициент растворимости. Подчеркнем, что речь о растворенном атомарном диффузионно подвижном водороде. В эксперименте «насыщение-дегазация» учитывается общее поглощение водорода, включая обратимый захват и гидридные фазы — коэффициент Γ может иметь другой смысл и численное значение. Технически нетрудно учесть обратимый захват H в $(L - \ell_0)$ -слое дефектами материала, но в рассматриваемой задаче считаем ловушки второстепенным фактором.

Этап II: гидридообразование и движение границы фазового перехода

По достижении $u(t)$ порогового уровня $Q = Q(T)$ происходит образование гидрида. Считаем, что этот переходный процесс относительно быстрый. Итак, $u(t) = Q \Rightarrow \ell_0$ -корка превратилась в гидрид. Начинаем новый отсчет времени ($t = 0$) и моделируем рост гидридной фазы. К этому моменту $c(0, x) = \varphi(x)$ (распределение растворенного водорода с предыдущего этапа), $\varphi(\ell_0) = Q$, ℓ_0 -слой уже гидридный и сквозь него диффундирует растворенный H . Обозначим концентрацию H в гидриде через $v(t, x)$. Общая концентрация равна $Q + v(t, x)$. Схематически обозначения изображены на рисунке 2.

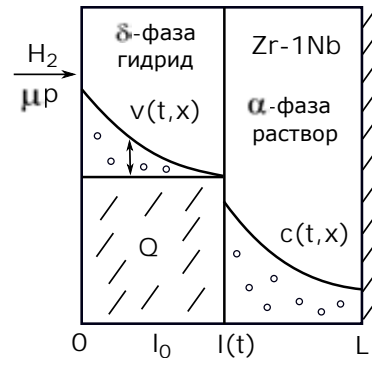


Рис. 2. Этап II (движение фазового перехода)

В пластине с растущей коркой гидрида ($x = \ell(t)$ — граница раздела фаз, $\ell(0) = \ell_0$) запишем диффузионные уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \ell(t)), \quad (4)$$

$$v(0, x) = 0, \quad x \in [0, \ell_0],$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad x \in (\ell(t), L), \quad (5)$$

$$c(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [\ell_0, L].$$

Здесь D_* — коэффициент диффузии H в новом материале (гидриде). Граничные условия на «входе-выходе» запишем аналогично I:

$$2\mu s_* p - b_* v^2(t, 0) = -D_* \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_L = 0. \quad (6)$$

В гидриде градиент концентрации возникает практически сразу, поскольку диффундировать сквозь δ -фазу значительно труднее. Нет «накопительного» слоя (аналога ℓ_0 -слоя на этапе I). Граница раздела фаз $x = \ell(t)$ уже подвижна, и для «склейки» диффузионных уравнений требуется два условия на стыке $x = \ell(t)$.

Начнем с уравнения типа Стефана, описывающего динамику движения свободной границы раздела фаз:

$$\begin{aligned} [v(t, \ell(t)) + Q - c(t, \ell(t))] \dot{\ell}(t) = \\ = -D_* \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\ell(t)} + D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{\ell(t)}. \end{aligned}$$

Появляется разрыв концентраций:

$$v(t, \ell) + Q > Q > c(t, \ell), \quad \ell = \ell(t), \quad t > 0.$$

При этом концентрация $v(t, \ell)$ должна быть пренебрежимо малой (нет существенного «сопротивления» со стороны Zr -сплава). Принимаем $v(t, \ell(t)) = 0$. Поступающий поток из δ -

фазы практически полностью уходит на формирование нового слоя гидрида (сдвиг границы $x = \ell(t)$) и в раствор.

Таким образом, принимаем следующие условия на свободной границе раздела фаз:

$$v(t, \ell(t)) = 0,$$

$$[Q - c(t, \ell(t))] \dot{\ell}(t) = -D_* \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{\ell} + D \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{\ell}. \quad (7)$$

Вначале $[\dots] = 0$ ($c(0, \ell_0) = \varphi(\ell_0) = Q$), потом ($t > 0$) появляется разрыв концентраций ($[\dots] > 0$) и $\dot{\ell}(t) > 0$. Фронт движется с концентрацией Q (общей) в сторону $x = L$. В пределе ($t \rightarrow +\infty$) имеем $\ell(t) \rightarrow L$. Скорость движения фронта замедляется. Уровень $c(t, x)$ выравнивается и медленно растет до значения Q в пределе, когда слоем $Zr-1Nb$ уже можно практически пренебречь.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Этап I: растворение H в $Zr-1Nb$

Следуя технике разностных схем, введем сетку $\{x_m = \ell_0 + mh_x, m = 0, 1, \dots, M\}$ ($h_x = (L - \ell_0)/M$) по пространственной переменной и сетку по времени $\{t_n = nh_t, n = 0, 1, \dots\}$. Обозначим через $\{C_m^n\}$, $\{U^n\}$ приближенные значения концентраций в $(L - \ell_0)$ -слое ($c(t_n, x_m)$) и в ℓ_0 -слое ($u(t_n)$) соответственно. Рассмотрим неявную схему для уравнения диффузии (1) и неявный метод Эйлера для ОДУ (3)

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{h_t} = D \frac{C_{m-1}^{n+1} - 2C_m^{n+1} + C_{m+1}^{n+1}}{h_x^2}, \quad (8)$$

$$\ell_0 \frac{U^{n+1} - U^n}{h_t} = 2\mu sp - b(U^{n+1})^2 + D \frac{-3C_0^{n+1} + 4C_1^{n+1} - C_2^{n+1}}{2h_x}, \quad C_0^{n+1} = U^{n+1}.$$

Рассмотрим уравнения перехода с n -го слоя на $(n+1)$ -й слой по времени ($n \geq 0, 0 < m < M$): $w \equiv h_x^2 h_t^{-1} D^{-1}$,

$$C_{m-1}^{n+1} - [w + 2]C_m^{n+1} + C_{m+1}^{n+1} + wC_m^n = 0.$$

Значения в начальный момент времени известны: $C_m^0 = U^0 = 0$ ($0 \leq m \leq M$). Следуя методу прогонки (алгоритм Томаса), ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(n+1)$ -м слое по времени в виде

$$C_m^{n+1} = \alpha_{m+1} C_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

Прогночные коэффициенты следующие ($m = 1, 2, \dots, M-1$): $\alpha_{m+1} = [2 + w - \alpha_m]^{-1}$,

$$\beta_{m+1} = \frac{\beta_m + w C_m^n}{2 + w - \alpha_m}. \quad (9)$$

Для нахождения начальных коэффициентов α_1, β_1 воспользуемся следующими соотношениями. Подсчитаем предварительно значения $C_{1,2}^{n+1}$ по явной разностной схеме (в равенстве (8) справа заменяем $n+1$ на n). На $(n+1)$ -м слое по времени аппроксимируем производную $\partial_x c|_{\ell_0} \approx [-3C_0^{n+1} + 4C_1^{n+1} - C_2^{n+1}]/2h_x$ и подставим в ОДУ (3). Принимая во внимание первое из граничных условий (2), имеем $U^{n+1} = C_0^{n+1}$. В итоге получаем выражение $C_0^{n+1} = f_0(C_1^{n+1}, C_2^{n+1})$ (положительный корень квадратного уравнения):

$$b(C_0^{n+1})^2 + A_1 C_0^{n+1} + A_2 = 0,$$

$$A_1 = \ell_0 h_t^{-1} + 3D[2h_x]^{-1}, \quad A_2 = -2\mu sp + D[C_2^{n+1} - 4C_1^{n+1}][2h_x]^{-1} - \ell_0 U^n h_t^{-1}.$$

Зная численное значение C_0^{n+1} и выражение $C_0^{n+1} = \alpha_1 C_1^{n+1} + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0, \beta_1 = C_0^{n+1}$. По α_1, β_1 вычисляем оставшиеся прогночные коэффициенты $\alpha_m, \beta_m, m = 2, \dots, M$.

Ближайшая цель — найти значение C_M^{n+1} , необходимое для реализации метода прогонки. Рассмотрим второе краевое условие непроницаемости при $x = L$ в (2). Используем разностную аппроксимацию

$$\partial_x c|_{x=L} \approx [C_{M-2}^{n+1} - 4C_{M-1}^{n+1} + 3C_M^{n+1}]/2h_x = 0$$

и находим выражение $C_M^{n+1} =$

$$= [(4 - \alpha_{M-1})\beta_M - \beta_{M-1}][(\alpha_{M-1} - 4)\alpha_M + 3]^{-1}.$$

Следующий этап: с текущими приближениями значений C_0^{n+1}, C_M^{n+1} решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и находим новые приближения концентраций $C_{1,2}^{n+1}$ (и остальные значения C_m^{n+1} для $m = 3, \dots, M-1$). Далее снова пользуемся формулой $C_0^{n+1} = f_0(C_1^{n+1}, C_2^{n+1})$. После этого корректируем значения прогночных коэффициентов (9), определяем $C_M^{n+1} = [(4 - \alpha_{M-1})\beta_M - \beta_{M-1}][(\alpha_{M-1} - 4)\alpha_M + 3]^{-1}$ и повторяем вычисления (возвращаясь к началу абзаца) до установления граничных значений $C_{0,M}^{n+1}$ (обычно 2–3 итерации). Критерием окончания вычислений на этапе I является выполнение условия $U^{n+1} \geq Q = 0,98 \bar{u}$ (в программной реализации при текущих значениях параметров).

Результат окончания этапа I: образовался гидридный слой толщины ℓ_0 с концентрацией водорода $u = Q$, а в слое раствора толщины $(L - \ell_0)$ имеется распределение концентрации растворенного водорода $\varphi(x)$.

Этап II: гидридообразование и движение границы фазового перехода

Авторы остановились на следующем варианте алгоритма: движущиеся отрезки $[0, \ell(t)]$ и $[\ell(t), L]$ преобразуются в $[0, 1]$ с последующим выбором равномерных сеток. Соответствующая замена переменных с новым отсчетом времени ($t_0 = 0$): $(t, x) \leftrightarrow (t, y)$, $x = \ell(t)y$, $\hat{v}(t, y) = v(t, x(t, y))$; $(t, x) \leftrightarrow (t, z)$, $x = \ell(t) + z[L - \ell(t)]$, $\hat{c}(t, z) = c(t, x(t, z))$.

Краевая задача (4)–(7) гидрирования циркониевого сплава после замены переменных:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \frac{D_*}{\ell^2(t)} \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{\dot{\ell}(t)y}{\ell(t)} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad (10)$$

$$y \in (0, 1), \quad \hat{v}(0, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq 1), \quad \hat{v}(t, 1) = 0,$$

$$2\mu_{s*}p - b_*\hat{v}^2(t, 0) = -\frac{D_*}{\ell(t)} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \Big|_{y=0}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} = \frac{D}{[L - \ell(t)]^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2} + \frac{\dot{\ell}(t)(1 - z)}{L - \ell(t)} \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\hat{c}(0, z) = \psi(z) \quad (0 \leq z \leq 1), \quad \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad (13)$$

$$[Q - \hat{c}(t, 0)]\dot{\ell}(t) = -\frac{D_*}{\ell(t)} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \Big|_{y=1} + \frac{D}{L - \ell(t)} \cdot \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (14)$$

Начальное распределение $\psi(z)$ определяется первым этапом. Формально можно забыть о физическом смысле функции $\ell(t)$ как границы раздела фаз и рассматривать ее как функциональный параметр. Если формально считать распределения $\hat{v}(t, y)$, $\hat{c}(t, z)$ известными, то из условия Стефана (14) получаем нелинейное функционально-дифференциальное уравнение $\dot{\ell}(t) = G(t, \ell(\cdot))$. По решению $\ell(t)$ определяются коэффициенты модели. Поэтому вычислительный алгоритм основан на неявных разностных схемах и носит итерационный характер. Итерации будут связаны с уточнением значения $\dot{\ell}(t)$ на каждом временном слое.

Введем следующие сетки: $\{y_m = mh_y, m = 0, 1, \dots, M\}$, $h_y = 1/M$ – шаг по пространственной переменной y ; $\{z_k = kh_z, k = 0, 1, \dots, K\}$, $h_z = 1/K$ – шаг по пространственной переменной z ; $\{t_n = nh_t, n = 0, 1, \dots\}$, h_t – шаг по времени t . После введения соответствующих нормировок оставим прежние обозначения для функций $\hat{v} := \hat{v}/\bar{v}$, $\hat{c} := \hat{c}/\bar{c}$, $\bar{v} = \sqrt{2\mu_{s*}p/b_*}$, $\bar{c} = \sqrt{2\mu_{s*}p/b}$. Обозначим через $\{\hat{V}_m^n\}$, $\{\hat{C}_k^n\}$ приближенные значения концентраций в гидридном $\ell(t)$ -слое ($\hat{v}(t_n, y_m)$) и в $(L - \ell(t))$ -слое раствора ($\hat{c}(t_n, z_k)$).

1. Начальный этап: от $t = 0$ к $t_1 = \Delta t$

Будем рассматривать последовательно два слоя: сначала гидридный, потом слой раствора $Zr-1Nb$ (это соответствует и последовательности движения растворенного водорода сквозь материал с течением времени).

1.1 Гидридный слой

Полагаем $\dot{\ell}_0 \equiv \dot{\ell}(0) = 0$. Параметр $\dot{\ell}_0$ подлежит итерационному уточнению, значение ℓ_0 известно. Полагаем в краевой задаче (10)–(11) $\dot{\ell} = 0$, $\ell = \ell_0$:

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \frac{D_*}{\ell_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2}, \quad y \in (0, 1), \quad (15)$$

$$\hat{v}(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad \hat{v}(t, 1) = 0,$$

$$2\mu_{s*}p - b_*\hat{v}^2(t, 0) = -\frac{D_*}{\ell_0} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (16)$$

Для уравнения диффузии (15) в безразмерной форме ($\hat{v} := \hat{v}/\bar{v}$) рассмотрим неявную разностную схему на слое 1: $m = 1, \dots, M - 1$,

$$\frac{\hat{V}_m^1 - \hat{V}_m^0}{h_t} = \frac{D_*}{\ell_0^2} \cdot \frac{\hat{V}_{m-1}^1 - 2\hat{V}_m^1 + \hat{V}_{m+1}^1}{h_y^2}. \quad (17)$$

Рассмотрим уравнения перехода с нулевого на первый слой по t ($n \geq 0$, $0 < m < M$):

$$\hat{V}_{m-1}^1 - [w_2 + 2]\hat{V}_m^1 + \hat{V}_{m+1}^1 + w_2\hat{V}_m^0 = 0,$$

$w_2 \equiv \ell_0^2 h_y^2 / [h_t D_*]$. Начальные данные известны: $\hat{V}_m^0 \equiv 0$ ($0 \leq m \leq M$). Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на первом слое в виде $\hat{V}_m^1 = \alpha_{m+1}\hat{V}_{m+1}^1 + \beta_{m+1}$, $m = 0, \dots, M - 1$. Прогночные коэффициенты ($m = 1, \dots, M - 1$):

$$\alpha_{m+1} = \frac{1}{2 + w_2 - \alpha_m},$$

$$\beta_{m+1} = \frac{\beta_m + w_2 \hat{V}_m^0}{2 + w_2 - \alpha_m}. \quad (18)$$

Для нахождения начальных коэффициентов α_1, β_1 воспользуемся следующими соображениями. Подсчитаем предварительно значения $\hat{V}_{1,2}^1$ по явной разностной схеме (в равенстве (17) справа заменяем 1 на 0). На первом слое по t аппроксимируем производную $\partial_y \hat{v}|_{y=0} \approx [-3\hat{V}_0^1 + 4\hat{V}_1^1 - \hat{V}_2^1]/2h_y$ и подставим в граничное условие (16):

$$2\mu_{s*} \frac{p}{\bar{v}} - b_* \bar{v} (\hat{V}_0^1)^2 = -\frac{D_*}{\ell_0} \cdot \frac{-3\hat{V}_0^1 + 4\hat{V}_1^1 - \hat{V}_2^1}{2h_y}.$$

В итоге получаем $\hat{V}_0^1 = f_1(\hat{V}_1^1, \hat{V}_2^1)$ (положительный корень квадратного уравнения):

$$b_* \bar{v} (\hat{V}_0^1)^2 + B_1 \hat{V}_0^1 + B_2 = 0, B_1 = 3D_* [2h_y \ell_0]^{-1},$$

$$B_2 = D_* [\hat{V}_2^1 - 4\hat{V}_1^1] [2h_y \ell_0]^{-1} - 2\mu s_* p \bar{v}^{-1}.$$

Зная численное значение \hat{V}_0^1 и выражение для $\hat{V}_0^1 = \alpha_1 \hat{V}_1^1 + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{V}_0^1$. По α_1 , β_1 вычисляем оставшиеся коэффициенты α_m , β_m , $m = 2, \dots, M$ по формулам (18).

Ближайшая цель — найти значение \hat{V}_M^1 , необходимое для реализации прогонки. Из краевого условия $\hat{v}(t, 1) = 0$ получаем $\hat{V}_M^1 = 0$.

Следующий этап: с текущими приближениями значений $\hat{V}_{0,M}^1$ решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений и находим новые приближения концентраций $\hat{V}_{1,2}^1$ (и остальные значения \hat{V}_m^1 , $m = 3, \dots, M - 1$).

После этого возвращаемся к уточнению $\hat{V}_0^1 = f_1(\hat{V}_1^1, \hat{V}_2^1)$ в силу (16), корректируем прогоночные коэффициенты (18) и повторяем вычисления (возвращаясь к предыдущему абзацу) до установления распределения $\hat{v}(t_1, y)$ [\hat{V}_m^1 , $m = 0, \dots, M$]. Шаг по времени мал, так что достаточно нескольких итераций.

1.2 Слой раствора $Zr-1Nb$

Переходим к краевой задаче (12)–(13), возвращаясь к предыдущему слою ($t = 0$):

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} = \frac{D}{[L - \ell_0]^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial z^2}, \quad (19)$$

$$\hat{c}(0, z) = \psi(z), \quad z \in [0, 1], \quad \frac{\partial \hat{c}}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0. \quad (20)$$

Недостающее граничное условие определяем из уравнения Стефана (14):

$$\dot{\ell}_0 = 0, \quad \hat{v} = 0 \Rightarrow \partial_z \hat{c} \Big|_{z=0} = 0.$$

Для безразмерного уравнения диффузии (19) ($\hat{c} := \hat{c}/\bar{u}$) рассмотрим неявную схему на первом слое по времени: $k = 1, \dots, K - 1$,

$$\frac{\hat{C}_k^1 - \hat{C}_k^0}{h_t} = \frac{D}{[L - \ell_0]^2} \cdot \frac{\hat{C}_{k-1}^1 - 2\hat{C}_k^1 + \hat{C}_{k+1}^1}{h_z^2}. \quad (21)$$

Уравнения перехода на первый слой ($n \geq 0$, $0 < k < K$): $w_4 \equiv [L - \ell_0]^2 h_z^2 / [h_t D]$,

$$\hat{C}_{k-1}^1 - [w_4 + 2]\hat{C}_k^1 + \hat{C}_{k+1}^1 + w_4 \hat{C}_k^0 = 0.$$

Начальные данные: $\hat{C}_k^0 = \psi(z_k)$ ($0 \leq k \leq K$). Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на

первом слое по t в виде $\hat{C}_k^1 = \alpha_{k+1} \hat{C}_{k+1}^1 + \beta_{k+1}$, $k = 0, \dots, K - 1$. Прогоночные коэффициенты ($k = 1, \dots, K - 1$):

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{2 + w_4 - \alpha_k},$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\beta_k + w_4 \hat{C}_k^0}{2 + w_4 - \alpha_k}. \quad (22)$$

Для нахождения начальных коэффициентов α_1 , β_1 подсчитаем предварительно значения $\hat{C}_{1,2}^1$ по явной разностной схеме (в равенстве (21) справа заменяем 1 на 0). На первом слое аппроксимируем производную $\partial_z \hat{c} \Big|_{z=0} \approx [-3\hat{C}_0^1 + 4\hat{C}_1^1 - \hat{C}_2^1] / 2h_z$ и приравняем к нулю в силу $\partial_z \hat{c} \Big|_{z=0} = 0$ (это условие выполняется только при переходе с нулевого на первый слой по времени, в дальнейшем используется условие Стефана на подвижной границе раздела фаз). В итоге получаем $\hat{C}_0^1 = [4\hat{C}_1^1 - \hat{C}_2^1] / 3$.

Зная численное значение \hat{C}_0^1 и выражение $\hat{C}_0^1 = \alpha_1 \hat{C}_1^1 + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{C}_0^1$. По α_1 , β_1 вычисляем оставшиеся коэффициенты α_k , β_k , $k = 2, \dots, K$ по формулам (22).

Теперь найдем значение \hat{C}_K^1 , необходимое для реализации прогонки. Рассмотрим краевое условие непроницаемости (20). На первом слое по t аппроксимируем производную $\partial_z \hat{c} \Big|_{z=1} \approx [\hat{C}_{K-2}^1 - 4\hat{C}_{K-1}^1 + 3\hat{C}_K^1] / 2h_z = 0$ и подставим вместо $\hat{C}_{K-2, K-1}^1$ выражение $\hat{C}_k^1 = \alpha_{k+1} \hat{C}_{k+1}^1 + \beta_{k+1}$ при соответствующих k . В итоге получаем $\hat{C}_K^1 = [(4 - \alpha_{K-1})\beta_K - \beta_{K-1}] / [(\alpha_{K-1} - 4)\alpha_K + 3]$. Следующий этап: с текущими приближениями значений $\hat{C}_{0,K}^1$ решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций $\hat{C}_{1,2}^1$ (и остальные значения \hat{C}_k^1 , $k = 3, \dots, K - 1$).

После этого возвращаемся к уточнению $\hat{C}_0^1 = [4\hat{C}_1^1 - \hat{C}_2^1] / 3$, корректируем значения прогоночных коэффициентов (22) и повторяем вычисления (возвращаясь к предыдущему абзацу) до установления распределения $\hat{c}(t_1, z)$, $z \in [0, 1]$ [\hat{C}_k^1 , $k = 0, \dots, K$]. Шаг по времени мал, так что достаточно нескольких итераций. Отметим, что при этом на начальном этапе понизится входная концентрация $\hat{c}(t_1, 0) < Q$.

1.3 Итерационное уточнение $\dot{\ell}_0$

После этих вычислений в уравнении Стефана (14) получаем $[Q - \hat{c}(t_1, 0)] > 0$ и положительную правую часть. Находим новое приближение $\dot{\ell}_0 > 0$ и возвращаемся в начало излагаемого алгоритма (пункт 1.1). Заме-

тим, что теперь в пунктах 1.1, 1.2 необходимо учитывать слагаемые в правых частях диффузионных уравнений (10), (12), содержащие $\dot{\ell}_0$. Формально нужно перейти к пунктам 2.1–2.3 (при $n = 0$) и продолжить вычисления до установления $\dot{\ell}_0$. Через несколько итераций получаем установившееся значение $\dot{\ell}_0$ и определяем $\ell_1 = \ell_0 + \dot{\ell}_0 h_t$. Переходим к слою $t_1 = \Delta t$, приняв в качестве начального приближения $\hat{\ell}_1 = \dot{\ell}_0$. Далее уточняем значение $\hat{\ell}_1$ и распределения $\hat{v}(t_2, y)$, $\hat{c}(t_2, z)$ по изложенной схеме.

2. Переход от n -го к $(n + 1)$ -му слою по t

Опишем алгоритм нахождения распределений на $(n + 1)$ -м слое $\hat{v}(t_{n+1}, y)$ [\hat{V}_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M$], $\hat{c}(t_{n+1}, z)$ [\hat{C}_k^{n+1} , $k = 0, \dots, K$], зная распределения с предыдущего слоя по времени $\hat{v}(t_n, y)$, $\hat{c}(t_n, z)$. Рассмотрим последовательно два слоя материала: сначала гидридный, затем слой раствора $Zr-1Nb$.

2.1 Гидридный слой

Начальное значение скорости движения свободной границы раздела фаз $\dot{\ell}(t_n) \equiv \dot{\ell}(t_{n-1})$ берется с предыдущего временного слоя. Параметр $\dot{\ell}(t_n)$ подлежит итерационному уточнению, значение $\ell(t_n)$ известно.

Для уравнения диффузии (10) в безразмерной форме рассмотрим неявную разностную схему на $(n + 1)$ -м слое: $m = 1, \dots, M - 1$,

$$\frac{\hat{V}_m^{n+1} - \hat{V}_m^n}{h_t} = \frac{D_*}{\ell^2(t_n)} \cdot \frac{\hat{V}_{m-1}^{n+1} - 2\hat{V}_m^{n+1} + \hat{V}_{m+1}^{n+1}}{h_y^2} + \frac{\dot{\ell}(t_n) y_m}{\ell(t_n)} \cdot \frac{\hat{V}_{m+1}^{n+1} - \hat{V}_{m-1}^{n+1}}{2h_y}. \quad (23)$$

Рассмотрим уравнения перехода с n -го слоя по t на $(n + 1)$ -й слой ($n \geq 0$, $0 < m < M$):

$$\begin{aligned} [1 - w_3] \hat{V}_{m-1}^{n+1} - [w_2 + 2] \hat{V}_m^{n+1} + \\ + [1 + w_3] \hat{V}_{m+1}^{n+1} + w_2 \hat{V}_m^n = 0, \\ w_2(t_n) \equiv \frac{\ell^2(t_n) h_y^2}{h_t D_*}, \quad w_3(t_n; m) \equiv \frac{\ell(t_n) \dot{\ell}(t_n) y_m h_y}{2D_*}. \end{aligned}$$

Ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(n + 1)$ -м слое в виде $\hat{V}_m^{n+1} = \alpha_{m+1} \hat{V}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}$, $m = 0, \dots, M - 1$. Прогночные коэффициенты ($m = 1, 2, \dots, M - 1$):

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1 + w_3}{2 + w_2 + (w_3 - 1)\alpha_m}, \\ \beta_{m+1} &= \frac{(1 - w_3)\beta_m + w_2 \hat{V}_m^n}{2 + w_2 + (w_3 - 1)\alpha_m}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для нахождения α_1, β_1 подсчитаем предварительно значения $\hat{V}_{1,2}^{n+1}$ по явной разностной схеме (в равенстве (23) справа заменяем $n + 1$ на n). На $(n + 1)$ -м слое по t аппроксимируем $\partial_y \hat{v}|_{y=0} \approx [-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}]/2h_y$ и подставим в граничное условие (11):

$$\begin{aligned} 2\mu s_* \frac{p}{\bar{v}} - b_* \bar{v} (\hat{V}_0^{n+1})^2 = \\ = -\frac{D_*}{\ell(t_n)} \cdot \frac{-3\hat{V}_0^{n+1} + 4\hat{V}_1^{n+1} - \hat{V}_2^{n+1}}{2h_y}. \end{aligned}$$

В итоге получаем $\hat{V}_0^{n+1} = f_1(\hat{V}_1^{n+1}, \hat{V}_2^{n+1})$ (положительный корень квадратного уравнения):

$$\begin{aligned} b_* \bar{v} (\hat{V}_0)^2 + B_1 \hat{V}_0 + B_2 = 0, \quad B_1 = 3D_* [2h_y \ell]^{-1}, \\ B_2 = D_* [\hat{V}_2 - 4\hat{V}_1] [2h_y \ell]^{-1} - 2\mu s_* p \bar{v}^{-1}, \end{aligned}$$

$V = V^{n+1}$. Зная значение \hat{V}_0^{n+1} и выражение $\hat{V}_0^{n+1} = \alpha_1 \hat{V}_1^{n+1} + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{V}_0^{n+1}$. По α_m, β_m , $m = 2, \dots, M$ по формулам (24).

Теперь найдем значение \hat{V}_M^{n+1} , необходимое для реализации прогонки. Из краевого условия $\hat{v}(t, 1) = 0$ получаем $\hat{V}_M^{n+1} = 0$. Следующий этап: с текущими приближениями $\hat{V}_{0,M}^{n+1}$ решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций $\hat{V}_{1,2}^{n+1}$ (и остальные \hat{V}_m^{n+1} , $m = 3, \dots, M - 1$).

После этого возвращаемся к уточнению $\hat{V}_0^{n+1} = f_1(\hat{V}_1^{n+1}, \hat{V}_2^{n+1})$ в силу уравнения (11), корректируем значения прогоночных коэффициентов (24) и повторяем вычисления до установления распределения $\hat{v}(t_{n+1}, y)$ [\hat{V}_m^{n+1} , $m = 0, \dots, M$]. Шаг по времени мал, так что достаточно нескольких итераций.

2.2 Слой раствора $Zr-1Nb$

Переходим к краевой задаче (12)–(14), возвращаясь к предыдущему слою ($t = t_n$). Недостающее граничное условие определяем из уравнения Стефана (14).

Для уравнения диффузии (12) в безразмерной форме рассмотрим неявную разностную схему на $(n + 1)$ -м слое: $k = 1, \dots, K - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_k^{n+1} - \hat{C}_k^n}{h_t} = \frac{D}{[L - \ell]^2} \cdot \frac{\hat{C}_{k-1}^{n+1} - 2\hat{C}_k^{n+1} + \hat{C}_{k+1}^{n+1}}{h_z^2} + \\ + \frac{\dot{\ell} [1 - z_k]}{L - \ell} \cdot \frac{\hat{C}_{k+1}^{n+1} - \hat{C}_{k-1}^{n+1}}{2h_z}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим уравнения перехода с n -го слоя по t на $(n+1)$ -й слой ($n \geq 0$, $0 < k < K$):

$$\begin{aligned} [1 - w_5] \hat{C}_{k-1}^{n+1} - [w_4 + 2] \hat{C}_k^{n+1} + \\ + [1 + w_5] \hat{C}_{k+1}^{n+1} + w_4 \hat{C}_k^n = 0, \\ w_4(t_n) \equiv \frac{[L - \ell(t_n)]^2 h_z^2}{h_t D}, \\ w_5(t_n; k) \equiv \frac{[L - \ell(t_n)] \dot{\ell}(t_n) [1 - z_k] h_z}{2 D}. \end{aligned}$$

Ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(n+1)$ -м слое в виде $\hat{C}_k^{n+1} = \alpha_{k+1} \hat{C}_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}$, $k = 0, \dots, K-1$. Прогоночные коэффициенты ($k = 1, 2, \dots, K-1$):

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{1 + w_5}{2 + w_4 + (w_5 - 1) \alpha_k}, \\ \beta_{k+1} &= \frac{(1 - w_5) \beta_k + w_4 \hat{C}_k^n}{2 + w_4 + (w_5 - 1) \alpha_k}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для нахождения α_1, β_1 подсчитаем предварительно значения $\hat{C}_{1,2}^{n+1}$ по явной разностной схеме (в равенстве (25) справа заменяем $n+1$ на n). На $(n+1)$ -м слое аппроксимируем производные $\partial_y \hat{v}|_{y=1} \approx [\hat{V}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{V}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{V}_M^{n+1}]/2h_y$, $\partial_z \hat{c}|_{z=0} \approx [-3\hat{C}_0^{n+1} + 4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1}]/2h_z$ и подставим в граничное условие (14):

$$\begin{aligned} \left[\frac{Q}{\bar{u}} - \hat{C}_0^{n+1} \right] \dot{\ell}(t_n) = \\ = - \frac{D_* \bar{v}}{\ell(t_n) \bar{u}} \cdot \frac{\hat{V}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{V}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{V}_M^{n+1}}{2h_y} + \\ + \frac{D}{L - \ell(t_n)} \cdot \frac{-3\hat{C}_0^{n+1} + 4\hat{C}_1^{n+1} - \hat{C}_2^{n+1}}{2h_z}. \end{aligned}$$

В итоге получаем $\hat{C}_0^{n+1} = f_2(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1})$ (\hat{V}_{M-i}^{n+1} , $i = 0, 1, 2$ подсчитаны в пункте 2.1):

$$\begin{aligned} \hat{C}_0^{n+1} &= \left[w_6 \frac{Q}{\bar{u}} + \hat{C}_2^{n+1} - 4\hat{C}_1^{n+1} + \right. \\ &+ w_7 [\hat{V}_{M-2}^{n+1} - 4\hat{V}_{M-1}^{n+1} + 3\hat{V}_M^{n+1}] \left. \right] [w_6 - 3]^{-1}, \\ w_6(t_n) &\equiv \frac{2h_z [L - \ell(t_n)] \dot{\ell}(t_n)}{D}, \\ w_7(t_n) &\equiv \frac{D_*}{D} \cdot \frac{L - \ell(t_n)}{\ell(t_n)} \cdot \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \cdot \frac{h_z}{h_y}. \end{aligned}$$

Зная значение \hat{C}_0^{n+1} и выражение $\hat{C}_0^{n+1} = \alpha_1 \hat{C}_1^{n+1} + \beta_1$, получаем $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \hat{C}_0^{n+1}$. По α_1, β_1 вычисляем оставшиеся коэффициенты α_k, β_k , $k = 2, \dots, K$ по формулам (26).

Найдем значение \hat{C}_K^{n+1} , необходимое для прогонки. Рассмотрим краевое условие непроницаемости (13). На $(n+1)$ -м слое по t аппроксимируем производную $\partial_z \hat{c}|_{z=1} \approx [\hat{C}_{K-2}^{n+1} - 4\hat{C}_{K-1}^{n+1} + 3\hat{C}_K^{n+1}]/2h_z = 0$ и подставляем вместо $\hat{C}_{K-2, K-1}^{n+1}$ соответствующие соотношения $\hat{C}_k^{n+1} = \alpha_{k+1} \hat{C}_{k+1}^{n+1} + \beta_{k+1}$. В итоге имеем $\hat{C}_K^{n+1} = [(4 - \alpha_{K-1})\beta_K - \beta_{K-1}][(\alpha_{K-1} - 4)\alpha_K + 3]^{-1}$. Следующий этап: с текущими приближениями $\hat{C}_{0,K}^{n+1}$ решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему уравнений и находим новые приближения концентраций $\hat{C}_{1,2}^{n+1}$ (и остальные значения \hat{C}_k^{n+1} , $k = 3, \dots, K-1$).

После этого возвращаемся к уточнению $\hat{C}_0^{n+1} = f_2(\hat{C}_1^{n+1}, \hat{C}_2^{n+1})$ в силу (14), корректируем значения прогоночных коэффициентов (26) и повторяем вычисления до установления $\hat{c}(t_{n+1}, z)$ [\hat{C}_k^{n+1} , $k = 0, \dots, K$].

2.3 Итерационное уточнение $\dot{\ell}$

После указанных вычислений из уравнения Стефана (14) находим новое приближение $\dot{\ell}(t_n) > 0$ и возвращаемся в начало излагаемого алгоритма (этап II, пункт 2.1). Через несколько итераций получаем установившееся значение $\dot{\ell}(t_n)$ и определяем $\ell(t_{n+1}) = \ell(t_n) + \dot{\ell}(t_n) h_t$. Переходим к слою t_{n+1} , приняв в качестве начального приближения $\dot{\ell}(t_{n+1}) = \dot{\ell}(t_n)$. Далее уточняем значение $\dot{\ell}(t_{n+1})$ и распределения $\hat{v}(t_{n+2}, y)$, $\hat{c}(t_{n+2}, z)$ по изложенной схеме.

ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Использовались следующие входные данные: $L = 6 \times 10^{-2}$ см, $\ell_0 = 1,3 \times 10^{-3}$, $p = 1520$ Торр, $T = 593$ К, $Q = 6,4 \times 10^{-20}$ см⁻³, $D_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ см² с⁻¹, $E_D = 35 \times 10^3$ Дж/моль, $D_{*0} = 1,5 \times 10^{-3}$ см² с⁻¹, $E_{D_*} = 59 \cdot 10^3$ Дж/моль, $b = 5 \times 10^{-23}$ см⁴ с⁻¹, $b_* = 3 \times 10^{-24}$ см⁴ с⁻¹, $s = 7 \times 10^{-6}$, $s_* = 6 \times 10^{-7}$. На рисунке 3 представлена возможность анализировать динамику распределения концентраций растворенного атомарного водорода в слоях гидрида и сплава.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из важных требований к изделиям из циркониевых сплавов активной зоны реакторов является низкое поглощение водорода, поскольку водородное охрупчивание может стать одной из причин разрушения циркониевой оболочки. Наибольший охрупчивающий эффект оказывают гидриды, так как они могут служить участками образования и развития трещин.

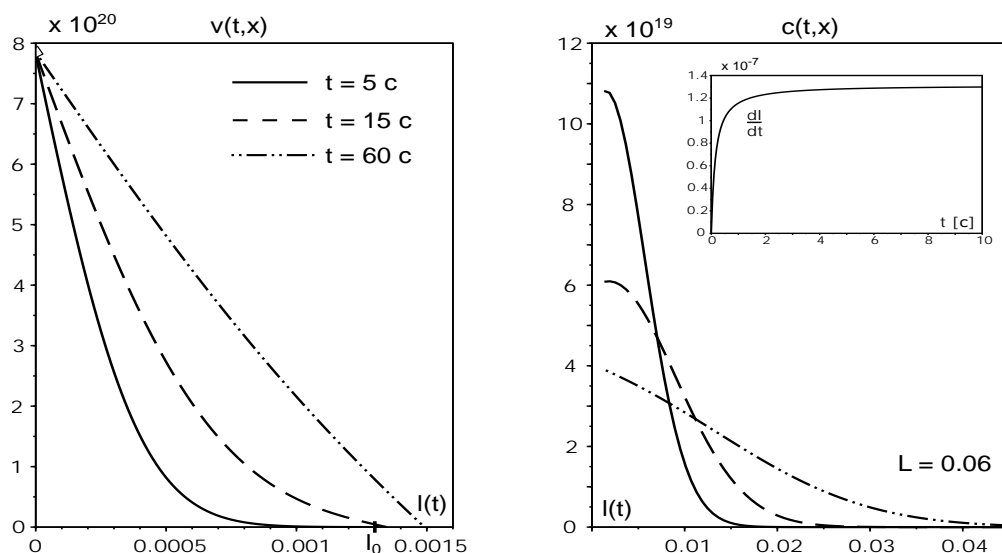


Рис. 3. Распределения концентраций растворенного водорода в слоях гидрида и сплава

При проведении экспериментальных исследований практически невозможно на основе доступных внешних измерений определить распределение водорода в материале в зависимости от времени, поскольку атомарный растворенный водород является чрезвычайно подвижной фазой внедрения.

В статье представлена модель гидрирования пластины из циркониевого сплава, учитывающая динамику абсорбционно-десорбционных процессов и движение свободной границы раздела фаз (гидрид-металл). На основе неявных разностных схем разработан итерационный вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-00744).

ЛИТЕРАТУРА

1. Водород в металлах / Ред. Г. Алефельд, И. Фёлькль. М.: Мир, 1981. Т. 1, 506 с.; т. 2., 430 с.
2. Взаимодействие водорода с металлами / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.
3. Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярмо С. С. Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.
4. Черданцев Ю. П., Чернов И. П., Тюрин Ю. И. Методы исследования систем металл-водород. Томск: ТПУ, 2008. 286 с.
5. Изотопы водорода. Фундаментальные и прикладные исследования / Ред. А. А. Юхимчук. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 697 с.

6. *The hydrogen economy* / Eds M. Ball, M. Wietschel. Cambridge University Press, 2009. 646 p.

7. *Handbook of hydrogen storage: new materials for future energy storage* / Ed. M. Hirscher. Wiley-VCH, 2010. 353 p.

8. Gabis I. E. The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids // *Technical Physics*. 1999. Vol. 44, iss. 1. P. 90–94. doi: 10.1134/1.1259257

9. Lototskiy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr. Metal hydride hydrogen compressors: a review // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2014. Vol. 39, iss. 11. P. 5818–5851. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.01.158

10. Indeitsev D. A., Semenov B. N. About a model of structure-phase transformations under hydrogen influence // *Acta Mechanica*. 2008. Vol. 195, iss. 1. P. 295–304. doi: 10.1007/s00707-007-0568-z

11. Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A. Kinetics of hydrogen evolution from MgH₂: Experimental studies, mechanism and modelling // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2010. Vol. 35, iss. 17. P. 9060–9069. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.05.092

12. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: Diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // *Applied Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 33, iss. 10. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018

13. Zaika Yu. V., Bormatova E. P. Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1295–1305. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.07.099

14. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface // *Mathematical Modelling*. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

15. *Pushilina N. S., Kudiiarov V. N., Laptev R. S. et al.* Microstructure changes in Zr–1Nb alloy

after pulsed electron beam surface modification and hydrogenation // *Surface and Coatings Technology*. 2015. Vol. 284. P. 63–68. doi: 10.1016/j.surfcoat.2015.07.082

Поступила в редакцию 25.05.2016

REFERENCES

1. *Vodorod v metallakh* [Hydrogen in metals] / Eds G. Alefel'd, J. Fel'kl'. Moscow: Mir, 1981. Vol. 1 506 p.; vol. 2, 403 p.

2. *Vzaimodeistvie vodoroda s metallami* [Interactions of hydrogen with metals]. Ed. A. P. Zakharov. Moscow: Nauka, 1987. 296 p.

3. *Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarko S. S.* Pronitsaemost' vodoroda cherez metally [Hydrogen permeability through metals]. Moscow: MIFI, 2008. 144 p.

4. *Cherdantsev Yu. P., Chernov I. P., Tyurin Yu. I.* Metody issledovaniya sistem metall–vodorod [Methods of studying metal-hydrogen systems]. Tomsk: TPU, 2008. 286 p.

5. *Izotopy vodoroda*. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya [Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies]. Ed. A. A. Yukhimchuk. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. 696 p.

6. *The hydrogen economy*. Eds M. Ball, M. Wietschel. Cambridge Univ. Press, 2009. 646 p.

7. *Handbook of hydrogen storage: new materials for future energy storage*. Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.

8. *Gabis I. E.* The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids. *Technical Physics*. 1999. Vol. 44, iss. 1. P. 90–94. doi: 10.1134/1.1259257

9. *Lototskiy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review. *International Journal of*

Hydrogen Energy. 2014. Vol. 39, iss. 11. P. 5818–5851. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.01.158

10. *Indeitsev D. A., Semenov B. N.* About a model of structure-phase transformations under hydrogen influence. *Acta Mechanica*. 2008. Vol. 195, iss. 1. P. 295–304. doi: 10.1007/s00707-007-0568-z

11. *Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A.* Kinetics of hydrogen evolution from MgH₂: Experimental studies, mechanism and modelling. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2010. Vol. 35, iss. 17. P. 9060–9069. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.05.092

12. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: Diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding. *Applied Mathematical Modelling*. 2009. Vol. 33, iss. 10. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018

13. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2011. Vol. 36, iss. 1. P. 1295–1305. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.07.099

14. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface. *Mathematical Modelling*. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

15. *Pushilina N. S., Kudiiarov V. N., Laptev R. S., Lider A. M., Teresov A. D.* Microstructure changes in Zr–1Nb alloy after pulsed electron beam surface modification and hydrogenation. *Surface and Coatings Technology*. 2015. Vol. 284. P. 63–68. doi: 10.1016/j.surfcoat.2015.07.082

Received May 25, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Заика Юрий Васильевич

рук. лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Родченкова Наталья Ивановна

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: nirodchenkova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Zaika, Yury

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Rodchenkova, Natalia

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: nirodchenkova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

УДК 519.218

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЕЗОПАСНОСТИ

В. А. Каштанов, Е. С. Длиннова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В статье исследуется модель технического обслуживания системы, которая обеспечивает безопасность функционирования некоторой охраняемой системы. Для этого используется математическая модель управляемого полумарковского процесса с катастрофами. Особенности модели заключаются в учете особенностей самостоятельной индикации отказа (время самостоятельной индикации имеет произвольное распределение) и особенностей возникновения катастрофы (учет времени, необходимого для нанесения невосполнимого ущерба, и возможность нанесения невосполнимого ущерба не только первым проникновением в охраняемую систему). Устанавливается связь характеристик надежности (безотказности и ремонтпригодности) и характеристик безопасности. Решена задача оптимизации периодичности проведения восстановительных работ, при которой математическое ожидание времени до катастрофы максимально.

Ключевые слова: безопасность; управляемый полумарковский процесс с катастрофами; однородная Марковская рандомизированная стратегия управления; надежность; безотказность; ремонтпригодность; оптимальное управление.

V. A. Kashtanov, E. S. Dlinnova. ON A MATHEMATICAL SECURITY MODEL

A model of system maintenance which ensures secure operation of the system is investigated. To this end, mathematical model of a controlled semi-Markov process with catastrophes is used. The model allows to take into account the features of self-manifestation of failure (the time has an arbitrary distribution) and features of disaster occurrence (the time required to inflict irreparable harm and the possibility of irreparable harm not only at the first penetration into the system). Connection between reliability characteristics (failure-free operation and maintainability) and security features is established. The problem of optimization of the frequency of restoration work, in which the expectation for time until disaster is maximal, is solved.

Key words: security; controlled semi-Markov process with disasters; homogeneous Markov randomized control strategy; reliability; failure-free operation; maintainability, optimal control.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы безопасности функционирования технических, экономиче-

ских, социальных и других систем делает актуальной проблему разработки математических моделей безопасности, поскольку анализ

этих моделей позволяет построить прогноз развития реальных процессов функционирования различных систем, предпринять меры при неблагоприятном прогнозе, количественно оценить возникающие опасности.

Если обратиться к основному нормативному документу по безопасности – Федеральному закону «О безопасности» от 28.12.2010 № 390-ФЗ, то можно определить основные особенности моделей и требования к вновь разрабатываемым математическим моделям.

В упомянутом выше федеральном законе безопасность определяется как состояние защищенности жизненно важных интересов личности, общества и государства от внутренних и внешних угроз.

Таким образом, имеем некий объект, который может находиться в различных состояниях, причем элементы этого множества состояний различаются по степени опасности (высокая, низкая опасность и т. п., и обычно эта классификация ассоциируется с цветовой гаммой – красный, оранжевый, зеленый уровень опасности). С другой стороны, есть факторы (противники, злоумышленники или объективные обстоятельства), создающие угрозы штатному течению процесса функционирования и выводящие процесс из подмножества безопасных состояний. Поэтому нужно принимать меры, то есть управлять этим процессом функционирования. Отметим еще одно важное обстоятельство – на процесс функционирования системы оказывают влияние различные случайные факторы.

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что математической моделью для описания моделей безопасности и исследования ее характеристик может служить класс управляемых случайных процессов.

В работе [5] для анализа моделей безопасности используется модель управляемого полумарковского процесса с катастрофами, который введен и исследован в [7, 8].

В настоящей работе исследуется модель функционирования системы, которая обеспечивает защиту некоторой технической (информационной, энергетической и т. п.) системы от атак злоумышленников. Причем предполагается, что поток атак описывается пуассоновским процессом с заданным параметром.

Такую ситуацию можно наблюдать при функционировании системы защиты информации, при охране военных и различных специальных объектов и в других подобных обстоятельствах.

Важным фактором при функционировании системы защиты являются ее возможные отка-

зы и переходы в состояния, когда она не способна успешно отражать атаки злоумышленников. Для повышения эффективности функционирования системы защиты предусматривается техническое обслуживание – проведение различных предупредительных восстановительных работ, сокращающих время пребывания системы защиты в состоянии неработоспособности.

Отличие исследуемой в настоящей работе модели технического обслуживания от рассмотренных ранее [2, 3] состоит в том, что появившийся в системе защиты отказ самостоятельно проявляется через случайное время ζ с распределением $\Phi(x) = P\{\zeta < x\}$. Кроме этого, ранее обычно предполагалось [5], что атака считается успешной, если момент атаки попадает на период неработоспособности системы защиты. Однако реальная ситуация значительно сложнее. Во-первых, для успешности атаки (превращение атаки в катастрофу) необходимо не только проникновение в охраняемую систему, когда система защиты не смогла парировать атаку, но и необходимо некоторое время, возможно случайное, для того чтобы злоумышленник смог вскрыть информацию или нанести невосполнимый ущерб охраняемой системе. Это первая особенность исследуемой модели.

Вторая особенность заключается в том, что не только первое преодоление системы защиты на периоде ее неработоспособности может перерасти в катастрофу, но и последующие.

Учет этих особенностей делает исследование технически более сложным, с одной стороны, но, с другой стороны, делает модель адекватно описывающей реальную ситуацию.

Математическая задача, решаемая в настоящей работе, заключается в построении управляемого случайного процесса, описывающего эволюцию исследуемой технической системы, определении количественного показателя безопасности – математического ожидания времени до катастрофы и определении оптимальной стратегии управления, обеспечивающей максимальное значение этого математического ожидания.

Ниже мы дадим решение поставленной задачи в новых предположениях.

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ

Пусть задана система, у которой время безотказной работы ξ распределено по закону $F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$, $\bar{F}\{x\} = 1 - F(x) = \mathbf{P}\{\xi \geq x\}$.

Выше мы предположили, что появившийся при функционировании системы отказ само-

стоятельно обнаруживается (проявляется) через случайное время ζ с распределением $\Phi(x)$.

В начальный момент $t_0 = 0$ начинается эксплуатация системы защиты и назначается начало планового предупредительного обновления (профилактика) системы через время $v \geq 0$, распределенное по закону

$$G(x) = \mathbf{P}\{v < x\}, G(0) = 0.$$

Назначение плановых предупредительных обновлений системы через случайное время $v \geq 0$ означает введение рандомизации в процесс принятия решений, т. е. в тот момент, когда нужно принимать решение, строится реализация u случайной величины v , $\{v = u\}$, распределенной по закону $G(x)$, и плановое предупредительное обновление системы производится через время u .

Если к назначенному моменту v система не отказала (произошло событие $\{v < u\}$), то в момент v начинается плановое предупредительное обновление системы, которое, по предположению, полностью обновляет систему. Обозначим длительность этого планового предупредительного (профилактического) обновления через γ_1 , а через $F_1(x) = \mathbf{P}\{\gamma_1 < x\}$ обозначим функцию распределения этой длительности, далее будем использовать обозначения $\bar{F}_1(x) = \mathbf{P}\{\gamma_1 \geq x\}$.

Если отказ системы наступил до назначенного момента времени v (произошло событие $\{v \geq \xi\}$), но самостоятельно не проявился до назначенного момента (произошло событие $\{v < \zeta + \xi\}$), то в назначенный момент устанавливается, что система находится в состоянии отказа, и начинается плановое аварийное обновление системы. Длительность этого восстановления обозначим через γ_2 , а закон распределения обозначим через $F_2(x) = \mathbf{P}\{\gamma_2 < x\}$, $\bar{F}_2(x) = \mathbf{P}\{\gamma_2 \geq x\}$.

Если отказ системы наступил до назначенного момента времени и самостоятельно проявился до назначенного момента (произошло событие $\{v \geq \zeta + \xi\}$), то в момент проявления отказа ($\zeta + \xi$) начинается внеплановое аварийное обновление системы. Длительность этого восстановления обозначим через γ_3 , а распределение обозначим $F_3(x) = \mathbf{P}\{\gamma_3 < x\}$, $\bar{F}_3(x) = \mathbf{P}\{\gamma_3 \geq x\}$.

После проведения возможных восстановительных работ, когда, по предположению, система полностью обновляется, осуществляется перепланирование момента проведения следующей предупредительной восстановительной работы независимо от прошлого течения процесса, и весь процесс обслуживания повторяется заново.

Из вышеприведенного описания следует, что система защиты не может парировать атаки в периоды проведения восстановительных работ и в периоды пребывания системы в состоянии скрытого отказа, а парирует атаки в периоды исправной работы (функционирования).

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА АТАК И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ УСПЕШНОСТИ

Как уже было отмечено выше, на охраняемую систему злоумышленниками осуществляются атаки и попытки нанести невосполнимый ущерб.

Опишем алгоритм осуществления этих атак. Пусть атаки на систему совершаются периодически, через случайные интервалы времени, имеющие экспоненциальные распределения, параметры которых зависят от состояния системы защиты. Обозначим λ_i , $i = 1, 2, 3$, параметр экспоненциального распределения времени между интервалами атак на нашу систему, когда в ней проводится плановая предупредительная профилактика, плановый аварийный ремонт или внеплановый аварийный ремонт соответственно, λ_0 – параметр экспоненциального распределения времени между моментами атак на нашу систему, когда система находится в состоянии скрытого отказа. Заметим, что дифференциация интенсивности атак при различных состояниях системы защиты определяется тем, что, даже находясь в неработоспособном состоянии, система защиты может парировать часть атак.

Самый неблагоприятный исход для функционирования исследуемой системы состоит в том, что злоумышленники смогли атаковать, проникнуть в охраняемую систему и получить достаточное время для ее взлома или нанесения недопустимого ущерба. Поэтому введем еще одну случайную величину, характеризующую время, которое злоумышленник потратит на то, чтобы взломать систему защиты. Обозначим эту величину через η , ее распределение обозначим через $\Psi(x) = \mathbf{P}\{\eta < x\}$ и будем считать ее независимой от других случайных величин.

Итак, атака будет считаться успешной (катастрофой) при выполнении следующих условий: система находилась в неисправном состоянии (проводились какие-то восстановительные работы или система находилась в состоянии скрытого отказа), а злоумышленник сумел попасть на период неработоспособности и успел взломать систему до момента перехода в состояние, когда эти угрозы парируются.

Для дальнейшего исследования потребуются выразить характеристики момента возник-

новения успешной атаки в зависимости от исходных характеристик. Решая эту проблему, прежде всего заметим, что поток атак описывается стационарным процессом Пуассона, параметр которого зависит от состояния системы (вида восстановительной работы или наличия скрытого отказа). В силу однородности и отсутствия последствия пуассоновского процесса, а также предположения о том, что периоды времени, которое надо затратить на взлом, есть независимые случайные величины, можно утверждать, что распределение момента возникновения успешной атаки будет зависеть от состояния системы и длительности периода неработоспособности.

Обозначим через \varkappa случайное время, через которое одна из атак, прошедших на периоде неработоспособности системы защиты длительности z , превратится в успешную, то есть

$$\bar{F}_i(x, z) = \begin{cases} e^{-\lambda_i z} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i^n \int_0^z \int_0^{z-x_1} \dots \int_0^{z-\sum_{k=1}^{n-1} x_k} \prod_{k=1}^n \bar{\Psi}(x - \sum_{s=0}^k x_s) dx_1 \dots dx_n), & x \geq z, \\ e^{-\lambda_i x} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i^n \int_0^x \int_0^{x-x_1} \dots \int_0^{x-\sum_{k=1}^{n-1} x_k} \prod_{k=1}^n \bar{\Psi}(x - \sum_{s=0}^k x_s) dx_1 \dots dx_n), & x < z. \end{cases} \quad (3)$$

При выводе равенства (3) использовалась формула полной вероятности и полная группа несовместных событий определялась условиями: за время $\min\{x, z\}$ прошло n , $n = 0, 1, 2, \dots$, атак в моменты

$$0 < \sum_{s=1}^n x_s < \min\{x, z\}, \quad x_s > 0,$$

и каждая из них за время $x - \sum_{s=1}^n x_s$ не стала успешной. При этом мы использовали независимость приращений процесса Пуассона и тот факт, что интервалы между соседними моментами атак в процессе Пуассона – независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону.

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{x-x_1} \dots \int_0^{x-\sum_{k=1}^{n-1} x_k} \prod_{k=1}^n \bar{\Psi}(x - \sum_{s=0}^k x_s) dx_1 \dots dx_n &= \int_0^x \int_{y_1}^x \dots \int_{y_{n-1}}^x \prod_{k=1}^n \bar{\Psi}(x - y_k) dy_1 \dots dy_n = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \prod_{k=1}^n \bar{\Psi}(x - y_k) dy_1 \dots dy_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^x \bar{\Psi}(x - y) dy \right)^n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^x \bar{\Psi}(y) dy \right)^n, \end{aligned} \quad (4)$$

которая справедлива, так как для подынтегральной функции

$$\psi_x(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{k=1}^n \bar{\Psi}(x - y_k)$$

произойдет катастрофа (это время отсчитывается от начала периода неработоспособности), а через $F_i(x, z)$ – вероятность того, что эта случайная величина \varkappa меньше x при условии, что система находится в состоянии i , а период неработоспособности равен z .

Если обозначить через $A_i(z)$ событие, состоящее в том, что процесс пребывает в состоянии i и период неработоспособности равен z , то условное распределение случайной величины \varkappa можно записать в виде равенств

$$\mathbf{P}\{\varkappa < x | A_i(z)\} = F_i(x, z), \quad (1)$$

$$\mathbf{P}\{\varkappa \geq x | A_i(z)\} = \bar{F}_i(x, z) = 1 - F_i(x, z). \quad (2)$$

Выразим эти вероятности через исходные характеристики. При принятых обозначениях имеем равенство

Соотношения (3) преобразуем, используя свойства условного распределения моментов скачков при условии, что на интервале $(0, x)$ произошло n скачков (в терминах задачи безопасности – на интервале $(0, x)$ произошло n атак, в дальнейшем это событие обозначим через $B_n(x)$).

Известно [4], что совместное условное распределение моментов скачков пуассоновского процесса совпадает с совместным распределением членов вариационного ряда, построенного для n реализаций независимых равномерно распределенных на $(0, x)$ случайных величин.

Сделаем замену переменных $y_k = \sum_{s=1}^k x_s$ и получим цепочку равенств

выполняются условия

$$\psi_x(y_1, y_2, \dots, y_n) = \psi_x(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n})$$

для любой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) .

Тогда из (3) получаем

$$\bar{F}_i(x, z) = e^{-\lambda_i \int_0^x \bar{\Psi}(y) dy}, \quad z \geq x \geq 0. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С КАТАСТРОФАМИ

При построении управляемого полумарковского процесса с катастрофами будем использовать принятые в [5, 6] обозначения и терминологию и использовать алгоритм, изложенный в этих работах, который определяет следующие этапы:

- определение марковских моментов и пространства состояний процесса;
- построение пространства управлений и стратегий управления;
- определение полумарковского ядра управляемого полумарковского процесса;
- определение условных распределений моментов катастроф;
- вычисление математического ожидания момента катастрофы;
- оптимизация математического ожидания момента катастрофы и определение оптимальной стратегии технического обслуживания.

Определение марковских моментов и пространства состояний процесса.

Из описания эволюции процесса функционирования, изложенного выше, следует, что в рассматриваемом случае марковские моменты — это моменты начала и окончания восстановительных работ. По определению первая компонента управляемого полумарковского процесса с катастрофами $\xi(t)$ между марковскими моментами не изменяется.

Кроме этого, заметим, что в работе нас будет интересовать первый момент успешной атаки, и поэтому при построении управляемого полумарковского процесса введем состояние поглощения — состояние катастрофы.

Будем считать, что $\xi(t) = 1$, если в ближайший марковский момент, предшествующий t , началась плановая предупредительная профилактика системы.

Будем считать, что $\xi(t) = 2$, если в ближайший марковский момент, предшествующий t , началось плановое аварийное восстановление системы.

Будем считать, что $\xi(t) = 3$, если в ближайший марковский момент, предшествующий t , началось внеплановое аварийное восстановление системы.

Полагаем $\xi(t) = 0$, если ближайший марковский момент, предшествующий t , является моментом обновления системы или моментом окончания любой восстановительной работы.

Наконец, будем считать, что в момент возникновения успешной атаки процесс переходит в состояние 4, или $\xi(t) = 4$.

Следовательно, первая компонента управляемого полумарковского процесса с катастрофами $\xi(t)$ принимает значения из конечного множества $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Построение пространства управлений и стратегий управления.

В исследуемой модели управление осуществляется только в состоянии $i = 0$ выбором периода, через который следует проводить плановую предупредительную профилактику. Следовательно, пространство управлений определяется равенством

$$U_0 = [0, \infty),$$

а рандомизированные стратегии управления определяются выбором вероятностной меры $G(x)$.

Определение полумарковского ядра управляемого полумарковского процесса.

По определению полумарковское ядро — матрица $Q_{ij}(t, u)$, $i, j \in E$, $t \geq 0$, $u \in U_i$, есть вероятность того, что следующим состоянием процесса $\xi(t)$ будет состояние j , и переход в это состояние произойдет до момента t при условии, что в момент $t = 0$ процесс перешел в состояние i , $\xi(0) = i$, и принято решение $u \in U_i$. Отметим в этом определении независимость вероятности $Q_{ij}(t, u)$ от календарного времени. Поэтому при определении полумарковского ядра $Q_{ij}(t, u)$ будем считать, что переход в состояние i произошел в момент ноль.

Выпишем первую строку матрицы $Q_{ij}(t, u)$, когда $i = 0$.

Если известно, что в момент перехода процесс принимает значение ноль, $\xi(0) = 0$, и в этот момент принято решение v , то время пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии i разбивается на два периода — период исправной работы системы Θ_1 и период скрытого отказа Θ_2 , длительности которых соответственно равны

$$\Theta_1 = \min(\xi, v), \quad (6)$$

$$\Theta_2 = \max(0, \min(v - \xi, \zeta, \varkappa)). \quad (7)$$

Известно [10], что для положительной случайной величины τ математическое ожидание определяется равенством

$$M\tau = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\tau \geq x\} dx.$$

В силу независимости случайных величин ξ, v выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{\min(\xi, v) \geq x\} = \bar{F}(x)\bar{G}(x),$$

и для математического ожидания имеем

$$M\Theta_1 = \int_0^\infty \bar{F}(x)\bar{G}(x) dx. \quad (8)$$

Если на каком-то периоде выполняется равенство $\Theta_2 = 0$, то значит, произошел переход в состояние 1. Если на каком-то периоде выполняется равенство $\Theta_2 = v - \xi$, то значит, произошел переход в состояние 2. Если на каком-то периоде выполняется равенство $\Theta_2 = \zeta$, то значит, произошел переход в состояние 3. Если на каком-то периоде выполняется равенство $\Theta_2 = \varkappa$, то значит, произошел переход в состояние 4.

Случайные величины ξ, v, ζ – независимые случайные величины. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\min(v - \xi, \zeta) \geq y\} &= \mathbf{P}\{v - \xi \geq y\} \bar{\Phi}(y) = \\ &= \bar{\Phi}(y) \int_0^\infty \bar{G}(z + y) dF(z). \end{aligned}$$

Случайная величина \varkappa зависит от ξ, v, ζ . Условное распределение \varkappa при условии $\{\min(v - \xi, \zeta) = y, y > 0\}$ задается равенством (3), из которого следует $\bar{F}_0(x, y) = \bar{F}_0(x, x)$ при $z \geq x$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\min(v - \xi, \zeta, \varkappa) \geq x\} &= \quad (9) \\ &= \bar{F}_0(x, x) \bar{\Phi}(x) \int_0^\infty \bar{G}(z + x) dF(z), \end{aligned}$$

и искомое математическое ожидание определяется равенством

$$M\Theta_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}_0(x, x) \bar{\Phi}(x) \bar{G}(z + x) dF(z) dx. \quad (10)$$

Пусть $j = 0$. Из приведенного выше описания процесса функционирования исследуемой технической системы следует чередование моментов начала и окончания восстановительных работ. Так как в момент окончания восстановительной работы (и только в эти моменты) процесс принимает значение ноль, $\xi(t) = 0$, то очевидно

$$Q_{00}(t, u) = 0. \quad (11)$$

Пусть $j = 1$. При $t < u$ переход в состояние $j = 1$ невозможен, поскольку предупредительная профилактика должна начаться только в момент u . Если $t \geq u$, то переход в состояние $j = 1$ произойдет тогда и только тогда, когда будет выполняться событие $\{\xi \geq u\}$ (заметим, что в этом случае $\Theta_2 = 0$, и все атаки парируются). Следовательно, при $j = 1$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} Q_{01}(t, u) &= \mathbf{P}\{v < t, v \leq \xi | v = u\} = \\ &= \begin{cases} 0, & u > t, \\ \bar{F}(u), & u \leq t. \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

Если $j = 2$, то при $t < u$ вероятность того, что система до момента t перейдет в состояние планового аварийного ремонта, равна нулю, поскольку данный переход должен осуществиться ровно в назначенный момент u , и никак не раньше.

При $t \geq u$ для перехода в состояние $j = 2$ должны выполняться условия $\{\xi < u \leq \xi + \zeta\}$ и за положительное время скрытого отказа $\Theta_2 = u - \xi > 0$ ни одна из прошедших атак не стала успешной, то есть выполняется неравенство $\varkappa > u - \xi$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} Q_{02}(t, u) &= \\ &= \mathbf{P}\{\xi < v < \xi + \zeta, \varkappa > v - \xi, t \geq v | v = u\} = \\ &= \begin{cases} 0, & u > t, \\ \int_0^u \bar{\Phi}(u - x) \bar{F}_0(u - x, u - x) dF(x), & u \leq t. \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

Функция $\bar{F}_0(z, z)$ в равенстве (13) определяется соотношением (5).

Если $j = 3$, то справедливы следующие рассуждения.

При $t < u$ для перехода в состояние $j = 3$ должны выполняться условия $\{\xi + \zeta < t\}$ и за положительное время скрытого отказа $\Theta_2 = \zeta > 0$ ни одна из прошедших атак не стала успешной, то есть выполняется неравенство $\varkappa > \zeta$.

При $t \geq u$ для перехода в состояние $j = 3$ должны выполняться условия $\{\xi + \zeta < u\}$ и за положительное время скрытого отказа $\Theta_2 = \zeta > 0$ ни одна из прошедших атак не стала успешной, то есть выполняется неравенство $\varkappa > \zeta$.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} Q_{03}(t, u) &= \\ &= \mathbf{P}\{\xi + \zeta < \min(v, t), \varkappa > \zeta | v = u\} = \\ &= \begin{cases} \int_0^t \int_0^{t-x} dF(x) d\Phi(y) \bar{F}_0(y, y), & u > t, \\ \int_0^u \int_0^{u-x} dF(x) d\Phi(y) \bar{F}_0(y, y), & u \leq t, \end{cases} \quad (14) \end{aligned}$$

где функция $\bar{F}_0(y, y)$ также определяется равенством (5).

Наконец, если $j = 4$, то справедливы следующие рассуждения.

При $t < u$ для перехода в состояние $j = 4$ должны выполняться два несовместных события:

- либо реализуется событие $\{\xi + \zeta < t\}$ и за положительное время скрытого отказа $\Theta_2 = \zeta > 0$ хотя бы одна из прошедших атак

стала успешной, то есть выполняется неравенство $\varkappa < \zeta$;

- либо реализуется событие $\{\xi < t < \xi + \zeta\}$ и за положительное время $t - \xi$ скрытого отказа хотя бы одна из прошедших атак стала успешной, то есть выполняется неравенство $\varkappa < t - \xi$;

При $t \geq u$ для перехода в состояние $j = 4$ должны выполняться два несовместных события:

$$Q_{04}(t, u) = \begin{cases} \int_0^u \int_0^{u-x} dF(x)d\Phi(y)F_0(y, y) + \int_0^u \bar{\Phi}(u-x)F_0(u-x, u-x)dF(x), & t \geq u, \\ \int_0^t \int_0^{t-x} dF(x)d\Phi(y)F_0(y, y) + \int_0^t \bar{\Phi}(t-x)F_0(t-u, t-u)dF(x), & t < u, \end{cases} \quad (15)$$

в котором функции $F_0(t, z)$, $z \geq t$, определяются соотношением (5).

Для других строк полумарковской матрицы при $i = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned} Q_{ij}(t, u) &= 0, \quad j \neq 0, 4, \\ Q_{i0}(t, u) &= \int_0^t \bar{F}_i(x, x)dF_i(x), \quad (16) \\ Q_{i4}(t, u) &= \int_0^\infty F_i(t, x)dF_i(x) = \\ &= \int_0^t F_i(x, x)dF_i(x) + F_i(t, t)\bar{F}_i(t). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить очевидное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} Q_{ij}(t, u) = 1, \quad (17)$$

справедливое при любом $u > 0$ для $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Из равенств (11)–(16) получаем интегрированием по мере $G_0(u) = G(u)$ полумарковское ядро стандартного полумарковского процесса [9].

При $i \neq 0$ для функций $Q_{ij}(t) = \int_0^\infty Q_{ij}(t, u)dG_i(u)$ остаются справедливы равенства (16), поскольку нет зависимости от управления u функций (16).

Для состояния $i = 0$ имеем равенства

$$\begin{aligned} Q_{00}(t) &= 0, \\ Q_{01}(t) &= \int_0^t \bar{F}(u)dG(u), \quad (18) \\ Q_{02}(t) &= \\ &= \int_0^t \int_0^u \bar{\Phi}(u-x)\bar{F}_0(u-x, u-x)dF(x)dG(u), \end{aligned}$$

- либо реализуется событие $\{\xi + \zeta < u\}$ и за положительное время скрытого отказа $\Theta_2 = \zeta > 0$ хотя бы одна из прошедших атак стала успешной, то есть выполняется неравенство $\varkappa < \zeta$;

- либо реализуется событие $\{\xi < u < \xi + \zeta\}$ и за положительное время скрытого отказа $\Theta_2 = u - \xi > 0$ хотя бы одна из прошедших атак стала успешной, то есть выполняется неравенство $\varkappa < u - \xi$.

Объединяя вышеприведенные рассуждения, для вероятности $Q_{04}(t, u)$ можно записать равенство

$$\begin{aligned} Q_{03}(t) &= \\ &= \int_0^t \int_0^u \int_0^{u-x} dF(x)d\Phi(y)\bar{F}_0(y, y)dG(u) + \\ &+ \int_0^t \int_0^{t-x} dF(x)d\Phi(y)\bar{F}_0(y, y)\bar{G}(t), \\ Q_{04}(t) &= \int_0^\infty Q_{04}(t, u)dG(u). \end{aligned}$$

Предельным переходом при $t \rightarrow \infty$ получаем переходные вероятности состояний вложенной цепи Маркова

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t), \quad i, j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Для исследуемой модели из равенств (18) находим, что

$$\begin{aligned} p_{00} &= 0, \quad p_{01} = \int_0^\infty \bar{F}(u)dG(u), \\ p_{02} &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^u \bar{\Phi}(u-x)\bar{F}_0(u-x, u-x)dF(x)dG(u), \\ p_{03} &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^u \int_0^{u-x} dF(x)d\Phi(y)\bar{F}_0(y, y)dG(u). \end{aligned} \quad (19)$$

Равенство (19) и равенство (17) доказывают, что переход из состояния $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ в состояние катастрофы $j = 4$ происходит с положительной вероятностью

$$\begin{aligned} p_{04} &= \int_0^\infty Q_{04}(\infty, u)dG(u) > 0, \\ p_{i4} &= \int_0^\infty F_i(x, x)dF_i(x) > 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Состояния $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ вложенной марковской цепи сообщающиеся и несущественные, а состояние $j = 4$ является поглощающим, достижимым из любого несущественного состояния.

Если использовать терминологию, введенную в [5], то состояния $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ есть опасные состояния, а состояние $j = 4$ есть состояние катастрофы. Тогда можно утверждать, что математическое ожидание времени до катастрофы конечно [5].

Обозначим через M_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, математическое ожидание времени до катастрофы при условии, что полумарковский процесс стартует из состояния $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\xi(0) = i$.

Тогда для введенных математических ожиданий по формуле полного математического ожидания получаем неоднородную систему алгебраических уравнений

$$M_i = m_i + \sum_{j=0}^3 p_{ij} M_j, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (20)$$

где математическое ожидание m_i времени непрерывного пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии i определяется равенством при $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$m_i = \sum_{j=0}^4 \int_0^\infty t dQ_{ij}(t) dt = \int_0^\infty \left\{ 1 - \sum_{j=0}^4 Q_{ij}(t) \right\} dt,$$

в котором функции $Q_{ij}(t)$ определяются равенствами (16) и (18).

$$\begin{aligned} A(u) = & \int_0^u \bar{F}(x) dx + \int_0^u \bar{F}_0(x, x) F(u-x) \bar{\Phi}(x) dx + \bar{F}(u) \int_0^\infty \bar{F}_1(t, t) \bar{F}_1(t) dt + \\ & + \int_0^\infty \bar{F}_2(t, t) \bar{F}_2(t) dt \int_0^u \bar{\Phi}(u-x) \bar{F}_0(u-x, u-x) dF(x) + \\ & + \int_0^\infty \bar{F}_3(t, t) \bar{F}_3(t) dt \int_0^u \bar{F}_0(y, y) F(u-y) d\Phi(y), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} B(u) = & 1 - \bar{F}(u) \int_0^\infty \bar{F}_1(z, z) dF_1(z) + \\ & + \int_0^\infty \bar{F}_2(z, z) dF_2(z) \int_0^u \bar{\Phi}(u-x) \bar{F}_0(u-x, u-x) dF(x) + \\ & + \int_0^\infty \bar{F}_3(z, z) dF_3(z) \int_0^u \bar{F}_0(y, y) F(u-y) d\Phi(y). \end{aligned} \quad (26)$$

Оптимальную стратегию управления можно искать в классе детерминированных стратегий [1]

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq u, \\ 1, & x > u. \end{cases} \quad (27)$$

Поэтому получаем

$$m_i = \int_0^\infty \bar{F}_i(t, t) \bar{F}_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (21)$$

и

$$m_0 = M\Theta_1 + M\Theta_2, \quad (22)$$

где математические ожидания $M\Theta_i$, $i = 1, 2$, определяются равенствами (8) и (10)

Выпишем решение системы (20) при $i = 0$, то есть считаем, что процесс стартует из состояния $i = 0$, $\xi(0) = i$.

Тогда получаем выражение математического ожидания времени до катастрофы через исходные характеристики:

$$M_0 = \frac{m_0 + \sum_{j=1}^3 m_j p_{0j}}{1 - \sum_{j=1}^3 p_{0j} p_{j0}}. \quad (23)$$

Математическое ожидание m_0 и вероятности p_{0j} , $j \in \{1, 2, 3\}$, суть линейные функционалы относительно вероятностного распределения $G(u)$, определяющего периодичность проведения плановых восстановительных работ (соотношения (8), (10) и (18)). Следовательно, математическое ожидание $M_0(G)$ есть дробно-линейный функционал

$$M_0(G) = \frac{\int_0^\infty A(u) dG(u)}{\int_0^\infty B(u) dG(u)}, \quad (24)$$

где функции $A(u)$ и $B(u)$ определяются равенствами

Таким образом, получаем, что если процесс стартует из состояния ноль, когда система защиты новая, то математическая задача сводится к определению максимума функции

и точки u_0 , в которой этот максимум достигается,

$$M_0(u_0) = \max_{u \geq 0} \frac{A(u)}{B(u)}. \quad (28)$$

Вывод. Нужно назначать проведение предупредительных профилактик через время u_0 , тогда получим максимальное значение математического ожидания времени до катастрофы.

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Исходные данные:

- функция распределения времени безотказной работы системы $F(x)$;
- функция распределения времени самостоятельного проявления отказа $\Phi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$;
- функция распределения времени планового предупредительного ремонта $F_1(x)$;
- функция распределения времени планового аварийного ремонта $F_2(x)$;
- функция распределения времени внепланового аварийного ремонта $F_3(x)$;
- интенсивность атак в состоянии скрытого отказа λ_0 ;
- интенсивность атак в состоянии планового предупредительного ремонта λ_1 ;
- интенсивность атак в состоянии планового аварийного ремонта λ_2 ;
- интенсивность атак в состоянии внепланового аварийного ремонта λ_3 ;
- функция распределения времени, необходимого для вскрытия информации, $\Psi(x)$.

Этапы построения оптимальной стратегии:

1. Вычисление функций $\bar{F}_i(x, x), i = 0, 1, 2, 3$ (равенство (5));
2. Вычисление функций $A(u), B(u)$ (равенства (25), (26));
3. Определение максимума функции $M_0(u)$ (равенство (30)).

ПРИМЕР

Приведем пример расчета оптимальной периодичности проведения плановых восстановительных работ для следующих исходных данных:

- функция распределения времени безотказной работы системы $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$;
- функция распределения времени самостоятельного проявления отказа $\Phi(x) = 0, x < \infty$ (самостоятельно отказ не проявляется);
- функция распределения времени планового предупредительного ремонта $F_1(x) = 1 - e^{-\mu_1 x}$;
- функция распределения времени планового

аварийного ремонта $F_2(x) = 1 - e^{-\mu_2 x}$;

- функция распределения времени внепланового аварийного ремонта $F_3(x) = 1 - e^{-\mu_3 x}$;

- интенсивность атак в состоянии скрытого отказа λ_0 ;

- интенсивность атак в состоянии планового предупредительного ремонта λ_1 ;

- интенсивность атак в состоянии планового аварийного ремонта λ_2 ;

- интенсивность атак в состоянии внепланового аварийного ремонта λ_3 ;

- необходимо фиксированное время τ для вскрытия информации, функция распределения времени, необходимого для вскрытия информации,

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \tau, \\ 1, & x > \tau. \end{cases} \quad (29)$$

Этап 1. Вычисление функций $\bar{F}_i(x, x)$. Из равенства (5) получаем при $i = 0, 1, 2, 3$ для заданных исходных данных

$$F_i(x, x) = \begin{cases} 1, & x \leq \tau, \\ e^{-\lambda_i(x-\tau)}, & x > \tau. \end{cases} \quad (30)$$

Этап 2. Вычисляем функцию $A(u)$.

Обозначим

$$\alpha_i = \int_0^\infty \bar{F}_i(z, z) \bar{F}_i(z) dz, \quad i = 1, 2, 3.$$

При исходных данных примера имеем

$$\alpha_i = \alpha_i(\tau) = \frac{1 - e^{-\mu_i \tau}}{\mu_i} + \frac{e^{-(\lambda_i + \mu_i)\tau}}{\lambda_i + \mu_i}.$$

Из равенства (25) получаем при заданных исходных данных:

при $u < \tau$

$$A(u) = u + e^{-\lambda u} \alpha_1(\tau) + (1 - e^{-\lambda u}) \alpha_2(\tau),$$

при $u > \tau$

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{1 - e^{-\lambda u}}{\lambda} + \tau + \frac{e^{-\lambda \tau}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda_0(u-\tau)}}{\lambda} + \\ &+ \frac{e^{\lambda_0(u-\tau)} - e^{\lambda(u-\tau)}}{\lambda - \lambda_0} + e^{-\lambda u} \alpha_1(\tau) + \\ &+ \left\{ 1 - e^{-\lambda \tau} + \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0} [e^{\lambda_0(u-\tau)} - e^{\lambda(u-\tau)}] \right\} \alpha_2(\tau). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\beta_i = \int_0^\infty \bar{F}_i(z, z) dF_i(z), \quad i = 1, 2, 3.$$

При исходных данных примера имеем

$$\beta_i = \beta_i(\tau) = 1 - \frac{\lambda_i e^{-\mu_i \tau}}{\mu_i + \lambda_i}.$$

Из равенства (26) получаем при заданных исходных данных:

при $u < \tau$

$$B(u) = 1 - e^{-\lambda u} \beta_1(\tau) + (1 - e^{-\lambda u}) \beta_2(\tau),$$

при $u < \tau$

$$B(u) = 1 - e^{-\lambda u} \beta_1(\tau) +$$

$$+ \left\{ 1 - e^{-\lambda \tau} + \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0} [e^{\lambda_0(u-\tau)} - e^{\lambda(u-\tau)}] \right\} \beta_2(\tau).$$

Исследование завершается поиском максимума отношения функций $A(u)$ и $B(u)$ и точки u_0 , в которой этот максимум достигается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.
2. Зайцева О. Б. Анализ безопасности функционирования технических систем // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, вып. 1. С. 94–95.
3. Зайцева О. Б. Анализ полумарковской модели безопасности // Обзорение прикладной и

промышленной математики. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 223–225.

4. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971. 536 с.

5. Каштанов В. А., Зайцева О. Б. О минимаксных подходах в задачах безопасности // Труды Карельского научного центра РАН. 2013. № 1. Вып. 4. С. 55–67.

6. Каштанов В. А. Элементы теории случайных процессов. М.: МИЭМ, 2010. 113 с.

7. Каштанов В. А., Янишевский И. М. Исследование функционалов на траекториях полумарковского процесса с конечным множеством состояний // Кибернетика и системный анализ. АН Украины. 1998. № 1. С. 145–156.

8. Каштанов В. А., Янишевский И. М. Совместное распределение времени до момента катастрофы и аддитивного функционала доходов // Теория вероятностей и ее применения. 1996. Т. 41, вып. 3. С. 145–152.

9. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова думка, 1976. 182 с.

10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (том 2). М.: Мир, 1967. 751 с.

Поступила в редакцию 15.05.2016

REFERENCES

1. Voprosy matematicheskoy teorii nadezhnosti [Problems of mathematical theory of reliability]. Ed. B. V. Gnedenko. Moscow: Radio i svyaz', 1983. 376 p.
2. Zajceva O. B. Analiz bezopasnosti funkcionirovaniya tekhnicheskikh sistem [Security analysis of technical systems]. *Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki* [Review of applied and industrial mathematics]. 2011. Vol. 18, iss. 1. P. 94–95.
3. Zajceva O. B. Analiz polumarkovskoj modeli bezopasnosti [A study of semi-Markov safety model]. *Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki* [Review of applied and industrial mathematics]. 2011. Vol. 18, iss. 2. P. 223–225.
4. Karlin S. Osnovy teorii sluchajnyh processov [Fundamentals of the theory of stochastic processes]. Moscow: Mir, 1971. 536 p.
5. Kashtanov V. A., Zajceva O. B. O minimaksnykh podhodah v zadachah bezopasnosti [On minimax approaches to problems of safety]. *Trudy Karel'skogo nauchnogo centra RAN* [Transactions of KarRC of RAS]. 2013. No. 1. P. 55–67.
6. Kashtanov V. A. Elementy teorii sluchajnyh processov [Elements of the theory of stochastic processes]. Moscow: MIEHM, 2010. 113 p.

7. Kashtanov V. A., Yanishevskij I. M. Issledovanie funkcionalov na traektoriyah polumarkovskogo processa s konechnym mnozhestvom sostoyanij [The study of functionals on trajectories of semi-Markov process with a finite set of states]. *Kibernetika i sistemnyj analiz. AN Ukrainy* [Cybernetics and systems analysis. Academy of sciences of Ukraine]. 1998. No. 1. P. 145–156.

8. Kashtanov V. A., Yanishevskij I. M. Sovmestnoe raspredelenie vremeni do momenta katastrofy i additivnogo funkcionala dohodov [Joint distribution of catastrophe time and of the additive functional of profits]. *Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya* [Theory of probability and its applications]. 1996. Vol. 41, iss. 3. P. 145–152.

9. Korolyuk V. S., Turbin A. F. Polumarkovskie processy i ih prilozheniya [Semi-Markov processes and their applications]. Kiev: Naukova dumka, 1976. 182 p.

10. Feller V. Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i ee prilozheniya [Introduction to the probability theory and its applications] (vol. 2), Moscow: Mir, 1967. 751 p.

Received May 15, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Каштанов Виктор Алексеевич

профессор департамента прикладной математики,
д. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: vakashtan@yandex.ru

Длиннова Екатерина Сергеевна

магистрант департамента прикладной математики,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: <es.ekaterina@gmail.com>

CONTRIBUTORS:

Kashtanov, Victor

National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: vakashtan@yandex.ru

Dlinnova Ekaterina

National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: <es.ekaterina@gmail.com>

81.32

МОДЕЛЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ СИНСЕТА

А. Н. Кириллов, А. А. Крижановский

институт прикладны математически исследования арельского научного центра

статье поставлен вопрос формализации понятия синонимии. а основе векторного представления слов в работе предлагается геометрический подход для математического моделирования наборов синонимов (синсетов). определен такой вычисляемый атрибут синсетов как $\cos(\theta)$ (IntS). введены понятия a и c al s слов в синсете, позволяющие определить более значимые, «центральные» слова в синсете. для ранга и центральности даны математическая формулировка и предложена процедура их вычисления. для вычислений использованы нейронные модели (Skip-gram, CBOW), созданные программой word2vec Миколова. а примере синсетов Русского иксикловаря построены IntS по нейронным моделям корпусов проекта RusVectors. Результаты, полученные по двум корпусам (ациональный корпус русского языка и новостной корпус), в значительной степени совпадают. то говорит о некоторой универсальности предлагаемой математической модели.

ключевые слова: синоним; синсет; нейронная сеть; корпусная лингвистика; word2vec; RusVectors; gensim; Русский иксикловарь.

A. N. Kirillov, A. A. Krizhanovsky. SYNSET GEOMETRY STRUCTURE MODEL

The goal of formalization, proposed in this paper, is to bring together, as near as possible, the theoretic linguistic problem of synonym conception and the computer linguistic methods based generally on empirical intuitive unjustified factors. Using the word vector representation we have proposed the geometric approach to mathematical modeling of synonym set (synset). The word embedding is based on the neural networks (Skip-gram, CBOW), developed and realized as word2vec program by T. Mikolov. The standard cosine similarity is used as the distance between word-vectors. Several geometric characteristics of the synset words are introduced: the interior of synset, the synset word rank and centrality. These notions are intended to select the most significant synset words, i.e. the words which senses are the nearest to the sense of a synset. Some experiments with proposed notions, based on RusVectors resources, are represented.

Keywords: synonym; synset; neural network; corpus linguistics; word2vec; RusVectors; gensim; Russian Wiktionary.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие синонима не имеет строгого определения, хотя на бытовом уровне оно прижи-

лось и достаточно часто используется. Приведем описательное определение синонима из известного словаря синонимов русского языка Александровой З. Е. [1, с. 6]:

Синонимами считаются слова, выражающие одно и то же понятие, тождественные или близкие по значению, отличающиеся друг от друга оттенками значений, принадлежностью к тому или иному стилистическому слою языка и экспрессивной окраской.

Это определение вызывает ряд вопросов: что такое понятие, значение и т. д.? В результате нет единого строгого определения синонимии. Имеются многочисленные научные работы, отражающие различные подходы в его понимании.

Таким образом, возникает необходимость введения некоторой формализации, которая позволила бы дать количественные характеристики для описания соотношений между словами, что особенно важно в задачах автоматической обработки языка (англ. *natural language processing*).

В настоящей работе предложен подход к математическому моделированию понятия синсета.

Понятие *синсет* (набор синонимов) обязано своим появлением системе WordNet, в котором различные отношения (синонимия, антонимия и др.) указываются не между словами, а между *синсетамми* (от англ. *synonym set*, группа синонимов) [15].

Для исследования были использованы синонимы Русского Викисловаря. Викисловарь — это свободно пополняемый многофункциональный многоязычный онлайн-словарь и тезаурус. Машиночитаемый Викисловарь, используемый в этой работе, регулярно обновляется и строится с помощью программы *wikokit*¹ на основе данных Викисловаря [7].

Авторы статьи ставят перед собой ряд задач, решение которых в большей или меньшей степени представлено в этой работе:

- автоматически упорядочивать синонимы внутри синсета по степени близости слов к тому смыслу, который представлен этим синсетом;
- предложить математический аппарат для анализа, характеристики и сравнения синсетов, проверить его экспериментально на данных онлайн-словаря (Русский Викисловарь);
- в перспективе с помощью предлагаемого математического аппарата найти «слабые» синсеты с целью повышения качества словаря;

- важное направление, занятие которым побудило авторов к этой работе, это разрешение лексической многозначности (*word-sense disambiguation* или WSD). Программа максимум заключается в том, чтобы использовать нейронные сети и предлагаемые методы для решения WSD-задачи на качественно новом уровне по сравнению с текущими методами [3].

ЭКСТРАПРЕСЕНСИОННЫЕ : ЭКСИМЕНТЕРНИИ СЕТЕ ИНСТРУМЕНТ M WORD2VEC

Идея векторного представления слов с помощью нейронных сетей получила мощный толчок благодаря работам Томаса Миколова [12–14]. Важное достоинство работы Т. Миколова в том, что он разработал инструмент *word2vec* для создания моделей нейронных сетей (далее будем их называть *предсказательными моделями*, см. *context-predicting models* в работе [4]) на основе текстов корпусов. Забегая вперед, можно сказать, что, с нашей точки зрения, не меньший вклад сделали и отечественные ученые Андрей Кутузов и Елизавета Кузьменко, которые подготовили с помощью *word2vec* предсказательные модели для русского языка на основе ряда корпусов. Свой инструмент они назвали *RusVectores* [9].

Односторонность подхода, предложенного Т. Миколовым в том, что поиск осмысленных пар семантических отношений работает только на некоторых ярких примерах, например (*queen – woman + man ≈ king*). У нас есть обоснованные подозрения, что не на всем пространстве текстов слова будут подчиняться таким удивительно простым правилам. Слабость математической стороны работ Т. Миколова была подмечена в недавней работе олдберга и Леви [5].

Работа И. олдберга и О. Леви, посвященная обсуждению результатов Т. Миколова, заканчивается обращением к исследователям:

"Can we make this intuition more precise? We d really like to see something more formal" [5].

Перевод: «Может ли интуитивный подход быть сделан более точным? Мы действительно хотели бы увидеть нечто более формальное.»

В какой-то мере настоящая статья является ответом на вызов этих известных исследователей в области компьютерной лингвистики.

Кратко осветим подход Т. Миколова.

¹<https://github.com/componavt/wikokit>

Определение 1. Векторным словарем назовем множество $D = \{w_i \in \mathbb{R}^D\}$, где i -ая компонента вектора w_i равна 1, а остальные компоненты – нули.

Рассмотрим некоторый словарь и пронумеруем все слова, входящие в него. Пусть D – количество слов в словаре, i – номер слова.

Задача векторного представления слов состоит в построении линейного отображения $L : D \rightarrow \mathbb{R}^N$, где $N \ll D$, а вектор $v = L(w)$, $w \in D$, v имеет компоненты $v_j \in \mathbb{R}$. Результат отображения называется распределенным (distributed) векторным представлением слов. Цель его состоит в замене очень «тощего» (разреженного) множества $D \subset \mathbb{R}^D$, в которое входят векторы с нулевым взаимным скалярным произведением, на некоторое подмножество из \mathbb{R}^N , векторы которого расположены таким образом, что их компоненты позволяют использовать скалярное произведение нормированных векторов в качестве меры их похожести (similarity), что принято в соответствующих задачах обработки языков. Полагая, что линейное отображение L реализуется с помощью матрицы W , получаем $v = Ww$, причем для нахождения матрицы W используют различные методы, в частности, основанные на нейронных сетях. Наибольшую популярность в самое последнее время приобрели CBOW (continuous bag of words) и Skip-gram методы, предложенные в работе [14] и являющиеся, по сути, модификацией метода максимального правдоподобия. При этом в методе Skip-gram матрица W максимизирует функцию $F(W)$ вида

$$F(W) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{-c \leq j \leq c, j \neq 0} \ln p(w_{t+j} | w_t)$$

$$p(w_{t+j} | w_t) = \frac{\exp(u_{t+j})}{\sum_{i=1}^D \exp(u_i)}, \quad u_i = (Ww_i, Ww_t)$$

где (\cdot, \cdot) – символ скалярного произведения, T – объем обучающего контекста. Здесь по слову w_t находится содержащий его контекст, составляющий «окно» размера $2c$ слов. В методе CBOW, наоборот, по контексту находят-

Определение 2. Внутренностью $IntS$ синсета S называется множество всех векторов $v \in S$, удовлетворяющих условию

$$IntS = \{v \in S : \exists S_1, S_2 \subset S, v \in S_1 \cap S_2, \text{ где } \sin(S_1, S_2) < \sin(S_1, S_2) \text{ для } v \in S_1 \cap S_2\} \quad (1)$$

для всех дизъюнктивных разбиений $S \setminus v = S_1 \cup S_2$, где $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

ся слово, входящее в него. Для максимизации $F(W)$ используется метод стохастического градиентного спуска.

В работах Т. Миколева при построении нейронных сетей учитывается только локальный контекст слов (упомянутое выше «окно»). Существуют попытки [6] учесть глобальный контекст (весь документ). Это полезно при разрешении лексической многозначности.

Е МЕТРИ СИНСЕТ

н тренность синсета $IntS$

Расстояние между векторами-словами (нормированными) измеряется их скалярным произведением, или углом между векторами, как в теории проективных пространств. Таким образом, увеличение скалярного произведения соответствует уменьшению расстояния между векторами-словами a, b , которое принято обозначать как $\sin(a, b)$, что является сокращением термина *similarity* – «похожесть» или «сходство» слов². Итак, $\sin(a, b) = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|}$ – это расстояние между векторами a и b .

Предлагаются и другие способы определения расстояния между словами-векторами, но в их основе также лежит скалярное произведение [10, 11, 18].

Введем обозначения для нормированных сумм векторов: $M((a_i), n) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n \|a_i\|}$. Расстояние между множествами векторов будем понимать как расстояния между средними векторов этих сумм. Таким образом, если даны два множества векторов $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, то расстояние между ними, $\sin(A, B)$, определяется следующим образом $\sin(A, B) = (M((a_i), n), M((b_j), m))$.

Рассмотрим синсет $S = \{v_k, k = 1, \dots, S\}$. Далим какое-либо слово v из синсета. Индекс слова опускаем для сокращения записи. Разобьем множество $S \setminus v$ на два непересекающихся подмножества: $S \setminus v = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $s = 1, \dots, q$, $p = 1, \dots, r$, $q + r = S - 1$, $i_s = j_p$. Обозначим $S_1 = \{v_{i_s}\}$, $S_2 = \{v_{j_p}\}$. Тогда введенное выше дизъюнктивное разбиение запишется в виде $S \setminus v = S_1 \cup S_2$.

²Будем использовать фигурные скобки $\sin\{a, b\}$, чтобы отличать запись от скалярного произведения (\cdot, \cdot) .

Смысл определения состоит в том, что добавление вектора $v \in \text{Int}S$ в любое из двух подмножеств множества $S \setminus v$, образующих его дизъюнктивное разбиение, уменьшает расстояние между этими подмножествами.

Чтобы проиллюстрировать $\text{Int}S$ и показать, какие слова в него входят, предположим, что вектора имеют размерность не 100 или 300, а всего два. На рисунке 1 представлена такая конфигурация синсета S , что вершина v не может не входить в $\text{Int}S$. То есть любые разбиения S будут «стягиваться», сближаться добавлением v к одному из разбиений (S_1 или S_2).



Рис. 1. Пример вершины v , сближающей любые непустые разбиения S , в частности — S_1 и S_2 (слева), а следовательно, $v \in \text{Int}S$. При добавлении вершины v к S_1 получаем множество $S_1 \cup v$, которое на рисунке (в центре) находится ближе к S_2 , чем множество S_1 . Подобным образом $S_2 \cup v$ ближе к S_1 , чем множество S_2 (справа).

Ранг и центральность слов в синсете

Введём понятие **ранга синонима** $v \in S$. Дизъюнктивное разбиение на два множества, элемента разбиения, будем называть разбиением. Пусть $P_v = \{p_i, i = 1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ — множество всех пронумерованных каким-либо образом разбиений $(n-1)$ -элементного множества $S \setminus v$, $n > 2$.

Рассмотрим какое-либо разбиение p_i множества $S \setminus v$ на подмножества S_1 и S_2 , то есть $S \setminus v = S_1 \cup S_2$. Обозначим $\text{sim}_i = \text{sim}(S_1, S_2)$, $\text{sim}_i^1 = \text{sim}(S_1 \cup v, S_2)$, $\text{sim}_i^2 = \text{sim}(S_1, S_2 \cup v)$. При этом получаем более компактное определение внутренности $\text{Int}S$ синсета S

$$\text{Int}S = \{v \in S : \text{sim}_i < \text{sim}_i^1 \wedge \text{sim}_i < \text{sim}_i^2\} \quad (2)$$

Введём функцию $r_v : P_v \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ следующего вида:

$$r_v(p_i) = \begin{cases} -1, & \text{sim}_i^1 < \text{sim}_i \wedge \text{sim}_i^2 < \text{sim}_i, \\ & v \text{ отдаляет } S_1 \text{ от } S_2 \\ 1, & \text{sim}_i^1 > \text{sim}_i \wedge \text{sim}_i^2 > \text{sim}_i, \\ & v \text{ сближает } S_1 \text{ и } S_2 \\ 0, & (\text{sim}_i^1 - \text{sim}_i) \cdot (\text{sim}_i^2 - \text{sim}_i) < 0. \\ & \text{сближение} - \text{отдаление} \end{cases} \quad (3)$$

Функция r_v определена для каждого разбиения и даёт своего рода «кирпичики», из которых будет складываться ранг синонима.

Поясним краткую запись «сближение–удаление». Выражение $(\text{sim}_i^1 - \text{sim}_i) \cdot (\text{sim}_i^2 - \text{sim}_i) < 0$ эквивалентно и является компактной записью для $(\text{sim}_i^1 < \text{sim}_i \wedge \text{sim}_i^2 > \text{sim}_i) \vee (\text{sim}_i^1 > \text{sim}_i \wedge \text{sim}_i^2 < \text{sim}_i)$.

Другими словами функция $r_v(p_i)$ даёт значение 0, если добавление слова v одному из элементов разбиения p_i уменьшает (увеличивает) расстояние sim_i , а добавление ко второму элементу, наоборот, увеличивает (уменьшает) расстояние sim_i . То есть элемент v действует на множества в «противофазе». На рисунке 2 это разбиения 2 и 3.

Определение 3. Рангом синонима $v \in S$, где $S > 2$, называется целое число вида

$$\text{rank}(v) = \sum_{i=1}^{P_v} r_v(p_i). \quad (4)$$

Легко видеть, что если $v \in \text{Int}S$, то $\text{rank}(v) = 2^{S-2} - 1$ — это число всех непустых дизъюнктивных разбиений $(S-1)$ -элементного множества $S \setminus v$, т. е. $\text{rank}(v)$ максимален и совпадает с числом Стирлинга второго рода: $\frac{n}{k} = \frac{S}{2}$, где n — мощность разбиваемого множества, а k — число подмножеств, здесь два [2, с. 24].

Взаимосвязь $\text{Int}S$ и ранга синонима в синсете S сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1 (IntS theorem). Слово v принадлежит внутренности синсета S тогда и только тогда, когда это слово обладает максимально возможным рангом в данном синсете, этот ранг совпадает с числом Стирлинга второго рода.

$v \in \text{Int}S \iff \text{rank}(v) = 2^{S-2} - 1$, где $S \geq 3$,

при этом внутренность синсета $IntS$ определена для синсетов, содержащих три и более слов, поскольку для вычисления $IntS$ множество S нужно разбить на три части: $S \setminus v = S_1 \cup S_2$.

оказательство.

$$v \in IntS \stackrel{(2)}{\iff} p_i : IntS = S \setminus v : sim_i^1 > sim_i \text{ и } sim_i^2 > sim_i \quad (v \text{ сближает } S_1 \text{ и } S_2) \quad (3)$$

$$p_i : r_v(p_i) = 1 \quad (4)$$

$$rank(v) = \sum_{i=1}^{P_v} 1 = P_v = 2^{S-2} - 1, \quad (5)$$

поскольку $2^{S-2} - 1$ — это максимально возможное число непустых дизъюнктивных разбиений, совпадающее с числом Стирлинга второго рода [2, с. 24]. \square

Обратим внимание, что слова в $IntS$ имеют больший ранг и значение центральности относительно других слов синсета S .

Определение 4. Центральностью синонима $v \in S$ при разбиении p_i множества $S \setminus v$ называется величина

$$centrality(v, p_i) = (sim_i^1(v) - sim_i) + (sim_i^2(v) - sim_i) \quad (6)$$

Определение 5. Центральностью синонима $v \in S$ называется величина

$$centrality(v) = \sum_{i=1}^{P_v} centrality(v, p_i)$$

По-видимому, ранг и центральность указывают на значимость слова внутри синсета, то есть близость слова к тому значению, которое выражает синсет совокупностью слов.

Центральность дает более точную характеристику значимости слова v в синсете, чем ранг (см. таблицу 1). Это естественно следует из того, что ранг является целым (\mathbb{Z}), а степень центральности — вещественным числом (\mathbb{R}), при этом вычисляются они по одному и тому же алгоритму (см. далее).

Алгоритм вычисления ранга и центральности

Из определения центральности (см. выше) следует процедура её вычисления (алгоритмы 1 и 2)

Algorithm 1: Вычисление ранга и центральности вершины v для разбиения p_i синсета S

Data: разбиение p_i множества $S \setminus v$ на подмножества S_1 и S_2 , то есть $S \setminus v = S_1 \cup S_2$.

Result: $rank(v, p_i)$, $centrality(v, p_i)$.

1. $sim_i = sim(S_1, S_2)$,
 2. $sim_i^1(v) = sim(S_1 \cup v, S_2)$ // слово v добавляется к первому подмножеству S_1
 3. $sim_i^2(v) = sim(S_1, S_2 \cup v)$ // слово v добавляется ко второму подмножеству S_2
 4. $centrality(v, p_i) = (sim_i^1(v) - sim_i) + (sim_i^2(v) - sim_i)$
 5. $rank(v, p_i) = \text{sgn}(sim_i^1(v) - sim_i) + \text{sgn}(sim_i^2(v) - sim_i)$,
- где $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Algorithm 2: Вычисление ранга и центральности вершины v синсета S

Data: синсет S , вершина v .

Result: $rank(v)$, $centrality(v)$.

1. $centrality(v) = \sum_{i=1}^{P_v} centrality(v, p_i)$,
 2. $rank(v) = \sum_{i=1}^{P_v} rank(v, p_i)$.
-

ипоте а. Чем более многозначным является слово, тем меньше ранг (\mathbb{Z}) и степень центральности (\mathbb{R}) этого слова в разных синсетах.

пример. Дан синсет $S = (\text{ба кать, уба - кивать, укачивать, усыплять})$. Нужно найти $IntS$, вычислить ранг и центральность для каждого слова в синсете.

Пример вычисления ранга и степени центральности для слова «усыплять» в этом синсете показан на рисунке 2. Множество мощности 3 = $S \setminus v$ можно разбить тремя способами на два непустых подмножества. Каждое такое разбиение добавляет в $rank(v)$ 1, 0 или -1 (рис. 2). Значение ранга получилось равным -1, степень центральности равна -0,071.

В таблице 1 указаны значения ранга, степени центральности и принадлежность $IntS$ для всех слов синсета.

В соответствии с изложенной выше Теоремой 1 ранг синонимов, принадлежащих внутренности синсета $IntS$, должен быть равен

$$2^{S-2} - 1 = 2^{4-2} - 1 = 3$$

В таблице 1 видно, что ранг 3 и наибольшие значения центральности у слов «баюкать», «убаюкивать». Итак, Int (баюкать, убаюкивать, укачивать, усыплять) = (баюкать, убаюкивать), то есть в $IntS$ вошли векторы, соответствующие словам «убаюкивать» и «баюкать». Это указывает на то, что эта пара наиболее близка по смыслу ко всем четырем словам синсета.

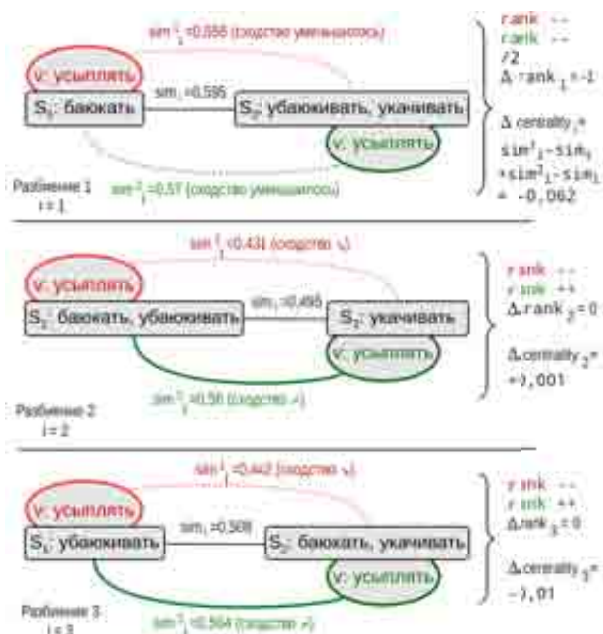


Рис. 2. Значение ранга и степени центральности для слова «усыплять» в синсете (баюкать, убаюкивать, укачивать, усыплять). Представлены три возможных разбиения множества (баюкать, убаюкивать, укачивать) на два непустых подмножества $S_1^i, S_2^i, i = 1, 2, 3$ без слова "усыплять" (вектор v). Значения $rank v$ и $centrality v$ вычисляются как сумма соответствующих $\Delta rank_i$ и $\Delta centrality_i$.

Таблица 1. Ранг (rank) и степень центральности (centrality) для каждого слова в синсете, принадлежность синонима внутренности синсета ($IntS$)

synonym	усыплять	укачивать	убаюкивать	баюкать
centrality	-0.07	0.31	0.68	0.71
rank	-1	1	3	3
IntS	—	—	+	+

ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В этой работе используются нейронные модели, созданные авторами проекта *RusVectors* [9]. Первая модель построена по текстам Национального корпуса русского языка (НКРЯ или Ruscorpora), вторая модель — на основе текстов отечественных новостных сайтов (Новостной корпус или News corpus). Модели доступны на сайте проекта [16].

Авторы *RusVectors* А. Кутузов и Е. Кузьменко обращают внимание читателя на такие особенности НКРЯ, как ручной отбор текстов для пополнения корпуса и регулирование соотношения объема текстов разных жанров, малый размер основного корпуса, порядка 107 млн слов (для сравнения Новостной корпус включает 2.4 млрд слов). В работе [8] вводится понятие *представительность корпуса* как способность отражать (указывать на) те ассоциации для слова, с которыми согласится большинство носителей. Ассоциации, порождаемые предсказательными моделями по данным НКРЯ и по данным веб-корпуса, как раз и используются для сравнения двух корпусов в этой работе. Задача сравнения свелась к поиску слов, значения которых в веб-корпусе существенно (или полностью) отличались бы от значений в НКРЯ. Если учесть, что для каждого слова в корпусе с помощью предсказательной модели можно получить список N ближайших слов (напомним, что слову соответствует вектор), то формулировка результата сравнения корпусов будет такой: более чем у половины слов (общих слов двух корпусов) совпадало три и более слов из 10 ближайших [8]. Это говорит о том, что в картине мира интеллектов, нейронных моделей, созданных на основе НКРЯ и на основе текстов Интернета, есть много общего. Однако необходима и обратная оценка — какова *степень различия* предсказательных моделей?

Отметим, что понятие *сбалансированность корпуса* приобретает новое значение в свете предсказательных моделей, создаваемых на основе корпуса. Несбалансированная выборка текстов приводит к перевесу в тематике корпусов, в итоге — к менее точной предсказательной модели.

Таблица 2. Примеры синсетов, ряд которых имеют пустую внутренность ($IntS = \emptyset$). Синсеты взяты из словарных статей Русского Викисловаря, слова в синсете упорядочены по рангу и центральности. Казан корпус, по которому в проекте *RusVectores* построена предсказательная модель, использованная для вычислений $IntS$, здесь $OutS = S - IntS$

словарная статья	синсет (из статьи), по умолчанию целиком входит в $OutS$	S	$IntS$	корпус
существительные				
план	умысел, намерение, прожект, задумка, план, проект, замысел	7	0	НКРЯ
хвороба	нездоровье, хворость, хвороба, хворь, болезнь	5	0	НКРЯ
наречия				
прекрасно	чудесно, замечательно, отлично, превосходно, прекрасно	5	0	НКРЯ
прекрасно	$IntS$ (превосходно, замечательно), $OutS$ (чудесно, прекрасно, отлично)	5	2	News
прилагательные				
добрый	душевный, добросердечный, отзывчивый, сердечный, добрый	5	0	НКРЯ, News
каменный	каменный, бесчувственный, суровый, жестокий, безжалостный	5	0	НКРЯ
каменный	$IntS$ (безжалостный), $OutS$ (каменный, бесчувственный, суровый, жестокий)	5	1	News
глаголы				
обличать	обличать, изобличать, обвинять, разоблачать, уличать	5	0	НКРЯ, News
казаться	сдаваться, представляться, думаться, казаться	4	0	НКРЯ, News
изготавливать	делать, создавать, производить, сооружать, мастерить, изготавливать, изготовлять	7	0	НКРЯ, News

Для последующих экспериментов важно следующее наблюдение работы [8]. Чем более слово является редким, чем меньше данных, контекстов с этим словом, тем более сомнительными, неточными будут ассоциативные слова, порождаемые предсказательной моделью.

Нами проведены эксперименты для апробации предложенной модели синсета. Были использованы две матрицы W (предсказательные модели), построенные авторами *RusVectores* по корпусу НКРЯ и по Новостному корпусу.

Для работы с предсказательными моделями была выбрана программа *gensim*³, поскольку она (помимо множества других алгоритмов) содержит реализацию *word2vec* на языке Python (программа *gensim* описана в работе [17]). Эта же программа *gensim* использовалась при создании предсказательных моделей авторами *RusVectores* [16].

Авторами этой статьи разработан ряд скриптов на основе *gensim* для работы с предсказательными моделями, вычисления $IntS$, ранга, центральности. Скрипты доступны онлайн⁴. Для нескольких тысяч синсетов, извлеченных из Русского Викисловаря, вычислен ранг и определена внутренность синсета $IntS$. Эксперименты показали, что для редких в корпусе слов $IntS$ может оказаться пустым.

Обсудим данные таблицы 2. Очевидно, что одному и тому же слову в разных предсказательных моделях, построенных по разным корпусам, будут соответствовать разные вектора. И сами словари этих моделей будут отличаться, см. [8]. Именно по этой причине трудно видеть, что результаты в таблице 2, полученные по разным корпусам, в значительной степени совпадают. Это говорит о некоторой универсальности предлагаемой математической модели.

³<http://radimrehurek.com/gensim/>

⁴https://github.com/componavt/piwidict/tree/master/lib_ext/gensim_wsd

16. *RusVectōrēs*: distributional semantic models for Russian. URL: <http://ling.go.mail.ru/dsm/ru/> (дата обращения: 9.05.2016)

17. *Rehurek R., Sojka P.* Software framework for topic modelling with large corpora // Proceedings of the LREC 2010 Workshop on New Challenges for NLP Frameworks, Valletta, Malta: University of Malta, 2010. P. 45 50. URL: <http://is.muni.cz/publication/884893/en> (дата обращения: 9.05.2016).

18. *Sidorov G., Gelbukh A., Gomez-Adorno H., Pinto D.* Soft similarity and soft cosine measure: Similarity of features in vector space model // *Computacion y Sistemas*. 2014. Vol. 18, no. 3. P. 491 504. URL: <http://www.scielo.org.mx/pdf/cys/v18n3/v18n3a7.pdf> (дата обращения: 9.05.2016).

Поступила в редакцию 26.05.2016

REFERENCES

1. *Alexandrova Z. E.* Slovar sinonimov russkogo jazyka [Dictionary of Russian Synonyms]. Moscow: Russkij jazyk, 2001. 586 p.

2. *Baranov V. I., Stechkin B. S.* Jekstremal nye kombinatornye zadachi i ih prilozhenija [Extremal combinatorial problems and their applications]. Moscow: Fizmatlit, 2004. 238 p.

3. *Kaushinis T. V., Kirillov A. N., Korzhitsky N. I., Krizhanovsky A. A., Pilinovich A. V., Sikhonina I. A., Spirkova A. M., Starkova V. G., Stepkina T. V., Tkach S. S., Chirkova Ju. V., Chuharev A. L., Shorets D. S., Yankevich D. Yu., Yaryshkina E. A.* Obzor metodov i algoritmov razresheniya leksicheskoi mnogoznachnosti: Vvedenie [A review of word-sense disambiguation methods and algorithms: Introduction]. *Trudy KarNTs RAN [Transactions of KarRC of RAS]*. 2015. No. 10. P. 69 98. doi: 10.17076/mat135

4. *Baranov V. I., Stechkin B. S.* Jekstremal nye kombinatornye zadachi i ih prilozhenija [Extreme combinatorial problems and their applications]. Moscow: Fizmatlit, 2004. 238 p.

5. *Goldberg Y., Levy O.* word2vec explained: Deriving Mikolov et al.'s negative-sampling word-embedding method. arXiv preprint arXiv:1402.3722, 2014. P. 1 5.

6. *Huang E. H., Socher R., Manning C. D., Ng A. Y.* Improving word representations via global context and multiple word prototypes. In *Proceedings of the ACL 12*, Jeju Island, Korea, 2012. P. 873 882. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2390524.2390645> (accessed: 9.05.2016).

7. *Krizhanovsky A. A., Smirnov A. V.* An approach to automated construction of a general-purpose lexical ontology based on Wiktionary. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2013. No. 2. P. 215 225. doi: 10.1134/S1064230713020068

8. *Kutuzov A., Kuzmenko E.* Comparing neural lexical models of a classic national corpus and a web corpus: the case for Russian. *Computational Linguistics and Intelligent Text Processing*. 2015. P. 47 58. doi: 10.1007/978-3-319-18111-0_4. URL: https://www.academia.edu/11754162/Comparing_neural_lexical_models_of_a_classic_national_corpus_and_a_web_corpus_the_case_for_Russian (accessed: 9.05.2016).

9. *Kutuzov A., Andreev I.* Texts in, meaning out: neural language models in semantic similarity task for Russian. arXiv preprint arXiv:1504.08183, 2015. URL: <http://www.dialog-21.ru/digests/dialog2015/materials/pdf/KutuzovAndreevI.pdf> (accessed: 9.05.2016)

10. *Levy O., Goldberg Y., Dagan I.* Improving distributional similarity with lessons learned from word embeddings. *Transactions of the Association for Computational Linguistics*. 2015. Vol. 3. P. 211 225.

11. *Mahadevan S., Chandar S.* Reasoning about linguistic regularities in word embeddings using matrix manifolds. arXiv preprint arXiv:1507.07636. 2015. P. 1 9.

12. *Mikolov T., Kombrink S., Burget L., Cernocky J., Khudanpur S.* Extensions of recurrent neural network language model. In *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 2011. doi: 10.1109/icassp.2011.5947611. URL: <http://dx.doi.org/10.1109/icassp.2011.5947611> (accessed: 9.05.2016).

13. *Mikolov T., Zweig G.* Context dependent recurrent neural network language model. In *Proceedings of the 2012 IEEE Spoken Language Technology Workshop (SLT)*. 2012. doi: 10.1109/slt.2012.6424228. URL: <http://dx.doi.org/10.1109/slt.2012.6424228> (accessed: 9.05.2016).

14. *Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J.* Efficient estimation of word representations in vector space. arXiv preprint arXiv:1301.3781, 2013. URL: <http://arxiv.org/abs/1301.3781> (accessed: 9.05.2016).

15. *Princeton University.* What is WordNet? URL: <http://wordnet.princeton.edu> (accessed: 9.05.2016).

16. *Rehurek R., Sojka P.* Software framework for topic modelling with large corpora. In *Proceedings of the LREC 2010 Workshop on New Challenges for NLP Frameworks*, Valletta, Malta: University

of Malta, 2010. P. 45–50. URL: <http://is.muni.cz/publication/884893/en> (accessed: 9.05.2016).

17. *RusVectōrēs*: distributional semantic models for Russian. URL: <http://ling.go.mail.ru/dsm/en/> (accessed: 9.05.2016)

18. *Sidorov G., Gelbukh A., Gomez-Adorno H., Pinto D.* Soft similarity and soft cosine

measure: Similarity of features in vector space model. *Computacion y Sistemas*, 2014. Vol. 18, no. 3. P. 491–504. URL: <http://www.scielo.org.mx/pdf/cys/v18n3/v18n3a7.pdf> (accessed: 9.05.2016).

Received May 26, 2015

:

Кириллов Александр Николаевич

ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Крижановский Андрей Анатольевич

рук. лаб. информационных компьютерных
технологий, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: andew.krizhanovsky@gmail.com
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Krizhanovsky, Andrew

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: andew.krizhanovsky@gmail.com
tel.: (8142) 766312

УДК 51-76

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД

А. Н. Кириллов¹, Н. В. Смирнов²

¹ *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

² *Петрозаводский государственный университет*

Предложено дальнейшее развитие математической модели управления процессом биологической очистки сточных вод в аэротенке-смесителе. Найдено инвариантное множество системы дифференциальных уравнений, представляющей модель. Разработан алгоритм нахождения оптимального управления процессом биоочистки в задаче минимизации расхода кислорода. Приведены результаты апробации разработанного алгоритма.

Ключевые слова: аэротенк; биоочистка; окисление; оптимальное управление.

A. N. Kirillov, N. V. Smirnov. MATHEMATICAL MODEL OF WASTEWATER TREATMENT PROCESS OPTIMIZATION

Further development of the mathematical model for controlling wastewater biological treatment process in a mixing aeration tank is proposed. The invariant set of the system of differential equations representing the model was found. The algorithm of finding optimal process control in the problem of minimizing oxygen consumption was developed. The results of testing the developed algorithm are reported.

Key words: aeration tank; bioremediation; oxidation; optimal control.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс биоочистки в аэротенке — биохимический процесс для очистки бытовых и промышленных сточных вод, в котором используются воздух (или кислород) и микроорганизмы активного ила для окисления содержащегося в сточной воде субстрата.

Ограниченность запасов питьевой воды и увеличение требований к качеству очищения сточных вод обуславливают необходимость исследований в области математического моделирования процесса биологической очистки сточных вод. Этому направлению посвящено достаточно большое количество публикаций (например, [1–6]).

В статье продолжено исследование в области математического моделирования процесса биоочистки воды в аэротенке-смесителе, представленное в работах [7, 8], в частности, найдено инвариантное множество разработанной математической модели процесса биоочистки, обоснован результат об однократности переключения оптимального управления при минимизации расхода кислорода, разработан и апробирован алгоритм нахождения оптимального управления процессом биоочистки. Также в статье представлены формулы для получения начальных значений модельных концентраций, которые необходимы для практического использования предложенной модели.

ИНВАРИАНТНОЕ МНОЖЕСТВО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БИОЧИСТКИ

Рассмотрим процесс биологической очистки сточных вод от субстрата одного типа в аэротенке-смесителе объемом V . Введем обозначения: X и S – концентрации активного ила и субстрата в аэротенке, S_{cv} и S_{il} – концентрации субстрата в сточной воде и в иловой смеси, X_{il} – концентрация активного ила во входящей иловой смеси, V_{il} и V_{cv} – расходы иловой смеси и сточных вод, \tilde{V}_{il} и \tilde{V}_{cv} – объемы иловой смеси и сточных вод, входящих в аэротенк за единицу времени (количественно равны V_{il} и V_{cv} соответственно), γ – удельная максимальная скорость роста микроорганизмов в расчете на единицу массы кислорода и на единицу массы субстрата, $Y \in (0, 1)$ – коэффициент перехода массы субстрата в биомассу микроорганизмов, $u = u(t)$ – удельная скорость подачи кислорода в аэротенк.

В аэротенке-смесителе происходит мгновенное перемешивание, поэтому начальные значения концентраций субстрата и активного ила находятся по формулам (1) и (2) соответственно:

$$\tilde{S}^{in} = \frac{S_{cv}\tilde{V}_{cv} + SV}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V}, \quad (1)$$

$$\tilde{X}^{in} = \frac{X_{il}\tilde{V}_{il} + XV}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V}. \quad (2)$$

Среднее время пребывания иловой смеси в аэротенке:

$$T = \frac{V}{V_{il} + V_{cv}}.$$

Преобразовав математическую модель процесса биоочистки, предложенную в работе [7], получим систему:

$$\dot{S} = Q(S^{in} - lS) - \frac{\gamma}{Y}SuX, \quad (3)$$

$$\dot{X} = Q(X^{in} - lX) + \gamma SuX, \quad (4)$$

где константа $Q = 1/T$, T – время биоочистки.

$$S^{in} = \frac{S_{cv}\tilde{V}_{cv}}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V},$$

$$X^{in} = \frac{X_{il}\tilde{V}_{il}}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V},$$

$$l = 1 - \frac{V}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V}.$$

Для очистки сточных вод за ограниченное время T на канализационных очистных сооружениях (КОС) поддерживают отношение концентраций $X^{in} > S^{in}$, тогда в начальный момент времени $X(0) > S(0)$ и фазовая точка

принадлежит открытому треугольнику OAH (рис. 1).

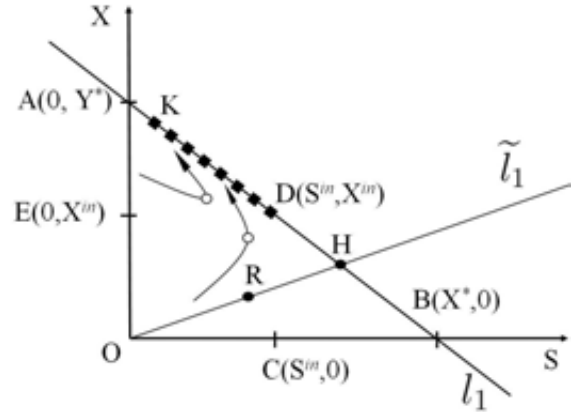


Рис. 1. Фазовый портрет системы (3), (4), где ■ – положение равновесия, ○ – точка переключения управления, $l_1 = \{(S, X) : YS + X = (YS^{in} + X^{in})/l\}$, $\tilde{l}_1 = \{(X, S) : X = S\}$, $X^* = (YS^{in} + X^{in})/l$, $Y^* = (S^{in} + X^{in}/Y)/l$

Теорема 1. Открытый треугольник OAH является инвариантным множеством системы (3), (4) при $\forall u \geq 0$.

Доказательство. Если предположить, что фазовая траектория системы (3), (4) пересекает прямую $\tilde{l}_1 = \{(X, S) : X = S\}$ в точке R , то тангенс угла наклона вектора скорости фазовой траектории в точке R меньше тангенса угла наклона прямой \tilde{l}_1 , тогда

$$\frac{\dot{X}}{\dot{S}} < 1. \quad (5)$$

При проведении процесса биоочистки необходимо поддержание $X^{in} > S$, в результате $\dot{X} = Q(X^{in} - lS) + \gamma uS^2 > 0$ в точке R . Заметим, что, исходя из специфики процесса биоочистки, неравенство (5) может быть верно в двух случаях: либо $\dot{X} > 0$, $\dot{S} < 0$ (тогда фазовая траектория не покидает треугольник OAH через прямую \tilde{l}), либо $\dot{X} > 0$, $\dot{S} > 0$. Во втором случае (5) примет вид:

$$\dot{X} < \dot{S}. \quad (6)$$

Координаты X и S в точке R равны, поэтому неравенство (6) примет вид

$$Q(X^{in} - lS) + \gamma uS^2 < Q(S^{in} - lS) - \frac{\gamma uS^2}{Y},$$

тогда

$$Q(X^{in} - S^{in}) < -\gamma uS^2(1 + 1/Y),$$

где $Q(X^{in} - S^{in}) > 0$, $-\gamma u S^2(1 + 1/Y) < 0$. Получилось противоречие, следовательно, если начальная точка фазовой траектории системы (3), (4) находится в открытом треугольнике OAH , то она не пересекает прямую $\tilde{l}_1 = \{(X, S) : X = S\}$, то есть $X(t) > S(t)$ для $\forall t \in [0, T]$.

Концентрации субстрата и активного ила в аэротенке в начале процесса биоочистки $S(0) = S_0$ и $X(0) = X_0$ соответственно находятся по формулам (3) и (4) или экспериментально. Если $u = 0$, то система (3), (4) приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{S} &= Q(S^{in} - lS), \\ \dot{X} &= Q(X^{in} - lX),\end{aligned}$$

при этом фазовые траектории сходятся к положению равновесия – точке D на рисунке 1.

Умножим на Y уравнение (3) и прибавим его к (4), в результате получим уравнение, решение которого представимо в виде:

$$\begin{aligned}YS + X &= \\ = (YS_0 + X_0 - \frac{YS^{in} - X^{in}}{l})e^{-Qlt} + \frac{YS^{in} + X^{in}}{l}.\end{aligned}$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$ фазовые траектории будут сходиться к прямой

$$l_1 = \{(S, X) : YS + X = (YS^{in} + X^{in})/l\}.$$

Заметим, что вследствие неотрицательности значений концентраций фазовые траектории не пересекают прямую $S = 0$. Тогда фазовые траектории находятся в треугольнике OAH (рис. 1) для $\forall t \in [0, T]$. \square

Уточним поведение фазовых траекторий в нижеследующей теореме.

Теорема 2. При $t \rightarrow \infty$ отрезок KD (рис. 1) является интегральным притягивающим множеством системы (3), (4).

Доказательство. Приравняем к нулю правые части уравнений (3), (4) и сложим их, предварительно умножив (3) на Y . После введения новой переменной $z = z(t) = X + YS$ результат сложения представим в виде:

$$Q(z^{in} - zl) = 0, \quad (7)$$

где $z^{in} = X^{in} + YS^{in}$. Корнем (7) является $z = z^{in}/l$. Выразим $S = (z^{in} - lX)/Yl$ и подставим в приравненную к нулю правую часть уравнения (4), в таком случае получим уравнение

$$Q(X^{in} - lX) + \frac{\gamma u X}{Yl}(z^{in} - lX) = 0.$$

Умножим последнее уравнение на $-Yl/\gamma$ и перегруппируем, в результате получим уравнение

$$ulX^2 + X \left(\frac{l^2 YQ}{\gamma} - uz^{in} \right) - \frac{lYQX^{in}}{\gamma} = 0,$$

у которого только один корень имеет неотрицательное значение:

$$X_1 = \frac{z^{in}}{2l} - \frac{YQl}{2\gamma u} + \sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}.$$

Рассмотрим производную X_1 по u :

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{YQl}{2\gamma u^2} + \frac{\left(\frac{z^{in}}{l} - \frac{YQl}{\gamma u} \right) \frac{YQl}{2\gamma u^2} - \frac{YQX^{in}}{\gamma u^2}}{2\sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}}.$$

Умножим последнее на $\alpha_s = 2\gamma u^2/(YQl) > 0$, получим:

$$\alpha_s \frac{\partial X_1}{\partial u} = 1 + \frac{\frac{z^{in}}{l} - \frac{YQl}{\gamma u} - \frac{2X^{in}}{l}}{2\sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= \frac{z^{in}}{l} - \frac{YQ}{\gamma u} - \frac{2X^{in}}{l}, \\ \varsigma_2 &= 2\sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}.\end{aligned}$$

Значения выражения

$$\varsigma_1^2 - \varsigma_2^2 = -\frac{4YZ^{in}X^{in}}{l^2} < 0,$$

в таком случае $\varsigma_1/\varsigma_2 \in (-1, 1)$ и $\frac{\partial X}{\partial u} > 0$ для $\forall u$. Последнее означает, что значение X увеличивается при увеличении u . Нетрудно доказать, что управлению $u = 0$ соответствует точка покоя D . Тогда положения равновесия, соответствующие $u > 0$, будут находиться на прямой l_1 , левее точки D , правее оси ординат. При этом крайне левая точка K (закрашенный квадрат на рисунке 1) соответствует положению равновесия при наибольшем допустимом управлении \bar{u} . Отрезок KD является интегральным притягивающим множеством системы (3), (4). \square

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ БИООЧИСТКИ

Рассмотрим кусочно-постоянное управление $u = u(t) \in U = [\underline{u}, \bar{u}]$ удельной скоростью подачи кислорода в аэротенк, где \underline{u} и \bar{u} — соответственно наименьшее и наибольшее ее допустимые значения. Поставим задачу нахождения управления оптимального в смысле минимизации расхода кислорода при обеспечении окисления субстрата до концентрации, наиболее близкой к значению нормативно допустимого сброса (НДС) за время T :

$$\int_0^T u dt \rightarrow \min \quad (8)$$

с ограничениями:

$$S(0) = S_0, X(0) = X_0, S(T) \leq \bar{S}, X(T) \leq \bar{X}, \quad (9)$$

где S_0 и X_0 — начальные значения соответствующих переменных, \bar{S} — НДС субстрата, $\bar{X} \in [0, YS^{in} + X^{in}]$ — концентрация активного ила на выходе из аэротенка.

Пусть $'$ — символ транспонирования, символ $\hat{}$ означает оптимальность значения переменной или выражения под ним. Введем вектор переменных $z = z(t) = (z_1(t) \ z_2(t))' = (S \ X)'$; $\varphi(z, u) = (\varphi_1(z, u) \ \varphi_2(z, u))'$, где $\varphi_1(z, u)$ и $\varphi_2(z, u)$ — правые части уравнений (3) и (4) соответственно; $\psi_1 = S(0) - S_0$, $\psi_2 = X(0) - X_0$, $\psi_3 = S(T) - \bar{S}$, $\psi_4 = X(T) - \bar{X}$ — ограничения; λ_i ($i = 0, \dots, 4$) и $p(t) = (p_1(t) \ p_2(t))'$ — множители Лагранжа.

В работе [9] сформулированы необходимые условия экстремума (10)–(16). Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи примет вид

$$\tilde{L} = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 + \lambda_4 \psi_4 + \int_0^T \left(\lambda_0 u + p_1(t)(\dot{S} - \varphi_1) + p_2(t)(\dot{X} - \varphi_2) \right) dt.$$

Уравнение Эйлера (условие стационарности по z) для лагранжиана $L = \lambda_0 u + p_1(t)(\dot{S} - \varphi_1) + p_2(t)(\dot{X} - \varphi_2)$:

$$\dot{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t)(lQ + \frac{\gamma}{Y}\hat{X}\hat{u}) - p_2(t)\gamma\hat{S}\hat{u} \\ p_1(t)\frac{\gamma}{Y}\hat{S}\hat{u} + p_2(t)(lQ - \gamma\hat{S}\hat{u}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Условия трансверсальности по z для терминанта: $l = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \psi_i$:

$$\begin{aligned} p(0) &= \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \\ p(T) &= \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_3 \\ -\lambda_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Условие оптимальности по u — принцип минимума в лагранжевой форме:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \left(u \left(\lambda_0 + p_1(t) \frac{\gamma}{Y} \hat{S} \hat{X} - p_2(t) \gamma \hat{S} \hat{X} \right) \right) = \\ = \hat{u} \left(\lambda_0 + \gamma \hat{S} \hat{X} \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right) \right). \end{aligned}$$

Введем функцию

$$g(t) = \lambda_0 + \gamma \hat{S} \hat{X} \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right). \quad (12)$$

В силу условия оптимальности экстремальное управление всюду, кроме точек разрыва (в которых $g(t) = 0$), определяется следующим образом:

$$\hat{u} = \begin{cases} \underline{u}, & g(t) > 0, \\ \bar{u}, & g(t) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Так как в точке разрыва на значение u не накладывается ограничений, то будем считать, что $u = \underline{u}$ при $g(t) = 0$.

Условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_3(\hat{S}(T) - S^*) = 0, \quad (14)$$

$$\lambda_4(\hat{X}(T) - X^*) = 0, \quad (15)$$

Условие неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, 4. \quad (16)$$

Теорема 3. При выполнении условий (10)–(11), (13)–(16) в системе (3), (4) количество переключений управления не более одного.

Доказательство. Перепишем (10) в виде

$$\dot{p}_1(t) = \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right) \gamma \hat{X} \hat{u} + p_1(t) l Q,$$

$$\dot{p}_2(t) = \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right) \gamma \hat{S} \hat{u} + p_2(t) l Q.$$

Рассмотрим функцию

$$r(t) = \frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t)$$

и ее производную

$$\dot{r}(t) = r(t) \left(\frac{\gamma \hat{X} \hat{u}}{Y} - \gamma \hat{S} \hat{u} + l Q \right). \quad (17)$$

Пусть

$$\zeta(t) = \frac{\gamma \widehat{X}u}{Y} - \gamma \widehat{S}\widehat{u} + lQ.$$

Специфика процесса биоочистки такова, что $\widehat{X} > \widehat{S}$, поэтому $\zeta(t) > 0$ для $\forall t \in [0, T]$. Решение уравнения (17):

$$r(t) = r(0)e^{\int_0^t \zeta(t)dt}. \quad (18)$$

Значения $p_1(0), p_2(0) \geq 0$ в силу условий (11), (16). При $p_1(0) = p_2(0) = 0$ функция $g(t) > 0$ для $\forall t \in [0, T]$ (см. (12)), и переключений управления не будет, иначе возможны три варианта взаимного расположения значений $p_1(0)$ и $p_2(0)$ на числовой прямой.

1) Если

$$p_1(0) > Yp_2(0),$$

тогда из (18) следует, что поскольку $r(0) > 0$, то $r(t) > 0$ для $\forall t \in [0, T]$, и при этом с течением времени значение функции $r(t)$ будет увеличиваться. Тогда в силу (13) переключения управления не будет.

2) Если

$$p_1(0) < Yp_2(0),$$

то $r(0) < 0$, и в силу (18) $r(t)$ является убывающей функцией, а значит, $r(t) < 0$ для $\forall t \in [0, T]$. Значение λ_0 определяет три различных варианта переключения управления.

2.1) Если значение $g(t) \geq 0$ для $\forall t \in [0, T]$, то в силу (13) переключения управления не будет.

2.2) Если $g(0) \geq 0$ и существует такое $t^* \in (0, T]$, что $g(t^*) < 0$, то в силу (13) произойдет переключение управления. Найдем производную $g(t)$ в силу системы (3), (4):

$$\dot{g}(t) = \gamma r(t) \left(Q(S^{in} - \widehat{S}l)\widehat{X} + \widehat{S}QX^{in} \right). \quad (19)$$

По условию $\gamma r(t) < 0$. Так как $S^{in} > \widehat{S}l$ для $\forall t \in [0, T]$, то $Q(S^{in} - \widehat{S}l)\widehat{X} + \widehat{S}QX^{in} > 0$. В результате $\dot{g}(t) < 0$, а следовательно, функция $g(t)$ является убывающей. Таким образом, $g(t) < 0$ для $\forall t \in [\tilde{t}, T]$, где $g(\tilde{t}) = 0$. Последнее подтверждает, что управление переключается один раз на промежутке $[0, T]$

2.3) Если значение $g(0) < 0$, то вследствие убывания $g(t)$ получаем, что $g(t) < 0$ $\forall t \in [0, T]$ и в силу (13) переключения управления не будет.

3) Если

$$p_1(0) = Yp_2(0),$$

то $r(0) = 0$, в силу (18) получаем, что $r(t) = 0$ для $\forall t \in [0, T]$. В таком случае $g(t) = \lambda_0 \geq 0$, и в силу (13) переключения управления не будет. \square

Теорема 4. Управление u , для которого выполнены условия (10)–(11), (13)–(16), является оптимальным в смысле минимизации функционала (8) при соблюдении ограничений (9).

Доказательство. Для выполнения условия (16) необходимо выполнение неравенства $\lambda_i \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, 4$), при этом для сохранения в лагранжиане L управления u необходимо выполнение условия $\lambda_0 \neq 0$. Функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ задаются уравнением (10) с граничными условиями (11).

В качестве λ_1 возьмем любое положительное число, например, $\lambda_1 = 1$. Методом дихотомии значение λ_2 находится так, чтобы с допустимой погрешностью выполнялось условие $\psi_3 = 0$, что обеспечивает выполнение условия (14) при $\forall \lambda_3$. Для нахождения значения λ_2 численно решается система (3), (4), при этом момент переключения управления τ находится с помощью (13). Будем использовать значение $\bar{X} = X(T)$, что обеспечит выполнение (15) при $\forall \lambda_4$. Таким образом, необходимые условия оптимальности управления, приведенные в работе [9], выполнены.

Из теоремы 3 следует, что количество моментов переключения управления не более одного, при этом управление до момента переключения принимает значение \underline{u} , после момента переключения — \bar{u} . Различным управлениям соответствуют различные значения функционала (8) (рис. 2), тогда, если оптимальное управление существует, то оно единственно.

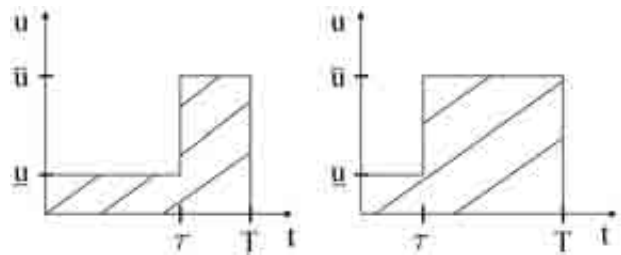


Рис. 2. Динамика удельной скорости подачи кислорода, τ — момент переключения управления, T — период аэрации

В работе [10] на странице 284 приведена теорема о существовании оптимального управления. Эту теорему можно применить к рассматриваемой задаче, при этом многие условия теоремы выполняются очевидным образом и проверки требуют только условия ограниченности и выпуклости. Ограниченность траектории $(S(t), X(t))$ следует из теоремы 1.

Выпуклость множества

$$V(S, X) = \left(u, Q(S^{in} - S) - \frac{\gamma}{Y} SuX, Q(X^{in} - X) + \gamma SuX \right) \equiv (u, a + bu, c + du) \text{ в } R^3,$$

при любых фиксированных S, X (т. е. a, b, c, d фиксированные) следует из того, что $V(S, X)$ — отрезок прямой в R^3 при $u \in [u, \bar{u}]$. \square

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Часто сточные воды промышленного предприятия содержат один тип субстрата, при этом процесс сброса сточных вод предприятием не является непрерывным, а повторяется с некоторой периодичностью. Очистка сточных вод занимает некоторое время T , в течение которого субстрат непрерывно поступает в аэротенк. Во избежание получения штрафов от управления Роспотребнадзора необходимо поддерживать значение выходной концентрации субстрата $S(t)$ в очищенной сточной воде меньше значения нормативно допустимого сброса (НДС) S^{lim} . Для обеспечения

$$S(t) < S^{lim}, \forall t \in [0, T] \quad (20)$$

необходимо, чтобы в конце процесса биоочистки $S(T) \leq \bar{S}$, где значение \bar{S} определяется технологом очистных сооружений.

Рассмотрим аэротенк-смеситель объемом $V = 600 \text{ м}^3$. Для вычислений использованы данные, близкие к экспериментальным, полученным на КОС г. Петрозаводска в 2015 г.: $S_{cv} = 139,4 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$ (БПК_{полн} — биохимическое потребление кислорода полное), $X_{il} = 1639,4 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $V_{cv} = 712,2 \text{ м}^3/\text{час}$, $V_{il} = 855 \text{ м}^3/\text{час}$, $X(0) = 910 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $S(0) = 2,95 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $Y = 0,67$ (безразмерная величина). Значение $\gamma = 0,00000825$ найдено по экспериментальным данным. В качестве значения $S^{lim} = 5 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $\bar{S} = 3 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$. Для численного моделирования использовано значение $\lambda_0 = 0,01$, $\lambda_1 = 1$.

С применением разработанного метода найдены оптимальные управления для различных значений \bar{u} . Динамика концентрации S при различных \bar{u} изображена на рисунке 3. Этот рисунок также показывает, что условие (20) выполняется, а пики на графиках соответствуют моментам переключения управления. Если при нахождении оптимального управления существует такое t , что $S(t) > S^{lim}$, то это говорит о необходимости увеличения значения

концентрации X путем увеличения значения V_{il} .

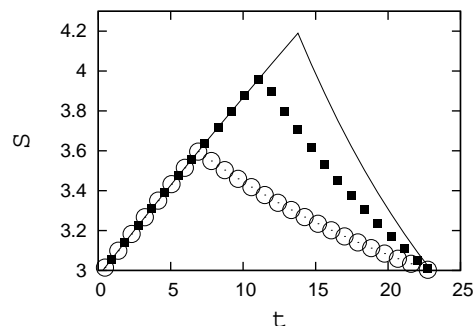


Рис. 3. Изменение концентрации S (г БПК_{полн}/м³) во времени t (мин) при различных значениях \bar{u} : \circ — при $\bar{u} = 4$, \blacksquare — при $\bar{u} = 5$, — — при $\bar{u} = 6$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель управления процессом биоочистки сточных вод в случае субстрата одного типа в аэротенке-смесителе. Произведено качественное исследование разработанной математической модели, найдено ее инвариантное множество и интегральное притягивающее множество.

С целью минимизации расхода кислорода разработан и апробирован алгоритм для нахождения оптимального управления процессом биоочистки в аэротенке-смесителе. Этот алгоритм позволяет оптимизировать расход кислорода при поддержании выходной концентрации субстрата в допустимых границах.

Приведены результаты численных экспериментов, показывающие адекватность разработанной модели процессу биоочистки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Henze M., Grady C. P. L., Gujer W. et al. Activated sludge model no. 1. Scientific and Technical Report 1, IAWPRC Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment Processes. IAWPRC, London, 1987.
2. Henze M., Gujer W., Mino T. et al. Activated Sludge Model No. 2d, ASM 2d // Water Science and Technology, 1999. No. 39(1). P. 165–182.
3. Henze M., Gujer W., Mino T., van Loosdrecht M. C. M. Activated Sludge Model No. 3 // Water Science and Technology. 1999. No. 39(1). P. 183–193.
4. Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 143 с.
5. Кириллов А. Н., Рейсс Т. В., Смирнов Н. В. Математическое моделирование процессов нитрификации и окисления органических веществ

в проточной биосистеме // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. Естественные и технические науки, 2013. № 4 (133). С. 105–109.

6. Grigorieva E. V., Khailov E. N. Optimal control of a waste water cleaning plant // UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations. Electronic Journal of Differential Equations. USA. Eighth Mississippi State. 2010. P. 161–175.

7. Смирнов Н. В. Управление процессом биочистки воды в аэротенке // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16–19 июня 2014 г.: Труды. М.:

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 6792–6799.

8. Смирнов Н. В. Оптимальное управление процессом биочистки сточных вод в аэротенке // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1(17). С. 277–282.

9. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

10. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. Л.: Наука, 1972. 576 с.

Поступила в редакцию 02.04.2016

REFERENCES

1. Henze M., Grady C. P. L., Gujer W. et al. Activated sludge model no. 1. Scientific and Technical Report 1, IAWPRC Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment Processes. IAWPRC, London, 1987.

2. Henze M., Gujer W., Mino T. et al. Activated Sludge Model No. 2d, ASM 2d. *Water Science and Technology*. 1999. No. 39(1). P. 165–182.

3. Henze M., Gujer W., Mino T., van Loosdrecht M. C. M. Activated Sludge Model No. 3. *Water Science and Technology*. 1999. No. 39(1). P. 183–193.

4. Vavilin V. A. Vremya oborota biomassyi i destrukttsiya organicheskogo veschestva v sistemah biologicheskoy ochistki [Time of biomass turnover and destruction of organic matter in the systems of biological treatment]. Moscow: Nauka, 1986. 143 p.

5. Kirillov A. N., Reyss T. V., Smirnov N. V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov nitrifikatsii i okisleniya organicheskikh veschestv v protochnoy biosisteme [Mathematical modeling of nitrification and organic matter oxidation processes in flow-through biosystem]. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennyye i tekhnicheskie nauki [Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser.: Natural and engineering sciences]*. 2013. No. 4(133). P. 105–109.

6. Grigorieva E. V., Khailov E. N. Optimal control of a waste water cleaning plant. UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations. Electronic Journal of Differential Equations. USA. Eighth Mississippi State, 2010. P. 161–175.

7. Smirnov N. V. Upravlenie protsessom bioochistki vodyi v aerotenke [Process control of biological water purification in the aeration tank]. XII Vserossiyskoe soveshanie po problemam upravleniya VSPU-2014. Moscow, 16–19 June 2014.: Trudy [Proc.: XII All-Russian meeting on control problems. Moscow, June 16-19, 2014]. Moscow: Institut problem upravleniya im. V. A. Trapeznikova RAN, 2014. P. 6792–6799.

8. Smirnov N. V. Optimalnoe upravlenie protsessom bioochistki stochnyih vod v aerotenke [Optimal control of the process of biological purification of sewage in the aeration tank]. *Protsessy upravleniya i ustoychivosti [Control processes and stability]*. 2014. Vol. 1(17). P. 277–282.

9. Alekseev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V. Optimalnoe upravlenie [Optimal control]. Moscow: Nauka, 1979. 432 p.

10. Li E. B., Markus L. Osnovy teorii optimalnogo upravleniya [Foundations of optimal control theory]. Leningrad: Nauka, 1972. 576 p.

Received April 02, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781108

Смирнов Николай Васильевич
старший преподаватель, к. т. н.
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,
Россия, 185910
эл. почта: fresh.87@mail.ru
тел.: (8142) 719621

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexandr
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781108

Smirnov, Nikolay
Petrozavodsk State University
33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: fresh.87@mail.ru
tel.: (8142) 719621

УДК 519.175.4

ОБ УСЛОВНЫХ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФАХ СО СЛУЧАЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматривается случайный конфигурационный граф с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по дискретному степенному закону с положительным параметром τ . Они равны числу выходящих из вершин занумерованных полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Свойства графа зависят от значения показателя τ . Исследования последних лет показали, что конфигурационные графы хорошо описывают топологию сети Интернет, если $\tau \in (1, 2)$. Такие графы можно использовать также для моделирования лесных пожаров и банковских кризисов. В этом случае обычно $\tau > 2$. Параметр τ может зависеть от N и даже быть случайным. В статье изучаются конфигурационные случайные графы при условии, что сумма степеней вершин равна n . Предполагается, что при $N \rightarrow \infty$ развитие графа происходит в случайной среде, в которой параметр τ является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. При $N, n \rightarrow \infty$ найдены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; случайная среда; степень вершины; предельные теоремы.

Yu. L. Pavlov. ON CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPHS WITH RANDOM DISTRIBUTION OF VERTEX DEGREES

We consider a configuration graph with N vertices. The degrees of the vertices are drawn independently from a discrete power-law distribution with positive parameter τ . They are equal to the number of each vertex's numbered semiedges. The graph is constructed by joining all of the semiedges pairwise equiprobably to form edges. Research in the last years showed that configuration power-law random graphs with $\tau \in (1, 2)$ are deemed to be a good implementation of Internet topology. Such graphs could be used also for modeling forest fires as well as banking system defaults. But in these cases usually $\tau > 2$. Parameter τ may depend on N and even be random. In the paper we consider configuration random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is equal to n . Random graph dynamics as $N \rightarrow \infty$ is assumed to take place in a random environment, where τ is a random variable following uniform distribution on the interval $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. We obtained the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree as $N, n \rightarrow \infty$.

Keywords: configuration random graph; random environment; vertex degree; limit theorems.

ВВЕДЕНИЕ

Случайные графы часто используются в качестве моделей современных сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, социальные, транспортные, телефонные сети (см., например, [8]). Одним из наиболее подходящих для таких моделей видов графов является так называемый конфигурационный граф, впервые введенный в [11]. Наблюдения за реальными сетями показали [12, 13], что во многих случаях достаточно использовать конфигурационный граф со случайными независимыми одинаково распределенными степенями вершин, принимающими натуральные значения. Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее различных полуребер, т. е. ребер, для которых смежные вершины еще не определены. Пусть число вершин графа равно N . Кроме того, поскольку сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, в случае нечетной суммы в граф вводится еще вспомогательная вершина единичной степени. В [15] отмечается, что эта дополнительная вершина не влияет на асимптотические свойства графа при $N \rightarrow \infty$. Построение графа завершается путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Нетрудно видеть, что в такой конструкции возможно появление петель и кратных ребер.

Для исследования структуры и динамики развития конфигурационных графов в [15] предложено использовать следующее распределение вероятностей случайной величины ξ , равной степени любой вершины графа:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $\tau > 0$. Наблюдения показали [13], что конфигурационные графы с распределением (1) степеней вершин достаточно адекватно описывают сети, при этом в соответствующих моделях обычно $\tau \in (1, 2)$. Различные свойства таких моделей изучались в [3, 6, 15].

В [7] впервые рассматривались условные конфигурационные графы при условии, что число ребер графа известно. Такие графы полезны для моделирования сетей, в которых число связей можно оценить. Понятно, что свойства графа в значительной степени определяются структурой степеней вершин. Пусть сумма степеней вершин известна и равна n . В работах [4, 5, 7] получены предельные распределения максимальной степени вершины $\xi_{(N)}$ и случайных величин μ_r , равных числу вершин степени r , при различном характере стремления N и n к бесконечности.

В последнее время стали появляться работы, в которых отмечается, что по мере развития сетей распределения степеней вершин могут меняться и даже носить случайный характер [9, 10]. В связи с этим далее мы будем предполагать, что параметр τ распределения (1) является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Тогда из (1) следует, что

$$p_1 = 1 - \frac{1}{(b-a)\ln 2} \left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b} \right), \quad (2)$$

$$p_k = \frac{1}{(b-a)\ln k} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b} \right) -$$

$$- \frac{1}{(b-a)\ln(k+1)} \left(\frac{1}{(k+1)^a} - \frac{1}{(k+1)^b} \right), \quad (3)$$

где $k = 2, 3, \dots$

В статье доказаны предельные теоремы для случайных величин $\xi_{(N)}$ и μ_r в условном конфигурационном графе, степени вершин которого имеют распределение (2), (3), а сумма степеней равна n , при различных соотношениях между стремящимися к бесконечности N и n . В соответствии с приведенным выше замечанием мы можем далее не учитывать дополнительную вершину вместе с инцидентным ей полуребером в случае ее появления.

В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1–3 для $\xi_{(N)}$ и теорем 4, 5 для μ_r . Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–13), с помощью которых в конце статьи доказываются теоремы 1–5.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим ξ_1, \dots, ξ_N степени вершин $1, \dots, N$ соответственно. Все они независимы и имеют распределение (2), (3). Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины η_1, \dots, η_N , такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{\lambda^k p_k}{B(\lambda)}, \quad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, N$, $0 < \lambda < 1$ и

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k p_k. \quad (5)$$

Пусть m и σ^2 означают математическое ожидание и дисперсию распределения (4) со-

ответственно. Из (4) следует, что

$$m = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda^k p_k, \quad (6)$$

$$\sigma^2 = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \lambda^k p_k - m^2. \quad (7)$$

Мы будем рассматривать предельное поведение $\xi_{(N)}$ и μ_r в тех случаях, когда существует $\lambda, 0 < \lambda < 1$, являющееся единственным решением уравнения

$$m = n/N. \quad (8)$$

Это решение и будет использоваться в качестве параметра λ распределения (4). Символами C_1, C_2, \dots ниже обозначены некоторые положительные постоянные.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1, (n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$, а $r = r(N, n)$ – наименьшие натуральные числа такие, что $N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \rightarrow \gamma$, где γ – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда $\mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma}$, $\mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r + 1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}$.

Теорема 2. Пусть $a \leq 1, N, n \rightarrow \infty$ так, что $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, а $r = r(N, n)$ выбраны так, что

$$\frac{aN\lambda^{r+1}}{(b-a)B(\lambda)r^{a+1} \ln r} \rightarrow \gamma, \quad (9)$$

где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leq r + k\} = \exp\{-\gamma \lambda^k (1 - \lambda)^{-1}\} (1 + o(1)).$$

Теорема 3. Пусть $a \leq 1, N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, и существует такое $\delta > 0$, что $N(1 - \lambda)^{2+\delta} \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{|\ln \lambda| \xi_{(N)} - u \leq z\} \rightarrow e^{-e^{-z}},$$

где $-\infty < z < \infty$, а $u = u(N, n)$ выбраны так, что

$$\frac{N |\ln \lambda|^a}{e^u u^{a+1} \ln(u/|\ln \lambda|)} \rightarrow \frac{b-a}{a}. \quad (10)$$

Замечание 1. Логарифмируя (10), легко найти, что в условиях теоремы 3 $u \sim \ln N$.

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1, n - N \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного натурального $r \geq 3$ и для целых

неотрицательных k равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(\lambda)} (1 + o(1)).$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ и выполнено одно из следующих условий:

$$1. 1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty;$$

$$2. a \leq 1, \quad n/N \rightarrow \infty, \quad N(1 - \lambda)^{2+\delta} \rightarrow \infty,$$

где δ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного натурального r равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda)) - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda).$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что условия теорем 1–5 не охватывают всех возможных случаев поведения параметров N, n, λ . Рассмотренные в статье случаи объединяет то, что, как будет показано ниже, сумма степеней вершин при этих условиях имеет предельное нормальное распределение. Другие случаи будут изучены в следующих работах.

Замечание 3. Следуя приведенным ниже доказательствам теорем 3 и 5, нетрудно проверить, что в случае $n/N \rightarrow \infty$ утверждения этих теорем сохраняют силу при $\delta = \delta(N, n) \rightarrow 0$ так, что $\delta \leq \ln \ln s / \ln s$ при достаточно больших s .

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В рассматриваемом множестве графов сумма степеней вершин равна n , поэтому из (2) – (4) легко получаем следующий результат.

Лемма 1. Справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \dots + \eta_N = n\}. \quad (11)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \leq r\}, \quad (12)$$

где $i = 1, \dots, N$. Обозначим также $\zeta_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$, $\zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \dots + \eta_N^{(r)}$,

$$P_r = \mathbf{P}\{\eta_1 > r\}. \quad (13)$$

Лемма 1 показывает, что два набора случайных величин ξ_1, \dots, ξ_N и η_1, \dots, η_N удовлетворяют условиям обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, введенной и исследованной В. Ф. Колчиным (см., например, [2]). Из (11) нетрудно получить такое утверждение.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Пусть $\tilde{\eta}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\eta}_N^{(r)}$ означают независимые случайные величины, имеющие распределение:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \quad (14)$$

где $i = 1, \dots, N$. Следующая лемма, как показано в [2], легко выводится из (11).

Лемма 3. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times \\ \times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

где $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = \tilde{\eta}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\eta}_{N-k}^{(r)}$.

Из лемм 2 и 3 видно, что для изучения предельного поведения $\eta_{(N)}$ и μ_r достаточно рассмотреть асимптотику сумм независимых случайных величин ζ_N , $\zeta_N^{(r)}$, $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)}$ бинома $(1 - P_r)^N$ и биномиальных вероятностей. Для этого мы будем использовать доказанные ниже (в лемме 4) свойства параметра λ .

Лемма 4. *Пусть $N, n \rightarrow \infty$. Справедливы следующие утверждения.*

1. Если $n/N \rightarrow 1$, то

$$\lambda = \frac{(n - N)p_1}{2Np_2} (1 + o(1)). \quad (15)$$

2. Если $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, $a \leq 1$, то $0 < C_3 \leq \lambda \leq C_4 < 1$.

3. Если $n/N \rightarrow \infty$, $a \leq 1$, то $\lambda \rightarrow 1$.

Доказательство. Из (4)–(6) и (8) очевидным образом следует, что при $n/N \rightarrow 1$ справедливы соотношения $\lambda \rightarrow 0$ и (15). Нетрудно видеть также, что если $n/N \geq C_1 > 1$, то $\lambda \geq C_3 > 0$. Из (3) вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{a}{(b - a)k^{a+1} \ln k}. \quad (16)$$

Используя это соотношение, а также (3) – (6) и (8), находим, что при $n/N \leq C_2$ и любом $\lambda < 1$ ряды в (5) и (6) сходятся. Это значит, что второе утверждение леммы 4 доказано. Отсюда ясно также, что при $n/N \rightarrow \infty$ и $a \leq 1$ равенство (8) справедливо только при $\lambda \rightarrow 1$.

В следующих трех леммах рассматривается предельное поведение бинома $(1 - P_r)^N$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$NP_r \rightarrow \gamma, \quad NP_{r+1} \rightarrow 0, \quad NP_{r-1} \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Согласно лемме 4 $\lambda \rightarrow 0$ и из (4) следует, что

$$NP_r = Np_{r+1}(\lambda)(1 + o(1)) = \\ = N \frac{\lambda^{r+1} p_{r+1}}{B(\lambda)} (1 + o(1)). \quad (17)$$

Из (5) видно, что $B(\lambda) \sim \lambda p_1$, поэтому из (17) получаем:

$$NP_r \sim N \lambda^r p_{r+1} / p_1, \quad (18)$$

что и доказывает первое утверждение леммы. Другие утверждения очевидным образом следуют из (18), соотношения $\lambda \rightarrow 0$ и условия минимальности r , таких, что $N \lambda^r p_{r+1} / p_1 \rightarrow \infty$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

$$NP_{r+k} = \gamma \lambda^k (1 - \lambda)^{-1} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Из (4) и леммы 4 следует, что

$$NP_{r+k} = Np_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{r+j+k+1}(\lambda)}{p_{r+1}(\lambda)}, \quad (19)$$

и (9) выполняется, только если $r \rightarrow \infty$. Тогда из (3), (4) и (16) получаем, что равномерно по j

$$p_{r+j+k+1}(\lambda) / p_{r+1}(\lambda) = \lambda^{j+k} (1 + o(1)). \quad (20)$$

Отсюда и из (4), (16), (19) вытекает соотношение:

$$NP_{r+k} \sim \frac{aN \lambda^{r+k+1}}{(b - a)B(\lambda)(1 - \lambda)r^{a+1} \ln r},$$

или

$$NP_{r+k} \sim \gamma \lambda^k (1 - \lambda)^{-1},$$

что и завершает доказательство леммы 6.

Лемма 7. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $r = (u + z)/|\ln \lambda|$. Тогда $NP_r \rightarrow e^{-z}$.

Доказательство. Из леммы 4 и (5) следует, что $\lambda \rightarrow 1$, $B(\lambda) \rightarrow 1$. Поэтому из (4) получаем:

$$P_r = (1 + o(1)) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{r+j} p_{r+j}. \quad (21)$$

Из замечания 1 ясно, что $r \rightarrow \infty$, и из (3), (16), (20), (21) выводим, что

$$P_r = \frac{a + o(1)}{b - a} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r+j}}{(r+j)^{a+1} \ln(r+j)}.$$

Заменяя суммирование интегрированием, находим отсюда:

$$P_r \sim \frac{a}{b - a} \int_r^{\infty} \frac{\lambda^y}{y^{a+1} \ln y} dy.$$

Нетрудно проверить, что предельное поведение последнего интеграла при $r \rightarrow \infty$ приводит к соотношению:

$$P_r \sim \frac{a}{b - a} (|\ln \lambda| e^{r|\ln \lambda|} r^{a+1} \ln r)^{-1}. \quad (22)$$

Учитывая выбор r и (10), приходим к утверждению леммы 7.

Рассмотрим асимптотику суммы ζ_N . Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$. Докажем следующую лемму.

Лемма 8. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что выполнено одно из следующих условий:

1. $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$;
2. $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$;
3. $a \leq 1$, $n/N \rightarrow \infty$ и существует такое $\delta > 0$, что $N(1 - \lambda)^{2+\delta} \rightarrow \infty$.

Тогда для любого фиксированного t

$$\varphi_N(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ означает характеристическую функцию распределения (4):

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p_k(\lambda). \quad (23)$$

Известно, что при достаточно малых t справедливо разложение:

$$\ln \varphi(t) = imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} Q(t), \quad (24)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|v| \leq |t|} |(\ln \varphi(t))'''_v|. \quad (25)$$

Далее нам потребуются нижние оценки σ^2 . Их нетрудно получить с помощью леммы 4 и (1)–(7). Заметим, в частности, что если $n/N \rightarrow \infty$, то для любого ε такого, что $0 < \varepsilon < 2 - a$,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &> C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k / k^{a-1+\varepsilon} = \\ &= C_3 \lambda^{-1} \Phi(\lambda, a-1+\varepsilon, 1), \end{aligned} \quad (26)$$

где $\Phi(x, s, d)$ – известная (см., например, [14]) трансцендентная функция Лерча, имеющая вид:

$$\Phi(x, s, d) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(j+d)^s}. \quad (27)$$

Используя разложение $\Phi(\lambda, a-1-\varepsilon, 1)$ в ряд по степеням $1 - \lambda$ [1] и учитывая соотношение $\lambda \rightarrow 1$, находим, что

$$\Phi(\lambda, a-1+\varepsilon, 1) \sim \Gamma(2-a-\varepsilon)(1-\lambda)^{a-2+\varepsilon}, \quad (28)$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x . Учитывая (26), (28) и свойства гамма-функции, приходим к оценкам:

$$\sigma^2 \geq \begin{cases} C_4 \lambda, & \text{если } n/N \rightarrow 1; \\ C_5, & \text{если } 1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty; \\ C_6 (1 - \lambda)^{a-2+\varepsilon}, & \text{если } n/N \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (29)$$

Кроме того, будет полезно следующее легко проверяемое соотношение, справедливое при $n/N \rightarrow 1$ и, согласно лемме 4, при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\sigma^2 = O(\lambda). \quad (30)$$

Из (15) и (29) следует, что в рассматриваемых условиях

$$\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp \left\{ -\frac{iNmt}{\sigma\sqrt{N}} \right\} \varphi^N \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right), \quad (32)$$

из (24), (25) ясно, что для доказательства леммы 8 достаточно установить справедливость соотношения:

$$Q(t/(\sigma\sqrt{N})) / (\sigma^3\sqrt{N}) \rightarrow 0. \quad (33)$$

Используя (4), (15) и (23), нетрудно показать путем прямых вычислений, что

$$\begin{aligned} &(\ln \varphi(t))'_t = \\ &= -i \left(\frac{f_4(t)}{f_1(t)} - 3 \frac{f_3(t)f_2(t)}{f_1^2(t)} + 2 \left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)} \right)^3 \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$f_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{j-1} (\lambda e^{it})^k p_k, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Из (34) и явного вида вероятностей (3) можно получить следующие оценки:

$$\begin{aligned} & |(\ln \varphi(t))_t'''| \leq \\ & \leq \begin{cases} C_4 \lambda, & \text{если } n/N \rightarrow 1; \\ C_5, & \text{если } 1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty; \\ C_6 (1 - \lambda)^{a-3}, & \text{если } n/N \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Сопоставляя (29) и (35), приходим к (33), что и доказывает лемму.

Лемма 8 показывает, что распределения сумм ζ_N слабо сходятся к нормальному закону. Покажем, что на самом деле имеет место локальная сходимость.

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}.$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = (2\pi\sigma\sqrt{N})^{-1} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt,$$

кроме того,

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-izt - t^2/2\} dt.$$

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi \left[\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{z^2}}} \right] \quad (36)$$

и представим ее в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (37)$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-izt} [\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}] dt,$$

$$I_2 = \int_{A < |t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} \leq |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt,$$

$$I_4 = - \int_{A < |t|} e^{-izt - t^2/2} dt, \quad (38)$$

а положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Из (36) и (37) понятно, что лемма будет доказана, если обнаружим, что каждый из интегралов $I_1 - I_4$ стремится к нулю.

Из леммы 8 следует, что $I_1 \rightarrow 0$. Далее,

$$|I_4| \leq \int_{A < |t|} e^{-t^2/2} dt, \quad (39)$$

а последний интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Осталось рассмотреть I_2 и I_3 . Сначала оценим эти интегралы в наиболее простом случае $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, а затем изучим их поведение в других случаях. Из (24), (29) и (35) следует, что при $A < |t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}$

$$|\varphi_N(t)| \leq e^{-C_3 t^2}, \quad (40)$$

поэтому

$$|I_2| \leq \int_{A < |t|} e^{-C_3 t^2} dt, \quad (41)$$

что оценивается аналогично (39). При $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$ справедливо неравенство $|\varphi(t)| \leq e^{-C_4}$, поэтому с помощью (32) находим, что

$$|I_3| \leq 2\pi\sigma\sqrt{N} e^{-C_4 N} \rightarrow 0. \quad (42)$$

Пусть $n/N \rightarrow 1$. Учитывая (29) и (35), легко получить, что в области интегрирования I_2

$$|Q(t/(\sigma\sqrt{N}))t/(\sigma^3\sqrt{N})| \leq C_5 \varepsilon,$$

поэтому из (24), (32) и (38) видим, что оценки (40) и (41) остаются справедливыми. Из леммы 4, (4), (5) и (23) находим, что

$$\varphi(t) = e^{it} (1 - p_2 \lambda (1 - e^{it}) / p_1 + O(\lambda^2)), \quad (43)$$

следовательно, при $\varepsilon \leq |t/(\sigma\sqrt{N})| \leq \pi$

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| \leq \exp \left\{ -C_6 \frac{n - N}{N} \right\}.$$

Отсюда, из леммы 4, (30), (32), (38) и условия $n - N \rightarrow \infty$ вытекает соотношение:

$$|I_3| \leq C_7 \sqrt{n - N} e^{-C_6(n - N)} \rightarrow 0. \quad (44)$$

Рассмотрим случай $n/N \rightarrow \infty$, $a \leq 1$. Представим I_2 в виде суммы двух интегралов:

$$I_2 = I_2' + I_2'', \quad (45)$$

где области интегрирования I_2' и I_2'' соответственно равны:

$$\{t : A < |t| \leq \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N}\},$$

$$\{t : \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N} < |t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}\}.$$

Опять применяя (29), (32), (35), (38) для I_2' , приходим к оценкам вида (40) и (41). Рассмотрим I_2'' . Из (23) следует, что

$$\varphi(t) = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (e^{itk} - 1)\lambda^{k-1}p_k}{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1}p_k},$$

поэтому при $|t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}$

$$\left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \right|^N \leq \exp\left\{-C_8 N \left(1 - \cos\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right\}. \quad (46)$$

Тогда

$$|I_2''| \leq 2 \int_{\varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N}}^{\infty} e^{-C_9 t^2/\sigma^2} dt,$$

откуда

$$|I_2''| \leq 2 \int_{\varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{C_9 |t|^q |t|^{2-q}}{\sigma^2}\right\} dt, \quad (47)$$

где выбор положительной постоянной q указан ниже. Используя оценку (29) для случая $n/N \rightarrow \infty$, а также проводя рассуждения, аналогичные получению этой оценки с помощью (28), находим, что

$$(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty, \quad \sigma^2 \leq C_{10}(1-\lambda)^{a-2}. \quad (48)$$

Из последнего неравенства и соотношения $N(1-\lambda)^{a-2} \rightarrow \infty$ видно, что при $|t| > \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N}$ можно выбрать $q = q(\delta)$ так, что $|t|^{2-q}/\sigma^2 \geq C_{11}$. Отсюда и из (47) понятно, что $I_2'' \rightarrow 0$, и, согласно (45), $I_2 \rightarrow 0$.

Легко видеть, что для I_3 выполнено неравенство (42) в силу (48) и условия $N(1-\lambda)^{a-2} \rightarrow \infty$. Лемма 9 доказана.

Далее рассмотрим предельное поведение суммы $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$. Из (4), (12) и (23) следует, что

$$\varphi_N^{(r)}(t) = (1-P_r)^{-N} \exp\left\{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \times \left[\varphi\left[\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right] - \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\left[\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right] \right]^N \quad (49)$$

Лемма 10. Следующие утверждения справедливы для любого фиксированного t .

1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при $s = 0, \pm 1$

$$\varphi_N^{(r+s)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

2. Пусть выполнены условия теоремы 2 или теоремы 3 и леммы 7. Тогда

$$\varphi_N^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Из леммы 8 и (49) получаем, что

$$\varphi_N^{(r)}(t) = (1-P_r)^{-N} e^{-t^2/2} (1+o(1)) \left[1 - (1+o(1)) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\left\{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \right]^N. \quad (50)$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\left\{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} = P_r + R(t), \quad (51)$$

где P_r определено в (13), а

$$R(t) \leq |t/(\sigma\sqrt{N})| \sum_{j=1}^{\infty} (r+j)p_{r+j}(\lambda), \quad (52)$$

из (50) и (51) ясно, что для доказательства первого утверждения леммы при $s = 0$ и второго утверждения достаточно установить, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (r+j)p_{r+j}(\lambda) = o(1/N). \quad (53)$$

При выполнении условий теорем 1–3 из лемм 5–7 следует, что

$$NP_r \rightarrow \gamma', \quad (54)$$

где $0 \leq \gamma' < \infty$ при $n/N \rightarrow 1$ и $0 < \gamma' < \infty$ в других случаях. Отсюда и из (13) следует, что $r \rightarrow \infty$ при $n/N \geq C_1 > 1$. Это же верно и в случае $n/N \rightarrow 1$, если $N\lambda^r \rightarrow \infty$ для любого фиксированного r (см. лемму 4 и (18)). Используя (4) и (16), нетрудно найти, что при $r \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (r+j)p_{r+j}(\lambda) < C_3 \frac{(r+1)p_{r+1}(\lambda)}{(1-\lambda)}. \quad (55)$$

Пусть $n/N \geq C_1 > 1$. Из (19) (20) и (54) следует, что

$$p_{r+1}(\lambda) = O((1-\lambda)/N). \quad (56)$$

Легко проверить, что

$$r = o(\sqrt{N}). \quad (57)$$

Действительно, если бы это было не так при выполнении условий теоремы 2, то с помощью леммы 4 находим, что соотношение (9) было бы неверно. Аналогично, в условиях теоремы 3, (57) доказывается с помощью (10) и леммы 7. Если $n/N \rightarrow 1$ и $r \rightarrow \infty$, то из (3), (16), (18) и лемм 4, 5 следует, что условия теоремы 1 выполнены только в случае (57). Теперь понятно, что (53) следует из (29), (55)–(57), включая случай $s = 0$. Очевидно также, в силу леммы 4 и (16), что тем более (53) верно при $s = 1$. Если $s = -1$, то, заменяя в (53) r на $r - 1$, находим, учитывая уже доказанное соотношение (53), что

$$\begin{aligned} (\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (r-1+j)p_{r-1+j}(\lambda) &= \\ &= (\sigma\sqrt{N})^{-1} r p_r(\lambda) + o(1/N). \end{aligned} \quad (58)$$

Опять используя (3), (4), (29) и условия $r \rightarrow \infty$, $N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \rightarrow \gamma$, видим, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} r p_r(\lambda) = o(1/N),$$

поэтому из (58) вытекает, что

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\infty} (r-1+j)p_{r-1+j}(\lambda) = o(1/N). \quad (59)$$

Отсюда и из (49), (50) понятно, что первое утверждение леммы доказано.

Остался случай фиксированного r при $n/N \rightarrow 1$. Нетрудно проверить, что при $s = 0, \pm 1$ из (4), (30) и леммы 4 следуют соотношения (53) и (59), что и завершает доказательство леммы 10.

Докажем теперь локальную сходимость $\zeta_N^{(r)}$.

Лемма 11. Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}$$

равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале. Если $n/N \rightarrow 1$, то это утверждение остается справедливым и при замене r на $r-1$ или $r+1$.

Доказательство. Следуя схеме доказательства леммы 9, представим разность

$$R_N^{(r)} = 2\pi \left[\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} - \frac{1}{\sqrt{(2\pi)e^{z^2}}} \right]$$

в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N^{(r)} = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4^{(r)},$$

где $I_1^{(r)} - I_4^{(r)}$ отличаются от интегралов $I_1 - I_4$, определенных в (38), только заменой $\varphi_N(t)$ на $\varphi_N^{(r)}(t)$. Как и раньше, для доказательства леммы 11 достаточно установить, что все интегралы $I_1^{(r)} - I_4^{(r)}$ стремятся к нулю. Ясно, что $I_1^{(r)} \rightarrow 0$ по лемме 10, а для $I_4^{(r)}$ справедлива оценка вида (39). Из (51) – (54) получаем, что при любом t

$$|\varphi_N^{(r)}(t)| \leq C_1 |\varphi_N(t)|,$$

поэтому для интегралов $I_2^{(r)}$ и $I_3^{(r)}$ справедливы оценки, полученные в доказательстве леммы 9 для I_2 и I_3 соответственно. Лемма 11 доказана.

Рассмотрим теперь предельное поведение суммы $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)}$ из леммы 3. Обозначим m_r и σ_r^2 математическое ожидание и дисперсию распределения (14). Используя (4), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{m - r p_r(\lambda)}{1 - p_r(\lambda)}, \quad \sigma_r^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{(1 - p_r(\lambda))^2} \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где m и σ^2 определены в (6) и (7). Обозначим $\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\tilde{\zeta}_S^{(r)} - S m_r)/(\sigma_r \sqrt{S})$.

Лемма 12. Пусть $N, n \rightarrow \infty, r$ – фиксированное натуральное число и выполнено одно из следующих условий:

1. $n/N \rightarrow 1, \quad n - N \rightarrow \infty, \quad r \geq 3;$
2. $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty;$
3. $a \leq 1, \quad n/N \rightarrow \infty$ и существует такое $\delta > 0$, что $N(1-\lambda)^{2+\delta} \rightarrow \infty$.

Тогда при $S = N(1-p_r(\lambda))(1+o(1))$ для любого фиксированного t

$$\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{\varphi}_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\tilde{\eta}_1^{(r)}$. Из (4) и (14) следует, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \frac{\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}}{1 - p_r(\lambda)}. \quad (61)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) = \\ & = \exp\{-Sm_r t / (\sigma_r \sqrt{S})\} (\tilde{\varphi}_r(t / (\sigma_r \sqrt{S}))^S. \end{aligned} \quad (62)$$

По аналогии с (24), (25) получаем, что

$$\ln \tilde{\varphi}_r(t) = im_r t - \frac{\sigma_r^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \tilde{Q}(t), \quad (63)$$

где

$$|\tilde{Q}(t)| \leq 2 \max_{|v| \leq |t|} |(\ln \tilde{\varphi}_r(v))'''|. \quad (64)$$

Используя лемму 4 и (3), (4), (6), легко проверить, что при $n/N \leq C_2 < \infty$

$$0 < C_3 \leq 1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) < 1. \quad (65)$$

Эти неравенства остаются в силе и при $n/N \rightarrow \infty, a \leq 1$, что легко следует из (3), (4), (16), (26) и (27). Таким образом, из (60) и (65) вытекает, что

$$\sigma_r^2 \geq C_4 \sigma^2, \quad (66)$$

а это значит, как и в (31), что

$$\sigma_r \sqrt{S} \rightarrow \infty. \quad (67)$$

Понятно, что, как и при доказательстве леммы 8, нам достаточно обнаружить справедливость соотношения

$$\tilde{Q}(t / (\sigma_r \sqrt{S})) / (\sigma^3 \sqrt{S}) \rightarrow 0. \quad (68)$$

Вычисляя производные от $\ln \tilde{\varphi}_r(t)$, находим, что

$$\begin{aligned} & (\ln \tilde{\varphi}_r(t))''' = (\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^{-3} \times \\ & \times ((\varphi'''(t) + ir^3 p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^2 - \\ & - 3(\varphi''(t) + r^2 p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi'(t) - ir p_r(\lambda)e^{itr}) \times \\ & \times (\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}) + 2(\varphi'(t) - ir p_r(\lambda)e^{itr})^3). \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить, используя (23) и (34), что

$$|\ln \tilde{\varphi}_r(t)_t'''| \leq C_5 |\ln \varphi(t)_t'''|. \quad (69)$$

Теперь соотношение (68) очевидным образом вытекает из (29), (35), (66), (67) и (69). Лемма 12 доказана.

Лемма 13. Пусть выполнены условия леммы 12. Тогда при $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ для целых неотрицательных k равномерно относительно $z_r = (k - Sm_r) / (\sigma_r \sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_r \sqrt{2\pi S}} e^{-z_r^2/2}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 9, рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \tilde{R}_S^{(r)} = 2\pi \left[\sigma_r \sqrt{S} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{z_r^2}}} \right] = \\ \tilde{I}_1^{(r)} + \tilde{I}_2^{(r)} + \tilde{I}_3^{(r)} + \tilde{I}_4^{(r)}, \end{aligned}$$

где интегралы $\tilde{I}_1^{(r)} - \tilde{I}_4^{(r)}$ отличаются от $I_1 - I_4$ (см. (38)) заменой $\varphi_N(t)$ на $\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)$, σ на σ_r и N на S . Как и раньше, покажем, что $\tilde{I}_j^{(r)} \rightarrow 0, j = 1, 2, 3, 4$, что и будет означать справедливость утверждения леммы.

Очевидно, что $\tilde{I}_1^{(r)} \rightarrow 0$ по лемме 12, а для $\tilde{I}_4^{(r)}$ можно применить (39). Пусть $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$. Тогда из (29), (35), (66) и (69) следует, что

$$|(\ln \tilde{\varphi}_r(t))_t''' / \sigma_r^3 \leq C_3$$

и из (62) – (64) вытекает оценка, подобная (41).

В силу известного неравенства

$$|\tilde{\varphi}^{(r)}(t)| \leq e^{-C_4},$$

справедливого в области интегрирования $\tilde{I}_3^{(r)}$, находим, что

$$|\tilde{I}_3^{(r)}| \leq C_5 \sqrt{S} e^{-C_4 S} \rightarrow 0.$$

Пусть $n/N \rightarrow 1$. По лемме 4 $\lambda = (n - N)p_1 / (Np_2)(1 + o(1))$ и из (29), (35), (66) и (69) вытекает, что в области интегрирования $\tilde{I}_2^{(r)}$ справедливо соотношение (68). Поэтому из (62) – (64) видим, что

$$|\tilde{I}_2^{(r)}| \leq \int_{A < |t|} e^{-C_5 t^2} dt, \quad (70)$$

и этот интеграл, как обычно, можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A . Из леммы 4, (4) и (61) нетрудно получить, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \varphi(t)(1 + O(\lambda^2)).$$

Отсюда и из (43) находим, что

$$|\tilde{\varphi}_r(t)| \leq e^{-C_6 \lambda N},$$

поэтому из леммы 4, (29) и условия $n - N \rightarrow \infty$ следует оценка, аналогичная (44).

Осталось рассмотреть случай $n/N \rightarrow \infty$. Представим $\tilde{I}_2^{(r)}$ в виде суммы двух интегралов:

$$\tilde{I}_2^{(r)} = \tilde{I}_2' + \tilde{I}_2'',$$

где области интегрирования \tilde{I}_2' и \tilde{I}_2'' соответственно равны:

$$\{t : A < |t| \leq \varepsilon(1 - \lambda)^{1+\varepsilon} \sigma_r \sqrt{S}\},$$

$$\{t : \varepsilon(1 - \lambda)^{1+\varepsilon} \sigma_r \sqrt{S} < |t| < \varepsilon \sigma_r \sqrt{S}\}.$$

Нетрудно проверить, что в первой из этих областей выполняется (68), поэтому для \tilde{I}_2' из (61)–(63) получаем оценку, подобную (70).

Рассмотрим \tilde{I}_2'' . Из (61) следует, что при $t \rightarrow 0$

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \varphi(t) \left(1 - \frac{p_r(\lambda)}{1 - p_r(\lambda)} (e^{itr} - 1)(1 + o(1)) \right).$$

Отсюда и из (46), (62) нетрудно получить, что

$$\left| \tilde{\varphi}_r \left(\frac{t}{\sigma_r \sqrt{S}} \right) \right|^S \leq \exp \left\{ -C_7 S \left(1 - \cos \frac{t}{\sigma_r \sqrt{S}} \right) \right\}$$

и далее \tilde{I}_2'' оценивается аналогично (47) и, как и при доказательстве леммы 9, $\tilde{I}_2'' \rightarrow 0$.

Для оценки $\tilde{I}_3^{(r)}$ воспользуемся (48), откуда находим, учитывая условия $a \leq 1$, $N(1 - \lambda)^{2+\delta} \rightarrow \infty$, что

$$|\tilde{I}_3^{(r)}| \leq 2\pi \sigma_r \sqrt{S} e^{-C_8 S} \rightarrow 0.$$

Лемма 13 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Теперь мы можем доказать теоремы 1–5. Из леммы 9 видно, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \sim (\sigma \sqrt{2\pi N})^{-1}.$$

Отсюда и из леммы 11 находим, что при выполнении условий теорем 1–3

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1.$$

В силу леммы 2 из этого соотношения получаем, что теоремы 1–3 следуют из лемм 5, 6 и 7 соответственно.

Нетрудно проверить, используя леммы 9 и 13, что в условиях теоремы 4

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1, \quad (71)$$

а биномиальные вероятности $\binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k}$ при $p_r(\lambda) \rightarrow 0$, как известно, допускают пуассоновское приближение. Осталось сослаться на лемму 3 и (71).

В справедливости утверждения теоремы 5 легко убедиться путем непосредственных вычислений с использованием лемм 3, 13 и нормального приближения биномиальных вероятностей, справедливого при $Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda)) \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00005.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
2. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
3. Павлов Ю. Л. Предельные распределения объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22–34. doi: 10.4213/dm963
4. Павлов Ю. Л. Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi: 10.4213/dm1104
5. Павлов Ю. Л., Дертишников Е. Н. О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе Интернет-типа // Труды КарНЦ РАН. 2010. № 3, вып. 1. С. 59–65.
6. Павлов Ю. Л., Степанов М. М. Предельные распределения числа петель случайного конфигурационного графа // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 282. С. 212–230. doi: 10.1134/S0371968513030175
7. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
8. Райгородский А. М. Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011. 136 с.
9. Самосват Е. А. Моделирование Интернета с помощью случайных графов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 98 с.
10. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632
11. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // Eur. J. Comb. 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
12. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/SBO9780511546594

13. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationship of the Internet topology // *Computer communications Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

14. Laurinskas A., Garunksis R. The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

15. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 16.02.2016

REFERENCES

1. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. New York; Toronto; London: McGraw-hill book company, inc, 1953. 317 p.

2. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge: University Press, 1999. 252 p.

3. Pavlov Yu. L. The limit distribution of the size of a giant component in an Internet-type random graph. *Discrete Mathematics and Applications.* 2007. Vol. 17, iss. 5. P. 425–438. doi: 10.1515/dma.2007.034

4. Pavlov Yu. L. On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Mathematics and Applications.* 2010. Vol. 20, iss. 5–6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031

5. Pavlov Yu. L., Dertishnikova E. N. О предельном распределении максимальной степени вершин в случайном графе Интернет-типа [On limit distribution of maximum vertex degree in random graph of Internet type]. *Trudy KarNC RAN [Transactions of KarRC of RAS].* 2010. No. 3, iss. 1. P. 59–65.

6. Pavlov Yu. L., Stepanov M. M. Limit distributions of the number of loops in a random configuration graph. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2013. Vol. 282, iss. 1. P. 202–219. doi: 10.1134/S0081543813060175

7. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and*

Applications. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

8. Rajgorodskij A. M. Modeli sluchainyh grafov [Models of random graphs]. Moscow: MCNMO, 2011. 136 p.

9. Samosvat E. A. Modelirovanie Interneta s pomoshju sluchainyh grafov [Internet modeling with help of random graphs]: DSc (Cand. of Phys.-Math.) thesis. Moscow, 2014. 98 p.

10. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters.* 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

11. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

12. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

13. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationship of the Internet topology. *Computer communications Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

14. Laurinskas A., Garunksis R. The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

15. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received February 16, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 519.175.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ВЕРШИН ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, подчиняющимися степенному закону. Они определяют занумерованные в произвольном порядке полуребра. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер для формирования ребер. Такие модели можно использовать для описания различных сетей коммуникаций и топологии сети Интернет. Мы изучаем подмножество случайных графов при условии, что сумма степеней вершин равна n . Свойства графа зависят от значения параметра τ распределения степеней вершин. Пусть μ_r означает число вершин степени r . Получены предельные распределения μ_r при $N, n \rightarrow \infty$ и всех возможных значениях r и τ . Также в нашей модели параметр τ может изменяться вместе с N, n .

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; степень вершины; предельные теоремы.

Yu. L. Pavlov. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE NUMBER OF VERTICES WITH GIVEN DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

We consider configuration graphs with N vertices. The degrees of the vertices are independent identically distributed random variables according to power-law distribution. Node degrees form semiedges that are numbered in an arbitrary order. The graph is constructed by joining all the stubs pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used for describing different communication networks and Internet topology. We study the subset of random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is equal to n . The properties of the graph depend on the value of the parameter τ of the vertex degree distribution. Let μ_r be the number of vertices with degree r . We obtained the limit distributions of μ_r as $N, n \rightarrow \infty$ with all possible values of r and τ . Also in our model the parameter τ can be changed together with N, n .

Key words: configuration random graph; vertex degree; limit theorems.

ВВЕДЕНИЕ

Понятие конфигурационного графа было введено Б. Боллобашем в статье [10]. Такие графы часто используются в качестве моде-

лей разнообразных сложных сетей коммуникаций, в частности, сети Интернет (см., например, [11] и приведенную там библиографию). В наиболее известной [11, 12, 15] модели сте-

пени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с дискретным степенным распределением. Значения этих случайных величин для каждой вершины определяют число выходящих из нее различных полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. В случае нечетной суммы степеней вершин вводится дополнительная вершина единичной степени. Обозначим N число основных вершин графа. Согласно [14], появление дополнительной вершины вместе с ее полуребером не влияет на асимптотические свойства графа при $N \rightarrow \infty$.

Пусть ξ означает случайную величину, равную степени любой вершины графа (кроме дополнительной). В результате обсуждения свойств больших сетей коммуникаций в [14] предложено рассматривать модели, в которых

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $\tau > 0$. Предельное поведение таких графов изучалось во многих работах, среди них [3, 4, 11, 14]. В некоторых статьях [3, 4, 14] распределение (1) рассматривалось только в случае $\tau \in (1, 2)$, поскольку именно такие значения параметра τ являются типичными для большинства сетей коммуникаций. Однако и другие значения этого параметра представляются интересными. Оказалось, например, что конфигурационные графы можно применять для моделирования лесных пожаров [13], при этом в наиболее важных случаях $\tau > 2$. В некоторых работах [7, 8] отмечается также, что по мере развития сетей распределения степеней вершин могут изменяться. Естественно предположить в этом случае, что параметр τ распределения (1) не является постоянной величиной. В статье [9] показано, что значения $\tau = 1$ и $\tau = 2$ являются точками фазового перехода (или критическими точками), поскольку при переходе значений τ через эти точки резко меняются свойства графа. Заметим, что если $\tau > 3$, то распределение (1) имеет конечную дисперсию, но при $\tau \leq 3$ дисперсия не существует, поэтому значение $\tau = 3$ также представляет определенный интерес.

В статьях [5, 6] рассматривались условные конфигурационные графы при условии, что число ребер известно. Обозначим ξ_1, \dots, ξ_N степени вершин $1, \dots, N$ и предположим, что эти случайные величины имеют распределение (1), а $\xi_1 + \dots + \xi_N = n$. Пусть μ_r равно числу вершин такого условного графа, степень которых равна r , $r \leq n - N + 1$. В [5, 6] найдены предельные распределения μ_r во всех

возможных зонах стремления N, n к бесконечности и при всех возможных фиксированных значениях параметра τ . Следуя доказательствам предельных теорем для μ_r в [5, 6] и учитывая непрерывность участвующих в этих доказательствах функций, нетрудно убедиться, что утверждения теорем справедливы и в случае изменяющихся значений τ , если только они не приближаются к критическим точкам $\tau = 1, 2, 3$. Таким образом, осталось нерассмотренным предельное поведение μ_r при приближении τ к этим точкам. На решение этой задачи и направлена настоящая статья. В соответствии с приведенным выше замечанием мы можем далее не учитывать дополнительную вершину, вместе с инцидентным ей полуребером, в случае ее появления. В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1 и 2. Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–5), с помощью которых в конце статьи доказываются теоремы 1, 2.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины η_1, \dots, η_N , такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{\lambda^k p_k}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \quad (2)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, N$, $0 < \lambda < 1$, а $\Phi(z, s, a)$ – функция Лерча:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}. \quad (3)$$

Используя (1) – (3), находим, что

$$m = \mathbf{E}\eta_i = \frac{\Phi(\lambda, \tau, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 1, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mathbf{D}\eta_i &= (2\Phi(\lambda, \tau - 1, 1) - \\ &- (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 2, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)) \times \\ &\times (1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1} - m^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко проверить, что уравнение

$$m = n/N \quad (6)$$

имеет единственное решение λ , $0 < \lambda < 1$, которое мы и будем использовать в качестве параметра распределения (2). В [6] показано, что если $\tau \leq 1$ и $n/N \rightarrow \infty$, то $\lambda \rightarrow 1$. Это же верно и в случае $\tau > 1$, $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ . Нас интересуют только эти случаи, поскольку,

как легко проверить, если $n/N \leq c < \infty$, $\tau < 1$ или $n/N \leq c < \zeta(\tau)$, $\tau > 1$, результаты работ [5, 6] остаются в силе. Здесь и далее символом c обозначены некоторые положительные постоянные, не обязательно одинаковые.

Теорема 1. Пусть r фиксировано, $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, если $\tau \leq 1$, и $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, если $\tau > 1$. Пусть

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda) - (m - r)^2 p_r(\lambda)/\sigma^2) \quad (7)$$

и выполнено одно из следующих условий:

1. $\tau \downarrow 3$, $(1 - \lambda)^{\tau-3} \leq c < 1$, $\sqrt{N}(\tau - 3) \rightarrow \infty$;
2. $\tau \rightarrow 3$, $(1 - \lambda)^{\tau-3} \rightarrow 1$, $\frac{\sqrt{N}}{|\ln(1-\lambda)|} \rightarrow \infty$;
3. $\tau \uparrow 3$, $(1 - \lambda)^{\tau-3} \geq c > 1$, $\frac{\sqrt{N}(3-\tau)}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \rightarrow \infty$;
4. $\tau \downarrow 2$, $(1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c < 1$, $\frac{\sqrt{N}(1-\lambda)^{3-\tau}}{\tau-2} \rightarrow \infty$;
5. $\tau \rightarrow 2$, $(1 - \lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1$, $\frac{\sqrt{N}|\ln(1-\lambda)|}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \rightarrow \infty$;
6. $\tau \uparrow 2$, $(1 - \lambda)^{\tau-2} \geq c > 1$, $\sqrt{\frac{N}{|\ln(1-\lambda)|}} \frac{1-\lambda}{2-\tau} \rightarrow \infty$;
7. $\tau \downarrow 1$, $(1 - \lambda)^{\tau-1} \leq c < 1$, $\frac{N(1-\lambda)^2}{(\tau-1)} \rightarrow \infty$;
8. $\tau \rightarrow 1$, $(1 - \lambda)^{\tau-1} \rightarrow 1$, $\frac{N|\ln(1-\lambda)|}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \rightarrow \infty$;
9. $\tau \uparrow 1$, $(1 - \lambda)^{\tau-1} \geq c > 1$, $\frac{N(1-\lambda)^{\tau+1}}{(1-\tau)|\ln(1-\lambda)|} \rightarrow \infty$.

Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

Теорема 2. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$ и $n/N \rightarrow \infty$, если $\tau \leq 1$, или $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, если $\tau > 1$. Пусть, кроме того, выполнено одно из девяти условий, перечисленных в теореме 1. Тогда равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(\lambda)} (1 + o(1)).$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом разделе доказываются леммы 1–5. Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$, имеющие распределение:

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \quad (8)$$

где $k = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, N$. Пусть $\zeta_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$, $\zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \dots + \eta_N^{(r)}$.

Лемма 1. Справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(\lambda) (1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Доказательство. Из (1), (2) и (8) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \dots + \eta_N = n\}. \quad (9)$$

Это равенство означает, что для двух наборов случайных величин ξ_1, \dots, ξ_N и η_1, \dots, η_N выполнены условия обобщенной схемы размещения, введенной и исследованной В. Ф. Колчинным [2]. В этом случае утверждение леммы 1 является известным следствием обобщенной схемы, легко выводющимся из (9).

Слабая сходимость распределения суммы ζ_N к нормальному закону была доказана в лемме 4 работы [5]. В следующей лемме удалось ослабить условия леммы 4 [5], поэтому она приводится с доказательством. Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию суммы $(\zeta_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, если $\tau \leq 1$, и $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, если $\tau > 1$. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1. $\tau \downarrow 3$, $(1 - \lambda)^{\tau-3} \leq c < 1$, $\sqrt{N}(\tau - 3) \rightarrow \infty$;
2. $\tau \rightarrow 3$, $(1 - \lambda)^{\tau-3} \rightarrow 1$, $\frac{\sqrt{N}}{|\ln(1-\lambda)|} \rightarrow \infty$;
3. $\tau \uparrow 3$, $(1 - \lambda)^{\tau-3} \geq c > 1$, $\frac{\sqrt{N}(3-\tau)}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \rightarrow \infty$;
4. $\tau \downarrow 2$, $(1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c < 1$, $\frac{\sqrt{N}(1-\lambda)^{3-\tau}}{(\tau-2)^{3/2}} \rightarrow \infty$;
5. $\tau \rightarrow 2$, $(1 - \lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1$, $\frac{N|\ln(1-\lambda)|^3}{(1-\lambda)^{\tau-4}} \rightarrow \infty$;
6. $\tau \uparrow 2$, $(1 - \lambda)^{\tau-2} \geq c > 1$, $\frac{N(1-\lambda)^\tau}{(2-\tau)^3} \rightarrow \infty$;
7. $\tau \rightarrow 1$, $N(1 - \lambda)^\tau \rightarrow \infty$;

Тогда для любого фиксированного t

$$\varphi_N(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины η_1 . Из (1)–(3) следует, что

$$\varphi(t) = \frac{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}. \quad (10)$$

При достаточно малых t

$$\ln \varphi(t) = imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} Q(t), \quad (11)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|v| \leq |t|} |(\ln \varphi(t))'''_v|. \quad (12)$$

Учитывая равенство

$$\varphi_N(t) = \exp \left\{ -\frac{int}{\sigma\sqrt{N}} \right\} \varphi^N \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \quad (13)$$

и очевидное соотношение $\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty$, из (11)–(13) получаем, что

$$\ln \varphi_N(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{N}} Q \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right). \quad (14)$$

Отсюда следует, что для доказательства леммы достаточно показать, что

$$Q(t/(\sigma\sqrt{N})) / (\sigma^3\sqrt{N}) \rightarrow 0. \quad (15)$$

При доказательстве леммы 4 [5] получены следующие оценки σ^2 и $|Q(t/(\sigma\sqrt{N}))|$:

$$\sigma^2 = \quad (16)$$

$$= \begin{cases} \Theta(1), & \text{если } \tau \rightarrow 3; \\ \Theta((\tau - 2)^{-1}), & \text{если } \tau \downarrow 2, (1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c < 1; \\ \Theta(-\ln(1 - \lambda)), & \text{если } \tau \rightarrow 2, (1 - \lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1; \\ \Theta\left(\frac{(1-\lambda)^{\tau-2}}{2-\tau}\right), & \text{если } \tau \uparrow 2, (1 - \lambda)^{\tau-2} \geq c > 1; \\ \Theta((1 - \lambda)^{\tau-2}), & \text{если } \tau \rightarrow 1, \end{cases}$$

где равенство $x = \Theta(y)$ означает, что существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что $C_1|y| \leq |x| \leq C_2|y|$;

$$\left| Q \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) \right| = \quad (17)$$

$$= \begin{cases} O((\tau - 3)^{-1}), & \text{если } \tau \downarrow 3, (1 - \lambda)^{\tau-3} \leq c < 1; \\ O(-\ln(1 - \lambda)), & \text{если } \tau \rightarrow 3, (1 - \lambda)^{\tau-3} \rightarrow 1; \\ O\left(\frac{(1-\lambda)^{\tau-3}}{3-\tau}\right), & \text{если } \tau \uparrow 3, (1 - \lambda)^{\tau-3} \geq c > 1; \\ O((1 - \lambda)^{\tau-3}), & \text{если } \tau \rightarrow 2 \text{ или } \tau \rightarrow 1. \end{cases}$$

Сравнивая (15)–(17), легко установить справедливость утверждения леммы 2.

Кроме доказанной выше слабой сходимости распределения суммы ζ_N имеет место и локальная сходимость к нормальному закону. Ранее она была доказана в лемме 5 [5], но ее условия удалось существенно упростить, что отражено ниже, в лемме 3.

Лемма 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, если $\tau \leq 1$ и $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$, если $\tau > 1$. Пусть выполнено одно из условий 1–9 теоремы 1. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}.$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, \quad (18)$$

кроме того,

$$\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-izt - t^2/2\} dt. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что разность

$$R_N = 2\pi \left(\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (20)$$

можно представить в виде суммы:

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (21)$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-izt} (\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}) dt,$$

$$I_2 = \int_{A < |t| < \varepsilon b \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon b \sigma \sqrt{N} < |t| < \varepsilon \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt,$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon \sigma \sqrt{N} \leq |t| \leq \pi \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt,$$

$$I_5 = - \int_{A < |t|} e^{-izt - t^2/2} dt,$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее, а величины $b = b(\lambda, \tau)$ определяются так:

$$b(\lambda, \tau) = \quad (22)$$

$$= \begin{cases} \tau - 3, & \text{если } \tau \downarrow 3, \quad (1 - \lambda)^{\tau-3} \leq c < 1; \\ (-\ln(1 - \lambda))^{-1}, & \text{если } \tau \rightarrow 3, \quad (1 - \lambda)^{\tau-3} \rightarrow 1; \\ \frac{3-\tau}{(1-\lambda)^{\tau-3}}, & \text{если } \tau \uparrow 3, \quad (1 - \lambda)^{\tau-3} \geq c > 1; \\ \frac{(1-\lambda)^{3-\tau}}{\tau-2}, & \text{если } \tau \downarrow 2, \quad (1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c < 1; \\ \frac{|-\ln(1-\lambda)|}{(1-\lambda)^{\tau-3}}, & \text{если } \tau \rightarrow 2, \quad (1 - \lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1; \\ \frac{(1-\lambda)}{2-\tau}, & \text{если } \tau \rightarrow 2; 1, \quad (1 - \lambda)^{\tau-2} \geq c > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что утверждение леммы справедливо, если разность R_N стремится к нулю. Рассмотрим интегралы I_1 – I_5 в сумме (21). По лемме 2 $I_1 \rightarrow 0$. Далее

$$|I_5| \leq \int_{A < |t|} e^{-t^2/2} dt, \quad (23)$$

и последний интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A . Используя (13), (14), (16), (17) и (22), легко получить, что

$$|I_2| \leq \int_{A < |t|} e^{-ct^2} dt, \quad (24)$$

что оценивается аналогично (23). Известно, что если $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$, то существует такое $c > 0$, что $|\varphi(t)| \leq e^{-c}$, поэтому

$$|I_4| \leq 2\pi\sigma\sqrt{N}e^{-cN}. \quad (25)$$

Отсюда и из (16) ясно, что при $\tau \rightarrow 3$

$$I_4 \rightarrow 0. \quad (26)$$

Пусть $\tau \downarrow 2$. Тогда из (16) и (25) следует, что

$$|I_4| \leq \sqrt{N/(\tau-2)}e^{-cN}. \quad (27)$$

Учитывая условие $(1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c < 1$, из (27) находим, что

$$|I_4| \leq c\sqrt{N}e^{-cN} \rightarrow 0.$$

Пусть $\tau \rightarrow 2, (1 - \lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1$. Тогда

$$|I_4| \leq c\sqrt{N|\ln(1 - \lambda)|}e^{-cN}. \quad (28)$$

По условию $N(1 - \lambda)^2 |\ln(1 - \lambda)|^2 \rightarrow \infty$, поэтому $\sqrt{N/|\ln(1 - \lambda)|} \rightarrow \infty$ и из (28) получаем, что

$$|I_4| \leq c\sqrt{N|\ln(1 - \lambda)|} \exp\{-c\sqrt{N|\ln(1 - \lambda)|}\},$$

а последнее выражение, очевидно, стремится к нулю. Рассуждая подобным же образом в других случаях изменения τ , опять приходим к соотношению (26).

Осталось рассмотреть интеграл I_3 . Из (3) следует, что если $\tau > 1$, то $\Phi(\lambda, \tau, 1)$ конечно и

$$(1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1) \rightarrow 0. \quad (29)$$

Известно [1], что при $\tau \neq 1, 2, 3, \dots$

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) = \lambda^{-1}(\Gamma(1 - \tau)(-\ln \lambda)^{\tau-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(\tau - k)}{k!} (\ln \lambda)^k), \quad (30)$$

где значения $\zeta(x)$ при $x < 1$ берутся в смысле аналитического продолжения дзета-функции. Из (30) находим, что при $\tau \rightarrow 1$

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) \sim \Gamma(1 - \tau)(-\ln \lambda)^{\tau-1} + \zeta(\tau). \quad (31)$$

Используя известные [1] разложения в ряд гамма-функции и дзета-функции, получаем, что при $\tau \rightarrow 1$

$$\Gamma(1 - \tau) \sim (1 - \tau)^{-1}, \quad \zeta(\tau) \sim (\tau - 1)^{-1}. \quad (32)$$

Из (31) и (32) находим, что при $\tau \rightarrow 1, \lambda \rightarrow 1$

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) \sim \frac{1 - (1 - \lambda)^{\tau-1}}{\tau - 1}. \quad (33)$$

Отсюда видим, что и при $\tau \rightarrow 1$ выполняется соотношение (29). Поскольку $1 - \lambda e^{it} = 1 - \lambda(\cos t + i \sin t)$, из (10) получаем, что

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2}\Phi(\lambda, \tau, 1)(1 + o(1)) + it\Phi(\lambda, \tau, 1)(1 + o(1)), \quad (34)$$

поэтому

$$|\varphi(t)/(\sigma\sqrt{N})^N \leq \exp\{-ct^2\Phi(\lambda, \tau, 1)/\sigma^2\}.$$

Следовательно,

$$|I_3| \leq 2 \int_{\varepsilon b\sigma\sqrt{N}}^{\infty} \exp\{-ct^2\Phi(\lambda, \tau, 1)/\sigma^2\} dt.$$

Отсюда

$$|I_3| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{\Phi(\lambda, \tau, 1)}} \int_{\varepsilon b\sqrt{N\Phi(\lambda, \tau, 1)}}^{\infty} e^{-cx^2} dx. \quad (35)$$

Из условий леммы, (16), (17), (22) и (33) следует, как нетрудно проверить, что во всех случаях

$$b\sqrt{N\Phi(\lambda, \tau, 1)} \rightarrow \infty.$$

Заметим, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_x^{\infty} e^{-cx^2} dx \sim (2cx)^{-1} e^{-cx^2}.$$

Отсюда и из (35) получаем, что

$$|I_3| \leq \frac{c\sigma \exp\{-cNb^2\Phi(\lambda, \tau, 1)\}}{b\sqrt{N\Phi(\lambda, \tau, 1)}}. \quad (36)$$

Если $\tau \rightarrow 3$, то из (3) и (16) ясно, что $\sigma, \Phi(\lambda, \tau, 1) = \Theta(1)$, поэтому при $\tau \downarrow 3, (1 - \lambda)^{\tau-3} \leq c < 1$, учитывая условие $\sqrt{N}(\tau - 3) \rightarrow \infty$, из (22) и (36) находим, что

$$|I_3| \leq \frac{c \exp\{-cN(\tau - 3)^2\}}{\sqrt{N}(\tau - 3)} \rightarrow 0.$$

Аналогичным образом выводим соотношение $I_3 \rightarrow 0$ и в других случаях изменения τ . Таким образом, все интегралы стремятся к нулю и из (20), (21) следует, что лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь предельное поведение суммы $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\eta_1^{(r)}$. Из (2), (8) и (10) следует, что

$$\varphi_r(t) = \frac{\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}}{1 - p_r(\lambda)}. \quad (37)$$

Легко видеть также, что

$$m_r = \mathbf{E}\eta_1^{(r)} = \frac{m - rp_r(\lambda)}{1 - p_r(\lambda)}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \mathbf{D}\eta_1^{(r)} = \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - p_r(\lambda)} \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m - r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Пусть $\varphi_S^{(r)}(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$. Тогда

$$\varphi_S^{(r)}(t) = \exp\left\{-\frac{iSm_r t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right\} \varphi_r^S\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right). \quad (40)$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 2 и, кроме того, пусть $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$. Тогда

$$\varphi_S^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Это утверждение остается в силе и при $r \rightarrow \infty$.

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства леммы 2. По аналогии с (11) получаем, что

$$\ln \varphi_r(t) = im_r t - \frac{\sigma_r^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} Q_r(t), \quad (41)$$

где

$$|Q_r(t)| \leq 2 \max_{|v| \leq |t|} |(\ln \varphi_r(t))_v'''. \quad (42)$$

Тогда из (40)–(42) находим, что

$$\ln \varphi_S^{(r)}(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma_r^3\sqrt{S}} Q_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right). \quad (43)$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно установить соотношение, подобное (15):

$$Q_r(t/(\sigma_r\sqrt{S})) / (\sigma_r^3\sqrt{S}) \rightarrow 0. \quad (44)$$

Используя (2)–(5), (16), (38), (39), асимптотическое разложение функции Лерча (30), а также свойства гамма и дзета функций [1], можно оценить предельное поведение σ_r^2 . Проводя хоть и громоздкие, но элементарные рассуждения, находим, что в условиях леммы

$$\sigma_r^2 = \Theta(\sigma^2). \quad (45)$$

Из (37) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} (\ln \varphi_r(t))''' &= (\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^{-3} \times \\ &\times [(\varphi'''(t) + ir^3 p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^2 - \\ &- 3((\varphi''(t) + r^2 p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi'(t) - ir p_r(\lambda)e^{itr}) \times \\ &\times (\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}) + 2(\varphi'(t) - ir p_r(\lambda)e^{itr})^3)]. \end{aligned}$$

Взяв первые три производные от характеристической функции $\varphi(t)$ (см. (10)), используя тот же подход, что и при выводе (45), и учитывая (17), приходим к соотношению:

$$|Q_r(t/(\sigma_r\sqrt{S}))| = \Theta(|Q(t/(\sigma\sqrt{N}))|). \quad (46)$$

Заметим еще, что (45) и (46) остаются справедливыми и при $r \rightarrow \infty$. Теперь ясно, что, как и в лемме 2, из (16), (17), (45), (46) следует (44), а это и значит, что лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 3 и $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z_r = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}} e^{-z_r^2/2}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3, представим разность

$$R_S^{(r)} = 2\pi \left(\sigma_r\sqrt{S} \mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = k\} - \frac{e^{-z_r^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

в виде суммы пяти интегралов:

$$R_S^{(r)} = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4^{(r)} + I_5^{(r)},$$

которые определяются аналогично интегралам I_1 – I_5 из леммы 3 с заменой $\varphi_N(t)$ на $\varphi_S^{(r)}(t)$. Понятно, что нам достаточно доказать, что каждый из интегралов $I_1^{(r)}$ – $I_5^{(r)}$ стремится к нулю. Легко проверить, что из условий

леммы 3 следуют условия леммы 4, а из нее соотношение $I_1^{(r)} \rightarrow 0$. Для $I_5^{(r)}$ справедлива оценка, аналогичная (23). Интеграл $I_2^{(r)}$ оценивается так же, как и I_2 (см. (24)), при этом используются соотношения (43)–(46). В силу (44) для $I_4^{(r)}$ справедливы оценки, подобные (25)–(28).

Осталось рассмотреть $I_3^{(r)}$. Из (34) и (37) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_r(t/(\sigma_r\sqrt{S})) &= (1 - p_r(\lambda))^{-1}(1 - \\ &- ((t^2 + o(1))/(2\sigma_r^2 S))\Phi(\lambda \exp\{it/(\sigma_r\sqrt{S})\}, \tau, 1) + \\ &+ ((it + o(1))/(\sigma_r\sqrt{S}))\Phi(\lambda \exp\{it/(\sigma_r\sqrt{S})\}, \tau, 1) - \\ &- p_r(\lambda)(1 + (itr/(\sigma_r\sqrt{S})) + T)), \end{aligned}$$

где $|T| < (tr)^2/(2\sigma_r^2 S)$. Нетрудно проверить, что при всех условиях леммы $r^2 p_r(\lambda) < \Phi(\lambda, \tau, 1)$, поэтому

$$|\varphi_r(t/(\sigma_r\sqrt{S}))|^S \leq \exp\{-ct^2\Phi(\lambda, \tau, 1)/\sigma_r^2\}.$$

Это неравенство вместе с (45) означает, что интеграл $I_3^{(r)}$ можно оценить так же, как и интеграл I_3 в лемме 3. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Известно, что если $Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda)) \rightarrow \infty$, то равномерно относительно целых k , для которых $(k - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале, справедливо нормальное приближение биномиальных вероятностей:

$$\begin{aligned} \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} &= \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}} \exp\left\{-\frac{(k - Nm)^2}{2\sigma^2 N}\right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Используя (6), (7), (39), (47) и проводя необходимые вычисления, из лемм 1, 3, 5 получаем утверждение теоремы 1.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что в силу лемм 3 и 5

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1. \quad (48)$$

Ясно, что $p_r(\lambda) \rightarrow 0$, поскольку $r \rightarrow \infty$. Тогда равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ для биномиальных вероятностей имеет место пуассоновское приближение:

$$\begin{aligned} \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} &= \\ &= \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(\lambda)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Теорема 2 следует непосредственно из леммы 1, (48) и (49).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00005.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтман Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
2. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
3. Павлов Ю. Л. Предельные распределения объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22–34. doi: 10.4213/dm963
4. Павлов Ю. Л., Степанов М. М. Предельные распределения числа петель случайного конфигурационного графа // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 282. С. 212–230. doi: 10.1134/S0371968513030175
5. Павлов Ю. Л., Феклистова Е. В. О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа вблизи критических точек // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 2 (в печати).
6. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
7. Самосват Е. А. Моделирование Интернета с помощью случайных графов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 98 с.
8. Aiello W., Chang F., Lu L. A random graph model for massive graphs // Proceedings of the 32nd ACM Symposium on theory of computing. 2000. P. 171–180.
9. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632
10. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // Eur. J. Comb. 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
11. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594
12. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationship of the Internet topology // Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
13. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graphs robustness: link saving and forest fire model // Austrian Journal of Statistics. 2014. Vol. 43, iss. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/asj.v.43i4.34

14. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

15. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of "small-world" networks // *Nature*, 1998. Vol. 393. P. 440–442. doi: 10.1038/30916

Поступила в редакцию 05.04.2016

REFERENCES

1. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. New York; Toronto; London: McGraw-hill book company, inc, 1953. 317 p.

2. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: University Press, 1999. 252 p.

3. *Pavlov Yu. L.* The limit distribution of the size of a giant component in an Internet-type random graph. *Discrete Mathematics and Applications*. 2007. Vol. 17, iss. 5. P. 425–438. doi: 10.1515/dma.2007.034

4. *Pavlov Yu. L., Stepanov M. M.* Limit distributions of the number of loops in a random configuration graph. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013. Vol. 282, iss. 1. P. 202–219. doi: 10.1134/S0081543813060175

5. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* On limit behavior of the maximum vertex degrees in a conditional configuration graph near critical points. *Discrete Mathematics and Applications*. 2016 (in print).

6. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

7. *Samosvat E. A.* Modelirovanie Interneta s pomoshju sluchainyh grafov [Internet modeling with help of random graphs]: DSc (Cand. of Phys.-Math.) thesis. Moscow, 2014. 98 p.

8. *Aiello W., Chang F., Lu L.* A random graph model for massive graphs. Proceedings of the 32nd ACM Symposium on theory of computing. 2000. P. 171–180.

9. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

10. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

11. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

12. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology. *Computer communications Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

13. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graphs robustness: link saving and forest fire model. *Austrian Journal of Statistics*. 2014. Vol., 43, iss. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/asj.v.43i4.34

14. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

15. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of "small-world" networks. *Nature*, 1998. Vol. 393. P. 440–442. doi: 10.1038/30916

Received April 5, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

УДК 004.738.5:51-7

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ СБОРА ДАННЫХ О СТРУКТУРЕ ВЕБ-САЙТОВ

А. А. Печников¹, А. В. Ланкин²

¹ *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

² *Санкт-Петербургский государственный университет*

Наиболее распространенной математической моделью веб-сайта является веб-граф. Для построения веб-графа реального сайта требуются сведения о его структуре: html-страницах и/или документах сайта (в частности, об URL-адресах веб-ресурсов) и связывающих их гиперссылках. Веб-серверы часто используют псевдонимы и перенаправления, а также динамически генерируют одни и те же страницы по разным URL-запросам. Отсюда возникает проблема, которая заключается в наличии различных URL, имеющих один и тот же контент. Таким образом, мы можем получить веб-граф, у которого отдельные вершины соответствуют страницам сайта с одним и тем же контентом. В работе описывается поисковый робот (краулер) RCCrawler, основной задачей которого является сбор информации о веб-сайтах для построения их веб-графов, во многом решающий указанную проблему, что подтверждается проведенной серией экспериментов.

Ключевые слова: веб-сайт; гиперссылка; краулер; веб-граф.

A. A. Pechnikov, A. V. Lankin. DEVELOPMENT OF A PROGRAM FOR COLLECTION OF WEBSITE STRUCTURE DATA

The web graph is the most common mathematical model of a website. Constructing a web graph of a real site requires data about the structure of that site: html-pages and/or documents in the site (in particular, data about URLs of web resources) and hyperlinks linking them. Web servers often use pseudonyms and redirections. They also generate the same pages dynamically via different URL requests. This raises a problem in which there are various URLs but with the same content. Thus, we can get a web graph in which some of its vertices correspond to pages of a site with the same content. The paper describes a crawler called RCCrawler that collects information about websites to build the web graphs of these sites. This crawler largely addresses the above problem as confirmed by a series of experiments conducted.

Key words: website; hyperlink; crawler; web-graph.

ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Веб-сайт – совокупность html-страниц и веб-документов, связанных внутренними ги-

перссылками и обладающих единством содержания, идентифицируемая в Вебе по уникальному доменному имени. В настоящее время

структура веб-сайтов стала достаточно сложной и может быть сравнима с фрагментами Веба.

У веб-сайта всегда можно выделить его главную страницу, идентифицируемую по доменному имени, уровень которой будем считать равным 0. Тогда уровень любой другой страницы сайта – это минимальное количество кликов, требуемых для перехода на нее с главной страницы.

Для описания такой структуры можно использовать веб-граф сайта – ориентированный граф, вершинами которого являются html-страницы и/или документы, а дугами – гиперссылки между ними. Здесь уровень вершины легко определяется через длину кратчайшего пути до нее из начальной вершины.

Веб-графы как объекты исследований рассматриваются в качестве моделей сайтов во многих работах. К примеру, в [2, 12] веб-граф сайта используется в качестве модели для описания поведения пользователя при перемещении по сайту (так называемого «серфинга»). В [7] с использованием веб-графа дается оценка максимальной глубины сканирования веб-сайта для поиска требуемой информации. Некоторые свойства веб-графа сайта, а именно наличие выделенной начальной вершины, определение уровневой структуры через удаленность веб-страниц от главной страницы и почти всегда сильная связность формулируются в [4].

Для построения веб-графа реального сайта требуются сведения о его структуре: html-страницах и/или документах сайта (в частности, URL-адреса веб-ресурса) и связывающих их гиперссылках, и для этого нужна программа-краулер, умеющая извлекать такие сведения из Веба. Термин «краулер» (англ. crawler) в общем случае обозначает программу, реализующую процесс перемещения по страницам и/или документам Веба с целью сбора определенной информации, статистики или сохранения ресурсов сайта. Иногда в статье такой процесс будем называть краулингом (англ. crawling). Общим принципам разработки краулеров посвящена работа [13].

URL (Uniform Resource Locator) представляет собой стандартизированный способ записи адреса веб-ресурса (html-страницы, изображения, файлы, медиа-поток и т. д.) в Вебе [15,16]. Гиперссылки (или просто ссылки) являются базовыми элементами Веба, связывающими веб-ресурсы [1]. В простейшем виде можно считать, что гиперссылка – это пара <URL-источник, URL-мишень>, где URL-источник является адресом веб-ресурса, с ко-

торого сделана ссылка, реализующая возможность перехода на веб-ресурс с адресом URL-мишень. В частности, гиперссылки, соединяющие страницы и документы одного сайта, задают его внутреннюю структуру; мы будем называть их внутренними гиперссылками в отличие от гиперссылок, соединяющих страницы разных сайтов (то есть внешних гиперссылок).

В статье [17] обсуждаются вопросы, когда различные URL отсылают к одинаковому контенту. Такие повторяющиеся URL-адреса широко распространены на веб-сайтах, так как программное обеспечение веб-сервера часто использует псевдонимы и перенаправления (редиректы), приводя URL-адреса к некоторой канонической форме, и динамически генерирует ту же самую страницу по различным URL.

Например, несложно проверить, что на сайте факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета три разных URL <http://www.apmath.spbu.ru>, <http://www.apmath.spbu.ru/ru/> и <http://www.apmath.spbu.ru/index.html> отсылают к одной и той же (начальной) странице.

Еще один пример с сайта Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН – два разных URL страницы лаборатории телекоммуникационных систем: <http://mathem.krc.karelia.ru/structure.php?plang=r&id=P8> и <http://mathem.krc.karelia.ru/structure.php?id=P8&plang=r>.

Принципиальная возможность избегания разных URL с одинаковым контекстом заключается в сравнении эскизов получаемых страниц/документов, например, по частотному распределению встречающихся слов. Поскольку эта процедура может проводиться только постраничным сравнением, то сравниваемые страницы должны быть предварительно извлечены, что требует очевидных затрат ресурсов, которых хотелось бы избежать, особенно для сайтов, содержащих десятки тысяч страниц.

Часть вопросов, возникающих в связи с повторяющимся контентом, снимается нормализацией URL – процессом, при котором URL приводится к единообразному виду для того, чтобы определить эквивалентность двух синтаксически различных URL-адресов [16].

Проблема «повторяющихся URL», очевидно, может приводить, во-первых, к лишним затратам времени, а во-вторых, к многократно-

му повторению получаемых данных. Возможно, она не представляет больших неприятностей для случая, например, поиска внешних гиперссылок при исчерпывающем поиске на сайте: совпадающие ссылки можно отсеять на завершающем этапе работы.

Но в нашем случае она приводит к построению веб-графов сайтов, имеющих дубли вершин и ссылок, то есть получению неадекватных математических моделей, ведущих к существенным погрешностям при их анализе, а значит, и к неправильным результатам и выводам.

Несмотря на серьезное продвижение в разработке краулеров за последние 5-6 лет (краткий список свободно распространяемых программ можно посмотреть здесь [20]), нам не удалось найти краулер, основной задачей которого является сбор данных о страницах и внутренних ссылках сайта. Практически во всех случаях перечень страниц является побочным эффектом работы краулера, а вопрос о сохранении данных по всем внутренним гиперссылкам не стоит совсем. На практике краулер может «забывать» гиперссылки, по которым он перемещается, важно хранить список страниц и ссылок, по которым он попал на эти страницы.

Отсюда следует основная цель данной работы, заключающаяся в разработке специализированного краулера, решающего задачу сканирования заданного веб-сайта с целью сбора данных о его внутренней структуре, используемых далее для построения веб-графа сайта, с дополнительным требованием минимизации проблемы повторяющихся URL.

КРАУЛЕР RSCRAWLER: ТРЕБОВАНИЯ К РАЗРАБОТКЕ

В данном разделе описаны основные и дополнительные требования, в соответствии с которыми был разработан краулер, названный Rapid Configurable Crawler (RCCrawler).

Основные требования к программе:

1. Получать в качестве исходных данных список доменных имен сайтов, предназначенных для сканирования. Предполагается, что имеется некоторое множество исследуемых сайтов, поэтому должна быть предусмотрена возможность сканирования нескольких сайтов одновременно.
2. Обходить каждый сайт, начиная с главной (индексной) страницы, перемещаясь по внутренним гиперссылкам в заданном порядке обхода «вначале вширь» [3].
3. Выдавать в качестве результата данные для построения веб-графов сайтов, полученных на

входе, в виде файлов, имена которых ассоциируемы с доменными именами сайтов.

4. Иметь возможность обхода нескольких сайтов одновременно.
5. Иметь расширяемую архитектуру для последующего развития функциональности.
6. Иметь механизмы внешней остановки работы приложения с сохранением состояния для продолжения работы с точки останова.
7. Иметь механизмы внутренней остановки работы приложения в специально перечисленных случаях типа: не осталось не обходивших внутренних гиперссылок, по истечении времени ожидания доступа к веб-ресурсу, по достижении заданной глубины сканирования.
8. Следовать правилам из файла ограничения доступа к содержимому сайта robots.txt [5], что помогает избегать ненужных ссылок вроде страниц поиска, авторизации, сортировки по заданным параметрам, приводящих в некоторых случаях к бесконечному процессу сканирования.

Дополнительные требования:

1. Объектами сканирования являются только html-страницы, а гиперссылки, указывающие на файлы с расширениями rar, ppt, xls, doc, js и прочие, не рассматриваются.
2. Гиперссылки извлекаются из полученной html-страницы из тегов <a> без предварительного выполнения сценариев и имитации действий пользователя. Такое допущение упрощает разработку и позволяет меньше нагружать ресурсы компьютера.
3. Для гиперссылки, содержащей URL, соответствующей узлу веб-графа, сервер должен выдавать ответ с кодом состояния HTTP [19], равным 200 (OK – успешный запрос).
4. В случае, если код ответа равен 301 (Moved Permanently), 302 (Moved Temporarily) или 303 (See Other) [11], необходимо выполнить переход по указанному в ответе URL и заменить адрес обрабатываемой страницы новым, по которому выполняется переход. Такое требование связано с тем, что пользователь в окне браузера получает страницу по конечной ссылке и «не замечает» промежуточных страниц с переходами (редиректами).
5. Следует игнорировать внешние гиперссылки, включая случаи, когда это ссылка на поддомен данного домена. В рамках данной работы поддомен считается отдельным сайтом в соответствии с данным ранее определением сайта.
6. Следует игнорировать ссылки с протоколом передачи данных, отличным от заданного.
7. Следует игнорировать результаты запросов по гиперссылкам в тех случаях, когда ответ

сервера в http-заголовках не указан Content-type как text/html или Content-type отсутствует [10].

8. Страницы с одинаковым содержимым (дубли) считаются одной и той же страницей.

9. Ссылки должны проходить нормализацию [16].

НОРМАЛИЗАЦИЯ URL

Следуя [16], кратко опишем три основных типа нормализации, реализованные в RSCrawler.

I. Нормализация, сохраняющая исходное написание URL:

1. Конвертация протокола и хоста в нижний регистр. Пример:

`http://eXaMplE.com` → `http://example.com`.

2. Удаление порта по умолчанию. По умолчанию для доступа к сайту по протоколу http используется 80 порт. В случае протокола https по умолчанию используется 443 порт. Пример:

`https://example.com:443/q.html` →

`https://example.com/q.html`.

3. Перевод закодированных знаком процента последовательностей в верхний регистр.

Пример:

`http://example.com/%3a%2B` →

`http://example.com/%3A%2B`.

II. Нормализация, частично сохраняющая исходное написание URL:

1. Добавление завершающего слеша. Пример:

`http://example.com/folder` →

`http://example.com/folder/`.

На практике данная процедура не всегда дает эквивалентный URL.

2. Нормализация пути. Символы перехода на уровень выше ("..") или текущего каталога (".") можно удалить до отправки http запроса по алгоритму, описанному в [16], раздел 5.2.4 Remove Dot Segments. Пример:

`http://example.com/f1/./f2/./f3` →

`http://example.com/f1/f3`.

III. Нормализация, полностью изменяющая исходное написание URL:

1. Отбрасывание идентификации фрагмента. Пример:

`http://example.com/folder/#fragment` →

`http://example.com/folder`.

2. Замена двойных слешей на одинарный.

Пример:

`http://example.com/f1//f2` →

`http://example.com/f1/f2`.

3. Замена IP-адреса именем домена. Если мы знаем, что данному IP соответствует определенный домен, мы можем сделать замену IP на домен. Пример:

`https:// 208.76.188.166` →

`https://example.com`.

4. Сортировка параметров GET запроса.

Пример:

`http://example.com/?b=1&a=3` →

`http://example.com/?a=3&b=1`.

5. Удаление «?» при пустом списке параметров GET запроса. Пример:

`http://example.com/?` → `http://example.com/`.

6. Удаление пустых параметров GET запроса. Пример:

`http://example.com/?a&b=1&c=2` →

`http://example.com/?b=1&c=2`.

ОБЩАЯ АРХИТЕКТУРА RSCRAWLER

RSCrawler является многопоточным мультиплатформенным краулером, написанным на языке C++ стандарта C++11 с использованием фреймворка Qt версии 5.5 [14]. Он обладает общей архитектурой, которая может конкретизироваться определенными классами и, таким образом, реализовывать разные задачи, связанные с краулингом. На рисунке 1 представлена схема архитектуры краулера.

При запуске главного потока происходит чтение файла начальных установок *settings.ini* и выбирается реализация интерфейса **ApplicationManager**. Данный объект осуществляет управление приложением, инициализирует все другие потоки и ключевые объекты и завершает работу приложения. Например, потомок **ApplicationManager** может считывать при запуске необходимые данные из текстовых файлов или выполнять поступающие команды.

DownloadingThread представляет собой базовый класс для потока, занимающегося загрузкой страниц.

ParsingThread – базовый класс, потомки которого занимаются разбором скачанных страниц. Тут может быть любой разбор, не только извлечение ссылок, как в данной работе. Одновременно может быть несколько таких потоков, так как разбор страниц в данном случае – основная нагрузка.

RoutineThread – потомки этого класса должны заниматься протоколированием, переносом части данных в базу данных для уменьшения потребляемой оперативной памяти и другими операциями.

В многопоточном приложении необходимо согласовывать доступ к общим данным и минимизировать общение потоков. **DataManager** представляет интерфейс для получения потоками необходимых для работы данных. Потомки должны реализовывать блокировки для исключения так называемых «гонок за данными», когда несколько потоков модифицируют содержимое одной и той же области памяти.

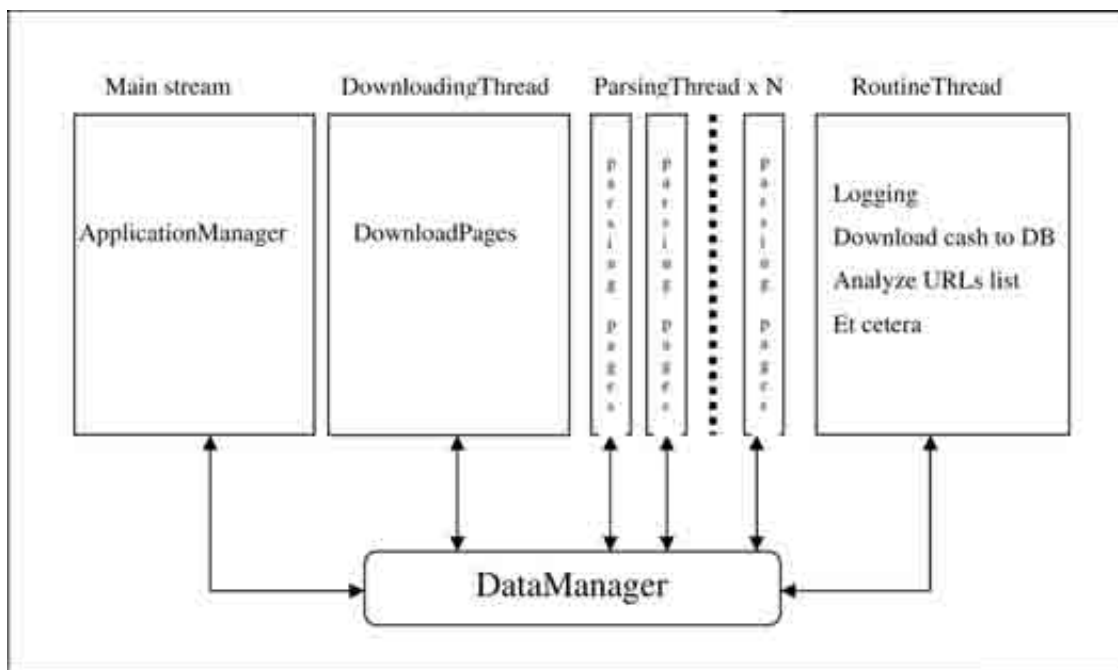


Рис. 1. Архитектура RCCrawler

DataManager делает общение потоков не столь необходимым. Также этот интерфейс дает возможность инкапсуляции данных, то есть совместного хранения данных и кода для их обработки полностью в оперативной памяти, во внешних источниках либо частично в оперативной памяти. Этот аспект касается только реализации **DataManager** и не влияет на другие компоненты RCCrawler.

За страницы сайта и связи между ними отвечают структуры **HostData**, **PageData** и **PageArc**. Рассмотрим их назначение и структуру.

HostData отвечает за сайт.

Поля:

```
QString host;
QString protocol;
QString str;
uint crawlDelay;
uint maxDownloadsAtTime;
int maxCrawlLevel;
RTRContainer rules;
```

здесь

host – строка с именем сайта (пример: "example.com");
 protocol – протокол (пример: "https");
 str – строка для быстрой подстановки (пример: "https://example.com");
 crawlDelay – задержка по скачиванию в миллисекундах (целое);
 maxDownloadsAtTime – количество одновременных загрузок с сайта;
 maxCrawlLevel – максимальный уровень крау-

линга (включительно);

rules – правила из robots.txt сайта.

PageData отвечает за страницу.

Поля:

```
ulong id;
HostData* phD;
QString url;
QString normalizedUrl;
ulong idFrom;
uint level;
uint outDegree;
bool blocked;
bool downloaded;
bool parsed;
QString content;
uint contentHash;
uint errorCode;
ulong replaceId;
uint downloadAttempts;
bool remove;
```

здесь

id – уникальный идентификатор, не должен быть равен нулю;
 phD – указатель на соответствующую структуру HostData;
 url – исходная ссылка;
 normalizedUrl – нормализованная ссылка;
 idFrom – id страницы, откуда получена ссылка на данную страницу;
 level – уровень страницы;
 outDegree – количество внешних исходящих ссылок;
 blocked – этот параметр должен устанавли-

ваться 'true' в случае, если данная страница отправлена на скачивание, и вновь устанавливаться 'false' при обновлении;
 downloaded – код, показывающий, была ли страница скачана;
 parsed – код, показывающий, был ли совершен разбор html страницы;
 content – содержимое страницы;
 contentHash – хеш-таблица содержимого страницы. Если страница была разобрана, то ее содержимое хранить не нужно, а по анализу хеш-таблицы можно выявить, является ли страница дублем;
 errorCode – код ошибки, 0 – если ошибки нет;
 replaceId – id страницы, дублем которой является текущая;
 downloadAttempts – количество попыток скачать страницу. Ограничение на этот параметр помогает избежать циклических редиректов;
 remove – при обновлении PageData в хранилище DataManager сигнализирует о необходимости удаления и совершения сопутствующих действий.

PageArc отображает связь между двумя страницами.

Поля:

ulong id;

ulong from;

ulong to;

id – уникальный идентификатор, не должен быть равен нулю;

from – id PageData, на которой находится ссылка;

to – id PageData, на которую указывает ссылка.

Рассмотренные выше структуры являются основным набором данных, которые хранит DataManager и которыми оперирует все приложение. Их достаточно для построения веб-графа сайта.

Важными вспомогательными базами классами являются **RobotsTxt**, **ApplicationFinisher**, **ResultUnloader**.

RobotsTxt реализует получение файла robots.txt и проверку на следование правилам этого файла в процессе краулинга.

ApplicationFinisher выполняет проверку, нужно ли завершить приложение с использованием метода needToFinishApplication. Возможные варианты: вся работа выполнена, истек таймаут.

ResultUnloader осуществляет выгрузку результата в требуемом виде.

Конфигурация RSCRAWLER для РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

В качестве **ApplicationManager** используется TextFileAM. Алгоритм его работы:

1. Создать и настроить реализации DataManager, DownloadingThread, заданное количество ParsingThread, RoutineThread, требуемые реализации ApplicationFinisher согласно файлу settings.ini (пример файла будет описан ниже).

2. Прочитать файл hosts.txt в качестве источника данных о сайтах для сканирования. Данный файл содержит построчно адреса сайтов и дополнительную информацию в следующем формате для каждой строки: protocol://host;maxDownloadsAtTime;maxCrawlLevel;crawlDelay.

3. Для каждого сайта получить правила из robots.txt и поместить стартовую страницу в DataManager.

4. Запустить потоки, определенные в п. 1.

5. Проверять в цикле с помощью реализаций ApplicationFinisher необходимость завершить приложение.

6. В случае положительного ответа от одного из ApplicationFinisher произвести выгрузку результата с помощью реализаций ResultUnloader, указанных в settings.ini.

7. Завершить приложение.

DownloadingThread в используемой конфигурации представлен классом **DT0**, который асинхронно загружает страницы, используя QNetworkAccessManager и сигнально-слотовую систему Qt. Упрощенный цикл работы:

1. Обработать события: принять сигналы и вызвать связанные слоты.

2. Запросить у DataManager коллекцию PageData для скачивания по каждому сайту.

3. По каждому сайту поставить данные на загрузку, если есть свободные соединения.

4. При выполнении требуемых условий отправить загруженные данные на обновление в DataManager.

ParsingThread представлен классом **PT0**. Упрощенный цикл работы: 1. Получить коллекцию PageData для разбора у DataManager.

2. Для каждой PageData:

- поставить в поле parsed 'true',

- разобрать content на ссылки.

3. По каждой ссылке:

- проверить, является ли она внутренней,

- если нет, то повысить outDegree; если да, то нормализовать ссылку и добавить в выходную коллекцию PDAndPACreateData (вспомогательная структура для обработки внутри DataManager и создания соответствующих данных).

4. Отправить выходную коллекцию PDAndPACreateData на вставку в DataManager.

5. Отправить входную коллекцию PageData в DataManager на обновление.

RoutineThread представлен классом **RT0**. Его единственной функцией является логирование (протоколирование).

Доступны три реализации ApplicationFinisher: **WorkIsDoneAF**, **TimeoutAF** и **StopFileAF**. Первая возвращает 'true' в методе needToFinishApplication, если у DataManager нет PageData для скачивания и обработки, вторая – по истечении таймута. Так как прием пользовательского ввода во время работы невозможен по причине активного вывода информации по скачанным страницам и ошибкам, в качестве средства внешнего завершения приложения была разработана реализация StopFileAF, которая проверяет появление файла с заданным именем в каталоге приложения и сигнализирует о необходимости остановки в случае его наличия.

GephiSiteGraphRU является используемой реализацией ResultUnloader. Выгружает данные в формате для построения графа в Gephi – графической оболочке для представления и изучения графов [9].

В качестве DataManager используется **BMICDM** (Boost Multi-Index Container Data Manager). Для хранения структур PageData и PageArc используется Boost Multi-index Container Library [6]. Multi-index container представляет собой таблицу базы данных в памяти, доступ в которой осуществляется по индексам по полю или набору полей, и эти индексы задаются на этапе компиляции. Таким образом, доступ и поиск данных в такой коллекции обладает высокой производительностью. Также индекс может быть уникальным, и поэтому вставка с нарушением уникальности не будет происходить. Все эти качества multi-index container позволяют потокам находиться в ожидании разблокировки ресурса меньшее время.

Для экспериментов по проверке работоспособности RSCrawler использовался следующий файл *settings.ini*:

```
ApplicationManager = "TextFileAM"  
ApplicationFinishers = "WorkIsDoneAF,  
TimeoutAF,StopFileAF"  
DataManager = "BMICDM"  
DownloadingThread = "DT0"  
ParsingThread = "PT0"  
ParsingThreadsCount = 2  
RoutineThread = "RT0"  
UrlAnalyzingThread = "EmptyUAT"  
ResultUnloaders = "GephiSiteGraphRU,TestRU"  
DownloadingThreadPDChunkSizeMultiplier = 5
```

```
ParsingThreadPDChunkSize = 20  
DownloadingThreadSleepTime = 1  
ParsingThreadSleepTime = 1  
RoutineThreadSleepTime = 1000  
CommonLogFile = "logs/common_log.csv"  
ErrorLogFile = "logs/error_log.csv"  
DisplayCommonLog = 1  
DisplayErrorLog = 1  
RobotsTxtClass = "OnlyDisallowRobotsTxt"  
TimeoutSeconds = 240000  
ResultFolder = "result"  
SaveDuplicates = 1  
StopFile = "stop.txt"
```

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С RSCRAWLER

Проверка работоспособности RSCrawler была проведена, в частности, на сайтах двух тематических множеств: веб-сайты факультетов и институтов Санкт-Петербургского государственного университета (22 сайта) и веб-сайты институтов Карельского научного центра РАН (8 сайтов).

Результаты сканирования показывают очень большое разнообразие веб-сайтов как по количеству страниц (от 400 до 30 000), так и по количеству внутренних гиперссылок (от 14 000 до 1 570 000). Значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена между этими характеристиками, равное -0.05, показывает слабую обратную корреляцию.

Неожиданными выглядят и некоторые другие результаты, например, среднее число ссылок, исходящих со страницы (по всем сайтам), равное 67.

Результаты сканирования частично можно было сравнить с результатами, полученными с помощью двух программ: Screaming Frog [18] и ComparseR [8].

Screaming Frog – программа, разработанная в Великобритании, позволяющая в бесплатном режиме сканировать до 500 страниц/документов сайта, ComparseR – российская разработка с ограничением по сканированию в 150 html-страниц.

В обоих случаях получаем список html-страниц (начиная с начальной страницы), выдаваемых последовательно с возрастанием их уровня. К сожалению, список всех внутренних гиперссылок, связывающих эти страницы, ни в Screaming Frog, ни в ComparseR не создается. Для каждой найденной страницы указывается только URL страницы-предшественницы.

Достаточно условно можно выделить четыре следующие группы сайтов так, как это изображено на рисунке 2.

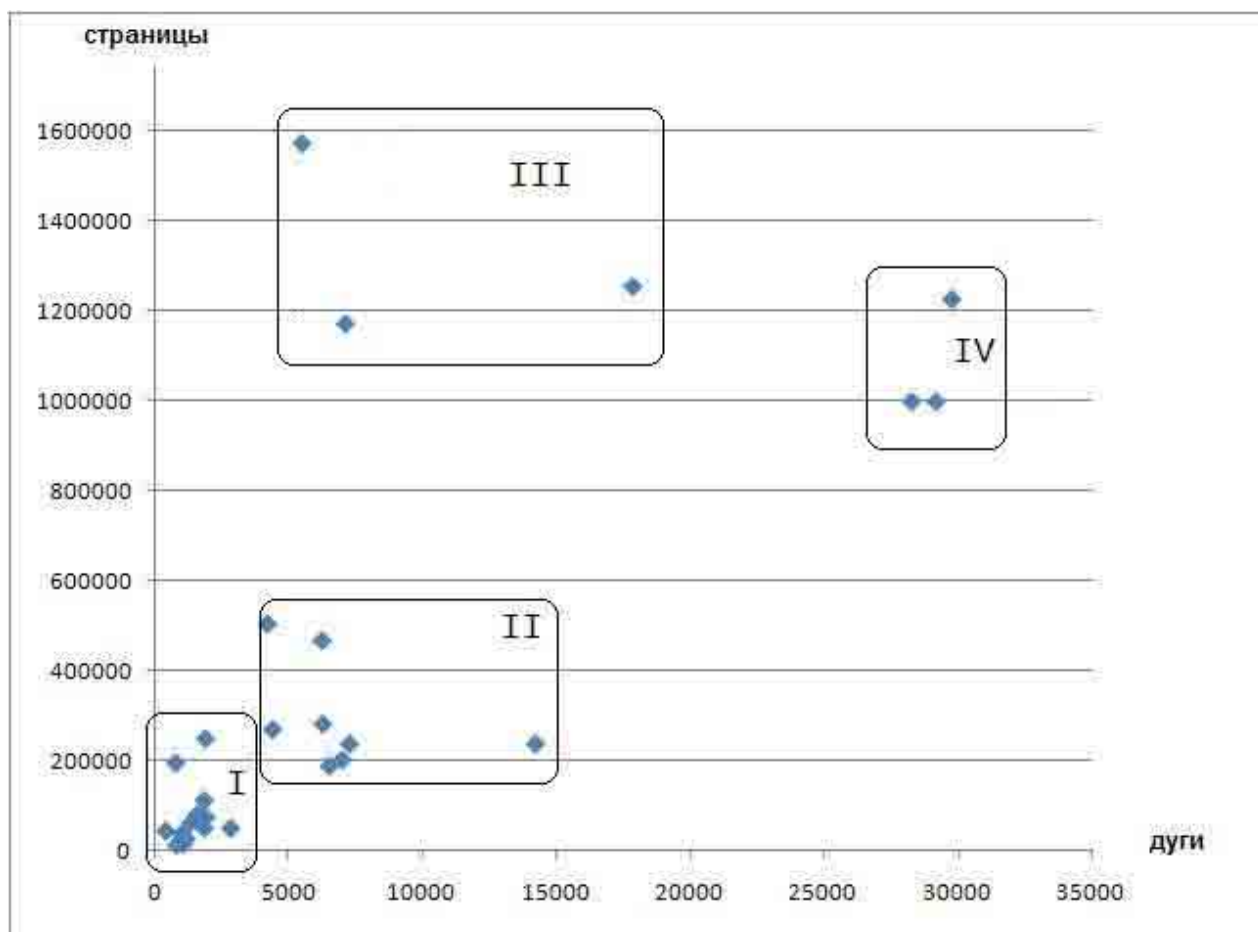


Рис. 2. Четыре группы сайтов

Основные результаты сравнения результатов краулинга кратко можно описать так.

Для группы I («маленькие» сайты с небольшим количеством страниц и ссылок) краулер RCCrawler выдает практически одинаковые результаты с ComparseR для первых 150 страниц и с Screaming Frog для 500 страниц.

Для группы II при тех же количествах сравниваемых страниц несовпадение результатов RCCrawler и ComparseR составляет до 15 %, а RCCrawler и Screaming Frog – до 20 %.

Для группы III несовпадение результатов RCCrawler и ComparseR составляет до 20 %, а для группы IV – до 25 %. Screaming Frog для сайтов групп III и IV генерирует до 25 % страниц с одинаковым контентом, поэтому мы его вынужденно исключили из сравнения в этих двух случаях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приводится подробное описание основных требований, общей архитектуры и конфигурации краулера RCCrawler, предназначенного для решения достаточно узкой, но

важной для исследований Веба задачи, а именно – сбора информации о веб-сайтах для последующего построения и исследования их веб-графов.

Одной из важных проблем, решаемых в RCCrawler, является проблема повторяющегося контента при разных URL. Эксперименты, проведенные на множестве университетских и научных веб-сайтов, показали хорошие результаты для относительно небольших сайтов и вполне удовлетворительные – для сайтов, содержащих до полутора десятков тысяч страниц и шестисот тысяч ссылок.

В научном плане разработанный RCCrawler позволит собрать экспериментальную базу для исследования таких важных вебометрических задач, как рациональная структура веб-сайта, глубина сканирования, сравнительный анализ структур различных сайтов, модели «серфинга» и др.

В практическом плане необходимо продолжить исследования результатов краулинга и реализации дополнительных возможностей RCCrawler, улучшающих результаты ра-

боты на очень больших сайтах. Реализация таких возможностей предусмотрена расширяемой архитектурой краулера.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №15-01-06105 А «Разработка вебметрических и эргономических моделей и методов анализа эффективности присутствия в Вебе информационных веб-пространств крупных организаций».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиперссылка* // Википедия [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Гиперссылка> (дата обращения: 15.04.2016).
2. *Горбунов А. Л.* Марковские модели посещаемости веб-сайтов // Интернет-математика 2007: сб. работ участников конкурса научных проектов по информационному поиску. 2007. С. 65–73.
3. *Левитин А. В.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс, 2006. 576 с.
4. *Печников А. А., Чернобровкин Д. И.* Об исследованиях веб-графа сайта // Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах: материалы конф. 2012. С. 1069–1072.
5. *An Extended Standard for Robot Exclusion* [Электронный ресурс]. URL: <http://www.conman.org/people/spc/robots2.html> (дата обращения: 16.04.2016).
6. *Boost Multi-index Containers Library* [Электронный ресурс]. URL: http://www.boost.org/doc/libs/1_58_0/libs/multi_index/doc (дата обращения: 17.04.2016).
7. *Baeza-Yates R., Castillo C.* Crawling the Infinite Web: Five Levels are Enough // Lecture Notes in Computer Science. Algorithms and Models for the Web-Graph, Third International Workshop. 2004. Vol. 3243. P. 156–167.
8. *CompareR* – специализированная программа [Электронный ресурс]. URL: <http://parser.alaev.info> (дата обращения: 15.04.2016).

REFERENCES

1. *Hyperlink*. Wikipedia. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperlink> (accessed: 15.04.2016).
2. *Gorbunov A. L.* Markovskie modeli poseschamosti saitov [Markov models of website visitation]. Internet-matematika 2007: sb. rabot uchastnikov konkursa nauchnyh proektov po informacionnomu poisku [Internet mathematics 2007: Proceedings of the contest of scientific projects for information retrieval]. 2007. P. 65–73.

9. *Gephi* – The Open Graph Viz Platform [Электронный ресурс]. URL: <https://gephi.org> (дата обращения: 14.04.2016).

10. *HTTP/1.1: Header field definitions* [Электронный ресурс]. URL: <https://www.w3.org/Protocols/rfc2616/rfc2616-sec14.html> (дата обращения: 17.04.2016).
11. *HTTP 300 Status Codes* [Электронный ресурс]. URL: <http://developer.att.com/application-resource-optimizer/docs/best-practices/http-300-status-codes> (дата обращения: 25.04.2016).
12. *Liu Y., Ma Z. M., Zhou C.* Web Markov Skeleton Processes and Their Applications // Tohoku Mathematical Journal. 2011. No. 63. P. 665–695.
13. *Pant G., Srinivasan P., Menczer F.* Crawling the Web // In Web Dynamics / M. Levene and A. Poulouvasilis, eds. Springer, 2004. P. 153–178.
14. *Qt* – Home [Электронный ресурс]. URL: <http://www.qt.io> (дата обращения: 15.04.2016).
15. *RFC 1738* – Uniform Resource Locators. 1994. [Электронный ресурс]. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc1738> (дата обращения: 25.04.2016).
16. *RFC 3986* – Uniform Resource Identifier. 2005. [Электронный ресурс]. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3986> (дата обращения: 16.04.2016).
17. *Schonfeld U., Bar-Yossef Z., Keidar I.* Do not crawl in the dust: different URLs with similar text // ACM Transactions on the Web. 2009. Vol. 3, no. 1. P. 111–131.
18. *Screaming Frog* [Электронный ресурс]. URL: <https://www.screamingfrog.co.uk/seo-spider> (дата обращения: 25.04.2016).
19. *Status codes in HTTP* [Электронный ресурс]. URL: <https://www.w3.org/Protocols/HTTP/HTRESP.html> (дата обращения: 15.04.2016).
20. *Web crawler*. Open-source crawlers [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Web_crawler#Open-source_crawlers (дата обращения: 14.04.2016).

Поступила в редакцию 10.05.2016

3. *Levitin A. V.* Algoritmy. Vvedenie v razrabotku i analiz [Algorithms. Introduction to the design and analysis]. Moscow: Vil'ams, 2006. 576 p.

4. *Pechnikov A. A., Chernobrovkin D. I.* Ob issledovaniyah web-grafa saitа [On the research of site web-graph]. Upravlenie v tehnikeskikh, ergaticheskikh, organizacionnykh i setevykh sistemah: materialy konferencii [Control in technical, ergatic, organizational and network systems: Conference proceedings]. 2012. P. 1069–1072.

5. *An Extended Standard for Robot Exclusion*. URL: <http://www.conman.org/people/spc/robots2.html> (accessed: 16.04.2016).
6. *Boost Multi-index Containers Library*. URL: http://www.boost.org/doc/libs/1_58_0/libs/multi_index/doc (accessed: 17.04.2016).
7. *Baeza-Yates R., Castillo C.* Crawling the Infinite Web: Five Levels are Enough. Lecture Notes in Computer Science. Algorithms and Models for the Web-Graph, Third International Workshop. 2004. Vol. 3243. P. 156–167.
8. *ComparseR* – specialized software. URL: <http://parser.alaev.info> (accessed: 15.04.2016).
9. *Gephi* – The Open Graph Viz Platform. URL: <https://gephi.org> (accessed: 14.04.2016).
10. *HTTP/1.1*: Header field definitions. URL: <https://www.w3.org/Protocols/rfc2616/rfc2616-sec14.html> (accessed: 17.04.2016).
11. *HTTP 300* Status Codes. URL: <http://developer.att.com/application-resource-optimizer/docs/best-practices/http-300-status-codes> (accessed: 25.04.2016).
12. *Liu Y., Ma Z. M., Zhou C.* Web Markov Skeleton Processes and Their Applications. Tohoku Mathematical Journal. 2011. No. 63. P. 665–695.
13. *Pant G., Srinivasan P., Menczer F.* Crawling the Web. In *Web Dynamics*. M. Levene and A. Poulouvasilis, eds. Springer, 2004. P. 153–178.
14. *Qt – Home*. URL: <http://www.qt.io> (accessed: 15.04.2016).
15. *RFC 1738* – Uniform Resource Locators. 1994. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc1738> (accessed: 25.04.2016).
16. *RFC 3986* – Uniform Resource Identifier. 2005. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3986> (accessed: 16.04.2016).
17. *Schonfeld U., Bar-Yossef Z., Keidar I.* Do not crawl in the dust: different URLs with similar text. *ACM Transactions on the Web*. 2009. Vol. 3, no. 1. P. 111–131.
18. *Screaming Frog*. URL: <https://www.screamingfrog.co.uk/seo-spider> (accessed: 25.04.2016).
19. *Status codes in HTTP*. URL: <https://www.w3.org/Protocols/HTTP/HTRESP.html> (accessed: 15.04.2016).
20. *Web crawler. Open-source crawlers*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Web_crawler#Open-source_crawlers (accessed: 14.04.2016).

Received May 10, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Печников Андрей Анатольевич
 главный научный сотрудник, к. ф.-м. н., д. т. н.,
 доцент
 Институт прикладных математических
 исследований Карельского научного центра РАН
 ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
 Республика Карелия, Россия, 185910
 эл. почта: pechnikov@krc.karelia.ru
 тел.: (8142) 763370

Ланкин Александр Валерьевич
 студент
 Санкт-Петербургский государственный университет,
 факультет прикладной математики – процессов
 управления
 Университетский пр., 35, Санкт-Петербург,
 Петергоф, Россия, 198504
 эл. почта: edwvee@gmail.com
 тел.: (812) 4287159

CONTRIBUTORS:

Pechnikov, Andrey
 Institute of Applied Mathematical Research,
 Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
 Karelia, Russia
 e-mail: pechnikov@krc.karelia.ru
 tel.: (8142) 763370

Lankin, Alexandr
 Saint-Petersburg State University
 Faculty of applied mathematics and control processes
 35 Universitetskii prosp., 198504 Petergof,
 Saint Petersburg, Russia,
 e-mail: edwvee@gmail.com
 tel.: (812) 4287159

УДК 519.83

ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭКСПЛУАТАЦИИ БИОРЕСУРСОВ С АСИММЕТРИЧНЫМИ УЧАСТНИКАМИ

А. Н. Реттиева

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Исследована теоретико-игровая модель эколого-экономической системы в дискретном времени. В игре участвуют агенты (фирмы или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на конечном промежутке времени. Агенты эколого-экономической системы различаются временем участия в процессе эксплуатации ресурса. Целью работы является определение кооперативного поведения участников и применение разработанной схемы для рационального использования биоресурсов водоемов Республики Карелия.

Ключевые слова: задача управления биоресурсами; асимметричные игроки; арбитражное решение Нэша.

A. N. Rettieva. ENVIRONMENTAL-ECONOMIC SYSTEM OF BIORESOURCE USE WITH ASYMMETRIC AGENTS

A discrete time game-theoretic model of an environmental-economic system is considered. Agents (firms or fishermen's artel cooperatives) that exploit the fish stock on a finite planning horizon are the participants of the game. The agents have different exploitation times. The main goal of the paper is to construct the cooperative behavior of the participants and to apply the presented setup for wise use of aquatic bioresources of the Republic of Karelia.

Keywords: bioresource management problem; asymmetric players; Nash bargaining solution.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи рационального природопользования являются актуальными для Республики Карелия, обладающей большими запасами возобновляемых ресурсов. В связи с тем, что эгоистическое (некооперативное) поведение участников процесса эксплуатации негативно отражается на состоянии экологической системы, необходима разработка методов поддержания кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы. Еще одной актуальной задачей является определение кооперативного поведения в случае несимметричности агентов, т. к. возобновляемые ре-

сурсы Республики Карелия подвергаются совместной эксплуатации различными экономическими субъектами.

В данной статье исследована модель, в которой агенты различаются временем участия в процессе эксплуатации ресурса. Такая ситуация типична для водоемов Республики Карелия, где есть постоянный (или длительно существующий) хозяйствующий субъект. При этом в различные периоды могут возникать участники, получающие лицензию на эксплуатацию ресурсов на определенный срок. Когда время участия одного из агентов меньше, чем у другого, игрок включается в процесс

эксплуатации на фиксированное время и готов вступить в кооперацию, зная, что это более прибыльно для него. Но так как у агента меньше, чем у партнера, горизонт планирования, то он должен получить выгоду от кооперации большую, чем игрок, который продолжает процесс эксплуатации ресурса дальше.

В работе [3] было предложено использование арбитражной схемы Нэша для определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков в асимметричных задачах. При этом использовались две переговорные схемы: для всего периода продолжения игры и рекурсивная арбитражная процедура, в которой арбитражная схема применяется на каждом шаге игры.

В данной статье предложенный подход с использованием арбитражной схемы Нэша применяется для модели с различным временем участия. При этом агенты не различаются коэффициентами дисконтирования, как это было в [2], поскольку хозяйствующие субъекты Республики Карелия находятся в одних и тех же экономических условиях. Предложенная схема апробируется для популяции сига озера Сязозеро. По имеющимся данным матричным методом оценки запаса была восстановлена численность популяции и параметры функции развития. Проведено сравнение состояния экологической системы и прибыли агентов при кооперативном и эгоистическом поведении.

МОДЕЛЬ И КООПЕРАТИВНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Рассматривается теоретико-игровая модель эколого-экономической системы, связанной с эксплуатацией возобновляемых ресурсов. Для описания такой системы используется так называемая модель «рыбных войн» [4], характеризующаяся степенной функцией развития популяции и логарифмическими функциями выигрышей агентов. Пусть два агента (фирмы или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^\alpha, \quad x_0 = x, \quad (1)$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент времени t , $\varepsilon \in (0, 1)$ – коэффициент естественной выживаемости, $\alpha \in (0, 1)$ – коэффициент естественного роста, $u_{it} \geq 0$ – вылов агента i , $i = 1, 2$.

Заметим, что при отсутствии эксплуатации у данной системы существует стационарное состояние $x = 1$. Если $x_0 > 1$, то популяция убывает, неограниченно приближаясь к $x = 1$, ес-

ли же $x_0 < 1$, то возрастает с такой же асимптотой.

Предполагается логарифмический вид функций выигрышей агентов эколого-экономической системы. Применение таких функций связано с задачей максимизации темпов роста функции производства (в данном случае – вылова), что легко показать в задаче с непрерывным временем. Рассмотрим суммарное дисконтированное значение удельной скорости роста функции $u(t)$

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{u'(t)}{u(t)} dt.$$

Проинтегрировав по частям, считая, что $u(0) = 1$ и $e^{-\rho t} \ln u(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \rho \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln u(t) dt.$$

Таким образом, задача максимизации скорости роста функции $u(t)$ эквивалентна задаче максимизации функции $\ln u(t)$ на бесконечном промежутке планирования.

В данной статье предполагается, что агенты эколого-экономической системы различаются горизонтами планирования, что соответствует реальным процессам эксплуатации биоресурсов водоемов Республики Карелия. Пусть первый агент эксплуатирует ресурс на протяжении n_1 моментов времени, а второй – на протяжении n_2 моментов времени. Предположим, для определенности, что $n_1 < n_2$. Таким образом, в данной модели на временном промежутке $[0, n_1]$ агенты вступают в кооперацию, и необходимо определить их кооперативные стратегии. После момента n_1 до момента n_2 второй агент продолжает процесс эксплуатации индивидуально. Следовательно, выигрыши агентов эколого-экономической системы имеют следующий вид:

$$J_1 = \sum_{t=0}^{n_1} \delta^t \ln(u_{1t}^c),$$

$$J_2 = \sum_{t=0}^{n_1} \delta^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta^t \ln(u_{2t}^a), \quad (2)$$

где u_i^c , $i = 1, 2$ – кооперативные стратегии, u_2^a – стратегия второго агента, эксплуатирующего ресурс индивидуально.

Для построения кооперативных стратегий и выигрышей участников процесса эксплуатации применяется арбитражная схема Нэша

для всего периода продолжения игры [3]. Таким образом, решается следующая задача:

$$\begin{aligned} & (V_1^c(x)[0, n_1] - V_1^N(x)[0, n_1]) \times \\ & \times (V_2^c(x)[0, n_1] + V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1, n_2] - \\ & - V_2^N(x)[0, n_1] - V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2]) = \\ & = \left(\sum_{t=0}^{n_1} \delta^t \ln(u_{1t}^c) - V_1^N(x)[0, n_1] \right) \times \\ & \times \left(\sum_{t=0}^{n_1} \delta^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta^t \ln(u_{2t}^a) - \right. \\ & \left. - V_2^N(x)[0, n_1] - V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2] \right) \rightarrow \max, \quad (3) \end{aligned}$$

где $V_i^N(x)[0, n_1]$ – выигрыши в равновесии по Нэшу, $V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1, n_2]$ – выигрыш второго агента, когда он эксплуатирует ресурс индивидуально после n_1 периодов кооперативного поведения участников, $V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2]$ – выигрыш второго агента, когда он эксплуатирует ресурс индивидуально после n_1 периодов некооперативного поведения участников.

Пользуясь результатами [2] и [3], запишем выигрыши в равновесии по Нэшу на промежутке времени $[0, n_1]$:

$$V_i^N(x)[0, n_1] = \sum_{j=0}^{n_1} a^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} A_j - \delta^{n_1} \ln k, \quad (4)$$

где $a = \alpha\delta$, $i = 1, 2$, k – параметр разделения ресурса в конечный момент времени,

$$A_j = \ln \left[\left(\frac{\varepsilon \sum_{l=1}^j a^l}{\left(\sum_{l=0}^j a^l \right)^2 - 1} \right)^{\sum_{i=0}^j a^i} \left(\sum_{l=1}^j a^l \right)^{\sum_{i=1}^j a^i} \right].$$

Тогда, при эгоистическом поведении обоих участников, размер популяции после n_1 периодов эксплуатации примет вид

$$x^{Nn_1} = x_0^{\alpha^{n_1}} (\varepsilon a^2)^{\sum_{j=1}^{n_1} \alpha^j} \prod_{l=1}^{n_1} \left(\frac{\left(\sum_{j=0}^{l-1} a^j \right)^2}{\left(\sum_{j=0}^l a^j \right)^2 - 1} \right)^{\alpha^{n_1-l+1}}. \quad (5)$$

Рассмотрим временной промежуток $[n_1, n_2]$, где второй агент эксплуатирует ресурс индивидуально. Используя [3], запишем выигрыш второго агента, оставшегося в процессе эксплуатации, в виде

$$V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1, n_2] = \sum_{j=0}^n a^j \ln x + \sum_{j=1}^n \delta^{n-j} B^j, \quad (6)$$

где $n = n_2 - n_1$,

$$B^j = \sum_{l=0}^j a^l \ln \left(\frac{\varepsilon}{\sum_{p=0}^j a^p} \right) + \sum_{l=1}^j a^l \ln \left(\sum_{p=1}^j a^p \right).$$

А выигрыш второго агента $V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2]$, когда он участвует в процессе эксплуатации индивидуально после некооперативного поведения участников, – это выигрыш (6) с начальным размером популяции x^{Nn_1} (см. (5)):

$$V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2] = \sum_{j=0}^n a^j \ln(x^{Nn_1}) + \sum_{j=1}^n \delta^{n-j} B^j.$$

Следовательно, все выигрыши, кроме кооперативных, в задаче (3) определены, а кооперативные стратегии и выигрыши получены в следующем утверждении.

Утверждение 1. Кооперативные выигрыши в задаче (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned} & H_{1n_1}^c(\gamma_{11}^c, \dots, \gamma_{1n_1}^c, \gamma_{21}^c, \dots, \gamma_{2n_1}^c; x) = \\ & = \sum_{j=0}^{n_1} a^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \ln(\gamma_{1j}^c) + \\ & + \sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \sum_{i=1}^j a^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) + \delta^{n_1} \ln k, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_{2n_1}^c(\gamma_{11}^c, \dots, \gamma_{1n_1}^c, \gamma_{21}^c, \dots, \gamma_{2n_1}^c; x) = \\ & = \sum_{j=0}^{n_2} a^j \ln x + \sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \ln(\gamma_{2j}^c) + \\ & + \sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \sum_{i=1}^{n+j} a^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) + \\ & + \sum_{j=1}^n \delta^{n_2-j} B^j + \delta^{n_1} \sum_{j=0}^n a^j \ln(1 - k), \quad (8) \end{aligned}$$

где $n = n_2 - n_1$.

Кооперативные стратегии агентов связаны как

$$\gamma_{1t}^c = \frac{\varepsilon \gamma_{11}^c \sum_{j=0}^{n+t-1} a^j}{\varepsilon \sum_{j=0}^{n+t} a^j + \gamma_{11}^c \sum_{j=t}^{n+t-1} a^j}, \quad (9)$$

$$\gamma_{2t}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{1t}^c \sum_{j=0}^t a^j}{\sum_{j=0}^{n+t} a^j}. \quad (10)$$

Стратегия γ_{11}^c первого агента на последнем шаге определяется из решения одного из уравнений условий первого порядка.

Доказательство. Для определения кооперативного поведения в n_1 -шаговой игре определим кооперативные стратегии, начиная с шага n_1 .

Считаем, что после момента времени n_1 первый игрок получает в качестве компенсации долю k от оставшегося ресурса, а второй игрок продолжает процесс эксплуатации с доли $(1 - k)$ неиспользованного ресурса. Этот подход отличается от традиционного равного деления, параметр k предполагается здесь заранее заданным, но он может быть использован и для регулирования кооперативного поведения.

Рассмотрим одношаговую игру, выигрыш первого агента имеет вид

$$\begin{aligned} H_{11}^c(u_1, u_2; x) &= \ln(u_1) + \delta \ln(k(\varepsilon x - u_1 - u_2)^\alpha) = \\ &= (1 + a) \ln x + a \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \delta \ln k, \end{aligned} \quad (11)$$

второго агента –

$$\begin{aligned} H_{21}^c(u_1, u_2; x) &= \ln(u_2) + \delta V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1, n_2] = \\ &= \ln(u_2) + \delta \sum_{j=0}^n a^j \ln((1 - k)(\varepsilon x - u_1 - u_2)^\alpha) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \delta^{n+1-j} B^j = \\ &= \ln(u_2) + \sum_{j=1}^{n+1} a^j \ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \delta^{n+1-j} B^j + \delta \sum_{j=0}^n a^j \ln(1 - k). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя арбитражную схему Нэша, определим кооперативные стратегии из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} &(H_{11}^c(u_1, u_2; x) - V_1^N(x)[n_1 - 1, n_1]) \times \\ &\quad \times (H_{21}^c(u_1, u_2; x) - \\ &- [V_2^N(x)[n_1 - 1, n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2]]) = \\ &= (H_{11}^c - V_1^N)(H_{21}^c - \tilde{V}_2^N) \rightarrow \max_{u_1, u_2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где \tilde{V}_2^N обозначено выражение в квадратных скобках, а H_{11}^c , H_{21}^c имеют вид (11), (12).

В [2] приведено доказательство того, что решения данной и последующих используе-

мых в доказательстве оптимизационных задач достигаются во внутренней точке допустимого множества и единственны. Поэтому из условий первого порядка получим следующую связь кооперативных стратегий агентов в одношаговой игре:

$$u_2 = \frac{\varepsilon x - u_1(1 + a)}{\sum_{j=0}^{n+1} a^j}. \quad (14)$$

Как и ранее [2], [3], предполагается, что стратегии агентов линейно зависят от количества ресурса $u_1 = \gamma_{11}^c x$, $u_2 = \gamma_{21}^c x$, откуда получаем

$$\gamma_{21}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{11}^c(1 + a)}{\sum_{j=0}^{n+1} a^j}. \quad (15)$$

Теперь рассмотрим задачу (3) с двумя шагами, где стратегии агентов линейны $u_{1t}^c = \gamma_{1t}^c x$, $u_{2t}^c = \gamma_{2t}^c x$. Функция выигрыша первого агента в двухшаговой игре имеет вид

$$\begin{aligned} &H_{12}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{22}^c; x) = \\ &= \ln(\gamma_{12}^c x) + \delta H_1^{1c}(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; (\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha) = \\ &= \ln(\gamma_{12}^c x) + \delta(1 + a) \ln(\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha + \\ &\quad + \delta(\ln(\gamma_{11}^c) + a \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \delta \ln k) = \\ &= (1 + a + a^2) \ln x + \ln(\gamma_{12}^c) + \\ &\quad + a(1 + a) \ln(\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c) + \\ &\quad + \delta \ln(\gamma_{11}^c) + \delta a \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \delta^2 \ln k, \end{aligned}$$

а второго –

$$\begin{aligned} &H_{22}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c; x) = \\ &= \ln(\gamma_{22}^c x) + \delta H_2^{1c}(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c; (\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha) = \\ &= \ln(\gamma_{22}^c x) + \delta \sum_{j=0}^{n+1} a^j \ln(\varepsilon x - \gamma_{12}^c x - \gamma_{22}^c x)^\alpha + \\ &\quad + \delta \ln(\gamma_{21}^c) + \delta \sum_{j=1}^{n+1} a^j \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \delta_2^{n+2-j} B^j + \delta^2 \sum_{j=0}^n a^j \ln(1 - k) = \\ &= \ln(\gamma_{22}^c) + \sum_{j=0}^{n+2} a^j \ln x + \sum_{j=1}^{n+2} a^j \ln(\varepsilon - \gamma_{12}^c - \gamma_{22}^c) + \\ &\quad + \delta \ln(\gamma_{21}^c) + \delta \sum_{j=1}^{n+1} a^j \ln(\varepsilon - \gamma_{11}^c - \gamma_{21}^c) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \delta^{n+2-j} B^j + \delta^2 \sum_{j=0}^n a^j \ln(1 - k). \end{aligned}$$

Для определения кооперативного поведения в этой двухшаговой игре необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} & (H_{12}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c; x) - V_1^N(x)[n_1 - 2, n_1]) \times \\ & \quad \times (H_{22}^c(\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c; x) - \\ & \quad - [V_2^N(x)[n_1 - 2, n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2]]) = \\ & \quad = (H_{21}^c - V_1^N)(H_{22}^c - \tilde{V}_2^N) \rightarrow \max_{\gamma_{11}^c, \gamma_{21}^c, \gamma_{12}^c, \gamma_{22}^c}, \end{aligned} \quad (16)$$

где \tilde{V}_2^N обозначено выражение в квадратных скобках.

Аналогично одношаговой игре для определения оптимального решения необходимо и достаточно использовать условия первого порядка, откуда получим связь между кооперативными стратегиями агентов на втором шаге вида

$$\gamma_{22}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{12}^c(1 + a + a^2)}{\sum_{j=0}^{n+2} a^j}$$

и соотношение между кооперативными стратегиями первого агента на обоих шагах:

$$\gamma_{12}^c = \frac{\varepsilon \gamma_{11}^c \sum_{j=0}^{n+1} a^j}{\varepsilon \sum_{j=0}^{n+2} a^j + \gamma_{11}^c a^2 \sum_{j=0}^{n-1} a^j}. \quad (17)$$

Следовательно, все параметры выражены через одну неизвестную стратегию γ_{11}^c первого агента на последнем шаге, для определения которой необходимо численно решить одно из уравнений условий первого порядка.

Продолжая процесс для n_1 -шаговой игры, получим кооперативные выигрыши в виде (7), (8) и кооперативные стратегии в виде (9), (10). \square

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПУЛЯЦИИ СИГА ОЗЕРА СЯМОЗЕРО

Для моделирования использовались фактические данные о многотычинковом сига озера Сямозеро [5]. Для восстановления численности сига был использован матричный метод оценки запаса [1].

Полученные оценки размера популяции за длительный период позволили оценить параметры функции ее развития. Наиболее адекватной ситуации оказалась степенная функция развития со следующими параметрами:

$$\alpha = 0,89, \quad \varepsilon = 1,45.$$

Данные о восстановленной численности популяции и динамика популяции с такой функцией развития представлены на рисунке 1.

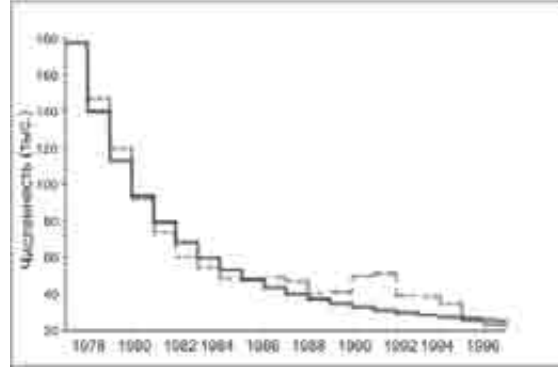


Рис. 1. Размер популяции: сплошная линия — степенная функция развития, пунктир — восстановленная функция развития

Численное моделирование было проведено со следующими параметрами:

$$x_0 = 177,547, \quad \delta = 0,85, \quad k = \frac{1}{3}.$$

Приведем результаты для горизонтов планирования

$$n_1 = 10, \quad n_2 = 20.$$

Численно получено $\gamma_{11}^c = 0,3434$.

Сравним кооперативный и некооперативный выигрыши первого агента на временном промежутке $[0, n_1]$:

$$\begin{aligned} & V_1^c(x)[0, n_1] = 11,6938 > \\ & > V_1^N(x)[0, n_1] = 10,6075. \end{aligned}$$

Для второго агента сравним его кооперативный выигрыш на промежутке $[0, n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1, n_2]$ после кооперации с некооперативным выигрышем на промежутке $[0, n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1, n_2]$ после эгоистического поведения:

$$\begin{aligned} & V_2^c(x)[0, n_1] + V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1, n_2] = 13,3032 > \\ & > V_2^N(x)[0, n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1, n_2] = 12,6271. \end{aligned}$$

Заметим, что кооперативные выигрыши обоих агентов эколого-экономической системы больше, чем выигрыши в равновесии по Нэшу.

На рисунке 2 показан размер популяции на всем промежутке планирования $[0, n_2]$, откуда заметим, что кооперативное поведение благоприятно влияет на экологическую обстановку.

Это связано с тем, что при кооперации устанавливается более «щадящий» режим эксплуатации.

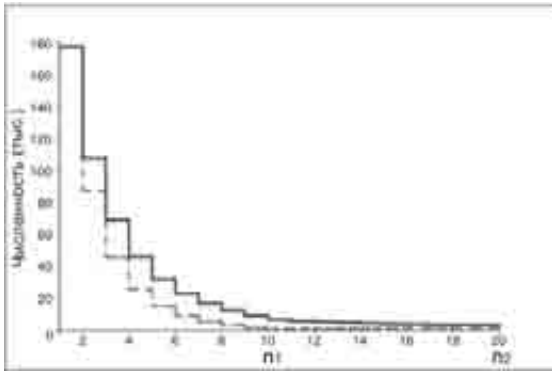


Рис. 2. Размер популяции: сплошная линия – кооперативное поведение, пунктир – равновесие по Нэшу

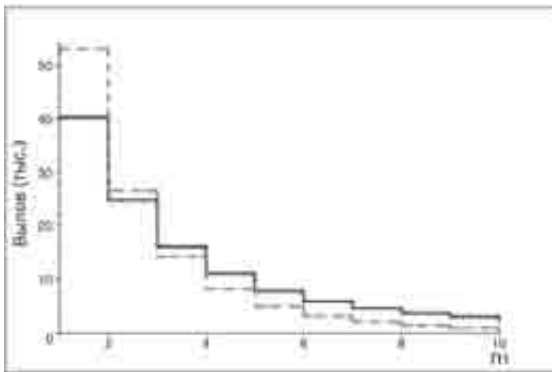


Рис. 3. Вылов первого игрока: сплошная линия – кооперативное поведение, пунктир – равновесие по Нэшу

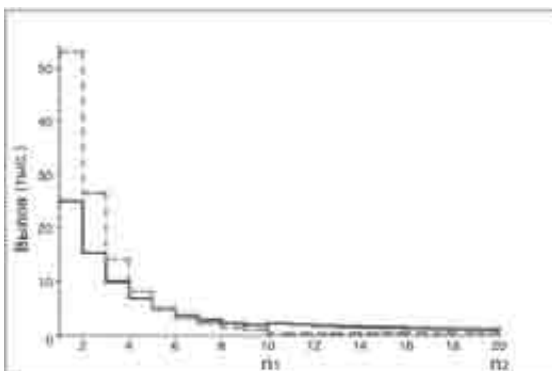


Рис. 4. Вылов второго игрока: сплошная линия – кооперативное поведение+индивидуальный, пунктир – равновесие по Нэшу+индивидуальный

Вылов первого агента на промежутке $[0, n_1]$ показан на рисунке 3, а вылов второго участника на промежутках $[0, n_1]$ и $[n_1, n_2]$ – на рисунке 4. Заметим, что при кооперации вылов второго агента меньше, чем в равновесии по Нэшу, но это компенсируется его дальнейшей индивидуальной эксплуатацией ресурса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционно теоретико-игровые задачи управления биоресурсами рассматривались в предположении симметричности агентов. В предыдущих работах [2], [3] были исследованы модели, в которых участники имеют различные коэффициенты дисконтирования, и предложены схемы определения кооперативного поведения.

В данной статье метод построения кооперативных стратегий и выигрышей агентов с использованием арбитражной схемы Нэша применен для теоретико-игровой модели эксплуатации ресурсов с участниками, различающимися горизонтами планирования. Определены стратегии и выигрыши обоих агентов эколого-экономической системы.

Для численного моделирования были использованы данные о популяции сига озера Сямозеро. Использована степенная функция развития популяции и произведена калибровка параметров для соответствия данным о восстановленной матричным методом оценки запаса численности популяции сига. Показано, что применение арбитражной схемы для определения кооперативного поведения выгодно обоим агентам и при этом благоприятно влияет на состояние экологической системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 16-01-00183_a, 16-41-100062 p_a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абакумов А. И., Кольев Н. В., Максименко В. П., Горр С. В. Матричный метод оценки запаса и прогнозирования вылова популяций морских организмов // Вопросы ихтиологии. 1994. Т. 34, № 3. С. 400–407.
2. Реттиева А. Н. Задача управления биоресурсами с различными горизонтами планирования // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 3. С. 68–87.
3. Реттиева А. Н. Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 3. С. 72–87.
4. Levhari D., Mirman L. J. The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution //

The Bell J. of Economics. 1980. Vol. 11(1). P. 322–334.

5. *Стерлигова О. П., Павлов В. Н., Ильмаст Н. В. и др.* Экосистема Сязозера (биоло-

гический режим, использование). Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2002. 119 с.

Поступила в редакцию 01.07.2016

REFERENCES

1. *Abakumov A. I., Kol'ev N. V., Maksimenko V. P., Gorr S. V.* Matrichnii metod ocenki zapasa i prognozirovanie vilova populacii morskikh organizmov [A matrix method for marine populations' stock estimation and catch prediction]. *Voprosi ihtiologii [Ichthyological aspects]*. 1994. Vol. 34, no. 3. P. 400–407.

2. *Rettieva A. N.* Zadacha upravleniya bioresursami s razlichnymi gorizontami planirovaniya [A bioresource management problem with different planning horizons]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya. [Mathematical game theory and its applications]*. 2014. Vol. 6, iss. 3. P. 68–87.

3. *Rettieva A. N.* Zadacha upravleniya bioresursami s asimmetrichnimi igrokami [A bioresource

management problem with asymmetric players]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya [Mathematical game theory and its applications]*. 2013. Vol. 5, iss. 3. P. 72–87.

4. *Levhari D., Mirman L. J.* The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution. *The Bell J. of Economics*. 1980. Vol. 11(1). P. 322–334.

5. *Sterligova O. P., Pavlov V. N., Il'mast N. V., Pavlovskii S. A., Komulainen S. F., Kuchko Ya. A.* Ecosistema Syamozera (biologicheskii rezhim, ispol'zovanie) [Lake Syamozero ecosystem (biological regime, uses)]. Petrozavodsk: KarRC of RAS, 2002. 119 p.

Received July 05, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Реттиева Анна Николаевна

и. о. зам. директора по научной работе, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: annaret@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTOR:

Rettieva, Anna

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: annaret@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

УДК 004.01:006.72 (470.22)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ FIFO-ОЧЕРЕДЯМИ В ОБЩЕЙ ПАМЯТИ

А. В. Соколов¹, А. М. Сазонов², Е. В. Морозов¹, Р. С. Некрасова¹,
Р. В. Разумчик³

¹ Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

² Петрозаводский государственный университет

³ Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН

В статье рассматриваются задачи оптимального распределения памяти для двух и произвольного числа очередей в общей памяти в дискретном времени. Приведены математические модели и алгоритмы оптимального распределения памяти между очередями, минимизирующие потери информации.

Ключевые слова: FIFO-очереди; теория массового обслуживания; дискретное время; оптимальное разделение памяти.

**A. V. Sokolov, A. M. Sazonov, E. V. Morozov, R. S. Nekrasova,
R. V. Razumchik. MATHEMATICAL MODELS AND
ALGORITHMS FOR THE OPTIMAL CONTROL OF FIFO-
QUEUES IN SHARED MEMORY**

The paper deals with the problems of optimal partition of shared memory for two and arbitrary number of queues in discrete time. Mathematical models and algorithms for the optimal partition of memory between queues, minimizing data loss, are presented.

Key words: FIFO-queues; queuing theory; discrete time; optimal partition of the shared memory.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим ресурс (например, внутреннюю память ПК, которая обладает свойством дискретности) конечной емкости $n \in \mathbb{N}$. Каждая единица емкости может быть в одном из двух состояний – свободна или занята. Будем считать, что время изменяется в фиксированных интервалах (слотах). Величину слота примем равной $h > 0$, единиц времени, и будем считать, что возможные изменения свободной емкости системы происходят случайным обра-

зом на величину ± 1 в моменты времени nh , $n = 1, 2, \dots$. Ресурс одновременно используется несколькими независимо и параллельно работающими системами, с целью организации в нем собственных очередей. Ввиду того, что емкость ресурса ограничена, очереди могут переполняться и в системах могут возникать потери. В данной работе речь пойдет об одной из задач, связанных с нахождением оптимального (с точки зрения минимума потерь) статического распределения емкости ресурса меж-

ду всеми системами, которые этот ресурс могут использовать. Это означает, что оптимальное разделение памяти производится один раз и может меняться только в случае значительного изменения вероятностных характеристик структур данных.

Во многих приложениях требуется работа с несколькими FIFO-очередями, расположенными в общем пространстве памяти. Для этого применяют различные программные или аппаратные решения [1–3]. В ряде работ построены математические модели работы с различными динамическими структурами данных в виде случайных блужданий по целочисленной решетке. Первоначально такие модели в виде случайного блуждания в треугольнике [4–9] были построены для решения задачи анализа процесса работы с двумя стеками, растущими навстречу друг другу, поставленной в [1]. В этих моделях предполагается, что на каждом шаге дискретного времени с заданными вероятностями происходят некоторые операции с очередями. Время выполнения этих операций — не случайная величина, а константа, поэтому фиксированным является и шаг времени. В [10–14] рассмотрены математические модели и алгоритмы оптимального управления FIFO-очередями в общей памяти. В данной статье мы рассмотрим задачу оптимального разделения общей памяти для нескольких FIFO-очереди в случае их последовательного циклического представления. Операции включения и исключения элементов в очереди выполняются за время $O(1)$, т. е. за фиксированное время при любом числе элементов. В качестве критерия оптимальности рассматривается минимальная доля потерянных элементов при бесконечном времени работы очереди. Эту величину разумно минимизировать, когда переполнение очереди является не аварийной, а стандартной ситуацией. То есть если очередь занимает всю предоставленную ей память, все последующие элементы, поступающие в нее, отбрасываются до тех пор, пока не появится свободная память (т. е. до тех пор, пока не произойдет исключение элемента из очереди). Такая схема применяется, например, в работе сетевых маршрутизаторов [3] в том случае, когда по мере увеличения трафика очередь маршрутизатора заполняется. Такое поведение маршрутизатора называется «сбросом хвоста». Потери пакетов приводят к снижению качества обслуживания, поэтому процент потерь, как правило, нужно держать на низком уровне.

Аналогичные постановки уже встречались в области моделирования узлов связи с помо-

щью систем/сетей обслуживания, функционирующих в непрерывном времени. Например, в различных постановках решались задачи (статического/ динамического/ полудинамического) распределения имеющейся свободной емкости $C \in \mathbf{N}$ между несколькими очередями таким образом, чтобы значение некоторого функционала было оптимальным.

Среди близких по постановке работ можно отметить [15, 16, 19–21], где прослеживается аналогия с рассматриваемой задачей (но в непрерывном времени). Так, например, в работе [19] рассматривается аналогичная система, но функционирующая в непрерывном времени, и для нее ставится (и в некоторых случаях решается) задача нахождения такого распределения свободной емкости, которое позволяет достичь заданных вероятностей потерь. Система также упоминается и в [20], но в этой работе внимание уделяется в основном численным экспериментам.

Неоптимальность (с точки зрения потерь) статического распределения свободной емкости обсуждается во многих работах. Чаще всего преимущество отдается полудинамическому распределению (см, например, [20]).

В [16], в более общей постановке, рассматривается случай, когда заявки могут иметь различный целочисленный объем (распределенный по геометрическому закону).

Алгоритмы (целочисленного) поиска оптимального (с точки зрения пропускной способности) распределения свободной емкости в сети массового обслуживания произвольной структуры (но состоящей из узлов типа $M/M/1$) обсуждаются в [17]. В работе упоминается, что решение задачи оптимизации затруднено тем, что для таких систем не существует явных формул для стационарного распределения вероятностей состояний. Одним из вариантов решения является применение эвристических алгоритмов. Однако чаще всего встречается прием, когда каждая система рассматривается независимо от остальных. Здесь подходы отличаются друг от друга тем, каким образом оцениваются исходные параметры каждой системы (интенсивность входящего потока и обслуживания). Подробнее с приближенными методами авторы предлагают ознакомиться в [18].

Применение методов теории очередей к описанной задаче в дискретном времени найти не удалось, однако, как будет показано, данный подход является весьма естественным. В [1, параграф 2.2.2] Д. Кнут писал: «Провести математический анализ алгоритмов динамического распределения памяти чрезвычай-

но трудно... Не исключено, что для такого исследования можно применить некоторые математические результаты теории очередей, однако эта теория имеет, по-видимому, другую направленность». Таким образом, данная статья показывает, что Д. Кнут был не вполне прав и можно применять теорию массового обслуживания к анализу данной задачи в дискретном времени.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХ ОЧЕРЕДЕЙ

Рассмотрим систему обслуживания с буфером заданного размера n , разделенного между двумя очередями. Заявки из каждой очереди обрабатываются обслуживающим устройством (сервером). Рассматривается дискретная шкала времени, разделенного на слоты. В каждый момент времени (слот) возможно одно из следующих событий:

- приход заявки в очередь 1 с вероятностью p_1 ,
- уход из очереди 1 после завершения обслуживания с вероятностью q_1 ,
- приход заявки в очередь 2 с вероятностью p_2 ,
- уход из очереди 2 после завершения обслуживания с вероятностью q_2 ,
- отсутствие приходов и уходов с вероятностью r .

Кроме того, предполагается, что $p_1 + q_1 + p_2 + q_2 + r = 1$. Таким образом, появление двух событий в одном слоте невозможно. В этом состоит важное отличие данной постановки от классической очереди, где при фиксированной длине слота вероятность прихода и ухода (в течение слота), вообще говоря, является положительной. Эта вероятность оказывается равной нулю лишь при рассмотрении системы в непрерывном времени, при построении соответствующих уравнений Колмогорова для основного марковского процесса.

Итак, требуется найти такое значение k размера очереди 1 (тогда размер очереди 2 равен $n - k$), при котором вероятности потери заявок для обеих очередей будут минимальны.

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

Пусть целочисленные случайные величины (с. в.) $\tau^{(i)}$, $S^{(i)}$ есть типичный интервал между приходами заявок и типичное время обслуживания в системе $i = 1, 2$ соответственно. Легко

получить, что с. в. $\tau^{(i)}$ является геометрической,

$$P(\tau^{(i)} \geq j) = (1 - p_i)^j, j \geq 0 \quad (1)$$

со средней длиной $E\tau^{(i)} = \frac{1}{p_i}$ и интенсивностью прихода $\lambda_i = p_i, i = 1, 2$. Аналогично находим, что периоды обслуживания являются геометрическими с интенсивностями $\mu_i = 1/ES^{(i)} = q_i, i = 1, 2$. Таким образом, коэффициент загрузки системы i равен:

$$\rho_i = \frac{p_i}{q_i}, i = 1, 2. \quad (2)$$

Определим $r_1 = 1 - (p_1 + q_1) = p_2 + q_2 + r$ — вероятность того, что в системе 1 за 1 слот времени не было событий. Пусть ν_t есть число заявок в системе 1 в момент (слот) $t = 0, 1, \dots$. Процесс $\{\nu_t\}$ является цепью Маркова с множеством состояний $\{0, 1, \dots, k\}$, матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & q_1 & r_1 & p_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & q_1 & 1 - q_1 \end{pmatrix}$$

и стационарным распределением

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\nu_t = j), j = 0, 1, \dots, k. \quad (3)$$

В результате мы стандартным образом получаем такую систему уравнений для стационарного распределения числа заявок в системе 1

$$P_0 = P_0 \cdot (1 - p_1) + P_1 \cdot q_1, \quad (4)$$

$$P_j = P_{j-1} \cdot p_1 + P_j \cdot r_1 + P_{j+1} \cdot q_1, \quad j = 1, \dots, k - 1 \quad (5)$$

$$P_k = P_{k-1} \cdot p_1 + P_k \cdot (1 - q_1), \quad (6)$$

решение которой с условием нормировки $\sum_{j=0}^k P_j = 1$ имеет вид

$$P_j = P_0 \cdot \rho_1^j = \frac{(1 - \rho_1) \cdot \rho_1^j}{1 - \rho_1^{k+1}}, j = 0, \dots, k, \quad (7)$$

где при $\rho_1 \neq 1$ (т. е. при $p_1 \neq q_1$)

$$P_0 = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^{k+1}} \quad (8)$$

и $P_0 = \frac{1}{k+1}$ при $p_1 = q_1$.

В данной модели за вероятность потери принимается непосредственно потеря заявки

(т. е. приход новой заявки в полностью загруженную систему). Поскольку моменты приходов не зависят от числа заявок в очереди, то

$$P_{loss}^1 = P_k \cdot p_1. \quad (9)$$

Таким образом, вероятность потери в системе 1 при $\rho_1 \neq 1$ есть

$$P_{loss}^1 = P_{k+1} = P_k \cdot p_1 = \frac{(1 - \rho_1) \cdot \rho_1^k \cdot p_1}{1 - \rho_1^{k+1}}. \quad (10)$$

Аналогично вероятность потери в системе 2 при $\rho_2 \neq 1$ есть

$$P_{loss}^2 = \frac{(1 - \rho_2) \cdot \rho_2^{n-k} \cdot p_2}{1 - \rho_2^{n-k+1}}. \quad (11)$$

При $\rho_1 = 1$ вероятность потери в системе 1 равна

$$P_{loss}^1 = \frac{p_1}{k+1}, \quad (12)$$

и в системе 2, при $\rho_2 = 1$:

$$P_{loss}^2 = \frac{p_2}{n-k+1}. \quad (13)$$

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ

Далее задача сводится к минимизации функции

$$\varphi(k) = P_{loss}^1 + P_{loss}^2. \quad (14)$$

Рассмотрим случай равных вероятностей: $p_i = q_i, i = 1, 2$. В данном случае функция $\varphi(k)$ имеет вид:

$$\varphi(k) = \frac{p_1}{k+1} + \frac{p_2}{n-k+1}. \quad (15)$$

Перейдем к непрерывной функции $\varphi(x)$, заданной на $[0, n]$.

Найдем ее минимум, для чего решим уравнение

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -\frac{p_1}{(x+1)^2} + \frac{p_2}{(n-x+1)^2} = 0. \quad (16)$$

Получим

$$x^* = \frac{\sqrt{p_1} \cdot (n+1) - \sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}}. \quad (17)$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} = \frac{2p_1}{(x+1)^3} + \frac{2p_2}{(n-x+1)^3} > 0, \quad (18)$$

то x^* есть точка минимума. Теперь достаточно сравнить значения $\varphi(\lfloor x^* \rfloor)$ и $\varphi(\lceil x^* \rceil)$ и выбрать наименьшее. Существование двух решений означает наличие двух оптимальных разбиений памяти, отличающихся на одну единицу. В случае $x^* \leq 0$ можно либо выделить всю

память очереди 2, тем самым не сохраняя очередь 1, либо выделить очереди 2 $n-1$ и оставить очередь 1 размера 1. Случай $x^* \geq n$ аналогичен предыдущему с точностью до перестановки очередей.

Рассмотрим случай $p_i \neq q_i, i = 1, 2$. В данном случае

$$\varphi(k) = \frac{(1 - \rho_1) \cdot \rho_1^k \cdot p_1}{1 - \rho_1^{k+1}} + \frac{(1 - \rho_2) \cdot \rho_2^{n-k} \cdot p_2}{1 - \rho_2^{n-k+1}}. \quad (19)$$

Перейдем к непрерывной функции $\varphi(x)$, заданной на $[0, n]$.

Теорема 1. *Функция $\varphi(x)$ имеет единственный минимум, и этот минимум является глобальным.*

Доказательство. Для того чтобы доказать существование единственного минимума, являющегося глобальным, достаточно доказать, что функция $\varphi(x)$ выпуклая. Дифференцируем функцию $\varphi(x)$ дважды, находим

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} =$$

$$= p_1 \cdot (1 - \rho_1) \cdot \ln^2 \rho_1 \cdot \frac{\rho_1^x \cdot (1 + \rho_1^{x+1})}{(1 - \rho_1^{x+1})^3} + \quad (20)$$

$$+ p_2 \cdot (1 - \rho_2) \cdot \ln^2 \rho_2 \cdot \frac{\rho_2^{n-x} \cdot (1 + \rho_2^{n-x+1})}{(1 - \rho_2^{n-x+1})^3}.$$

Так как $(1 - \rho_1)$ и $(1 - \rho_1^{x+1})^3$, $(1 - \rho_2)$ и $(1 - \rho_2^{n-x+1})^3$ имеют одинаковый знак, а остальные множители в каждом из слагаемых положительны, то $\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} > 0$.

Таким образом, функция $\varphi(x)$ выпуклая и имеет единственный глобальный минимум. \square

Обозначим точку минимума функции $\varphi(x)$ через x_{min} . Поскольку функция $\varphi(x)$ — выпуклая, то рассматриваемая на множестве целых чисел функция $\varphi(k)$ может иметь не больше двух точек минимума — ближайшие целые точки к x_{min} . Таким образом, достаточно сравнить значения $\varphi(\lfloor x_{min} \rfloor)$ и $\varphi(\lceil x_{min} \rceil)$ и выбрать наименьшее.

Замечание 1. В случае равенства только одной пары $p_i = q_i$ функция φ также является выпуклой, как доказано выше (см. (18), (20)). Таким образом, функция будет иметь единственный глобальный минимум.

На основании выпуклости функции $\varphi(k)$ составим алгоритм для нахождения оптимального разбиения. Данный алгоритм по сути является перебором, заканчивающимся по условию. Если на текущем шаге i алгоритма $\varphi(i) < \varphi(i-1)$ и $\varphi(i) < \varphi(i+1)$, то значение $k = i$ является оптимальным решением. Таким образом, достаточно рассмотреть не все значения функции $\varphi(k)$, а только их часть, расположенную по одной ветви.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ОЧЕРЕДЕЙ

Рассматривается система из m очередей (систем) с общим ресурсом размера n . Заявки из каждой очереди обрабатываются одним обслуживающим устройством (сервером). Рассматривается дискретная шкала времени, разделенного на слоты. В каждый момент времени (слот) возможно одно из следующих событий:

- приход заявки в очередь i с вероятностью p_i
- уход из очереди i после завершения обслуживания с вероятностью q_i
- отсутствие приходов и уходов с вероятностью r .

Кроме того, предполагается, что $p_1 + q_1 + \dots + p_m + q_m + r = 1$. Таким образом, появление двух и более событий в одном слоте невозможно. Пусть k_1, \dots, k_{m-1} — максимальные размеры очереди 1, ..., очереди $m-1$ соответственно. Тогда максимальный размер очереди m равен $n - \sum_{i=1}^{m-1} k_i$. Требуется найти такие значения $k_i, i = 1, \dots, m-1$, чтобы потери заявок были минимальны. Обозначим $k_m = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$ для удобства записи.

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

Для вывода уравнений для данной модели можно провести аналогичные рассуждения как в случае двух очередей. Пусть все $p_i \neq q_i$. Тогда для $i = 1, \dots, m-1$

$$P_j^i = \frac{(1 - \rho_i) \cdot \rho_i^j}{1 - \rho_i^{k_i+1}}, j = 0, \dots, k_i, \quad (21)$$

и для $i = m$:

$$P_j^m = \frac{(1 - \rho_m) \cdot \rho_m^j}{1 - \rho_m^{n-k_m+1}}, j = 0, \dots, n - k_m. \quad (22)$$

Вероятность потери в системе $i, i < m$

$$P_{loss}^i = P_{k_i}^i \cdot p_i = \frac{(1 - \rho_i) \cdot \rho_i^{k_i} \cdot p_i}{1 - \rho_i^{k_i+1}}. \quad (23)$$

Вероятность потери в системе m :

$$\begin{aligned} P_{loss}^m &= P_{n-k_m}^m \cdot p_m = \\ &= \frac{(1 - \rho_m) \cdot \rho_m^{n-k_m} \cdot p_m}{1 - \rho_m^{n-k_m+1}}. \end{aligned} \quad (24)$$

При $p_i = q_i$

$$P_{loss}^i = \frac{p_i}{k_i + 1}, i = 1, \dots, m-1, \quad (25)$$

и

$$P_{loss}^m = \frac{p_m}{n - k_m + 1}. \quad (26)$$

Дальнейшие результаты совпадают с результатами, полученными в работах [11] и [13].

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ

Как и выше, будем минимизировать функцию:

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \sum_{i=1}^m P_{loss}^i = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(1 - \rho_i) \cdot \rho_i^{k_i} \cdot p_i}{1 - \rho_i^{k_i+1}} + \\ &+ \frac{(1 - \rho_m) \cdot \rho_m^{n-k_m} \cdot p_m}{1 - \rho_m^{n-k_m+1}}, \text{ где } k = (k_1, \dots, k_{m-1}). \end{aligned} \quad (27)$$

В случае $p_i = q_i$ i -е слагаемое имеет вид: $\frac{p_i}{k_i+1}$. В случае $p_m = q_m$ последнее слагаемое имеет вид: $\frac{p_m}{n-k_m+1}$.

Рассмотрим случай в (27) $p_i = q_i, i = 1, \dots, m$. Тогда функция имеет вид

$$\varphi(k) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_i}{k_i + 1} + \frac{p_m}{n - k_m + 1}. \quad (28)$$

Перейдем к непрерывной функции $\varphi(x)$, заданной на R^{m-1} .

Чтобы найти точку минимума x^* , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} &= -\frac{p_i}{(x_i + 1)^2} + \\ &+ \frac{p_m}{(n - \sum_{j=1}^{m-1} x_j + 1)^2} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

решение которой имеет вид:

$$x_i^* = \frac{(n + m) \sqrt{p_i}}{\sum_{j=1}^m \sqrt{p_j}} - 1. \quad (30)$$

Докажем, что x^* — точка минимума. Найдем частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2p_m}{\left(n - \sum_{l=1}^{m-1} x_l + 1\right)^3} = A, \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} = \frac{2p_i}{(x_i + 1)^3} + \frac{2p_m}{\left(n - \sum_{l=1}^{m-1} x_l + 1\right)^3} = B_i + A. \quad (32)$$

Так как $0 < x_i$ и $\sum_{i=1}^{m-1} x_i < n$, то $A > 0$, $B_i > 0$. Для того чтобы доказать, что x^* — точка ми-

нимума, нужно, чтобы матрица

$$\varphi'' = \begin{pmatrix} A + B_1 & A & \dots & A \\ A & A + B_2 & \dots & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & A & \dots & A + B_m \end{pmatrix} \quad (33)$$

была положительно определена, т. е. по критерию Сильвестра все ее угловые миноры должны быть положительны.

Докажем это методом математической индукции.

- База ($i = 1$): $\varphi''_1 = A + B_1 > 0$.
- Пусть $\varphi''_i > 0$. Докажем, что $\varphi''_{i+1} > 0$.

$$\begin{aligned} \varphi''_{i+1} &= \begin{vmatrix} A + B_1 & A & \dots & A & A \\ A & A + B_2 & \dots & A & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & A & \dots & A + B_i & A \\ A & A & \dots & A & A + B_{i+1} \end{vmatrix} = \quad (34) \\ &= \begin{vmatrix} A + B_1 & A & \dots & A & A \\ A & A + B_2 & \dots & A & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & A & \dots & A + B_i & A \\ A & A & \dots & A & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A + B_1 & A & \dots & A & 0 \\ A & A + B_2 & \dots & A & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & A & \dots & A + B_i & 0 \\ A & A & \dots & A & B_{i+1} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 & A \\ 0 & B_2 & \dots & 0 & A \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_i & A \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A + B_1 & A & \dots & A & 0 \\ A & A + B_2 & \dots & A & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A & A & \dots & A + B_i & 0 \\ A & A & \dots & A & B_{i+1} \end{vmatrix} = \\ &= AB_1 \dots B_i + B_{i+1} \varphi''_i > 0 \end{aligned}$$

Таким образом, x^* есть точка минимума функции $\varphi(x)$.

Перейдем к целочисленному решению. Рассмотрим функцию $\psi(x_i) = \varphi(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_{m-1}^*)$ при фиксированном i . Тогда

$$\psi'(x_i) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = -\frac{p_i}{(x_i + 1)^2} + \frac{p_m}{\left(n - \sum_{j=1}^{m-1} x_j + 1\right)^2}. \quad (35)$$

Как доказано ранее, $x_i^* = \frac{(n+m)\sqrt{p_i}}{\sum_{j=1}^m \sqrt{p_j}} - 1$ — един-

ственная точка минимума функции $\psi(x_i)$ на $[0, n]$. На промежутке $[0, x_i^*)$ функция $\psi(x_i)$ убывает, поэтому

$$\psi(\lfloor x_i^* \rfloor) < \psi(k_i) \forall k_i = 0, \dots, \lfloor x_i^* \rfloor - 1. \quad (36)$$

На промежутке $(x_i^*, n]$ функция $\psi(x_i)$ возрастает, поэтому

$$\psi(\lceil x_i^* \rceil) < \psi(k_i) \forall k_i = \lceil x_i^* \rceil + 1, \dots, n. \quad (37)$$

Авторами предложен следующий алгоритм разбиения памяти: округлить вниз значения x_i^* и распределить оставшуюся память (размера меньше m) между очередями по методу, описанному далее. Можно показать, что $x_i^* \leq n + 1$. Так как значения x_i^* округляются вниз, то $k_i^* \leq n$. В случае, если несколько $k_i^* = n$, можно решать задачу только для этих очередей, выделив остальным либо по 1, либо 0.

Рассмотрим общий случай, когда есть очереди, для которых $p_i \neq q_i$. Обозначим $k_m = n - \sum_{i=1}^{m-1} k_i$ размер m -й очереди. Как указано

выше, функция φ будет иметь вид:

$$\varphi(k) = \sum_{i=1}^m P_{loss}^i = \sum_{i=1}^m \frac{(1 - \rho_i) \cdot \rho_i^{k_i} \cdot p_i}{1 - \rho_i^{k_i+1}}, \quad (38)$$

где $k = (k_1, \dots, k_m)$.

В случае $p_i = q_i$ i -е слагаемое имеет вид $\frac{p_i}{k_i+1}$.

Для решения данной задачи используем алгоритм, предложенный в [13].

Будем пошагово увеличивать выделяемую очередям память от 0 до n на 1, так чтобы на каждом шаге минимизировать вероятность потери. Будем увеличивать на 1 размер очереди, для которой значение $d = (P_{loss}^i(k_i) - P_{loss}^i(k_i + 1))$ максимально, т. е. при увеличении размера данной очереди достигается наибольшее уменьшение вероятности потери.

Покажем, что данный алгоритм применим для решения данной задачи, т. е. приводит к оптимальному решению.

Обозначим $\varphi_n(k)$ вероятность потери при оптимальном разбиении памяти размера n между m очередями.

$$\begin{aligned} \varphi_n(k) &= \min_{k_1+\dots+k_m=n} \sum_{i=1}^m P_{loss}^i = \quad (39) \\ &= \min_{k_1+\dots+k_m=n} \sum_{i=1}^m \frac{(1 - \rho_i) \cdot \rho_i^{k_i} \cdot p_i}{1 - \rho_i^{k_i+1}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \varphi_n(k) &= \varphi_{n-1}(k) - \\ &- \max_{1 \leq i \leq m} (P_{loss}^i(k_i) - P_{loss}^i(k_i + 1)). \quad (40) \end{aligned}$$

Вычислим начальное значение $\varphi_0(k)$:

$$\varphi_0(k) = \sum_{i=1}^m \frac{(1 - \rho_i) \cdot p_i}{1 - \rho_i} = \sum_{i=1}^m p_i. \quad (41)$$

При размере памяти равном 0 попытка включения элемента в любую очередь будет приводить к его потере. Таким образом, применяя рекуррентную формулу (40), получаем разбиение памяти $k^* = (k_1^*, \dots, k_m^*)$. Покажем, что данное разбиение оптимально, т. е. нужно доказать, что $\varphi(k^*) \leq \varphi(k^{**})$ для любого $k^{**} = (k_1^{**}, \dots, k_m^{**})$. Введем обозначение:

$$s = \max_{1 \leq i \leq m} (P_{loss}^i(k_i) - P_{loss}^i(k_i + 1)). \quad (42)$$

Покажем, что $P_{loss}^i(k_i) - P_{loss}^i(k_i + 1) > P_{loss}^i(k_i + a) - P_{loss}^i(k_i + a + 1)$, где $a > 0$ — некоторое число.

Перейдем к непрерывному случаю. Рассмотрим функцию $h(x_i) = P_{loss}^i(x_i) - P_{loss}^i(x_i + 1)$ на $(0, n)$. При $p_i = q_i$,

$$h(x_i) = \frac{p_i}{x_i + 1} - \frac{p_i}{x_i + 2}, \quad (43)$$

$$h'(x_i) = -\frac{p_i}{(x_i + 1)^2} + \frac{p_i}{(x_i + 2)^2}. \quad (44)$$

Поскольку $x_i + 1 < x_i + 2$, то $h'(x_i) < 0$. Если $p_i \neq q_i$, то

$$\begin{aligned} h(x_i) &= p_i \cdot (1 - \rho_i) \cdot \frac{\rho_i^{x_i}}{1 - \rho_i^{x_i+1}} - \quad (45) \\ &- p_i \cdot (1 - \rho_i) \cdot \frac{\rho_i^{x_i+1}}{1 - \rho_i^{x_i+2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x_i) &= p_i \cdot (1 - \rho_i) \cdot \ln \rho_i \cdot \frac{\rho_i^{x_i}}{(1 - \rho_i^{x_i+1})^2} - \quad (46) \\ &- p_i \cdot (1 - \rho_i) \cdot \ln \rho_i \cdot \frac{\rho_i^{x_i+1}}{(1 - \rho_i^{x_i+2})^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что в слагаемых в (46) совпадают множители, кроме $R_1 := \frac{\rho_i^{x_i}}{(1 - \rho_i^{x_i+1})^2}$ и $R_2 := \frac{\rho_i^{x_i+1}}{(1 - \rho_i^{x_i+2})^2}$. Рассмотрим отношение:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{(1 - \rho_i^{x_i+2})^2}{\rho_i \cdot (1 - \rho_i^{x_i+1})^2} = \left(\frac{1 - \rho_i^{x_i+2}}{1 - \rho_i^{x_i+\frac{3}{2}}} \right)^2. \quad (47)$$

- Пусть $\rho_i < 1$. Тогда, как нетрудно видеть, $h'(x_i) < 0$ (т.к. $\frac{R_1}{R_2} > 0$, $\ln \rho_i < 0$).
- Пусть $\rho_i > 1$. В этом случае также $h'(x_i) < 0$ (т.к. $\frac{R_1}{R_2} > 0$, $\ln \rho_i > 0$).

Таким образом, $h'(x_i) < 0$, следовательно, $h(x_i)$ монотонно убывает на $(0, n)$. Очевидно, что дискретная функция $h(k_i)$ также монотонно убывает.

По построению $P_{loss}^i(a) - P_{loss}^i(a + 1) \geq s$ при $0 \leq a \leq k_i$ и $P_{loss}^i(a) - P_{loss}^i(a + 1) \leq s$ при $a \geq k_i$.

$$\begin{aligned} P_{loss}^i(a) - P_{loss}^i(a + b) &= \sum_{j=0}^{b-1} (P_{loss}^i(a + j) - \quad (48) \\ &- P_{loss}^i(a + j + 1)) > bs \text{ при } a + b \leq k_i. \end{aligned}$$

Аналогично

$$P_{loss}^i(a) - P_{loss}^i(a + b) < bs \text{ при } a + b > k_i. \quad (49)$$

Разобьем множество индексов $I = \{1, \dots, n\}$ следующим образом:

- $I_1 = \{i : k_i^* < k_i^{**}\}$
- $I_2 = \{i : k_i^* = k_i^{**}\}$
- $I_3 = \{i : k_i^* > k_i^{**}\}$

$$\sum_{i \in I_1} (k_i^{**} - k_i^*) = \sum_{i \in I_3} (k_i^* - k_i^{**}) = d, \quad (50)$$

$$0 < d \leq n.$$

Следовательно,

$$\varphi(k^*) - \varphi(k^{**}) \leq \sum_{i \in I_1} (k_i^{**} - k_i^*) \cdot s - \quad (51)$$

$$- \sum_{i \in I_3} (k_i^* - k_i^{**}) \cdot s = ds - ds = 0.$$

Таким образом, $\varphi(k^*) \leq \varphi(k^{**})$, поэтому разбиение k^{**} не лучше k^* , т. е. разбиение k^* — оптимальное. Возможно существование нескольких оптимальных разбиений. В этом случае можно выбрать любое из них.

Данным способом можно найти оптимальное разбиение памяти за время $O(mn)$, так как для вычисления $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ требуется n шагов, и на каждом шаге осуществляется поиск максимума выражения $(P_{loss}^i(k_i) - P_{loss}^i(k_i + 1))$ среди m очередей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В будущем мы предполагаем перенести подход, предложенный в данной статье, на задачу оптимального управления настраиваемыми очередями (Custom Queuing) в случае последовательного циклического представления входящих в механизм FIFO-очередей. Настраиваемые очереди — это один из аппаратно-независимых механизмов управления перегрузками, который похож на механизм приоритетных очередей, но, в отличие от него, не блокирует низкоприоритетный трафик. Настраиваемые очереди обслуживаются по очереди через некоторый промежуток времени.

Работа А. В. Соколова, Р. С. Некрасовой и А. М. Сазонова поддержана РФФИ (грант № 15-01-03404-а), а также Программой стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Работа Е. В. Морозова частично поддержана РФФИ (проекты 15-07-02341, 15-07-02354, 15-07-02360), а также Программой стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Работа Р. В. Разумчика поддержана РФФИ (грант 15-07-03007).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. М.: Вильямс, 2001. 712 с.

2. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Киев: Диасофт, 2001. 687 с.

3. *Боллапрагада В., Мэрфи К., Уайт Р.* Структура операционной системы Cisco IOS. М.: Вильямс, 2002. 197 с.

4. *Соколов А. В.* О распределении памяти для двух стеков // Автоматизация эксперимента и обработки данных. 1980. С. 65–71.

5. *Yao A. C.* An Analysis of a Memory Allocation Scheme for Implementing Stacks // SIAM J. Comput. 1981. 10(2) P. 398–403. doi: 10.1137/0210029

6. *Louchard G.* Some distributed algorithms revisited // Communications in Statistics. Stochastic Models. 1995. Vol. 11, iss. 4. doi: 10.1080/15326349508807361

7. *Louchard G., Schott R., Tolley M., Zimmermann P.* Random walks, heat equation and distributed algorithms // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1994. Vol. 53, iss. 2, P. 243–274. doi: 10.1016/0377-0427(94)90048-5

8. *Louchard G., Schott R.* Probabilistic analysis of some distributed algorithms // Random Structures & Algorithms, 1991. Vol. 2, iss. 2. P. 151–186. doi: 10.1002/rsa.3240020203

9. *Flajolet Ph.* The evolution of two stacks in bounded space and random walks in a triangle // Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science. 1986. Vol. 233. P. 325–340. doi: 10.1007/BFb0016257

10. *Аксенова Е. А.* Оптимальное управление FIFO-очередями на бесконечном времени // Стохастическая оптимизация в информатике. СПб.: С.-Петербургский университет, 2006. № 2 С. 71–76.

11. *Аксенова Е. А., Драц А. В., Соколов А. В.* Оптимальное управление n FIFO-очередями на бесконечном времени // Информационно-управляющие системы. 2009. № 6. С. 401–415.

12. *Drac A. V., Sokolov A. V.* The linked list representation of n LIFO-stacks and/or FIFO-queues in the single-level memory // Information Processing Letters. Elsevier Science Publishing Company Inc. 2013. Vol. 13, no. 19–21. P. 832–835.

13. *Соколов А. В., Драц А. В.* Моделирование некоторых методов представления n FIFO очередей в памяти одного уровня // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. 2014. Т. 1, № 1. С. 40–52.

14. *Барковский Е. А., Соколов А. В.* Оптимальное управление двумя параллельными

FIFO-очередями на бесконечном времени // Информационно-управляющие системы. 2015. № 5. С. 65–71.

15. *Irland M. I.* Buffer management in packet switch // IEEE Transactions on Communications. Vol. COM-26. March 1978. P. 328–337. doi: 10.1109/TCOM.1978.1094076

16. *Rich M., Schwartz M.* Buffer sharing in computer-communication network nodes // IEEE trans. commun. Vol. COM-25. 1977. P. 958–970.

17. *Yamashita H., Onvural R. O.* Allocation of buffer capacities in queueing networks with arbitrary topologies // Annals of Operations Research. August 1994. Vol. 48, iss. 4. P. 313–332. doi: 10.1007/BF02024519

18. *Perros H. G.* Open queueing networks with blocking // Stochastic Analysis of Computer and

Communications Systems / Ed. H. Takagi. North-Holland, 1990.

19. *Yum T. P., Dou C.* Buffer allocation strategies with blocking requirements // Performance Evaluation. 1984. Vol. 4, iss. 4. P. 285–295. doi: 10.1016/0166-5316(84)90013-0

20. *Kamoun E., Kleinrock L.* Analysis of Shared Finite Storage in a Computer Network Node Environment Under General Traffic Schemes // IEEE Transactions on Communications. July 1980. Vol. COM-28, no. 7. P. 992–1003.

21. *Ozel O., Uysal-Biyikoglu E., Girici T.* Optimal Buffer Partitioning on a Multiuser Wireless Link // Proceedings of Information Theory and Applications Workshop, UCSD, San Diego, CA, Jan. 31 – Feb. 5, 2010. doi: 10.1109/ITA.2010.5454079

Поступила в редакцию 30.05.2016

REFERENCES

1. *Knuth D.* Искусство программирования для ЭВМ [The art of computer programming]. Vol. 1. Moscow: Vilyams, 2001. 712 p.

2. *Sedgewick R.* Fundamentalnye algoritmy na C++ [Fundamental algorithms in C++]. Kiev: Diasoft, 2001. 687 p.

3. *Bollapragada V., Murphi C., White R.* Структура операционной системы Cisco IOS [The structure of Cisco IOS]. Moscow: Vilyams, 2002. 197 p.

4. *Sokolov A. V.* O raspredelenii pamyati dlya dvuh stekov [On memory distribution for 2 stacks]. Avtomatizatsiya eksperimenta i obrabotki dannyh [Experiment automation and data processing]. 1980. P. 65–71.

5. *Yao A. C.* An Analysis of a Memory Allocation Scheme for Implementing Stacks. *SIAM J. Comput.* 10(2). 1981. P. 398–403. doi: 10.1137/0210029

6. *Louchard G.* Some distributed algorithms revisited. Communications in Statistics. *Stochastic Models.* 1995. Vol. 11, iss. 4. doi: 10.1080/15326349508807361

7. *Louchard G., Schott R., Tolley M., Zimmermann P.* Random walks, heat equation and distributed algorithms. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1994. Vol. 53, iss. 2. P. 243–274. doi: 10.1016/0377-0427(94)90048-5

8. *Louchard G., Schott R.* Probabilistic analysis of some distributed algorithms. *Random Structures & Algorithms.* Summer 1991. Vol. 2, iss. 2. P. 151–186. doi: 10.1002/rsa.3240020203

9. *Flajolet Ph.* The evolution of two stacks in bounded space and random walks in a triangle.

Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science. 1986. Vol. 233. P. 325–340. doi: 10.1007/BFb0016257

10. *Aksenova E. A.* Optimalnoe upravlenie FIFO-ocheredyami na beskonechnom vremeni [Optimal control of the FIFO-queues for infinity time]. Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike [Stochastic optimization in informatics]. St.-Petersburg: S-Peterburgskii un., 2006. No. 2. C. 71–76.

11. *Aksenova E. A., Drac A. V., Sokolov A. V.* Optimalnoe upravlenie n FIFO-ocheredyami na beskonechnom vremeni [Optimal control of the n FIFO-queues for infinity time]. *Informacionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and control systems]. 2009. No. 6. C. 401–415.

12. *Drac A. V., Sokolov A. V.* The linked list representation of n LIFO-stacks and/or FIFO-queues in the single-level memory. *Information Processing Letters.* Elsevier Science Publishing Company Inc. 2013. Vol. 13, no. 19–21. P. 832–835.

13. *Sokolov A. V., Drac A. V.* Modelirovanie nekotorykh metodov predstavleniya n FIFO ocheredey v pamyati odnogo urovnya [Simulation of some methods of representation of n FIFO-queues in the single-level memory]. *Evristsicheskie algoritmy i raspredelennye vychisleniya* [Heuristic algorithms and distributed computing]. 2014. Vol. 1, no. 1. C. 40–52.

14. *Barkovsky E. A., Sokolov A. V.* Optimalnoe upravlenie dvumya parallelnymi FIFO-ocheredyami na beskonechnom vremeni [Optimal control of two parallel FIFO-queues on an infinite time]. *Informacionno-upravlyayushchie sistemy* [Information and control systems]. 2015. No. 5. C. 65–71.

15. *Irland M. I.* Buffer management in packet switch. *IEEE Transactions on Communications*. Vol. COM-26. March 1978. P. 328–337. doi: 10.1109/TCOM.1978.1094076
16. *Rich M., Schwartz M.* Buffer sharing in computer-communication network nodes. *IEEE trans. commun.* Vol. COM-25. 1977. P. 958–970.
17. *Yamashita H., Onvural R. O.* Allocation of buffer capacities in queueing networks with arbitrary topologies. *Annals of Operations Research*. August 1994. Vol. 48, iss. 4. P. 313–332. doi: 10.1007/BF02024519
18. *Perros H. G.* Open queueing networks with blocking, in: *Stochastic Analysis of Computer and Communications Systems*, ed. H. Takagi. North-Holland, 1990.
19. *Yum T. P., Dou C.* Buffer allocation strategies with blocking requirements. *Performance Evaluation*. 1984. Vol. 4, iss. 4. P. 285–295. doi: 10.1016/0166-5316(84)90013-0
20. *Kamoun E., Kleinrock L.* Analysis of Shared Finite Storage in a Computer Network Node Environment Under General Traffic Schemes. *IEEE Transactions on Communications*. July 1980. Vol. COM-28, no. 7. P. 992–1003.
21. *Ozel O., Uysal-Biyikoglu E., Girici T.* Optimal Buffer Partitioning on a Multiuser Wireless Link, In proceedings of Information Theory and Applications Workshop, UCSD, San Diego, CA, Jan. 31 – Feb. 5, 2010. doi: 10.1109/ITA.2010.5454079

Received May 30, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Соколов Андрей Владимирович
ведущий научный сотрудник, к. т. н.
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: sokavs@gmail.com
тел.: (8142) 766313

Сазонов Александр Михайлович
студент
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: sazonov@cs.karelia.ru

Морозов Евсей Викторович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: emorozov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766313

Некрасова Руслана Сергеевна
младший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: nekrasova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766313

Разумчик Ростислав Валерьевич
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН
ул. Вавилова, 44, Москва, Россия, 119333
эл. почта: rrazumchik@gmail.com

CONTRIBUTORS:

Sokolov, Andrey
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910
Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: sokavs@gmail.com
tel.: (8142) 766313

Sazonov, Alexandr
Petrozavodsk State University
33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: sazonov@cs.karelia.ru

Morozov, Evsey
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: emorozov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766313

Nekrasova, Ruslana
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: nekrasova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766313

Razumchik, Rostislav
Institute of Informatics Problems,
Russian Academy of Science
44 Vavilova St., 119333 Moscow, Russia
e-mail: rrazumchik@gmail.com

УДК 532.59

ИЗУЧЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ЗАГРЯЗНЕНИЙ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ПРОХОЖДЕНИЕМ ЦИКЛОНОВ НАД АЗОВСКИМ МОРЕМ

Л. В. Черкесов, Т. Я. Шульга

Морской гидрофизический институт РАН, г. Севастополь

В работе с использованием трехмерной нелинейной математической модели изучаются процессы переноса и диффузии загрязняющих веществ в Азовском море в случае циклонических атмосферных возмущений. Выполнено сравнение времени рассеяния, а также максимального объема проникновения примеси (с постоянными и переменными начальными распределениями ее концентрации) при наличии циклона и на тихой воде. Показано, что рассеяние примеси замедляется с увеличением градиента ее начальной концентрации.

Ключевые слова: скорость течения; сгонно-нагонные явления; прогностические поля ветра; трехмерная нелинейная модель.

L. V. Cherkesov, T. Ya. Shul'ga. STUDY OF THE TRANSFORMATION OF POLLUTION CAUSED BY CYCLONES PASSING OVER THE SEA OF AZOV

The processes of transfer and diffusion of contaminants in the Sea of Azov in the case of cyclonic atmospheric perturbations were studied using a three-dimensional nonlinear mathematical model. The time of dispersal and the maximal volume of impurity penetration (with constant and variable initial distributions of its concentration) were compared for cyclone and calm water conditions. It is demonstrated that the dispersal of impurity slows down as the gradient of its initial concentration increases.

Key words: current velocity; surging phenomena; prognostic wind fields; three-dimensional nonlinear model.

ВВЕДЕНИЕ

Акватория Азовского моря и прибрежные зоны представляют собой единый территориальный регион, который требует организации рационального природопользования и обеспечения экологической безопасности. В прибрежных областях, как правило, располагаются крупные промышленные центры. Интенсивное развитие производительных сил, хозяйственное освоение природных ресурсов морей

ставит перед исследователями этих районов ряд важных задач. Большое значение приобретает прогноз ожидаемых изменений в гидрологическом режиме, происходящих в результате естественных процессов и хозяйственной деятельности. В связи с тем, что прямые эксперименты с природными экосистемами затруднены, математическое моделирование является одним из наиболее перспективных методов прогнозирования динамических процессов и

их влияния на распространение загрязнений в морских бассейнах. Результаты расчетов ветровых течений и уровня моря на основе трехмерной гидродинамической модели позволяют специалистам построить карты течений и распространения загрязнений на различных горизонтах.

Для численного моделирования динамических процессов в Азовском море используется трехмерная нелинейная σ -координатная модель POM (Princeton Ocean Model) [9], адаптированная к условиям бассейна Азовского моря, дополненная модулями и подпрограммами расчета характеристик пассивной примеси [7, 8]. На ее основе изучены характеристики ветровых течений, сгонно-нагонных процессов для стационарного и однородного по пространству ветра и также типовых нестационарных полей ветра [5, 6]. В указанных работах выполнен анализ времени полного рассеяния примеси постоянной начальной концен-

трации и ее трансформации при наличии стационарных течений.

В данной работе изучается влияние переменного начального распределения концентрации примеси на продолжительность рассеяния и максимальный объем области загрязнения при наличии и отсутствии циклонических возмущений. Выполнен анализ степени проникновения загрязнения при неоднородном начальном распределении концентрации примеси по сравнению со случаем постоянной начальной концентрации. Исследовано влияние градиента начальной концентрации примеси на величину площади области загрязнения на различных горизонтах Азовского моря.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Для расчета используем нелинейные уравнения движения однородной несжимаемой жидкости в приближении теории мелкой воды [8, 9]:

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(A_M \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} K_M \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(A_M \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_M \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} K_M \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + g\rho = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

В этих уравнениях все обозначения — общепринятые. Коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости A_M вычисляется с помощью формулы Смагоринского [10], для параметризации коэффициента вертикальной турбулентной вязкости K_M применяется теория Меллора–Ямады [11]. Граничные условия на свободной поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} w|_{z=\zeta} &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \\ K_M \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_{z=\zeta} &= (\tau_{0x}, \tau_{0y}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\zeta(x, y, t)$ — профиль свободной поверхности, $\tau_{0x} = C_a W_x |\mathbf{W}|$ и $\tau_{0y} = C_a W_y |\mathbf{W}|$ — проекции касательных напряжений скорости ветра, \mathbf{W} — вектор скорости ветра на высоте 10 м над уровнем моря; C_a — коэффициент поверхностного трения [12], зависящий от скорости ветра \mathbf{W} :

$$10^3 C_a = \begin{cases} 2.5, & |\mathbf{W}| > 22 \text{ м/с} \\ 0.5 + 0.065 |\mathbf{W}|, & 8 \leq |\mathbf{W}| \leq 22 \text{ м/с} \\ 1.2, & 4 \leq |\mathbf{W}| \leq 8 \text{ м/с} \\ 1.1, & 1 \leq |\mathbf{W}| \leq 4 \text{ м/с} \end{cases} \quad (6)$$

На дне ($z = -H(x, y)$) равна нулю нормальная составляющая скорости. Придонные касательные напряжения связаны со скоростью квадратичной зависимостью [9]

$$\begin{aligned} \left(w + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) \Big|_{z=-H} &= 0, \\ K_M \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_{z=-H} &= (\tau_{1x}, \tau_{1y}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tau_{1x} = C_b u \sqrt{u^2 + v^2}$ и $\tau_{1y} = C_b v \sqrt{u^2 + v^2}$; C_b — коэффициент донного трения, который находится по формуле $C_b = k^2 / \ln^2(h_b/z_0)$; h_b — шаг по вертикали в придонном слое; $z_0 =$

0,003 м — параметр шероховатости донной поверхности. На боковых границах выполняются условия прилипания. В качестве начальных ($t=0$) принимаются условия отсутствия движения жидкости и колебаний свободной поверхности до включения атмосферных возмущений. В начальный момент времени движение жидкости отсутствует, свободная поверхность горизонтальна:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) = 0, \quad v(x, y, z, 0) = 0, \\ w(x, y, z, 0) = 0, \quad \zeta(x, y, z, 0) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

Для расчета изменения со временем концентрации примеси $C(x, y, z, t)$ используем уравнение переноса и диффузии [9]

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_H \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (9)$$

Здесь A_H и K_H — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии. На свободной поверхности, в придонном слое и на боковых границах добавляются условия

$$\begin{aligned} K_H \left. \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right) \right|_{z=\zeta} = 0, \quad A_H \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \\ K_H \left. \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right) \right|_{z=-H} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

$$C_{02}(x, y, z, 0) = \begin{cases} C_{\max}(R - r_1)/R, & r_1 \leq R, \quad 0 \geq z \geq -h_1, \\ 0, & r_1 > R, \quad z \leq 0; \quad r \leq R, \quad z < -h_1. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $r_1 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}$ — расстояние от центра (x_0, y_0) области загрязнения до точки, в которой вычисляется концентрация; C_{\max} — максимальное значение концентрации в центре области; $z = h_1$ — толщина слоя этой области.

Сравнительный анализ результатов моделирования эволюции примеси, имеющей постоянное и переменное распределение начальной концентрации, проводится путем сопоставления величин параметров, характеризующих ее эволюцию. В качестве таких параметров выбраны: коэффициент максимальной площади распространения примеси на каждом уровне K_{\max} ; коэффициент максимального объема проникновения загрязнения N_{\max} ; время полного рассеяния примеси t_d , ч. При этом условием полного рассеяния примеси принимается значение концентрации (C_d), которое не превышает $2,5 \cdot 10^{-2}$ во всей акватории моря.

Безразмерный параметр распространения примеси, определяющий наибольшую занима-

Они означают отсутствие потоков примеси в направлении внешней нормали к через свободную поверхность, боковые стенки и дно бассейна.

При $t = t_0$ над поверхностью Азовского моря возникает переменный по пространству и времени ветер, вызванный перемещением циклона, центр которого пересекает центральную часть моря. В это же время происходит выброс загрязнения в поверхностном слое моря в виде цилиндрической области радиусом R и глубиной h_1 . При указанных ветровых условиях [5] исследованы параметры эволюции примеси, начальное значение концентрации которой постоянно в данной области ($C_{01}(x, y, z, 0) = 1$). В этой работе численные эксперименты по распространению загрязнения проведем при условии, что концентрация примеси в момент времени $t = t_0$ убывает с удалением от центра области.

Пусть изменение поля концентрации от максимального значения (в центре выброса) до нуля (на границе области) происходит по линейному закону

емую ею площадь на горизонтах $z_0 = \zeta$, $z_0 = -H/2$ и $z_0 = -H + h_2$, вычисляется по формуле $K_{\max} = S_{\max}/S_0$, где S_0 — максимальная площадь, ограниченная изолинией $C_d = 2,5 \cdot 10^{-2}$ в момент времени $t = t_{\max}$; S_0 — площадь области первоначального загрязнения при $t = t_0$ на свободной поверхности. Соотношение для вычисления коэффициента максимального объема проникновения загрязнения имеет вид: $N_{\max} = V_{\max}/V_0$, где V_{\max} — максимальный объем, охваченный примесью с концентрацией $C_d = 2,5 \cdot 10^{-2}$ в момент времени $t = t_{\max}$; V_0 — объем области первоначального загрязнения при $t = t_0$.

Преобладающим типом волнения в Азовском море является ветровое, которое быстро развивается и так же быстро прекращается после уменьшения скорости ветра [1]. Основные течения в море формируются в прямой зависимости от действующего ветра. Для циклонического образования радиусом основания R_c атмосферное давление p_a находится из соотно-

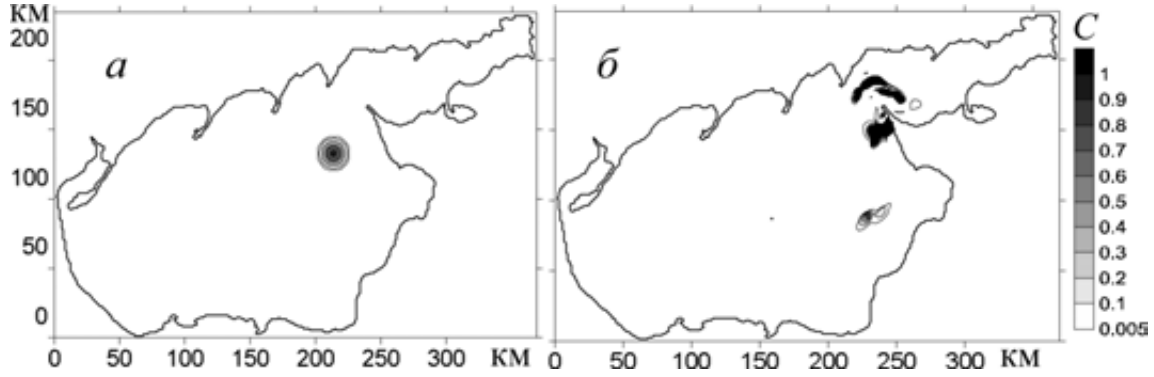


Рис. 1. Трансформация области загрязнения при перемещении циклона с радиусом 100 км на запад со скоростью 10 м/с: а — циклон входит в акваторию моря ($t = 1$ ч); б — через 30 ч после ухода циклона ($t = 45$ ч)

шения, предложенного в [4]:

$$p_a = \begin{cases} -p_0 \cos^2(\pi r / 2R_c) + \tilde{p}_a, & r \leq R_c \\ \tilde{p}_a, & r > R_c \end{cases}, \quad (12)$$

где \tilde{p}_a — фоновое значение давления; p_0 — максимальное отклонение от \tilde{p}_a в атмосферном возмущении; $r = \sqrt{(x_0(t) - x)^2 + (y_0(t) - y)^2}$ — расстояние от центра $(x_0(t), y_0(t))$ движущегося циклона до точки с координатами (x, y) .

Согласно [2], в неподвижном циклоне ветер рассчитываем, умножая модуль вектора геострофической скорости W_g на эмпирический коэффициент $\mu = 0,7$ и учитывая при этом, что направление ветра отклоняется от касательных к изобарам на угол $\gamma = 20^\circ$ (угол втока) против часовой стрелки. При условии, что барическое образование движется поступательно со скоростью \mathbf{c} , получаем такое выражение для скорости приводного ветра:

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \mu W_g \hat{T}(90^\circ + \gamma) \frac{\mathbf{r}}{R} + \mathbf{c}, & r \leq R_c \\ 0, & r > R_c \end{cases}. \quad (13)$$

Здесь $W_g = -\frac{fr}{2} + \left[\left(\frac{fr^2}{2} \right) + \frac{(p_a)_r r}{\rho_a} \right]^{1/2}$ — геострофическая скорость; $(p_a)_r$ — радиальный градиент атмосферного давления (12); вектор \mathbf{r} направлен от центра циклона к точке, в которой вычисляется \mathbf{W} ; $\hat{T}(\alpha)$ — матрица поворота на угол α .

В исходных уравнениях (1)–(4), граничных условиях (5), (7) и начальных условиях (8) осуществляется переход от координаты z к σ -координате [8], [9] посредством соотношений $x^* = x$, $y^* = y$, $t^* = t$, $\sigma = (z - \zeta)/(H + \zeta)$,

$\sigma \in [-1; 0]$. Пространственное разрешение модели по широте и долготе составляет $(1/59)^\circ \times (1/84)^\circ$, при этом линейные размеры ячеек сетки (Δx и Δy) не превышают 1,4 км. Количество узлов горизонтальной сетки и расчетных уровней по вертикали равно 276×176 и 11 соответственно. Уравнения интегрируются с шагом $\Delta t = 18$ с для определения осредненных двумерных компонент скорости и уровня моря и $10\Delta t = 180$ с (3 мин) — для вычисления отклонений от найденных средних и вертикальной компонент скорости. Топография дна расчетной области на модельную сетку интерполирована исходя из массива глубин, взятого с навигационных карт. Отклонения уровня моря анализируются для девяти точек морского побережья.

Анализ результатов численных экспериментов. В серии численных экспериментов исследуется влияние различных начальных распределений концентрации примеси на процесс ее эволюции. Поступившие в море загрязняющие вещества трансформируются под действием турбулентной диффузии и переноса течениями, вызванными переменным ветром, генерируемым движущимся циклоном. Для расчета эволюции областей загрязнения вследствие процессов адвекции и диффузии выбраны следующие значения коэффициентов турбулентной диффузии: $A_H = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $K_H = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ [3].

Место выброса загрязнения расположено в открытой части моря в самом глубоководном районе (рис. 1, а). На рисунке 1, б представлено изменение со временем области загрязнения переменной начальной концентрации ($C_{\max} = 1$) под действием циклона радиусом 100 км, движущегося со скоростью 10 м/с на запад, при этом центр циклона проходит через центральную область моря.

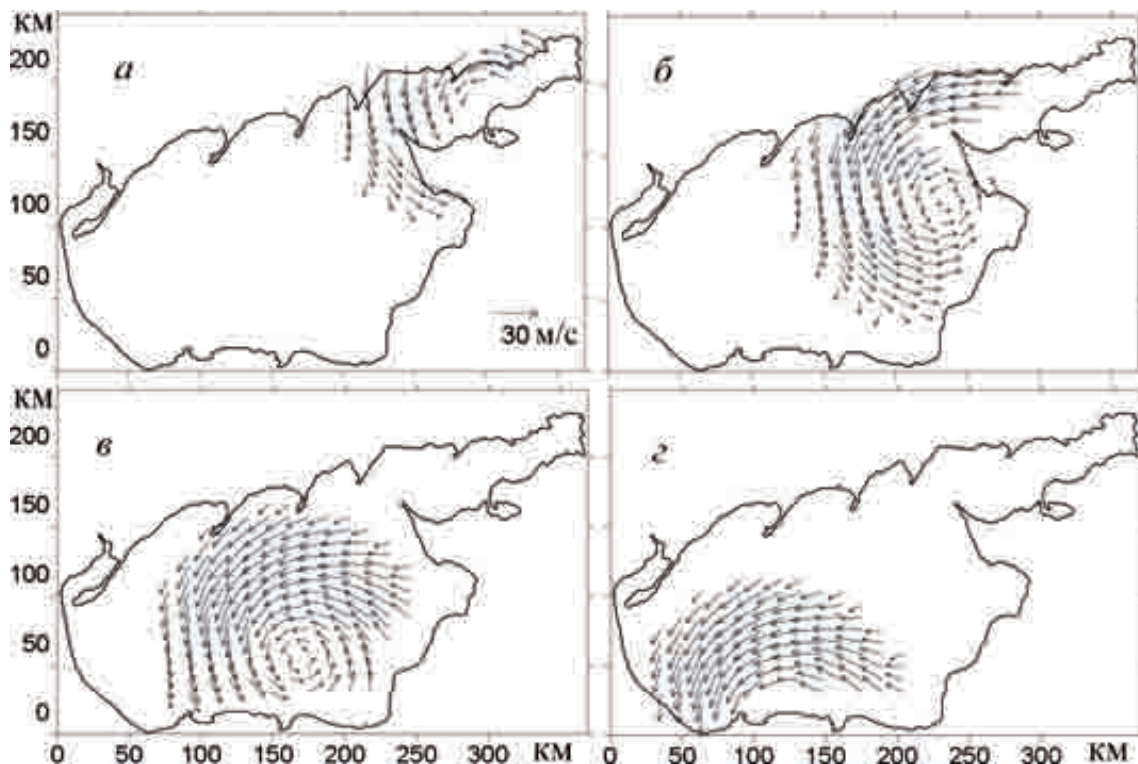


Рис. 2. Поля скоростей приводного ветра при перемещении циклона радиусом 100 км на запад со скоростью 10 м/с: а — циклон входит в акваторию ($t = 1$ ч); б — центр циклона приближается к центральной части моря ($t = 8$ ч); в — циклон прошел центральную часть моря ($t = 12$ ч); г — циклон уходит с акватории ($t = 15$ ч)

В процессе распространения атмосферного образования меняется направление приводного ветра (рис. 2) и, как следствие, характер генерируемых им течений. В результате этого область загрязнения вначале перемещается на запад (в направлении движения циклона), а затем распадается на несколько небольших областей, которые переносятся от центра выброса в различных направлениях (рис. 1, б). Полное рассеяние происходит через 135 ч, что меньше времени рассеяния такой же области загрязнения постоянной начальной концентрации.

В таблице 1 приведены значения K_{\max} и N_{\max} , время их достижения (t_{\max} , ч), а также время полного рассеяния примеси (t_d , ч) на различных горизонтах при перемещении циклона радиусом 100 км на запад со скоростью 10 м/с в зависимости от начального распределения концентрации примеси.

Из анализа данных, представленных в этой таблице, следует, что значения параметров распространения примеси постоянной начальной концентрации $C_{01}(x, y, z, 0)$ превышают значения соответствующих параметров, полученных для линейного начального распре-

ления ее концентрации (11). Отметим, что в обоих случаях $C_{\max} = 1$. При этом величина K_{\max} в поверхностном слое и на горизонте $z = -H/2$ для C_{01} превышает в 1,4 раза значение K_{\max} для C_{02} ; на горизонте $z = -H$ K_{\max} больше в 1,6 раза. Сравнивая значения V_{\max} для указанных начальных распределений концентрации, имеем их более чем двухкратное уменьшение для линейной начальной концентрации примеси.

Учитывая результаты моделирования, приведенные в таблице 1, оценим влияние градиента начальной линейной концентрации примеси на размеры области ее проникновения и время полного рассеяния пассивной примеси при наличии циклона. Исследование переноса и распространения примеси выполнено для значений $C_{\max} = 1$, $C_{\max} = 2$ и $C_{\max} = 3$. Получено, что с ростом C_{\max} отношение наибольшей площади загрязнения к ее первоначальному значению (K_{\max}) увеличивается и при $z = 0$ составляет 1,9 ($C_{\max} = 1$); 2,2 ($C_{\max} = 2$) и 2,6 ($C_{\max} = 3$); на глубине $z = -H/2 - 1,3$; 1,5 и 1,8; в придонном слое ($z = -H + h_2$) — 0,7; 0,9 и 1,1 соответственно.

Таблица 1. Параметры загрязнения K_{\max} , N_{\max} , время их достижения t_{\max} , ч, и время полного рассеяния примеси t_d , ч, на различных горизонтах моря и в области $-H \leq z \leq 0$ при наличии циклона радиусом 100 км, перемещающегося на запад со скоростью 10 м/с, в зависимости от начального распределения концентрации примеси

Горизонт, область	Параметры загрязнения	C_{01}	C_{02}		
			$C_{\max} = 1$	$C_{\max} = 2$	$C_{\max} = 3$
$z = 0$	K_{\max}	2,7	1,9	2,2	2,6
	t_{\max}	42	35	39	41
	t_d	149	110	122	140
$z = -H/2$	K_{\max}	1,8	1,3	1,5	1,8
	t_{\max}	51	43	48	51
	t_d	152	131	139	140
$z = -H + h_2$	K_{\max}	1,1	0,7	0,9	1,1
	t_{\max}	56	47	52	56
	t_d	155	135	141	155
$-H \leq z \leq 0$	K_{\max}	7,3	3,5	5,0	6,8
	t_{\max}	55	35	42	45
	t_d	155	135	141	155

Из анализа этих данных следует, что на рассматриваемых горизонтах двукратное и трехкратное увеличение начальной концентрации примеси приводит к росту максимальной площади области загрязнения в 1,3 и 1,6 раза соответственно. Время полного рассеяния примеси t_d зависит от максимума начальной концентрации и становится тем больше, чем больше значение C_{\max} . При этом t_d равняется 135 ч ($C_{\max} = 1$), 141 ч ($C_{\max} = 2$), 155 ч ($C_{\max} = 3$) и увеличивается на 4 и 15 % соответственно относительно $C_{\max} = 1$. Результаты моделирования, представленные в таблице 1, свидетельствуют о том, что вертикальное распространение примеси замедляется с уве-

личением максимального значения ее начальной концентрации. В этом случае наибольший объем области загрязнения N_{\max} при $C_{\max} = 2$ и $C_{\max} = 3$ больше соответственно в 1,4 и 1,9 раза, чем для $C_{\max} = 1$.

Выполним сравнение параметров эволюции примеси в центральной части Азовского моря для различных начальных концентраций при отсутствии ветра (на тихой воде). В таблице 2 представлены значения K_{\max} , N_{\max} , время их достижения t_{\max} и время полного рассеяния примеси t_d на различных горизонтах моря в зависимости от начального распределения ее концентрации без учета действия циклона.

Таблица 2. Параметры загрязнения K_{\max} , N_{\max} , время их достижения t_{\max} , ч, и время полного рассеяния примеси t_d , ч, на различных горизонтах моря и в области $-H \leq z \leq 0$ при отсутствии циклона в зависимости от начального распределения концентрации примеси

Горизонт, область	Параметры загрязнения	C_{01}	C_{02}		
			$C_{\max} = 1$	$C_{\max} = 2$	$C_{\max} = 3$
$z = 0$	K_{\max}	8,8	3,6	4,1	8,7
	t_{\max}	74	65	47	97
	t_d	168	199	345	343
$z = -H/2$	K_{\max}	2,0	2,3	3,0	5,9
	t_{\max}	85	88	51	94
	t_d	254	157	363	168
$z = -H + h_2$	K_{\max}	4,3	1,5	1,1	2,6
	t_{\max}	128	104	88	61
	t_d	224	377	377	279
$-H \leq z \leq 0$	K_{\max}	25,5	8,9	8,4	21,5
	t_{\max}	118	39	86	63
	t_d	311	265	341	288

Из анализа данных, приведенных в таблицах 1 и 2, следует, что в обоих вариантах расчетов при наличии циклона и на тихой воде с ростом градиента начальной концентрации происходит увеличение районов распространения загрязнений. Как видно, для одних и тех же значений начальной концентрации при отсутствии ветра происходит увеличение параметров загрязнений (K_{\max} , N_{\max} , t_d) не более чем в 3 раза по сравнению со случаем наличия циклона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты проведенных исследований. Анализ результатов моделирования переноса и распространения примеси в Азовском море постоянной и переменной начальной концентрации с равными максимумами показал, что в первом случае имеют место большие время рассеяния и размеры области проникновения загрязнения. При прохождении циклона над Азовским морем двукратное и трехкратное увеличение градиента начальной концентрации примеси приводит к росту максимальной площади области проникновения загрязнения в 1,3 и 1,6 раза соответственно. Рассеяние примеси при наличии циклона и на тихой воде замедляется с увеличением градиента начальной концентрации. При этом скорость рассеяния существенно не меняется, однако время полного рассеяния увеличивается с ростом максимальной концентрации. Сравняя объем области, охваченной загрязнением, для указанных начальных распределений концентрации, отмечаем его более чем двукратное уменьшение в случае линейно изменяющейся начальной концентрации примеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гидрометеорологические условия шельфовой зоны морей СССР. Том III. Азовское море.* СПб.: Гидрометеоиздат, 1986. 218 с.
2. *Григоркина Р. Г., Фукс В. Р.* Воздействие тайфунов на океан. СПб.: Гидрометеоиздат, 1986. 244 с.
3. *Демьшев С. Г., Коротаев Г. К.* Численная энергосбалансированная модель бароклин-

REFERENCES

1. *Gidrometeorologicheskie usloviya shel'fovoj zony morej SSSR. T. III, Azovskoe more* [Hydrometeorological conditions of the shelf zone of the seas of the USSR. Vol. III, Sea of Azov]. St. Petersburg: Gidrometeoizdat, 1986. 218 p.

ных течений океана с неровным дном на сетке С // Численные модели и результаты калибровочных расчетов течений в Атлантическом океане. М.: ИВМ РАН, 1992. С. 163–231.

4. *Иванов В. А., Коновалов А. В., Черкесов Л. В.* Влияние циклонов на изменение уровня поверхности Азовского и Черного морей // Метеорология и гидрология. 2003. № 4. С. 73–80.

5. *Иванов В. А., Черкесов Л. В., Шульга Т. Я.* Исследование влияния переменного по пространству и времени ветра на течения, сгонно-нагонные процессы и распространение пассивной примеси в Азовском море // Метеорология и гидрология. 2012. № 8. С. 69–79. doi:10.3103/S1068373912080079

6. *Иванов В. А., Черкесов Л. В., Шульга Т. Я.* Динамические процессы и их влияние на трансформацию пассивной примеси в Азовском море // Океанология. 2014. Т. 54, № 4. С. 464–472. doi:10.1134/S0001437014030023

7. *Иванов В. А., Черкесов Л. В., Шульга Т. Я.* Динамические процессы и их влияние на распространение и трансформацию загрязняющих веществ в ограниченных морских бассейнах. Севастополь, ЭКОСИ-Гидрофизика, 2010. 178 с.

8. *Фомин В. В.* Численная модель циркуляции вод Азовского моря // Научные труды УкрНИГМИ. 2002. Вып. 249. С. 246–255.

9. *Blumberg A. F., Mellor G. L.* A description of three-dimensional coastal ocean circulation model // Three-Dimensional Coastal Ocean Models / Ed. N. Heaps. Washington, D. C.: American Geophysical Union, 1987. P. 1–16.

10. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with primitive equations, I. The basic experiment // Mon. Wea. Rev. 1963. Vol. 91, no. 3. P. 99–164.

11. *Mellor G. L., Yamada T.* Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Rev. Geophys. Space Phys. 1982. Vol. 20, no. 3. P. 851–875.

12. *Wannawong W., Humphries U. W., Wongwises P. et al.* Mathematical Modeling of Storm Surge in Three-Dimensional Primitive Equations // Inter. Comp. Math. Sci. 2011. No. 5. P. 44–53.

Поступила в редакцию 30.05.2016

2. *Grigorkina R. G., Fuks V. R.* Vozdejstvie tajfunov na okean [The impact of typhoons on the ocean]. St. Petersburg: Gidrometeoizdat, 1986. 244 p.

3. *Demyshev S. G., Korotaev G. K.* Chislennaya ehnergosbalansirovannaya model' baroklinnyh techenij okeana s nerovnym dnom na setke C

[Numerical energy-balanced model of baroclinic ocean currents with rough bottom on a C grid]. Chislennye modeli i rezul'taty kalibrovochnykh raschetov techenij v Atlanticheskom okeane [Numerical models and the results of calibration calculations of currents in the Atlantic Ocean]. Moscow: IBM RAS, 1992. P. 163–231.

4. *Ivanov V. A., Kononov A. V., Cherkesov L. V.* Vliyanie ciklonov na izmenenie urovennoj poverhnosti Azovskogo i Chernogo morej [Influence of cyclones on the variation of the level surface in the Sea of Azov and the Black Sea]. *Meteorologiya i gidrologiya* [Russian Meteorology and Hydrology]. 2003. No. 4. P. 73–80.

5. *Ivanov V. A., Cherkesov L. V., Shul'ga T. Ya.* Issledovanie vliyaniya peremennogo po prostranstvu i vremeni vetra na techeniya sgonnagonnyye processy i rasprostranenie-primesi v Azovskom more [Investigation of effects of spatially and temporally variable wind on currents, surges, and admixture spread in the Sea of Azov]. *Meteorologiya i gidrologiya* [Russian Meteorology and Hydrology]. 2012. Vol. 37, no. 8. P. 553–559.

6. *Ivanov V. A., Cherkesov L. V., Shul'ga T. Ya.* Dinamicheskie processy i ih vliyanie na transformaciyu passivnoj primesi v azovskom more [Dynamic processes and their influence on the transformation of the passive admixture in the Sea of Azov]. *Oceanology*. 2014. Vol. 54, no. 4. P. 426–434. doi: 10.1134/S0001437014030023

7. *Ivanov V. A., Cherkesov L. V., Shul'ga T. Ya.* Dinamicheskie processy i ih vliyanie na rasprostranenie i transformaciyu zagryaznyayushchih veshchestv v ogranichennykh morskikh bassejnah [Dynamic processes and their influence on the distribution and transformation of pollutants in restricted marine basins]. Sevastopol: EKOSI-Gidrofizika, 2010. 178 p.

8. *Fomin V. V.* Chislennaya model' cirkulyacii vod Azovskogo morya [Numerical model of the circulation of waters in the Sea of Azov]. *Nauchnye trudy UkrNIGMI* [Proc. UHMI]. 2002. No. 249. P. 246–255.

9. *Blumberg A. F., Mellor G. L.* A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. Three-Dimensional Coastal Ocean Models. Ed. N. Heaps. Washington, D. C.: American Geophysical Union, 1987. P. 1–16.

10. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with primitive equations, I. The basic experiment. *Mon. Wea. Rev.* 1963. Vol. 91, no. 3. P. 99–164.

11. *Mellor G. L., Yamada T.* Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Space Phys.* 1982. Vol. 20, no. 3. P. 851–875.

12. *Wannawong W., Humphries U. W., Wongwises P. et al.* Mathematical Modeling of Storm Surge in Three-Dimensional Primitive Equations. *Inter. Comp. Math. Sci.* 2011. No. 5. P. 44–53.

Received May 30, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Черкесов Леонид Васильевич

главный научный сотрудник, чл.-корр. НАН Украины, д. ф.-м. н., проф.
Морской гидрофизический институт РАН
ул. Капитанская, 2, Севастополь, Россия, 299011
тел.: (8692) 543347

Шульга Татьяна Яковлевна

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Морской гидрофизический институт РАН
ул. Капитанская, 2, Севастополь, Россия, 299011
эл. почта: shulgaty@mail.ru
тел.: (8692) 543347

CONTRIBUTORS:

Cherkesov, Leonid

Marine Hydrophysical Institute of Russian Academy of Sciences
2 Kapitanskaya St., 299011 Sevastopol, Russia
tel.: (8692) 543347

Shulga, Tatiana

Marine Hydrophysical Institute of Russian Academy of Sciences
2 Kapitanskaya St., 299011 Sevastopol, Russia
e-mail: shulgaty@mail.ru
tel.: (8692) 543347

УДК 551.465.45

КОМПЛЕКСНАЯ МОДЕЛЬ БЕЛОГО МОРЯ: ГИДРОТЕРМОДИНАМИКА ВОД И МОРСКОГО ЛЬДА

И. А. Чернов¹, А. В. Толстикова², Н. Г. Яковлев³

¹Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

²Институт водных проблем Севера Карельского научного центра РАН

³Институт вычислительной математики РАН

На примере Белого моря описана численная модель крупного покрытого льдом водоема. Обсуждается согласие расчетных полей с измеренными параметрами и воспроизведение основных структур. Показано, что модель может давать ответы на вопросы прикладного характера.

Ключевые слова: численное моделирование; крупномасштабная циркуляция; Белое море; гидродинамика морских вод и льда; термохалинные поля; течения; ледяной покров.

I. A. Chernov, A. V. Tolstikova, N. G. Yakovlev. COMPREHENSIVE MODEL OF THE WHITE SEA: HYDROTHERMODYNAMICS OF WATER AND SEA ICE

The numerical model of large water object with ice is described on the White sea as an example. We discuss agreement between calculated fields and measurements and reproduction of the main structures. The model is shown to be able to answer some practical questions.

Keywords: numerical modelling; large-scale circulation; the White sea; sea simulation; thermohaline fields; sea currents; sea ice.

ВВЕДЕНИЕ

Стремительный рост мощности и доступности вычислительных средств в последние годы открывает новые возможности математического моделирования сложных природных систем. Моделирование позволяет дать прогноз, поставить численный эксперимент, который дорого, сложно, опасно либо невозможно воспроизвести лабораторными методами, оценить труднодоступные или недоступные измерению величины (например, соленость подо льдом), вскрыть схемы происходящих процессов (например, определить пути миграций планктонных организмов, распространение холодных

придонных вод). Кроме того, компьютерное моделирование позволяет извлечь максимум информации из данных наблюдений.

В настоящей работе мы описываем программный комплекс JASMINE на примере Белого моря — численную модель водоема с гибкой, легко расширяемой модульной структурой, воспроизводящую динамику и термодинамику вод и льда, а также содержащую блоки усвоения данных, динамики пелагической экосистемы, переноса примесей и т. п. Результаты расчетов сравниваются с данными наблюдений и показано, что основные наблюдаемые эффекты воспроизводятся моделью удо-

влетворительно. Обсуждаются причины несоответствий и возможности для совершенствования согласия между расчетными и реальными условиями.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Для расчета течений, уровня моря и эволюции (динамики и термодинамики) морского льда используется значительно переработанная модель ФЕАО [10–12, 15, 23], которая ранее применялась для воспроизведения крупномасштабного состояния вод и морского льда Северного Ледовитого океана.

Гидротермодинамика моря

Используются ставшие традиционными при исследовании крупномасштабной динамики океана приближения Буссинеска, гидростатики и несжимаемости морской воды (так называемая «примитивная» система уравнений). Уравнения динамики океана и морского льда записываются в широко распространенной системе координат «цилиндр над сферой» (долгота, дополнение широты до 90° , глубина, отсчитываемая вертикально вниз от поверхности океана в состоянии покоя относительно Земли). Пространственное разрешение модели — $0,047^\circ$ – $0,074^\circ$ по горизонтальным переменным в географической системе координат, т. е. 5–8 км. По вертикали бралось 16 неравноотстоящих уровней со сгущением к поверхности океана: 0, 2,5, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 75, 100, 150, 200, 250 и 300 м.

Реализация модели в случае Белого моря имеет свои особенности, связанные с интенсивным приливом и значительным водообменом с Баренцевым морем.

Для учета в явном виде прилива в данной версии модели в Горле (район Белого моря, см. рис. 1) использовалось граничное условие [19], которое автоматически обеспечивает сохранение среднего за достаточно большой период времени объема жидкости. Условие Флэзера имеет вид

$$U_n = U_n^* - \sqrt{\frac{g}{H}}(\eta^* - \eta),$$

где U_n — нормальная к границе области скорость течений, η — уровень океана, U_n^* — заданная нормальная к границе области наблюдаемая скорость течений, η^* — наблюдаемый уровень, g — ускорение свободного падения, H — глубина моря. Считается, что в чисто приливной волне в Горле выполняется условие

$$U_n^* = U_n,$$

т. е. в Баренцевом море приливные скорости значительно меньше, чем в Горле. Тогда легко получить граничное условие с учетом приливной (связанной с инерционно-гравитационными волнами, «быстрой») компоненты и «медленной» компоненты (которую можно построить по упрощенной квазигеострофической модели или по данным спутниковых наблюдений):

$$U_n = U_n^* - \sqrt{\frac{g}{H}}(\eta_\tau + \eta^* - \eta).$$

Здесь η_τ — приливная компонента уровня, η^* — измеренная или рассчитанная геострофическая («медленная») компонента уровня, U_n^* — согласованная с «медленным» уровнем и измеренными полями температуры, солености и касательного напряжения трения ветра скорость течений.

В принципе, в дальнейшем существует возможность учета приливных скоростей в Баренцевом море, согласованных с уровнем моря, если взять результаты расчета приливов по моделям достаточно высокого уровня.

Поскольку в модели используется линеаризованное (оставлена только частная производная по времени и условие снесено на поверхность $z = 0$) кинематическое условие для вертикальной скорости w

$$w|_{z=0} = -\frac{\partial \eta}{\partial t},$$

необходимы специальные усилия для обеспечения аппроксимации суммарных по модельной области балансов температуры, солености и импульса. Для солености (аналогично для температуры и горизонтальных компонент импульса, а также для биохимических скаляров, в случае расчета эволюции параметров экосистемы моря) ставится условие

$$k_s \frac{\partial S}{\partial z} = -S \cdot Q_{FW}, \quad z = 0,$$

т. е. задается «антиадвективный» поток солености. Здесь Q_{FW} — суммарный поток объема пресной воды, связанный с фазовыми переходами вода-лед, осадками и испарением, стоком рек. Вопрос подробно изложен в работах [4, 22, 34]. Формально это условие может быть переписано в виде

$$wS|_{z=0} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - Q_{FW} \right) S|_{z=0},$$

что более удобно в численной реализации.

Использование этого граничного условия снижает необходимость коррекции потоков солености, так как обеспечивает *интегральный*

закон сохранения в меняющейся во времени области решения. Однако такое граничное условие не обеспечивает точного *локального* баланса солей и пресной воды. Наибольших ошибок следует ожидать в областях с большими вариациями уровня моря.

Для пространственной аппроксимации системы уравнений и граничных условий применяется метод конечных элементов, триангуляция области регулярная. Сила Кориолиса и градиент давления аппроксимируются методом трапеций, что гарантирует сохранение энергии в приливной инерционно-гравитационной волне.

Граничные условия в проливах имеют вид условия излучения, если вода выносится из моря, и вид третьего краевого условия, если вода затекает. Численная реализация сделана в соответствии с работой [25].

Вычисление переноса скаляров реализовано одношаговым методом Ньютона–Галеркина [40] с коррекцией потоков [16], обеспечивающим квазимоноотонность схемы на приемлемом уровне. Для адвекции компонент скорости течений моря и дрейфа льда используется двухшаговый метод Сванси (two-step Swansea, описание см. в [40]).

Уравнения движения с учетом граничных условий и уравнения неразрывности могут быть сведены (это делается на конечномерном уровне, после аппроксимации всей системы уравнений и граничных условий) к системе линейных алгебраических уравнений для функции уровня моря, с положительно определенной разреженной матрицей, имеющей 19 ненулевых диагоналей [23]. В силу неявного по времени описания силы Кориолиса матрица этой системы несимметричная. Асимметрия матрицы связана с неявным описанием силы Кориолиса в уравнениях динамики: уравнения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} + Rf\mathbf{u} + F,$$

где \mathbf{u} — двумерная скорость, A — самосопряженный оператор, R — матрица поворота на 90° , f — параметр Кориолиса, зависящий от широты местности, F — правая часть.

Для обращения матрицы применяется обобщенный метод сопряженных градиентов GMRES с диагональным предобуславливателем. Имеется версия с использованием для предобуславливания неполного LU-разложения. Последний вариант предпочтительнее при высоком пространственном разрешении и большом размере матрицы.

Физические параметризации

Параметризация вертикального турбулентного обмена. Коэффициенты вертикального турбулентного обмена вычисляются в рамках модели Меллора–Ямады уровня 2,5 [26] с выбором параметров [24]. В этом блоке решается два трехмерных эволюционных уравнения для удвоенной энергии турбулентных пульсаций q^2 и для функции q^2l , где l — пространственный масштаб турбулентности. Перенос по горизонтали делается так же, как перенос других скаляров. После вычисления полей q^2 и l вычисляются трехмерные коэффициенты вертикального турбулентного обмена импульсом и турбулентной диффузии скаляров (температура, соленость и параметры экосистемы, если таковые вычисляются в модели). Аппроксимация операторов дифференцирования скоростей и плотности в этом блоке согласована с аппроксимациями аналогичных операторов в блоке динамики и термодинамики моря, в противном случае будет нарушаться закон сохранения суммы потенциальной и кинетической энергий. Учитывается влияние поверхностных волн на генерацию турбулентности на свободной ото льда воде [14]. Подо льдом учитывается неоднородность толщины льда, что влияет на граничное условие для пространственного масштаба турбулентности l в блоке вертикального турбулентного обмена. Считается, что пространственный масштаб турбулентности равен двум среднеквадратичным отклонениям осадки льда относительно средней осадки льда (это можно сделать, так как рассчитываются функции плотности вероятности распределения льда и снега по толщине).

Параметризация горизонтального турбулентного обмена. В модели реализована трехмерная турбулентная диффузия скаляров с произвольным тензором коэффициентов диффузии, что дает возможность использовать изопикническую диффузию и вихревой перенос скаляра (в данном случае — температуры и солености) [20] с записью скорости переноса через кососимметричный оператор «диффузии» [21]. В используемой версии существует возможность использовать переменный коэффициент вихревого переноса, вычисляемый исходя из свойств решения [38], см. также [31]. В этой параметризации описывается перенос, создаваемый мезомасштабными вихрями, имеющими характерный горизонтальный размер порядка радиуса деформации Россби, составляющий в Белом море примерно 2,5 км (первая бароклиническая мода) и 1,5 км

(вторая бароклиническая мода) [30], и которые явно не описываются выбранной сеткой.

Термодинамика морского льда

Блок термодинамики льда основан на локально-одномерной модели льда и снега в приближении линейности профиля температуры в каждой из сред [33], что следует из предположений о постоянстве теплопроводности и нулевой теплоемкости. Термодинамический блок применяется к каждой из 14 градаций льда по толщине: 10 см, 20, 30, 50, 70 см, 1 м, 1,5, 2, 3, 4, 5, 6, 10 м и более 10 м, которые аппроксимируют функцию плотности вероятности распределения толщины льдин. Дополнительная градация с номером нуль означает открытую воду.

Термодинамическая модель имеет один очевидный недостаток — она не учитывает теплоемкость льда, зависимость теплоемкости и теплопроводности от температуры и от солености льда и распределение солености льда по его толщине. Поэтому теплопроводность льда и снега по вертикали рассчитывается, по существу, на сетке из всего двух узлов. Использование упрощенной термодинамической модели оправдывается тем, что, как показывают оценки, реалистичное описание динамики льда имеет большее значение, чем выбор большого числа уровней по вертикали [36].

Более того, по существу, тот же программный код был использован в различных моделях — климата ИВМ РАН [27] и FESOM (Институт морских и полярных исследований им. А. Вегенера, Бремерхафен, ФРГ, [18]), и при этом были получены неплохие результаты. В случае Белого моря выбор упрощенной модели термодинамики льда может быть оправдан еще и тем, что характерная толщина льда порядка 40 см (до 150 см в особо суровые зимы) и летом лед полностью исчезает, так что ошибка в определении толщины льда не накапливается при интегрировании на долгий срок.

Численная реализация имеет отличия от предыдущих версий. Нелинейное уравнение для температуры поверхности снега (или льда) решается вместо метода бисекций более быстрым методом Риддерса [35]. При этом достигается точность $0,01 \text{ Вт/м}^2$ в балансе тепла.

Динамика морского льда

С точки зрения постановки дифференциальной задачи и метода интегрирования по времени блок динамики льда полностью аналогичен известным моделям CICE5 [13] и LIM3 [37]. Отличия состоят в пространственной аппроксимации уравнений дрейфа льда и методе расчета переноса характеристик льда

и снега. Те же идеи, что использовались относительно численного метода расчета динамики льда (без явного учета торошения и с упрощенной процедурой вычисления прочности льда) были применены (при активном участии одного из авторов) при реализации блока динамики льда в работе [17] для случая произвольных треугольных сеток.

Численный метод можно охарактеризовать как метод расщепления по физическим процессам. Для переноса характеристик льда используется метод Тейлора–Галеркина с коррекцией потоков, для адвекции скоростей дрейфа — двушаговый метод Свонси, аналогично блоку динамики океана. Явный метод Эйлера с использованием «внутренних» шагов по времени используется для процесса приспособления к внешнему воздействию и давлению внутри льда, в предположении, что на каждом «большом» шаге по времени давление можно считать постоянным — этот подход аналогичен CICE5 [13]. Граничные условия — прилипание на берегах и условие излучения в проливах [25].

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ

Расчетные алгоритмы реализованы на языке программирования Фортран в рамках Стандарта Fortran-90, что обеспечивает переносимость. Программный комплекс JASMINE имеет модульную структуру, описанную ниже. Главная программная единица создает начальные условия для расчета, включающие в себя инициализацию модулей, загрузку констант и параметров из NML-файлов, а также генерацию или загрузку с диска начальных значений всех расчетных полей. Затем осуществляется главный цикл по времени, состоящий из вложенных циклов по диапазону лет, месяцам, суткам (учитываются високосные годы), часам и шагам в пределах часа (если величина шага не превосходит 60 минут). В каждом цикле возможен вывод диагностических сообщений и сохранение данных на диск. Отметим, что модульная структура не только обеспечивает более надежную реализацию алгоритмов, но и существенна для повышения производительности. Оптимизирующий компилятор принимает во внимание статус неизменности данных (атрибут `protected`), что дает некоторый выигрыш в скорости вычислений.

Трехмерная адвекция и диффузия гидродинамических полей — вычислительно затратная процедура — наиболее затратная наряду с решением системы линейных алгебраических уравнений для уровня моря. Отметим, что трудоемкость переноса растет с увеличе-

нием разрешения быстрее, чем для уровня. Переносы термохалинных полей, а также полей коэффициентов турбулентной диффузии независимы и могут выполняться параллельно. Кроме того, двумерная адвекция градаций льда также независима — градации могут переноситься параллельно. Предусмотрена также возможность переноса плавучих (двумерных) и трехмерных примесей произвольной природы (нефтяные пятна и другие загрязнения, планктон, включая личинки гидробионтов, пластик и т. п.).

Отметим, что при подключении блока моделирования пелагической экосистемы возникает необходимость в переносе нескольких десятков биогеохимических трассеров, таких как концентрации биогенных элементов, растворенных газов, планктонных организмов и косного органического вещества. В этом случае параллельная реализация переноса становится необходимостью.

Параллельный расчет трехмерной и двумерной адвекции и диффузии осуществляется с использованием технологии MPI. Для переноса каждой градации льда, начиная с первой (градация нуль — это открытая вода) выделяется отдельный процесс. Эти же процессы переносят трехмерные поля. Параллельная реализация и трехмерной, и двумерной адвекций не выглядит целесообразно: выигрыш практически не заметен. Головной процесс раздает задания и осуществляет перенос сплоченности льда градации нуль.

Выигрыш во времени вычислений значителен: расчет адвекции трехмерных полей параллельно увеличивает скорость вычислений более чем в 2,5 раза, параллельная двумерная адвекция 14 градаций масс льда и снега и 15 (с градацией открытой воды) градаций сплоченности льда (всего 43 поля) дает меньший (но тем не менее заметный) выигрыш.

Матрица системы линейных уравнений для уровня моря разреженная (см. выше), имеет особую структуру, положительно определена и несимметрична. Для ее решения используется метод GMRES из пакета SPARSKIT. При явном описании силы Корилиса матрица получится симметричной, и для решения СЛАУ может быть применен более простой и эффективный метод сопряженных градиентов. Относительно маленький шаг по времени, применяемый для расчетов модели Белого моря, позволяет рассчитывать на устойчивость явной схемы. Однако численные эксперименты не выявили преимуществ: скорость расчетов существенно не увеличилась. Применялся метод сопряженных градиентов из библиотеки MKL и авторская

реализация метода, учитывающая структуру матрицы.

СТРУКТУРА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Комплекс имеет модульную структуру. Модули содержат встроенную документацию, поэтому опишем только те части системы, которые описывают водоем, форсинг и т. п., то есть изменяемую часть при переносе комплекса на другой водоем или при использовании других атмосферных данных, граничных условий, данных по приливу и т. д.

Модуль `Tranm` содержит глобальные константы (физические величины и вычислительные параметры), используемые в других модулях. Величины загружаются из именованных списков.

Модуль `Mar` определяет сетку, глобальные данные (поля скоростей, термохалинные поля и т. п.), геометрические и географические характеристики водоема. Здесь же заданы градации льда по толщине, коэффициенты затухания видимого и инфракрасного света на горизонтах, некоторые вспомогательные массивы, а также определена стерильная функция `cor`, вычисляющая параметр Корилиса в узле сетки. Начальные значения расчетных полей считываются из двоичных файлов, если расчет продолжает прерванный, либо инициализируются. Также в этом модуле задаются реки — указаны координаты устьев и ищется ближайшая точка сетки, граничащая с берегом — и приливы (процедура `tide`). Приливы задаются как изменения внешнего уровня моря η^* , указаны амплитуда, начальная фаза и запаздывание фазы вдоль жидкой границы. Помимо уровня может определяться и нормальная к границе скорость U^* .

Модуль `Init` вычисляет географические и геометрические характеристики водоема. Процедура `bathymetry` использует текстовый файл с данными о глубинах в заданных точках для вычисления массива глубин методом линейной интерполяции, а также координат северо-западного угла и длин сторон сферического прямоугольника, целиком содержащего море. Затем вычисляются массивы «целочисленной глубины» `km2` и индексы типа точки (открытое море, край, угол и т. п.) `nt3`.

Модуль `Solver` содержит все необходимое для решения линейной задачи для уровня моря, в том числе упаковка матрицы и правой части в нужный формат. Используется внешний решатель; изменения, связанные со сменой решателя, касаются только этого модуля. В нем же определена процедура `factor` решения ли-

нейных краевых задач одномерной теплопроводности/диффузии неявной схемой методом прогонки.

Модуль `scalar_adv` определяет трехмерный перенос произвольного скалярного поля. Там же предусмотрена реализация вертикальной диффузии с возможным гравитационным осаждением и потоком через поверхность моря (из атмосферы). Это полезно при переносе загрязнений и биогеохимических трассеров, не обязательно обладающих нулевой плавучестью и, возможно, переносимых атмосферными течениями. Модуль `iceadvection` определяет двумерный перенос поверхностных полей. Сюда относятся поля массы снега и льда, а также сплоченности льда разных градаций и произвольные поля загрязнений либо примесей положительной плавучести.

Модуль `forcing` задает внешние воздействия на море. Это данные по давлению, температуре и влажности воздуха, осадкам, облачности, скорости ветра в приводном слое; интерфейс для доступа к данным осуществляет отдельный модуль, поэтому не представляет труда использование других данных, в том числе в другом формате. Отдельная процедура вычисляет мгновенную плотность потока коротковолновой радиации на поверхности моря. В этом же модуле задаются среднемесячные гидрологические характеристики жидких границ: температура и соленость. Отдельно описаны реки: либо как осадки в ячейке сетки, то есть расход реки описан как поток пресной воды (с той же температурой, что у морской воды) на поверхность моря, либо как пресноводные проливы. Недостатками первого подхода являются затруднительность описания потока тепла и предположение о поступлении пресной воды на поверхность моря — только на поверхность, тогда как в реальности сток реки распределен по некоторой глубине. При втором подходе трудно реалистично описать расход реки, поскольку на эффективный расход существенно влияет уровень моря в устье — переменный во времени и вычисляемый в модели. Этот недостаток можно ослабить, если задавать уровень реки вдали от устья, используя не только топографию дна, но и возвышение материка над уровнем моря.

Модуль `mean` обеспечивает вывод данных на диск. Возможно сохранение среднесуточных, среднемесячных и мгновенных полей в неформатных файлах прямого доступа.

Атмосферные данные NCEP [28] в формате `netCDF` конвертируются утилитами на языке Perl, входящими в состав комплекса, в файлы прямого доступа (формат модуля NCEP).

Аналогичные утилиты конвертируют результаты расчетов в файлы в формате `netCDF`, пригодные для статистической обработки, построения карт и графиков и т. п. Такой подход обеспечивает необходимую гибкость, поскольку требования к формату файлов с данными разнообразны. Предусмотрены также утилиты для расчета средних величин по объему моря и по отдельным горизонтам, по заданному слою, для расчета толщины перемешанного слоя.

ОСОБЕННОСТИ БЕЛОГО МОРЯ

Белое море (рис. 1) целиком входит в территориальные воды России. Кроме того, этот водоем может рассматриваться как модель Арктики и полигон для разработки и тестирования моделей, призванных способствовать решению актуальных проблем арктического региона [9]. С одной стороны, для Белого моря накоплено большое количество данных [8], однако распределение станций весьма неоднородно как в пространстве, так и во времени; этот факт затрудняет постановку точных граничных значений и верификацию модели.



Рис. 1. Части и берега Белого моря

Нам известна лишь одна комплексная бароклинная модель Белого моря со льдом [29], но она в настоящее время не поддерживается. В связи с этим разработка программного комплекса весьма актуальна.

Белое море обладает рядом уникальных особенностей, которые необходимо учитывать при моделировании. Прежде всего это небольшие линейные размеры — 600 на 450 км, что накладывает серьезные ограничения на шаг

по времени в связи с требованиями устойчивости. В расчетах шаг по времени составлял 6 мин. Во-вторых, относительно небольшая глубина: средняя 67 м, максимальная 340 м. В связи с этим особую важность приобретают морфометрические характеристики и рельеф дна. Береговая линия Белого моря сильно изрезана. Отсутствуют некоторые процессы, характерные для глубоководных морей. В частности, воды Белого моря сравнительно хорошо перемешиваются. Другая особенность Белого моря — доминирование приливных течений. Волна M_2 полусуточного прилива приходит из Баренцева моря дважды в сутки; остаточная геострофическая циркуляция, как показано в [5], имеет примерно тот же период. Оценки и численные эксперименты показывают, что начальные распределения всех полей мало влияют на результаты расчетов. Значительные колебания уровня моря требуют учета свободной поверхности моря в модели, исключая условия типа «твердой крышки», а также делают неизбежным описание нелинейных процессов в море. Особую важность имеет Горло — узкий мелководный пролив, через который проходит приливная волна. Отметим, что в оперативной модели [6] Белое море рассматривается без Горла и Мезенского залива.

Исключительную роль играет речной сток, годовой объем которого составляет 4% от объема моря [2]. В связи с этим беломорские воды менее соленые по сравнению с баренцевоморскими. Соленость в заливах еще ниже. Это, очевидно, влияет и на стратификацию вод. Наконец, Белое море полностью очищается ото льда в летний период — многолетние льды отсутствуют, что упрощает описание подсистемы морского льда.

Прилив описан как осцилляция внешнего уровня моря на жидкой границе. Учитывается полусуточный лунный прилив M_2 , играющий наибольшую роль. Амплитуда колебаний уровня выбиралась экспериментально из условий выполнения баланса соли и генерации разумной скорости течений. Она составляла от 1,5 до 3 метров. Оказалось, что полутораметровый прилив занижает течения в заливах, особенно в Онежском, а трехметровый удовлетворительно воспроизводит течения, однако завышает перемешивание. Было учтено запаздывание по фазе прилива: согласно данным [32], прилив вблизи Канинского берега отстает по фазе от Мурманского берега примерно на 30° . При этом водообмен становится более реалистичным: в то время когда вода втекает вдоль Мурманского берега из-за растущего прилива, имеет место сток вдоль Ка-

нинского берега, где уровень еще не поднялся. В дальнейшем описание прилива в Горле будет улучшено за счет использования более полных данных из [32].

Учитывается сток пяти рек: Северной Двины, Онеги, Кеми, Мезени и Ковды. Используются данные по среднемесячному расходу за период 2000–2013 гг.

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ С НАТУРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Температура воды

Температурный режим поверхностного слоя Белого моря воспроизводится моделью адекватно. Так, в январе температура поверхности на большей части акватории Белого моря равна $-1,5^\circ$, лишь в устьях рек сказывается небольшое отепляющее действие речной воды. Зима — единственный сезон на Белом море, когда северная часть Бассейна теплее более южных районов, что происходит за счет вторжения баренцевоморской воды. Наибольшие градиенты температуры наблюдаются на границах заливов и Горла с Бассейном. Такая картина сохраняется в течение всего года. Картина апреля в целом похожа на температурные поля января, так как активного таяния льда еще не происходит. Исключение составляют изменения на жидкой границе. Здесь наблюдаются значения температуры поверхностного слоя $0,5-0^\circ$, что и качественно, и количественно хорошо согласуется с данными, приведенными в [2]. Летом, в период максимальной приповерхностной температуры воздуха, наблюдаются мозаичные поля температуры поверхностного слоя моря, выделяются фронтальные зоны, квазипостоянный апвеллинг в проливе Восточная Соловецкая салма, выражен так называемый «полюс холода» [3] в Бассейне. Средняя многолетняя температура в заливах составляет $15-17^\circ$, что соответствует действительности. В северной части Воронки — $7-8^\circ$, что также полностью согласуется с данными измерений [1, 2, 39]. Средние осенние модельные значения более высокие по сравнению с данными, представленными в [2]. На рисунке 2 хорошо заметно, что в октябре наиболее высокие температуры отмечаются в районе Горла и северной части Бассейна. В ноябре пятно теплой воды смещается в центральную часть Бассейна, поскольку теплозапас этого района позволяет водной массе дольше сдерживать выхолаживание. В более мелководных участках моря в это время уже активно идет процесс ледообразования. И по модельным, и по измеренным данным [2,

рис. 2, стр. 70] прослеживаются характерные фронтальные зоны в северной части Белого моря, а также субмеридиональное расположение изотерм в Бассейне. Температура воды в устьях впадающих в море рек практически не отличается от температуры акватории моря, однако в Онежском заливе также выражено субмеридиональное распределение температуры поверхностного слоя.

В целом стоит отметить и качественное, и количественное соответствие температуры поверхностного слоя Белого моря по данным измерений и моделирования. По сезонам наибольшее расхождение наблюдается поздней осенью (см. выше), по районам моря рассогласование отмечено в Онежском и Мезенском заливе и на жидкой границе с Баренцевым морем. Последнее связано с недостатком данных для граничных условий: использовались измерения в отдельных точках северной части Воронки разных лет. В модельных данных по Онежскому заливу наблюдается летний и осенний перегрев, что может быть вызвано завышенным перемешиванием. В Мезенском заливе и на жидкой границе Белого и Баренцева морей существует проблема, связанная с недоучетом стока реки Мезень и значительной здесь величины прилива (около 10 м).

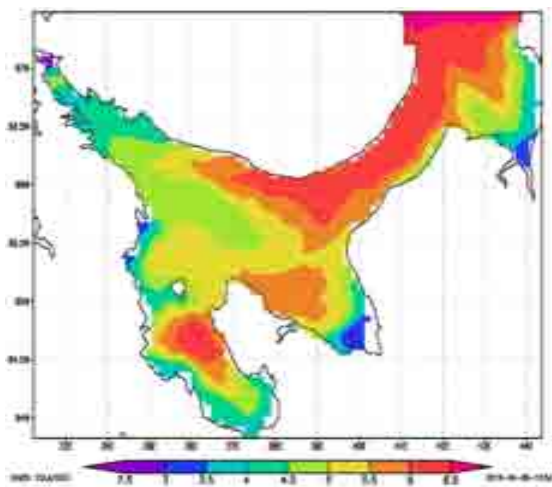


Рис. 2. Поле температуры поверхности воды, октябрь

Соленость

Соленость центральной части Белого моря зимой по модельным данным составляет около 27 ‰, в заливах вода более распресненная — около 20 ‰, на севере моря — 33 ‰. Весной значения солености слабо отличаются от зимних показателей. В данных, приведенных в [2], севернее Соловецких островов просле-

живается область повышенной солености (более 28 ‰), в модельных данных эта область не проявляется. Ярко выражены стоковые фронты в заливах во все сезоны года. Распределение солености по модельным данным в течение года меняется в центральной части Белого моря незначительно. Отдельные замкнутые области повышенной или пониженной солености в Бассейне модель не воспроизводит. Наибольшие изменения происходят в устьях рек. Следует отметить согласованность качественного распределения и количественных показателей модельных значений с данными, приведенными в [2]. В устье р. Мезень и далее в сторону открытого моря модельные значения солености (рис. 3) несколько завышены по сравнению с данными, приведенными в [2, рис. 4, стр. 71]. Это может быть связано с недостаточным модельным стоком реки Мезень. Так, на выходе из Мезенского залива по модельным данным соленость 33 ‰ в течение всего года. Между тем, соленость по сезонам здесь заметно меняется [2, 7] и на границе с Воронкой составляет максимум 28 ‰. В основном количественное распределение модельных значений солености согласуется с данными измерений, но в модельных данных меньше выражена мозаичность, в частности, в Воронке.

Отчасти причины несоответствия связаны с неточностью среднемесячных граничных значений, взятых из отдельных замеров в Воронке. Другая причина, возможно, связана с разрешением модели (около 5 км); как уже отмечалось, характерный размер мезомасштабных вихрей определяется радиусом деформации Россби, который составляет 2,5–1,5 км.

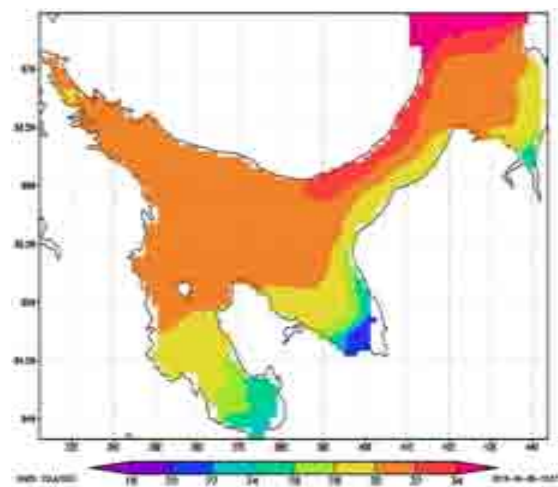


Рис. 3. Поле солености на поверхности воды, октябрь

Течения

Средние многолетние поля течений в Белом море не содержат информации о ветровых течениях, поскольку приливное перемещение на порядок превосходит перемещение за счет атмосферных воздействий [2]. Прослеживаются циклонические и антициклонические круговороты, которые подвержены сезонной изменчивости. Так, весной в Бассейне выражен антициклонический круговорот. Хорошо прослеживается течение, направленное из района Соловецких проливов в сторону Двинского залива. Численные эксперименты показывают, что поверхностное пятно примеси переносится, в основном ветровыми течениями, из Онежского залива в Двинский, а оттуда — в Горло и, со временем, в Баренцево море.

Ледяной покров

Следует отметить более согласованную картину модельных данных и данных наблюдений по сплошности, чем по средней толщине льда. Последняя в модели несколько завышена. Это связано с сильными приливными движениями в Воронке и высоким уровнем кинетической энергии льдин. Лед ломается, и повышенный вклад в формирование толстых льдин вносит торошение. Кроме того, по спутниковым данным, в апреле вдоль Карельского берега образуется обширная полынья, которая увеличивается в размерах и в мае уже занимает большую часть Кандалакшского залива и Бассейна. На последних модельных данных (апрель 2014 г.) этой полыньи нет, хотя рассчитанная толщина льда в этом районе значительно меньше по сравнению с соседними участками акватории. Мы надеемся устранить этот недостаток с помощью более совершенной схемы расчета альбеда мокрого снега и льда с учетом талых луж. По многолетним данным [2, С. 210–212], устойчивый припай образуется в Онежском и Двинском заливе в начале ноября, взламывается припай в конце апреля и полностью исчезает в мае, что мы и видим по модельным данным. Сроки образования и разрушения льда в целом согласуются. В декабре море покрыто плавающим льдом (по модельным данным — в январе). Изохроны окончательного исчезновения льда по данным наблюдений соответствуют окончанию мая. По модельным данным в мае лед еще есть, в июне лед встречается только в северной части моря (север Горла, Мезенский залив, Воронка). В этом выражается несоответствие, однако стоит учесть, что модельные данные осредняются за весь месяц, поэтому расхождение сроков в один месяц при таком подходе допустимо. По-

мимо этого, ледяной покров Белого моря подвержен межгодовой изменчивости элементов ледового режима. Кроме того, описание льда в модели статистическое: то есть наличие редких толстых льдин в модели не означает обязательного их присутствия в море. В [1] отмечено, что стамухи — севшие на мель льдины — встречаются в Белом море и тают лишь в июне.

Отметим, что в Воронке приливные течения особенно сильны — лед ломается, и торошение намного активнее по сравнению с другими районами моря. Поэтому здесь возникает особенно толстый лед, который в ряде случаев в модели толще, чем в реальности. Это также потребует в дальнейшем тщательной ревизии и настройки параметров схемы торошения.

Задачи и перспективы

Модель позволяет постановку и решение ряда прикладных задач:

- Перенос нефти и других примесей положительной плавучести.
- Перенос трехмерной примеси — химические загрязнения, пластик, планктон.
- Численные эксперименты по реакции моря на изменения климата, вариации стока рек, количества осадков и т. п.
- Моделирование переноса вод и водообмена с Баренцевым морем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Программный комплекс JASMINE адекватно воспроизводит основные динамические процессы в Белом море и может использоваться для решения прикладных задач, а также применяться для моделирования различных водных объектов, например, Ладожского и Онежского озер, Баренцева моря и других морей Арктического бассейна, Северного Ледовитого океана в целом.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-27-00126 и РФФИ 16-45-100162 p_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белое море и его водосбор под влиянием климатических и природных факторов* / Под ред. Н. Н. Филатова, А. Ю. Тержевика. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2007.
2. *Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. II. Белое море. Вып. 1. Гидрометеорологические условия*. Л.: Гидрометеоиздат, 1991.

3. Дерюгин К. М. Фауна Белого моря и условия ее существования. Л.: Гос. Гидрол. ин-т, 1928. 511 с.
4. Каменкович В. М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 240 с.
5. Саркисян А. С., Залесный В. Б., Дианский Н. А. и др. Математические модели циркуляции океанов и морей // Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 2. Математическое моделирование. М.: Наука, 2005. С. 174–278.
6. Семенов Е. Численное моделирование динамики Белого моря и проблема мониторинга // Известия РАН, ФАО. 2004. С. 128–141.
7. Система Белого моря. Водная толща и взаимодействующие с ней атмосфера, криосфера, речной сток и биосфера. М.: Научный мир, 2012. 784 с.
8. Филатов Н. Н., Толстикова А. В., Богданова М. С., Менишуткин В. В. Создание информационной системы и электронного атласа по состоянию и использованию ресурсов Белого моря и его водосбора // Арктика: Экология и экономика. 2014. № 15. С. 18–29.
9. Филатов Н. Н., Тержеевич А. Ю., Дружинин П. В. Беломорье — регион для решения актуальных проблем Арктики // Арктика: Экология и экономика. 2011. № 2. С. 90–101.
10. Яковлев Н. Г. Восстановление крупномасштабного состояния вод и морского льда Северного Ледовитого океана в 1948–2002 гг. Часть 1: Численная модель и среднее состояние // Известия РАН, ФАО. 2009. № 3. С. 1–16.
11. Яковлев Н. Г. Восстановление крупномасштабного состояния вод и морского льда Северного Ледовитого океана в 1948–2002 гг. Часть 2: Состояние ледового и снежного покрова // Известия РАН, ФАО. 2009. № 4. С. 1–18.
12. Яковлев Н. Г. К вопросу о воспроизведении полей температуры и солености Северного Ледовитого океана // Известия РАН, ФАО. 2012. № 1. С. 1–17.
13. Hunke C., Lipscomb W. H., Turner A. K. et al. CICE: the Los Alamos Sea Ice Model, documentation and software, version 5.0 / Los Alamos National Laboratory Tech. Rep. LA-CC-06-012. Los Alamos, New Mexico, USA, 2013.
14. Craig P. D., Banner M. L. Modeling wave-enhanced turbulence in the ocean surface layer // J. Phys. Oceanogr. 1994. Vol. 24, no. 12. P. 2546–2559.
15. Uotila P., Holland D. M., Morales Maqueda M. A. et al. An energy-diagnostics intercomparison of coupled ice-ocean Arctic models // Ocean Modelling. 2006. Vol. 11, no. 1–2. P. 1–27.
16. Loehner R., Morgan K., Peraire J., Vahdati M. Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1987. Vol. 7. P. 1093–1109.
17. Danilov S., Wang Q., Timmermann R. et al. Finite-element sea ice model (FESIM), version 2 // Geosci. Model Dev. 2015. Vol. 8. P. 1747–1761. doi: 10.5194/gmd-8-1747-2015
18. Wang Q., Danilov S., Sidorenko D. et al. The finite element sea ice-ocean model (FESOM) v.1.4: formulation of an ocean general circulation model // Geosci. Model Dev. 2014. Vol. 7, no. 663–693. doi: 10.5194/gmd-7-663-2014
19. Flather R. A. A tidal model of the northwest European continental shelf // Memories de la Societe Royale des Sciences de Liege. 1976. Vol. 6, no. 10. P. 141–164.
20. Gent P. R., McWilliams J. C. Isopycnal mixing in ocean circulation models // J. Phys. Oceanogr. 1990. Vol. 20, no. 1. P. 150–155.
21. Griffies S. M. The Gent-McWilliams skew-flux // J. Phys. Oceanogr. 1998. Vol. 28, no. 5. P. 831–841.
22. Huang R. X. Real freshwater flux as a natural boundary condition for the salinity balance and thermohaline circulation forced by evaporation and precipitation // J. Phys. Oceanogr. 1993. Vol. 23. P. 2428–2446.
23. Iakovlev N. G. On the calculation of large-scale ocean currents in the "velocity-pressure" variables by the finite element method // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1996. Vol. 11, no. 5. P. 383–392.
24. Kantha L. H., Clayson C. A. An improved mixed layer model for geophysical applications // J. Geophys. Res. 1994. Vol. 99, no. C12. P. 25235–25266.
25. Marchesiello P., McWilliams J. C., Shchepetkin A. Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models // Ocean Modelling. 2001. Vol. 3. P. 1–20.
26. Mellor G. L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Rev. Geophys. Spac. Phys. 1982. Vol. 20, no. 4. P. 851–875.
27. Dyanskii N. A., Galin V. Ya., Gusev A. V. et al. The model of the earth system developed at the INM RAS // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. Vol. 25, no. 5. P. 419–429.
28. Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R. et al. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // Bull. Amer. Meteor. Soc. 1996. Vol. 77. P. 437–470. doi: 10.1175/1520-0477(1996)077<0437:TNYRP>2.0.CO;2
29. Neelov I. A., Savchuk O. P. 3-D IO RAS-AARI coupled hydrodynamic-biogeochemical model of the White sea; final report of INCO-

Copernicus project "WHITESEA" № ICA2-CT-2000-10014: "Sustainable management of the marine ecosystem and living resources of the White sea"). 2003.

30. Nurser A. J. G., Bacon S. The Rossby radius in the Arctic ocean // *Ocean Sci.* 2014. Vol. 10, no. 6. P. 967–975. doi: 10.5194/os-10-967-2014
31. Pacanowski R. C., Griffies S. M. The MOM3 manual : Rep. / NOAA Geophysical Fluid Dynamics Laboratory. Princeton, USA, 1999. 680 p.
32. Padman L., Erofeeva S. A barotropic inverse tidal model for the Arctic ocean // *Geophysical Research Letters.* 2004. Vol. 31, no. 2. P. 383–392.
33. Parkinson C. L., Washington W. M. A large-scale numerical model of sea ice // *J. Geophys. Res.* 1979. Vol. 84. P. 311–337.
34. Prange M. R. G. The role of surface freshwater flux boundary conditions in Arctic ocean modelling // *Ocean Modelling.* 2006. Vol. 13. P. 25–43.
35. Ridders C. J. F. A new algorithm for computing a single root of a real continuous func-

tion // *IEEE Transactions on Circuits and Systems.* 1979. Vol. CAS 26. 979 p.

36. Bitz C. M., Holland M. M., Weaver A. J., Eby M. Simulating the ice-thickness distribution in a coupled climate model // *J. Geophys. Res.* 2001. Vol. 106, no. C2. P. 2441–2463.
37. Vancoppenolle M., Fichefet T., Goosse H. et al. Simulating the mass balance and salinity of Arctic and Antarctic sea ice. 1. Model description and validation // *Ocean Modelling.* 2009b. Vol. 27, no. 1–2. P. 33–53. doi: 10.1016/j.ocemod.2008.10.005
38. Visbeck M., Marshall J., Haine T., Spall M. Specification of eddy transfer coefficients in coarse resolution ocean circulation models // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. Vol. 27. P. 381–402.
39. Filatov N., Pozdnyakov D., Johannessen O. M. et al. White Sea. Its Marine Environment and Ecosystem Dynamics Influenced by Global Change. Springer-Praxis, 2005.
40. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. 5th Ed. Oxford : Butterworth and Heinemann, 2000. Vol. 3: Fluid dynamics. 306 p.

Поступила в редакцию 01.06.2016

REFERENCES

1. *Beloe more i ego vodosbor pod vliyaniem klimaticheskikh i prirodnykh faktorov* [The White Sea and its watershed under influence of climate and antropogenic factors]. Eds N. N. Filatov, A. Yu. Terzhevnik. Petrozavodsk: KarRC of RAS, 2007. 349 p.
2. *Gidrometeorologiya i gidrokimiya morei SSSR.* Vol. II. Beloe more. Iss. 1. Gidrometeorologicheskie usloviya [Hydrometeorology and hydrochemistry of the seas (USSR). Vol. 2. The White Sea. Iss. 1. Hydrometeorological conditions]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1991. 240 p.
3. *Deryugin K. M.* Fauna Belogo morya i usloviya ee sushchestvovaniya [Fauna of the White Sea and conditions of its existences]. Leningrad: Gos. Gidrol. in-t, 1928. 510 p.
4. *Kamenkovich V. M.* Osnovy dinamiki okeana [Fundamentals of ocean dynamics]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1973. 240 p.
5. *Sarkisyan A. S., Zalesnyi V. B., Dianskii N. A. et al.* Matematicheskie modeli tsirkulyatsii okeanov i morei. Sovremennye problemy vychislitel'noi matematiki i matematicheskogo modelirovaniya [Mathematical models of circulation of oceans and seas. Modern problems of numerical mathematics and mathematical modelling]. Vol. 2. Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modelling]. Moscow: Nauka, 2005. P. 174–278.

6. *Semenov E.* Chislennoe modelirovanie dinamiki Belogo morya i problema monitoringa [Numerical modelling of the White Sea dynamics and monitoring problem]. *Izvestiya RAN, FAO* [Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics]. 2004. No. 1. P. 128–141.

7. *Sistema Belogo morya.* Vodnaya tolshcha i vzaimodeistvuyushchie s nei atmosfera, kriosfera, rechnoi stok i biosfera [The White Sea system. Water column and interacting with it atmosphere, cryosphere, the river runoff, and biosphere]. Moscow: Nauchnyi mir, 2012. 784 p.

8. *Filatov N. N., Tolstikov A. V., Bogdanova M. S., Menshutkin V. V.* Sozдание informatsionnoi sistemy i elektronnoogo atlasa po sostoyaniyu i ispol'zovaniyu resursov Belogo morya i ego vodosbora [Development of information system and electronic atlas on the status and use of resources of the White Sea and its catchment]. *Arktika: Ekologiya i ekonomika* [Arctic: ecology and economy]. 2014. No. 15. P. 18–29.

9. *Filatov N. N., Terzhevnik A. Yu., Druzhinin P. V.* Belomor'e – region dlya resheniya aktual'nykh problem Arktiki [Belomorie is the region of the Arctic challenges solving]. *Arktika: Ekologiya i ekonomika* [Arctic: ecology and economy]. 2011. No. 2. P. 90–101.

10. *Yakovlev N. G.* Vosstanovlenie krupnomashtabnogo sostoyaniya vod i morskogo l'da

- Severnogo Ledovitogo okeana v 1948–2002 gg. Chast' 1: Chislennaya model' i srednee sostoyanie [Reproduction of the large-scale state of water and sea ice in the Arctic Ocean from 1948 to 2002. Pt. 1. Numerical model and the average state]. *Izvestiya RAN, FAO* [Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics]. 2009. No. 3. P. 1–16.
11. *Yakovlev N. G.* Vosstanovlenie krupnomashtabnogo sostoyaniya vod i morskogo l'da Severnogo Ledovitogo okeana v 1948–2002 gg. Chast' 2: Sostoyanie ledovogo i snezhnogo pokrova [Reproduction of the large-scale state of water and sea ice in the Arctic Ocean from 1948 to 2002. Pt. 2. The state of ice and snow cover]. *Izvestiya RAN, FAO* [Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics]. 2009. No. 4. P. 1–18.
12. *Yakovlev N. G.* K voprosu o vosproizvedenii polei temperatury i solenosti Severnogo Ledovitogo okeana [On the simulation of temperature and salinity fields in the Arctic Ocean]. *Izvestiya RAN, FAO* [Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics]. 2012. No. 1. P. 1–17.
13. *Hunke C., Lipscomb W. H., Turner A. K. et al.* CICE: the Los Alamos Sea Ice Model, documentation and software, version 5.0. Los Alamos National Laboratory Tech. Rep. LA-CC-06-012. Los Alamos, New Mexico, USA, 2013.
14. *Craig P. D., Banner M. L.* Modeling wave-enhanced turbulence in the ocean surface layer. *J. Phys. Oceanogr.* 1994. Vol. 24, no. 12. P. 2546–2559.
15. *Uotila P., Holland D. M., Morales Maqueda M. A. et al.* An energy-diagnostics inter-comparison of coupled ice-ocean Arctic models. *Ocean Modelling.* 2006. Vol. 11, no. 1–2. P. 1–27.
16. *Loehner R., Morgan K., Peraire J., Vahdati M.,* Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 1987. Vol. 7. P. 1093–1109.
17. *Danilov S., Wang Q., Timmermann R. et al.* Finite-element sea ice model (FESIM), version 2. *Geosci. Model Dev.* 2015. Vol. 8. P. 1747–1761. doi: 10.5194/gmd-8-1747-2015
18. *Wang Q., Danilov S., Sidorenko D. et al.* The finite element sea ice-ocean model (FESOM) v.1.4: formulation of an ocean general circulation model. *Geosci. Model Dev.* 2014. Vol. 7, no. 663–693. doi: 10.5194/gmd-7-663-2014
19. *Flather R. A.* A tidal model of the northwest European continental Shelf. *Memories de la Societe Royale des Sciences de Liege.* 1976. Vol. 6, no. 10. P. 141–164.
20. *Gent P. R., McWilliams J. C.* Isopycnal mixing in ocean circulation Models. *J. Phys. Oceanogr.* 1990. Vol. 20, no. 1. P. 150–155.
21. *Griffies S. M.* The Gent-McWilliams skew-flux. *J. Phys. Oceanogr.* 1998. Vol. 28, no. 5. P. 831–841.
22. *Huang R. X.* Real freshwater flux as a natural boundary condition for the salinity balance and thermohaline circulation forced by evaporation and precipitation. *J. Phys. Oceanogr.* 1993. Vol. 23. P. 2428–2446.
23. *Iakovlev N. G.* On the calculation of large-scale ocean currents in the "velocity-pressure" variables by the finite element method. *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1996. Vol. 11, no. 5. P. 383–392.
24. *Kantha L. H., Clayson C. A.* An improved mixed layer model for geophysical applications. *J. Geophys. Res.* 1994. Vol. 99, no. C12. P. 25235–25266.
25. *Marchesiello P., McWilliams J. C., Shchepetkin A.* Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models. *Ocean Modelling.* 2001. Vol. 3. P. 1–20.
26. *Mellor G. L., Yamada T.* Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Spac. Phys.* 1982. Vol. 20, no. 4. P. 851–875.
27. *Dyanskii N. A., Galin V. Ya., Gusev A. V. et al.* The model of the earth system developed at the INM RAS. *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* Vol. 25, no. 5. P. 419–429.
28. *Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R. et al.* The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 1996. Vol. 77. P. 437–470. doi: 10.1175/1520-0477(1996)077<0437:TNYRP>2.0.CO;2
29. *Neelov I. A., Savchuk O. P.* 3-D IO RAS-AAARI coupled hydrodynamic-biogeochemical model of the White sea; final report of INCO-Copernicus project "WHITESEA". ICA2-CT-2000-10014: "Sustainable management of the marine ecosystem and living resources of the White sea". 2003.
30. *Nurser A. J. G., Bacon S.* The Rossby radius in the Arctic ocean. *Ocean Sci.* 2014. Vol. 10, no. 6. P. 967–975. doi: 10.5194/os-10-967-2014
31. *Pacanowski R. C., Griffies S. M.* The MOM3 manual : Rep., NOAA Geophysical Fluid Dynamics Laboratory. Princeton, USA, 1999. 680 p.
32. *Padman L., Erofeeva S.* A barotropic inverse tidal model for the Arctic ocean. *Geophysical Research Letters.* 2004. Vol. 31, no. 2. P. 383–392.
33. *Parkinson C. L., Washington W. M.* A large-scale numerical model of sea ice. *J. Geophys. Res.* 1979. Vol. 84. P. 311–337.
34. *Prange M. R. G.* The role of surface freshwater flux boundary conditions in Arctic

ocean modeling. *Ocean Modelling*. 2006. Vol. 13. P. 25–43.

35. *Ridders C. J. F.* A new algorithm for computing a single root of a real continuous function. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1979. Vol. CAS 26. P. 979.

36. *Bitz C. M., Holland M. M., Weaver A. J., Eby M.* Simulating the ice-thickness distribution in a coupled climate model. *J. Geophys. Res.* 2001. Vol. 106, no. C2. P. 2441–2463.

37. *Vancoppenolle M., Fichefet T., Goosse H. et al.* Simulating the mass balance and salinity of Arctic and Antarctic sea ice. 1. Model description and

validation. *Ocean Modelling*. 2009b. Vol. 27, no. 1–2. P. 33–53. doi: 10.1016/j.ocemod.2008.10.005

38. *Visbeck M., Marshall J., Haine T., Spall M.* Specification of eddy transfer coefficients in coarse resolution ocean circulation models // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. Vol. 27. P. 381–402.

39. *Filatov N., Pozdnyakov D., Johannessen O. M. et al.* White Sea. Its Marine Environment and Ecosystem Dynamics Influenced by Global Change. Springer-Praxis, 2005.

40. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The finite element method. 5th Ed. Oxford: Butterworth and Heinemann, 2000. Vol. 3: Fluid dynamics. 306 p.

Received June 01, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Чернов Илья Александрович

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chernov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Толстик Алексей Владимирович

старший научный сотрудник, к. г. н.
Институт водных проблем Севера Карельского
научного центра РАН
пр. А. Невского, 50, Петрозаводск, Республика
Карелия, Россия, 185030
эл. почта: alexeytolstikov@mail.ru
тел.: (8142) 576381

Яковлев Николай Геннадьевич

ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт вычислительной математики РАН
ул. Губкина, 8, Москва, Россия, 119333
эл. почта: nick_yakovlev@mail.ru
тел.: (495) 9848120

CONTRIBUTORS:

Chernov, Ilya

Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,
Russia
e-mail: chernov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Tolstikov, Alexey

Northern Water Problems Institute,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
50 A. Nevsky St., 185030 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: alexeytolstikov@mail.ru
tel.: (8142) 576381

Iakovlev, Nikolay

Institute of Numerical Mathematics
8 Gubkin St., 119333 Moscow, Russia
e-mail: nick_yakovlev@mail.ru
tel.: (495) 9848120

УДК 519.711:004.89

ЗАДАЧА ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА ПО РАССТОЯНИЮ ДО НЕГО

Л. В. Щеголева, А. В. Жуков

Петрозаводский государственный университет

В статье рассматривается задача определения координат движущегося объекта в собственной системе координат базового объекта, если известны только расстояния между объектами, измеренные в последовательные моменты времени. Описан подход к решению задачи.

Ключевые слова: позиционирование; расстояние между точками; движущийся объект.

L. V. Shchegoleva, A. V. Zhukov. THE PROBLEM OF POSITIONING A MOVING OBJECT BY MEASURING THE DISTANCE TO IT

The article deals with the problem of determining the coordinates of a moving object in the base object's own frame of reference if we know only the distances between objects measured at successive time moments. An approach to solving this problem is described.

Key words: positioning; distance between points; moving object.

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие мобильных устройств опирается на систему позиционирования этих устройств на плоскости или в пространстве. При позиционировании и навигации устройств в качестве ключевого элемента используются карты, планы, схемы, которые имеют известную для всех мобильных устройств систему координат. Местоположение объекта определяется в рамках этой системы координат. Для позиционирования внутри помещений используются системы, основанные на телекоммуникационных технологиях (Wi-Fi [1], GSM, Bluetooth), для открытых пространств – системы глобального позиционирования (GPS,

ГЛОНАСС) [2]. И в тех, и в других системах используется механизм измерения расстояния между объектами на основе данных о времени прохождения радиосигнала. При этом устройства, являющиеся либо источниками, либо приемниками радиосигналов, имеют известные координаты, что и позволяет относительно них позиционировать другие устройства. Обзор современных систем позиционирования внутри помещений представлен в [3]. Таким образом, система координат для всех объектов является единой. Зная свои координаты и координаты другого объекта, можно проложить маршрут по направлению к другому объекту.

В некоторых ситуациях зафиксированные устройства с известными координатами в единой системе координат могут отсутствовать,

при этом возможность определения расстояния до всех объектов в системе остается доступной. Возникает задача определения координат других объектов в своей собственной системе координат некоторого объекта.

Эта задача декомпозируется на несколько подзадач, соответствующих различным условиям поведения объектов системы. Сведем задачу к двум объектам в системе. Первый объект (базовый объект) – это объект, который определяет местоположение второго объекта в своей собственной системе координат. Второй объект (целевой объект) – это объект, координаты которого необходимо определить в системе координат базового объекта. Зная решение для одного целевого объекта, это решение можно распространить на любое количество целевых объектов в системе.

Авторами статьи предпринята попытка описать модель локации двух устройств относительно друг друга в случае отсутствия единой системы координат и наличия возможности измерить расстояние между объектами.

ЗАДАЧА ДЛЯ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим первый случай, когда целевой объект неподвижен. Будем считать, что объекты являются точками на плоскости (рис. 1). Базовый объект в начальный момент времени находится в начале координат своей собственной системы координат (точка A). Направления осей координат в этой системе некоторым образом определены.

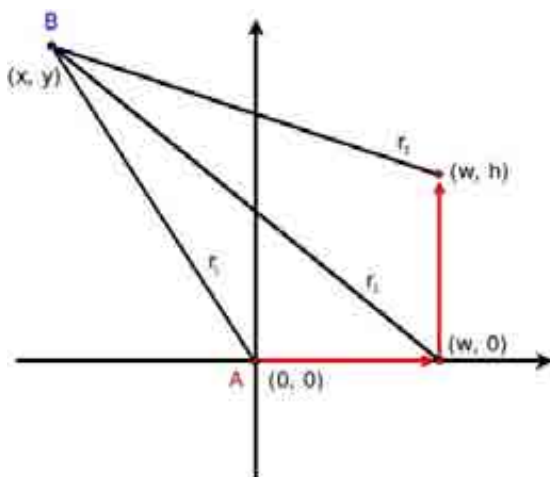


Рис. 1. Три измерения для неподвижной целевой точки

Для определения координат целевого объекта (точка B) потребуется выполнить три измерения расстояния до него из трех различных точек. На рисунке 1 первое измерение

проводится из точки A , которая имеет координаты $(0, 0)$. Расстояние до целевого объекта равно r_1 . Далее базовый объект смещается в рамках своей системы координат в точку с координатами $(w, 0)$, проводит второе измерение расстояния до целевого объекта – r_2 . Далее смещается в точку с координатами (w, h) и проводит третье измерение – r_3 .

Координаты точки B рассчитываются следующим образом:

$$\begin{cases} x = \frac{w^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 \cdot w} \\ y = \frac{h^2 + r_2^2 - r_3^2}{2 \cdot h} \end{cases} \quad (1)$$

Это задача классической геодезии (метод трилатерации).

ЗАДАЧА ДЛЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКИ

Постановка задачи

Рассмотрим второй случай: пусть целевой объект движется прямолинейно с постоянной скоростью. Это означает, что каждое следующее измерение даст расстояние до целевого объекта, находящегося в новой точке, но все эти точки лежат на одной прямой. Будем считать, что измерение расстояния происходит мгновенно, так, что целевой объект не успевает за это время изменить своего положения.

Первое измерение проводится в начальный момент времени, когда базовый объект находится в начале координат, а целевой объект находится в неизвестной точке с координатами (x_0, y_0) . Пусть все измерения расстояний проводятся через одинаковые интервалы времени. Первые три измерения проводятся из начала координат. Четвертое измерение проводится из точки с координатами $(0, w)$, где w – расстояние, которое базовый объект может пройти за время между последовательными измерениями. Пятое измерение проводится из точки с координатами (w, w) .

Таким образом, исходными данными являются:

- r_1 – величина первого измерения;
- r_2 – величина второго измерения;
- r_3 – величина третьего измерения;
- r_4 – величина четвертого измерения;
- r_5 – величина пятого измерения;

w – смещение базового объекта для четвертого и пятого измерений.

Необходимо найти координаты точки, в которой находился целевой объект в момент последнего измерения, а также уравнение прямой, по которой он движется.

Решение задачи

Представим уравнение прямой, описывающей траекторию движения целевого объекта, в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta_x \cdot t \\ y = y_0 + \Delta_y \cdot t \end{cases}.$$

Будем считать, что измерения расстояний были выполнены при $t = 0, 1, 2, 3, 4$. Для решения задачи можно построить систему уравнений с неизвестными $x_0, y_0, \Delta_x, \Delta_y$:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = r_1^2 \\ (x_0 + \Delta_x)^2 + (y_0 + \Delta_y)^2 = r_2^2 \\ (x_0 + 2 \cdot \Delta_x)^2 + (y_0 + 2 \cdot \Delta_y)^2 = r_3^2 \\ (x_0 + 3 \cdot \Delta_x - w)^2 + (y_0 + 3 \cdot \Delta_y)^2 = r_4^2 \\ (x_0 + 4 \cdot \Delta_x - w)^2 + (y_0 + 4 \cdot \Delta_y - w)^2 = r_5^2 \end{cases}$$

и попытаться решить ее аналитически. В статье предлагается другой подход к решению этой задачи – геометрический.

После первых трех измерений, выполненных из одной точки – начала координат, известны только расстояния до целевого объекта, но неизвестно направление, в котором он находится, т. е. можно считать, что целевой объект находился в момент первого измерения где-то на окружности с радиусом r_1 , на момент второго измерения – на окружности с радиусом r_2 , на момент третьего измерения – на окружности с радиусом r_3 . В каких точках на окружностях находился целевой объект, не известно, но можно определить, под каким углом он движется по отношению к касательным к этим окружностям.

Проведем три окружности с центром в начале координат и радиусами, равными трем первым измерениям: r_1, r_2, r_3 (рис. 2). Пусть $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$. Пусть в процессе движения целевой объект на момент первого измерения находился в точке А, на момент второго измерения – в точке В, которая лежит на оси абсцисс, а в момент третьего измерения – в точке С. Тогда прямолинейное направление движения целевого объекта должно быть таким, чтобы, пересекая первую и третью окружности, расстояния от точки с координатами $(r_2, 0)$ до точек пересечения с окружностями были одинаковыми ($AB = BC$).

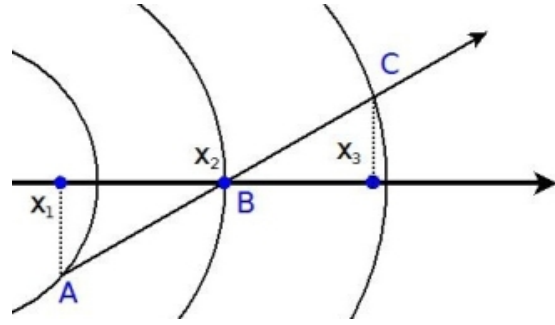


Рис. 2. Траектория движения целевого объекта по первым трем измерениям

Для определения координат точек А, В, С и параметров (x_1, y_1, dx, dy) уравнения прямой, описывающей движение целевого объекта, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + dx \\ y_2 = y_1 + dy \\ x_3 = x_1 + 2 \cdot dx \\ y_3 = y_1 + 2 \cdot dy \\ x_1^2 + y_1^2 = r_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = r_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 = r_3^2 \\ x_2 = r_2 \\ y_2 = 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \\ = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \end{cases}, \quad (2)$$

где (x_1, y_1) – координаты точки пересечения прямой и окружности с радиусом r_1 (точка А), (x_2, y_2) – координаты точки пересечения прямой и окружности с радиусом r_2 и осью абсцисс (точка В), (x_3, y_3) – координаты точки пересечения прямой и окружности с радиусом r_3 (точка С). Первые четыре выражения в системе означают, что точки А, В, С лежат на прямой. Следующие три выражения означают, что точки лежат на соответствующих окружностях с центром в начале координат и радиусами r_1, r_2 и r_3 . Следующие два выражения означают, что точка В лежит на пересечении окружности с радиусом r_2 и осью абсцисс. Последнее выражение означает, что длины отрезков АВ и ВС равны.

Эта система имеет два решения (3) и (4), отличающиеся знаком y_1 :

$$\begin{cases} x_1 = r_2 + \frac{r_1^2 - r_3^2}{4 \cdot r_2} \\ y_1^{(1)} = \sqrt{r_1^2 - x_1^2} \\ dx = r_2 - x_1 \\ dy^{(1)} = -y_1^{(1)} \end{cases}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 = r_2 + \frac{r_1^2 - r_2^2}{4 \cdot r_2} \\ y_1^{(2)} = -\sqrt{r_1^2 - x_1^2} \\ dx = r_2 - x_1 \\ dy^{(2)} = -y_1^{(2)} \end{cases} \quad (4)$$

Получились две прямые

$$\begin{cases} x = x_1 + dx \cdot t \\ y = y_1^{(1)} + dy^{(1)} \cdot t \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_1 + dx \cdot t \\ y = y_1^{(2)} + dy^{(2)} \cdot t \end{cases}, \quad (5)$$

которые в момент второго измерения пересекают ось абсцисс, что на самом деле может не соответствовать действительности. Но взаимное расположение прямых – траекторий движения целевого объекта и трех окружностей рассчитано. Теперь необходимо повернуть получившиеся прямые вдоль окружностей на некоторый неизвестный угол. Для определения угла воспользуемся результатами четвертого измерения.

Для проведения четвертого измерения r_4 переместим базовый объект из начала координат в точку с координатами $(0, w)$. Новое измерение r_4 будет уже выполнено не из начала координат. Но можно рассчитать радиус окружности с центром в начале координат \hat{r}_4 для следующего положения движущейся точки. Тогда эти две окружности пересекутся в двух точках, и можно будет найти для одной из точек пересечения два угла θ – поворота каждой прямой, по которой может двигаться целевой объект (рис. 3).

Рассмотрим прямую (5) с положительным значением параметра dy . Угол α – это угол, образованный прямой и осью абсцисс. Этот угол известен. Угол θ – угол, на который необходимо повернуть рассматриваемую прямую так, чтобы точка пересечения ее с окружностью (\hat{x}_4, \hat{y}_4) (точка D) переместилась в точку пересечения окружностей (x_4, y_4) (точка D').

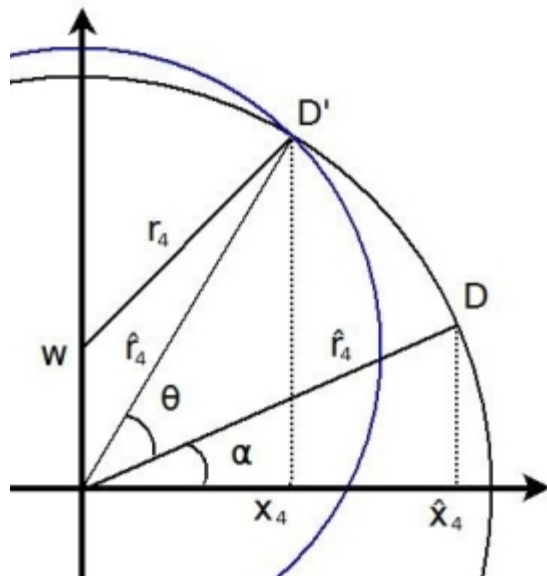


Рис. 3. Поворот прямых до точки пересечения окружностей

Для расчета координат $\hat{x}_4, \hat{y}_4^{(1)}, \hat{y}_4^{(2)}$ воспользуемся уравнениями (5) для $t = 3$.

Зная координаты точки $D = (\hat{x}_4, \hat{y}_4)$, можно найти радиус окружности \hat{r}_4 : $\hat{r}_4 = \sqrt{(\hat{x}_4)^2 + (\hat{y}_4)^2}$, а также косинус и синус угла α : $\cos \alpha = \frac{\hat{x}_4}{\hat{r}_4}$ и $\sin \alpha = \frac{\hat{y}_4}{\hat{r}_4}$.

Рассмотрим точку $D' = (x_4, y_4)$. Это точка пересечения двух окружностей. Первая окружность – с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом \hat{r}_4 , а вторая – с центром в точке $(0, w)$ и радиусом r_4 . Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_4^2 + (y_4 - w)^2 = r_4^2 \\ x_4^2 + y_4^2 = (\hat{r}_4)^2 \end{cases}, \quad (6)$$

решив которую, получим координаты точки D' :

$$\begin{cases} y_4 = \frac{w^2 - (r_4)^2 + (\hat{r}_4)^2}{2 \cdot w} \\ x_4 = \sqrt{(r_4)^2 - (y_4 - w)^2} \end{cases}. \quad (7)$$

Корень берем с положительным знаком, так как корень с отрицательным знаком будет учтен при отражении решения в отрицательной полуплоскости на следующем шаге.

Теперь, зная координаты точки $D' = (x_4, y_4)$, найдем синус и косинус угла θ для первой прямой (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^{(1)} \alpha = \frac{\hat{y}_4^{(1)}}{\hat{r}_4} \\ \cos \alpha = \frac{\hat{x}_4}{\hat{r}_4} \\ \sin^{(1)}(\alpha + \theta) = \frac{y_4^{(1)}}{\hat{r}_4} \\ \cos(\alpha + \theta) = \frac{x_4}{\hat{r}_4} \\ \sin^{(1)} \theta = \\ = \sin(\alpha + \theta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \theta) \cdot \sin^{(1)} \alpha \\ \cos^{(1)} \theta = \frac{\cos(\alpha + \theta) + \sin \theta \cdot \sin^{(1)} \alpha}{\cos \alpha} \end{array} \right. \quad (8)$$

и для второй прямой (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^{(2)} \alpha = \frac{\hat{y}_4^{(2)}}{\hat{r}_4} \\ \cos \alpha = \frac{\hat{x}_4}{\hat{r}_4} \\ \sin^{(2)}(\alpha + \theta) = \frac{y_4^{(2)}}{\hat{r}_4} \\ \cos(\alpha + \theta) = \frac{x_4}{\hat{r}_4} \\ \sin^{(2)} \theta = \\ = \sin(\alpha + \theta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \theta) \cdot \sin^{(2)} \alpha \\ \cos^{(2)} \theta = \frac{\cos(\alpha + \theta) + \sin \theta \cdot \sin^{(2)} \alpha}{\cos \alpha} \end{array} \right. \quad (9)$$

Теперь необходимо каждую прямую повернуть на соответствующий угол θ . Первая прямая будет иметь следующие значения параметров:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^{(1)} = \cos^{(1)} \theta \cdot x_1 - \sin^{(1)} \theta \cdot y_1^{(1)} \\ y_0^{(1)} = \sin^{(1)} \theta \cdot x_1 + \cos^{(1)} \theta \cdot y_1^{(1)} \\ \Delta_x^{(1)} = \cos^{(1)} \theta \cdot r_2 - x_0^{(1)} \\ \Delta_y^{(1)} = \sin^{(1)} \theta \cdot r_2 - y_0^{(1)} \end{array} \right. \quad (10)$$

Вторая прямая будет иметь следующие значения параметров:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^{(2)} = \cos^{(2)} \theta \cdot x_1 - \sin^{(1)} \theta \cdot y_1^{(2)} \\ y_0^{(2)} = \sin^{(2)} \theta \cdot x_1 + \cos^{(1)} \theta \cdot y_1^{(2)} \\ \Delta_x^{(2)} = \cos^{(2)} \theta \cdot r_2 - x_0^{(2)} \\ \Delta_y^{(2)} = \sin^{(2)} \theta \cdot r_2 - y_0^{(2)} \end{array} \right. \quad (11)$$

При этом прямые могут пересекать окружность и в отрицательной полуплоскости (рис. 4), следовательно, их необходимо отразить относительно оси ординат:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^{(3)} = -x_0^{(1)} \\ y_0^{(3)} = y_0^{(1)} \\ \Delta_x^{(3)} = -\Delta_x^{(1)} \\ \Delta_y^{(3)} = \Delta_y^{(1)} \end{array} \right. , \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^{(4)} = -x_0^{(2)} \\ y_0^{(4)} = y_0^{(2)} \\ \Delta_x^{(4)} = -\Delta_x^{(2)} \\ \Delta_y^{(4)} = \Delta_y^{(2)} \end{array} \right. \quad (13)$$

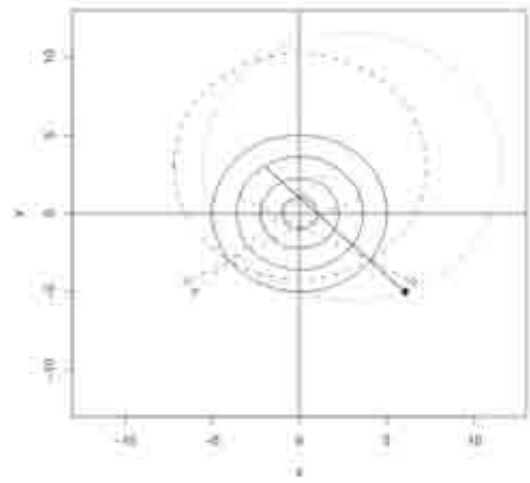


Рис. 4. Выбор одной прямой из четырех

В итоге получились четыре прямые, по которым может двигаться целевой объект. На рисунках 4, 5, 6 сплошной линией нарисованы окружности с центром в начале координат и радиусами r_1, r_2, r_3, \hat{r}_4 . Пунктирной линией нарисована окружность с центром в точке $(0, w)$ и радиусом r_4 . Линией из точек нарисована окружность с центром в точке (w, w) и радиусом r_5 . Отрезками обозначены возможные траектории движения целевого объекта, сплошная линия соответствует реальному движению целевого объекта – решению задачи. Точками отмечены возможные положения целевого объекта в момент проведения пятого измерения. Точка с заливкой, лежащая на окружности, обозначенной линией из точек, позволяет выбрать правильную траекторию из четырех возможных.

Для выбора правильной прямой из полученных четырех выполним еще одно измерение, переместив базовый объект в точку с координатами (w, w) . Рассчитаем, где будет находиться целевой объект в следующий момент времени, если будет двигаться по каждой из прямых (рис. 4). Получаем четыре точки (рис. 4): $(x_5^{(1)}, y_5^{(1)})$, $(x_5^{(2)}, y_5^{(2)})$, $(x_5^{(3)}, y_5^{(3)})$, $(x_5^{(4)}, y_5^{(4)})$.

Из них выбираем такую точку (x_5, y_5) , которая лежит на окружности радиуса r_5 с центром в точке с координатами (w, w) , т. е.

$$|(x_5 - w)^2 + (y_5 - w)^2 - (r_5)^2| < \varepsilon. \quad (14)$$

Тогда соответствующая этой точке прямая описывает траекторию движения целевого объекта.

Замечания

Представленный метод не всегда дает единственное решение. Например, для траектории движения целевого объекта, описываемой уравнением $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -7 + 2 \cdot t \end{cases}$, решением являются три прямые, из которых правильная только одна (рис. 5). На рисунке 5 точечную окружность пересекают сразу три прямые в точках (x_5, y_5) . Две прямые пересекают окружность в одной точке.

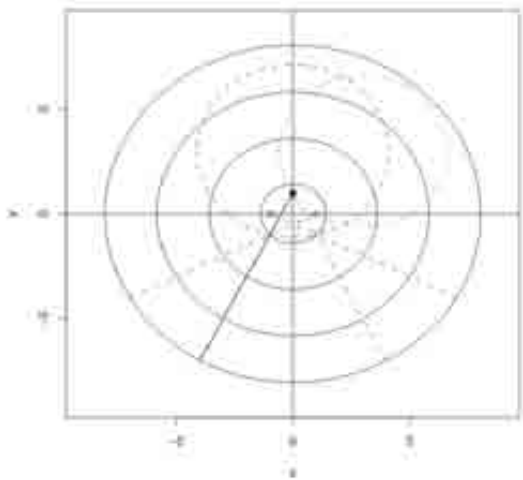


Рис. 5. Случай нескольких решений

Представленный метод работает и в случаях, когда условие, указанное ранее, $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$ не выполняется, т. е. метод работает при любых соотношениях получаемых измерений расстояний до целевого объекта. Даже в случае, если целевой объект проходит через начало координат, например, для траектории движения целевого объекта, описываемой

$$\begin{cases} x = -0,5 + t \\ y = -1 + 2 \cdot t \end{cases}, \quad (\text{рис. 6}).$$

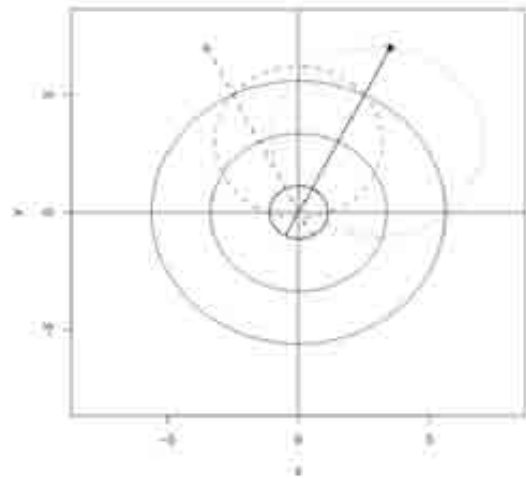


Рис. 6. Траектория движения целевого объекта проходит через начало координат

Для случая, когда $x_3 = \Delta_x$ и $x_0 = r_2$ (см. (3) и (4)), получается, что $\hat{x}_4 = 0$. Это приводит к тому, что $\cos \alpha = 0$ (см. (8) и (9)) и $\cos \theta = \infty$. В этом случае в \hat{x}_4 записывается значение r_2 , а в $y_4^{(1)}$ и $y_4^{(2)}$ значение 0. Т. е. искусственно траектория сдвигается на два интервала времени назад. Затем выполняются вычисления углов, как было описано в (8) и (9), а при составлении уравнений (10) и (11) выполняется сдвиг в обратную сторону.

Метод не работает, когда $r_2 = 0$ (см. формулы (3) и (4)). Но в этом случае координаты целевого объекта в момент второго измерения становятся известными, и задача сводится к определению только направления движения, т. е. Δ_x и Δ_y . Это можно сделать на основе измерений расстояний r_3, r_4, r_5 по следующим формулам:

$$\begin{cases} \Delta_x = \frac{6r_3^2 + 3r_4^2 + w^2 - 2r_5^2}{12w} \\ \Delta_y = \frac{w^2 - r_4^2 + 4r_3^2}{4w} \end{cases}. \quad (15)$$

Тогда уравнение прямой будет

$$\begin{cases} x = -\Delta_x + \Delta_x \cdot t \\ y = -\Delta_y + \Delta_y \cdot t \end{cases}. \quad (16)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлено решение задачи определения координат целевого объекта в системе координат базового объекта на основе пяти измерений расстояния между базовым объектом и целевым объектом. При этом предполагается, что целевой объект движется прямолинейно с постоянной скоростью. В общем

случае пяти измерений оказывается достаточно для однозначного определения уравнения прямой, по которой движется целевой объект, и его координат в каждый момент времени, когда проводились измерения расстояния до целевого объекта (формулы (3)–(4), (7)–(13) и критерий (14)). Если целевой объект пересекает начало координат в момент второго измерения, то задача решается с помощью формул (15) и (16).

Аналогично можно определить координаты любого количества целевых объектов и далее решать задачи, связанные с взаимодействием базового объекта с этими целевыми объектами.

Далее интерес представляет задача, когда целевой объект движется непрямолинейно и/или неравномерно. В случае несильного отклонения движения целевого объекта от прямолинейного и равномерного движения представленное в статье решение может быть использовано для первого приближения к решению задачи нахождения траектории и коор-

динат целевого объекта, при этом определение точности такого решения требует дополнительных исследований.

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012–2016 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cisco Systems, Inc.* Wi-Fi Location-Based Services 4.1 Design Guide San Jose, USA: Cisco Systems, Inc. 2008. Online: <http://www.cisco.com/en/US/docs/solutions/Enterprise/Mobility/wifich2.html> (дата обращения: 9.05.2016)
2. *Kaplan E.D., Hegarty Ch. J.* Understanding GPS: principles and applications, 3rd ed. London, England: Artech House, 2006.
3. *Щекотов М. С., Кашевник А. М.* Сравнительный анализ систем позиционирования смартфонов в помещениях // Труды СПИИРАН. 2012. № 4(23). С. 459–471.

Поступила в редакцию 05.07.2016

REFERENCES

1. *Cisco Systems, Inc.* Wi-Fi Location-Based Services 4.1 Design Guide San Jose, USA: Cisco Systems, Inc. 2008. Online: <http://www.cisco.com/en/US/docs/solutions/Enterprise/Mobility/wifich2.html> (accessed: 9.05.2016).

2. *Kaplan E. D., Hegarty Ch. J.* Understanding GPS: principles and applications, 3rd ed. London, England: Artech House, 2006.
3. *Shchyokotov M. S., Kashevnik A. M.* Sravnitelnyj analiz sistem pozicionirovaniya smartfonov v pomeshcheniyah [*Comparative analysis of indoor smartphone positioning systems*]. *Trudy-SPIIRAN*. 2012. No. 4(23). С. 459–471.

Received July 05, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Щеголева Людмила Владимировна
профессор, д. т. н.
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,
Россия, 185910
эл. почта: schegoleva@petsu.ru
тел.: (8142) 711068

Жуков Артем Владимирович
старший преподаватель, к. т. н.
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,
Россия, 185910
эл. почта: zhukov@sampo.ru
тел.: (8142) 711068

CONTRIBUTORS:

Shchegoleva, Liudmila
Petrozavodsk State University
33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: schegoleva@petsu.ru
tel.: (8142) 711068

Zhukov, Artem
Petrozavodsk State University
33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: zhukov@sampo.ru
tel.: (8142) 711068

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ С ЗАДАННЫМ МИНИМАЛЬНЫМ РАЗМАХОМ ВЫБОРКИ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»*

Производится прямой перебор исходов схемы методом графов, находится их число, определяется вероятность появления ее исходов в общей схеме сочетаний, для исходов схемы решается задача нумерации и на ее основе предлагается алгоритм их быстрого моделирования.

Ключевые слова: схема сочетаний; минимальный размах выборки; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A COMBINATIONS CIRCUIT WITH GIVEN MINIMAL RANGE OF SAMPLE

Outputs of the circuit are enumerated directly by the graph method, their number and probability in the general combinations circuit are determined, the problem of enumeration of outputs is solved and the algorithm of their rapid modeling is suggested on this basis.

Key words: combinations circuit; minimal range of sample; enumeration problem; modeling.

ВВЕДЕНИЕ

Схема сочетаний – одна из основных широко распространенных в теории и практике комбинаторных схем [1–7], возникает при выборе r элементов из n различных элементов без возвращения и без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц по одной по n различным ячейкам. Интерпретация размещения частиц по ячейкам схемы сочетаний используется в статистике Ферми–Дирака [6], а при неограниченном числе частиц в ячейке – в статистике Бозе–Эйнштейна и является в этом случае схемой сочетаний с повторением, т. е. схемой выбора с возвраще-

нием или размещения частиц по ячейкам без ограничения числа частиц в каждой из них.

Схема сочетаний участвует во многих важных распространенных математических формулах: биноме Ньютона, биномиальной схеме и биномиальном распределении вероятностей, в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем и т. д.

Число исходов схемы сочетаний есть $C_n^r = n!/r!(n-r)!$. (В схеме сочетаний с повторениями число исходов – C_{n+r-1}^r).

Свойства сочетаний подробно рассмотрены, например, в [6].

Производящая функция последовательности чисел C_n^r и C_{n+r-1}^r приведена в [2] и [6]:

$$\sum_{r=0}^n C_n^r x^r = (1+x)^n;$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r x^r = (1-x)^{-n}.$$

Моделирование исходов схемы сочетаний приведено в [7].

В [9] и [10] соответственно проведено исследование схемы сочетаний и схемы сочетаний с ограниченным размахом по указанным в аннотации направлениям методом графов на основе визуального перечисления всех их исходов с возможностями учета различных ограничений в них.

Однако путь отбраковки исходов в более общей схеме (в данном случае схеме сочетаний) для перечисления исходов изучаемой схемы и ее дальнейшего анализа приводит к рассмотрению большого числа «лишних» исходов и годится для численного расчета по схеме, а для аналитического исследования схемы требуется выявление общих закономерностей в ней, которые лучше проявляются и легче улавливаются при построении процедуры прямого перечисления ее исходов, что и даст основу ее анализа.

1. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ И ЧИСЛО ВСЕХ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Зададим параметры схемы: n – число различных номерами от 1 до n элементов схемы; r – размер выборки; S – заданный минимальный размах выборки, где под размахом выборки (исхода схемы) будем понимать максимальную разность между номерами ее элементов, т. е. между ее крайними компонентами, т. к. номера элементов в исходах будем перечислять в возрастающем порядке.

Для перечисления исходов схемы будем перебирать все допустимые значения наименьшего номера m в исходе от 1 до $(n - S)$, который определит диапазон перебора значений максимального номера M в нем от $(m + S)$ до n , а остальные $(r - 2)$ номеров элементов исхода будем выбирать по схеме сочетаний из значений от $(m + 1)$ до $(M - 1)$.

Граф перечисления исходов схемы в соответствии с процедурой их перебора будет состоять из объединения результатов трех этапов: перебора минимального номера m в исходе схемы, для каждого – перебор возможного максимального номера M от $(m + S)$ до n в нем и описанный выше выбор остальных $(r - 2)$ номеров между числами m и M .

Число исходов первого этапа и пучков второго этапа равно $d = n - S$, при каждом фиксированном значении m размер пучка второго этапа равен $n - m - S + 1$, т. к. множество значений M есть числа $(m + S, m + S + 1, \dots, n)$, а при каждом фиксированном значении M размер пучка третьего этапа равен C_{M-m-1}^{r-2} . Установление порядка при перечислении и граф перечисления равновероятных исходов схемы сочетания даны в [9]. Тогда из процедуры перебора следует формула для числа N исходов схемы

$$N = \sum_{m=1}^d \sum_{M=m+S}^n C_{M-m-1}^{r-2}. \quad (1)$$

Приведем граф перечисления исходов схемы (рис. 1).

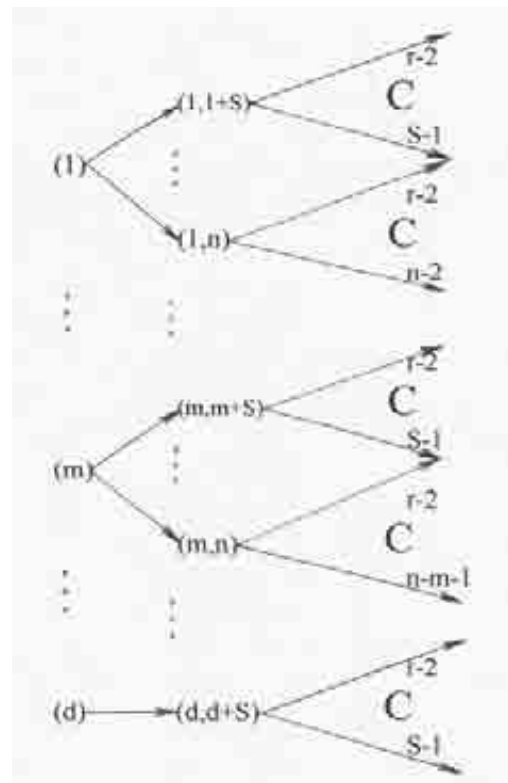


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы

Пример 1. Пусть $n = 7$, $r = 4$, $S = 4$. Отсюда по (1) при $d = 3$ имеем

$$N = \sum_{m=1}^3 \sum_{M=m+4}^7 C_{M-m-1}^2 =$$

$$= (C_3^2 + C_4^2 + C_5^2) + (C_3^2 + C_4^2) + C_3^2 = 31. \quad (2)$$

Приведем граф перечисления всех исходов схемы и их число N по графу (рис. 2).

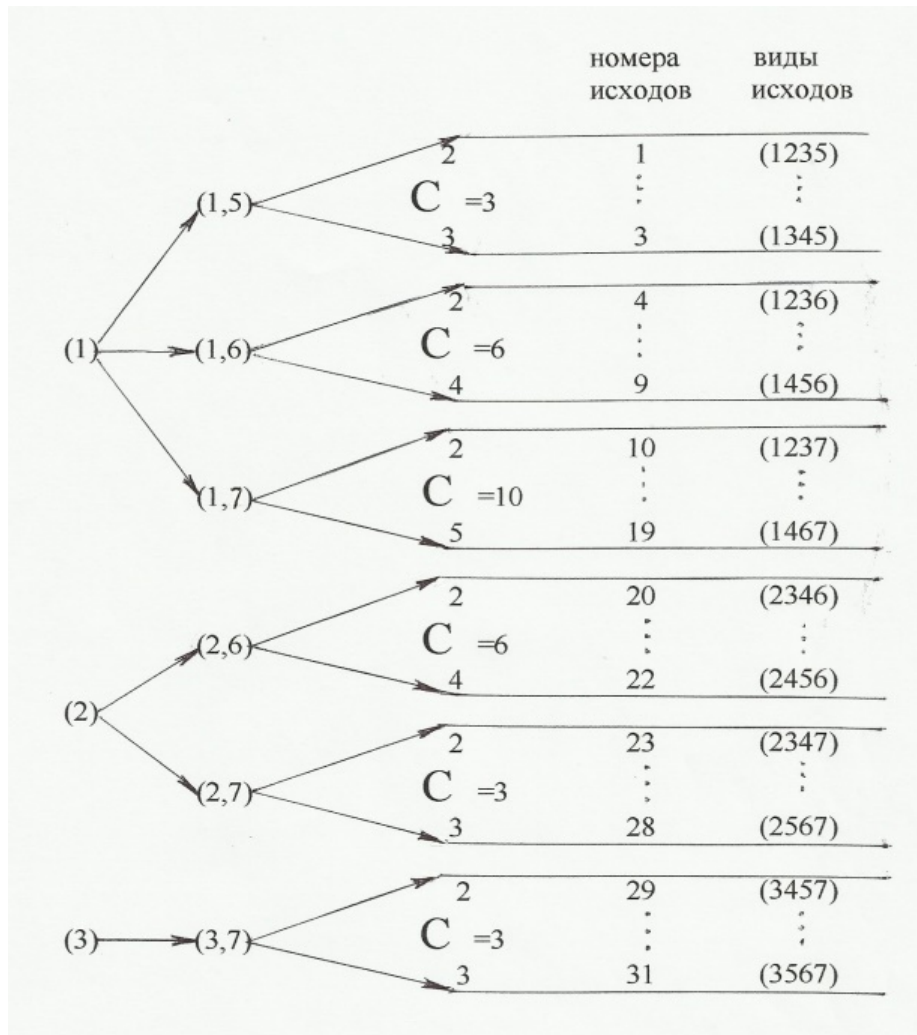


Рис. 2. Граф перечисления исходов в примере 1

По графу на рисунке 2 и по (1) получаем $N = 31$.

2. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ ДЛЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ

При решении задачи нумерации будем использовать соответствующие результаты для схемы сочетаний из [9], т. е., во избежание громоздкости выражений не приводя явных формул соответствия номеров и видов исходов схемы сочетаний $C_a^b = c$, будем обозначать их как N_c и R_c для выбора из элементов с номерами от 1 до a с переобозначением на номера элементов от $m + 1$ до $M - 1$ и соответствующими значениями параметров $a = M - m - 1$ и $b = r - 2$.

Здесь будет существенно использована известная из п.1 пучковая структура графа перечисления исходов схемы на каждом его этапе. Введем удобные для дальнейшего рассмотрения обозначения и выпишем поэтапные пуч-

ковые структуры графов в фигурных скобках, перечисляя в них в круглых скобках через запятую поэтапные размеры пучков исходов:

1-й этап – $\{(d)\}$ с множеством исходов $(1, 2, \dots, d)$;

2-й этап – $\{(n - S), (n - S - 1), \dots, (1)\} = \{A_1, A_2, \dots, A_d\}$; $\sum_{i=1}^d A_i = D$;

3-й этап – $\{(C_{S-1}^{r-2}), (C_S^{r-2}), \dots, (C_{n-2}^{r-2}), (C_{S-1}^{r-2}), (C_S^{r-2}), \dots, (C_{n-3}^{r-2}), \dots, (C_{S-1}^{r-2})\} = \{B_1, B_2, \dots, B_D\}$.

2.1. Прямая задача нумерации

Пусть известен номер $N^* = N_3^*$ исхода схемы по перечислению. Требуется определить его вид $R^* = (a_1^*, \dots, a_r^*)$, где элементы выборки упорядочены по возрастанию номеров.

Обозначим через N_3^*, N_2^*, N_1^* номера исходов этапов в траектории графа их перечисления, ведущей к итоговому исходу с данным видом R^* .

Шаги решения:

- 1) находим $N_2^* = \min n_2 : (\sum_{i=1}^{n_2} B_i \geq N_3^*)$;
- 2) находим номер итогового исхода $p_3 = N_c$ в пучке 3-го этапа $p_3 = N_3^* - \sum_{i=1}^{N_2^*-1} B_i$;
- 3) из N_c по [9] находим $R_c = (a_2, \dots, a_{r-1})$ в стандартной форме при нумерации элементов подряд начиная с 1;
- 4) находим $N_1^* = a_1 = \min n_1 : (\sum_{i=1}^{n_1} A_i \geq N_2^*)$;
- 5) находим номер p_2 предшествующего итоговому исходу в пучке 2-го этапа $p_2 = N_2^* - \sum_{i=1}^{N_1^*-1} A_i$;
- 6) по a_1^* и p_2 находим $a_r^* = a_1^* + S + p_2 - 1$;
- 7) пересчитываем R_c к виду R_c^* с начальным элементом $a_2^* = a_1^* + 1$ по формуле $a_i^* = a_i + a_1^*$, $i = 2, r-1$;
- 8) получаем искомый вид $R^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_r^*)$.

Пример 2. Пусть $n = 7, r = 4, S = 4$ и дан номер исхода $N^* = N_3^* = 23$. Требуется найти его вид $R^* = R_3^* = (a_1^*, \dots, a_r^*)$ по алгоритму. По графу на рисунке 2 $R^* = (2, 3, 4, 7)$.

Решение: 1) $N_2^* = \min n_2 : (C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_3^2 + C_4^2 = B_1 + \dots + B_5 = 28 > 23)$, откуда $n_2 = N_2^* = 5$; 2) $p_3 = 23 - (3 + 6 + 10 + 3) = 1 = N_c$; 3) из $N_c = 1$ следует по [9], что $R_c = (1, 2)$; 4) $N_1^* = \min n_1 : (3 + 2 = A_1 + A_2 = 5 = N_2^*)$, откуда $N_1^* = 2$; 5) $p_2 = 5 - 3 = 2$, откуда $a_1^* = 2$; 6) $a_4^* = 2 + 4 + 2 - 1 = 7$; 7) из $R_c = (1, 2)$ получаем $R_c^* = (a_2^* = 1 + 2 = 3, a_3^* = 2 + 2 = 4)$; 8) $R^* = (a_1^*, R_c^*, a_r^*) = (2, 3, 4, 7)$, что совпадает с результатом по рисунку 2.

2.2. Обратная задача нумерации

Пусть известен вид $R^* = (a_1^*, \dots, a_r^*)$ исхода схемы по перечислению. Требуется определить его номер N^* .

Обозначим через N_3^*, N_2^*, N_1^* номера исходов этапов в траектории графа их перечисления, ведущей к итоговому исходу с данным номером N^* .

Шаги решения:

- 1) из вида R^* получаем a_1^* , откуда $N_1^* = a_1^*$;
 - 2) из вида R^* получаем a_r^* , откуда $N_2^* = \sum_{i=1}^{a_1^*-1} A_i + a_r^* - a_1^* - S + 1$;
 - 3) из вида R^* , отбрасывая крайние компоненты, получаем R_c и приводим его к стандартному виду $R_c = (a_1, \dots, a_{r-2})$ (с нумерацией элементов подряд начиная с единицы) по формуле $a_i = a_i^* - a_1^*$, $i = 2, r-1$;
 - 4) по [9] из R_c получаем номер N_c искомого исхода в пучке 3-го этапа;
 - 5) искомый номер вычисляем по формуле $N^* = \sum_{i=1}^{N_2^*} B_i + N_c$.
- Пример 3.** Пусть в условиях примера 2 задан вид исхода $R^* = (2, 3, 4, 7)$. Требуется найти его номер N^* по алгоритму. По рисунку 2 $N^* = 23$.

Решение: 1) $a_1^* = 2 = N_1^*$; 2) $a_4^* = 7$, откуда $N_2^* = \sum_{i=1}^{2-1} A_i + 7 - 2 - 4 + 1 = 3 + 7 - 2 - 4 + 1 = 5$; 3) $R_c^* = (3, 4)$, откуда $R_c = (1, 2)$; 4) по [9] $N_c = 1$; 5) $N_3^* = N^* = \sum_{i=1}^{5-1} B_i + 1 = 3 + 6 + 10 + 3 + 1 = 23$, что совпадает с результатом по рисунку 2.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ СРЕДИ ВСЕХ ИСХОДОВ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ

Из равновероятности всех исходов схемы сочетаний по [9] и из (1) следует выражение для определенной в заголовке вероятности

$$P = \sum_{m=1}^d \sum_{M=m+S}^n C_{M-m-1}^{r-2} / C_n^r.$$

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Первый способ – отбраковкой лишнего смоделированных по [9] исходов схемы сочетаний до получения нужного числа исходов.

Второй способ – быстрое моделирование каждого исхода по результату решения прямой задачи нумерации путем разыгрывания номера исхода по одному случайному числу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.
2. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ / пер. с англ., М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 288 с.
3. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. М.: МГУ, 1985. 308 с.
4. Сачков В. Н. Комбинаторные методы в дискретной математике. М.: Наука, 1977. 320 с.
5. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982. 308 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1970. 528 с.
7. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М., МИЭМ, 2012. 118 с.
8. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. Вып. 8. С. 15–21.
9. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.
10. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 10. С. 28–31.

Поступила в редакцию 05.04.2016

REFERENCES

1. *Vilenkin N. Yu.* Kombinatorika [Combinatorics]. Moscow: Nauka, 1969. 323 p.
2. *Riordan Dzh.* Vvedenie v kombinatornyi analiz [Introduction to Combinatorial Analysis]. Moscow: Foreign Literature Publ., 1963. 288 p.
3. *Rybnikov K. A.* Vvedenie v kombinatornyi analiz [Introduction to Combinatorial Analysis]. Moscow: Moscow University Publ., 1985. 308 p.
4. *Sachkov V. N.* Kombinatornye metody v diskretnoi matematike [Combinatorial methods in discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1977. 320 p.
5. *Sachkov V. N.* Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoi matematiki [Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1982. 308 p.
6. *Feller V.* Vvedenie v teoriyu veroyatnosti i ee prilozheniya [An introduction to probability theory and its applicatios]. Moscow: Mir, 1970. 528 p.
7. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modeling]. Moscow: MIEM, 2012. 118 p.
8. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika [Instruments and systems: monitoring, control, and diagnostics]. 2014. No. 8. 15–21 p.
9. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of combination scheme]. Promyshlennye ASU i kontrollery [Industrial automatic control systems and controllers]. 2015. No. 8. 35–40 p.
10. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s ogranichenym razmakhom [The analysis of the combination scheme with a limited range]. Promyshlennye ASU i kontrollery [Industrial automatic control systems and controllers]. 2015. No. 10. 28–31 p.

Received April 05, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: 89037411345

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ ПОДРЯД ИДУЩИХ ФИКСИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»*

Предлагается процедура прямого перечисления исходов схемы с определенной дисциплиной их нумерации. На этой основе проводятся исследования по следующим направлениям: находится общее число исходов схемы, решается задача нумерации, строится алгоритм быстрого моделирования ее исходов.

Ключевые слова: перестановки; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION CIRCUIT WITH A GIVEN NUMBER OF CONSECUTIVE FIXED ELEMENTS

We suggest a procedure for direct enumeration of the outputs of the circuit with a given discipline of their enumeration. Proceeding from this, the following aspects are studied: the total number of outputs of the circuit is found, the enumeration problem is solved, the algorithm of rapid modeling of outputs is constructed.

Keywords: permutations; enumeration problem; modeling.

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от ранее предложенного в [1] общего подхода к анализу схемы перестановок с ограничением на ее исходы на основе отбраковки исходов аналогичной схемы без ограничений, не соответствующих условиям ограничения, здесь при конкретном заданном ограничении на исходы оказывается возможным проводить исследования по данной схеме, определенной в названии статьи, на базе прямого явного перебора ее исходов. Это освобождает от необходимости работы с большими массивами «лишних» исходов, не отвечающих требованиям ограничений, и позволяет проводить анализ схемы и получать результаты теми же методами, по тем же направлениям и

того же уровня, как и в уже исследованной в [1] аналогичной схеме без ограничений.

1. ОПИСАНИЕ СХЕМЫ И ВИД ЕЕ ИСХОДОВ

В схеме перестановок с n элементами с номерами от 1 до n , где выделено t номеров i_1, \dots, i_t элементов из n , $t \leq n$, нас интересуют исходы, в которых элементы с этими номерами идут подряд. Будем называть их благоприятными исходами (схемы перестановок) или просто исходами схемы, имея в виду исследуемую схему перестановок с данным ограничением.

Разные исходы схемы задаются наборами номеров всех n элементов в разном порядке – будем их записывать в круглых скобках через запятую.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $t = 2$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$. Тогда все исходы схемы перестановок есть: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, а благоприятными будут исходы $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Не нарушая общности, в дальнейшем для удобства обозначений будем считать, что выделенные t номеров последние, т. е. идут от номера $(n - t + 1)$ до n , что достигается соответствующей перенумерацией элементов.

2. ЧИСЛО И ПРОЦЕДУРА ПРЯМОГО ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ БЛАГОПРИЯТНЫХ ИСХОДОВ

Число N исходов схемы определяется из соображения их прямого перебора, который заключается в последовательном переборе всех взаимных порядков первых $n - t$ номеров элементов и одной группы t последних выделенных номеров в одном зафиксированном порядке (как один элемент перестановки), например, возрастающем, в сочетании со всеми взаимными порядками этих t номеров между собой. Первый перебор, как известно, совершается $(n - t + 1)!$ способами, а второй $- t!$ способами, откуда по правилу умножения комбинаторики получаем

$$N = (n - t + 1)!(t)! \quad (1)$$

(В примере 1 по (1) находим $N = (3 - 2 + 1)!2! = 4$, что совпадает с визуальным результатом).

Процедуру перебора благоприятных исходов будем строить в соответствии с (1) методом графов по схеме двух последовательных действий, приведенной в [2], являющихся здесь перестановками размерами $(n - t + 1)$ и t , а алгоритм перебора их исходов и комбинаторный анализ схемы перестановок представлен в [1].

Для дальнейших исследований напомним алгоритм построения случайного процесса перечисления исходов и их нумерации в схеме перестановок.

Строим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до n номерами, ставя каждый из них последовательно и случайно относительно каждой имеющейся перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого и нумеруя слева направо получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, т. е. при росте перестановок на один элемент.

Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, a_2, \dots, a_j)$ i -е состояние процесса (т. е. i -ю перестановку a_1, a_2, \dots, a_j) на j -м шаге. Тогда приведем вид графа переходов на примере первых трех шагов (рис. 1).

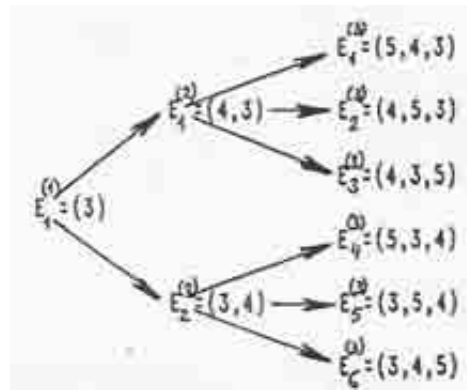


Рис. 1. Граф перечисления исходов первых трех шагов в примере 1

В частности, построим графы переборов всех исходов перестановок $n - t + 1$ и t элементов на числовом примере.

Пример 2. Пусть $n = 5$, $t = 3$. Тогда получим следующие графы перечисления исходов перестановок сначала для t элементов с номерами 3, 4, 5 (рис. 1), а потом с номерами от 1 до $n - t$ и элемента с номером *, которым пока занумеруем группу из t следующих подряд в перестановке выделенных элементов без учета их взаимного порядка (рис. 2).

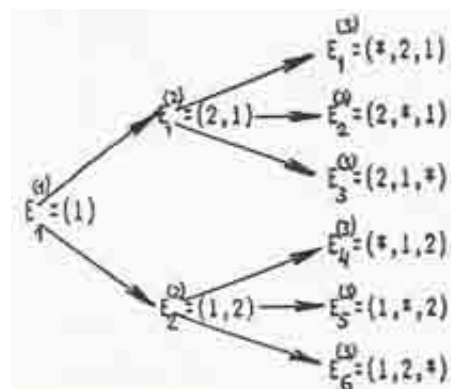


Рис. 2. Граф перечисления группы выделенных элементов с остальными элементами в примере 2

В схеме последовательных действий (в условиях исследуемой схемы – двух действий по схеме перестановок) из [2] получаем граф перебора исходов исследуемой схемы, т. е. благоприятных исходов вида (рис. 3).

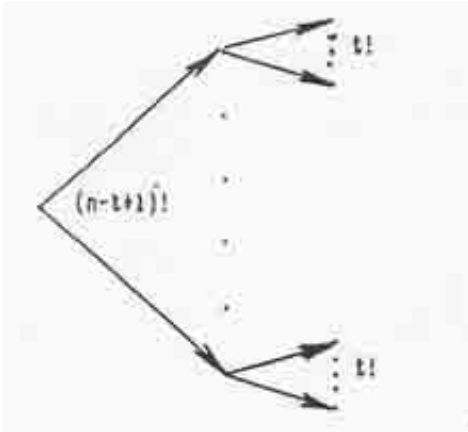


Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы в примере 2

Теперь для наглядности на примере представим граф прямого перечисления исходов исследуемой схемы, т. е. благоприятных исходов.

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, $n = 5$, $t = 3$, т. е. в перестановках элементы с номерами 3, 4, 5 должны стоять подряд в любом взаимном порядке.

Приведем граф перечисления всех исходов схемы (рис. 4).

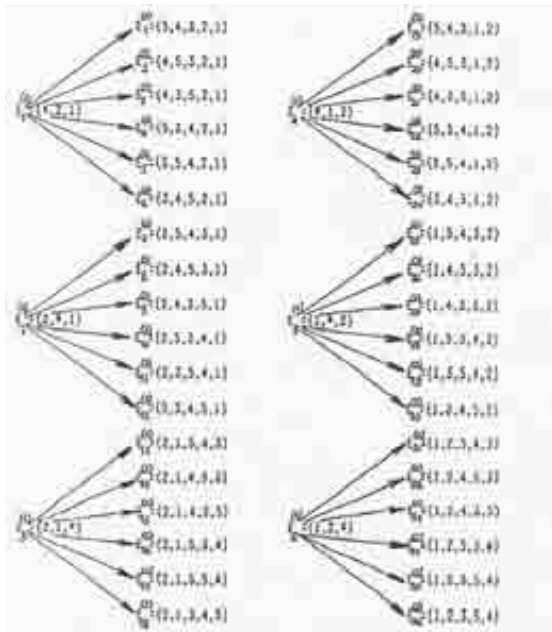


Рис. 4. Граф перечисления исходов схемы в примере 3

На всех рисунках состояния в графах обозначаем через $E_i^{(i)}$, где верхний индекс в круглых скобках обозначает номер шага процес-

са перебора его состояний (исходов схемы), а нижний – номер состояния на этом шаге.

3. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Для решения задачи нумерации в форме прямой и обратной задач нумерации, состоящих соответственно в нахождении вида исхода схемы по его номеру и номера исхода по его виду, воспользуемся результатами ее решения для используемых здесь схем перестановок [1] и схемы последовательных действий [2].

Прямая задача нумерации

Пусть задан номер исхода схемы $N = N^{(2)}$. Требуется найти его вид $R = R^{(2)}$. Обозначения номера и исхода здесь даны в соответствии с принятыми в результирующей схеме двух последовательных действий [2] описанных выше схем перестановок. Введем определяющий эту схему вектор $\bar{n} = (n_1, n_2)$, задающий численности исходов этих двух действий, т. е. этих двух перестановок: $n_1 = (n - t + 1)!$, $n_2 = t!$. Далее схему перестановок с числом исходов n_1 будем называть первой, а с числом исходов n_2 – второй. Тогда по [2] из значения $N^{(2)}$ вычисляем номер $N^{(1)}$ исхода, приводящего к данному, после первого действия по формуле

$$N^{(1)} = \left[\frac{N^{(2)} + n_2 - 1}{n_2} \right], \quad (2)$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z . Далее для каждого $i = 1, 2$ вычисляем значение $v_i = N^{(i)} \bmod n_i$ и

$$j_i = v_i + C_{n-v_i}^{n_i}, \quad (3)$$

где C_a^b – число сочетаний из a по b , n – любое натуральное число, а j_i – номер состояния (исхода) в пучке графа, приводящего к искомому с данным номером. Полученные числа j_1 и j_2 будут являться номерами исходов схем перестановок размерами соответственно $(n - t + 1)$ и t , приводящих к исходу с данным номером исследуемой схемы, состоящей из последовательного применения этих схем перестановок. Теперь по решенной для схемы перестановок прямой задаче нумерации в [1] в терминах индексов членов вариационного ряда входящих в них номеров в вычисляемом ниже порядке находим виды их исходов R_{1*} и R_{2*} . Причем в первой схеме заменяем элемент * при стандартизации на число t .

В итоге обратной заменой номеров элементов перестановок их фактическими номерами получаем их виды R_1 и R_2 в нашей схеме.

Приведем используемые здесь формулы из [1] для определения видов исходов R_{1*} и R_{2*} :

$$N_1 = \left[\frac{j_2 + r - 1}{r} \right], \quad (4)$$

где r – размер перестановки, N_m , $m = 1, \dots, r$ – номер исхода на m -м шаге перечисления исходов перестановки, приводящего к конечному с данным номером, а $[Z]$ – целая часть числа Z , и

$$M_s = (N_s - 1) \bmod s + 1, \quad (5)$$

где M_s – номер позиции элемента s среди чисел $1, 2, \dots, s$ в перестановке слева направо.

Тогда искомые виды $\{R_{i*}\}$, $i = 1, 2$ определяются взаимными порядками номеров элементов, заданных числами $\{M_s\}$ для $i = 1, 2$ (см. [1]).

Для определения окончательного вида исхода остается в вид исхода R_1 , в котором вид исхода R_2 обозначен $*$, поставить его на ее место, предварительно получив виды исходов R_1 и R_2 заменой соответственно в видах исходов R_{1*} и R_{2*} номера их элементов на фактические.

Приведем численный пример.

Пример 4. Пусть параметры схемы заданы в примере 3, в соответствии с которыми на рисунке 4 приведен граф перечисления всех состояний, и пусть $N = N^{(2)} = 27$. Найдем вид исхода $R = R^{(2)}$. По графу $R = (1, 4, 3, 5, 2)$. По данным примера, $n_1 = n_2 = 3! = 6$. Определим R по формулам (2), (3): $N = N^{(2)} = 27$; $N^{(1)} = [(27 + 6 - 1)/6] = 5$; $v_2 = 27 \bmod 6 = 3$; $v_1 = 5 \bmod 6 = 5$; $j_1 5 + 0 = 5$; $j_2 = 3 + 0 = 3$. Отсюда в обозначениях [1] во второй схеме перестановок, состоящей из $t = 3$ элементов с номерами 3, 4, 5, заменяя их для стандартизации вычислений на номера 1, 2, 3, получаем исход R_{2*} , совпадающий с исходом R_2 при обратной замене номеров 1, 2, 3 на фактические 3, 4, 5, по формулам (4) и (5). (В силу того, что $r_1 = r_2 = 3$, в обеих схемах перестановок достаточно определить места двух номеров элементов.)

Во второй схеме перестановок исход определяется следующей цепочкой вычислений:

$$N_3 = j_2 = 3; \quad N_2 = [(3 - 3 + 1)/3] = 1;$$

$M_3 = (3 - 1) \bmod 3 + 1 = 3$; $M_2 = (1 - 1) \bmod 2 + 1 = 1$, откуда получаем $R_{2*} = (2, \cdot, 3)$, значит $R_{2*} = (2, 1, 3)$, а тогда $R_2 = (4, 3, 5)$.

В первой схеме перестановок для стандартизации вычислений по (4) и (5) заменяем номер элемента $*$ на 3, а после получения результата R_{1*} производим обратную замену:

$$N_3 = j_1 = 3; \quad N_2 = [(5 - 3 + 1)/3] = 2;$$

$M_3 = (5 - 1) \bmod 3 + 1 = 2$; $M_2 = (2 - 1) \bmod 2 + 1 = 2$, откуда получаем $R_{1*} = (\cdot, 3, 2)$, значит, $R_{1*} = (1, 3, 2)$, а тогда $R_1 = (1, *, 2)$.

Отсюда искомый вид исхода всей схемы есть $R = R^{(2)} = (1, 4, 3, 5, 2)$, что совпадает с визуальным результатом по графу на рисунке 4.

Обратная задача нумерации

Пусть задан вид исхода схемы $R = R^{(2)}$. Требуется найти его номер $N = N^{(2)}$. Обозначения номера и исхода здесь даны в соответствии с принятыми в результирующей схеме двух последовательных действия [2] описанных выше схем перестановок. Определяющий эту схему вектор $\bar{n} = (n_1, n_2)$ задает численности исходов этих двух действий, т. е. этих двух перестановок: $n_1 = (n - t + 1)!$, $n_2 = t!$. Как и раньше, схему перестановок с числом исходов n_1 будем называть первой, а с числом исходов n_2 – второй.

Для решения задачи по смыслу схемы последовательных действий, состоящих в двух перестановках, выписываем виды их исходов R_1 и R_2 , приводящих к данному итоговому виду R . Для стандартизации расчета их номеров при перечислении исходов в схемах перестановок производим описанную в прямой задаче замену номеров их элементов и по решенной в [1] для схемы перестановок обратной задаче нумерации определяем их номера $N = N_1$ и $N = N_2$ по формуле

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + M_r, \quad (6)$$

где числа r и M_i определены в прямой задаче нумерации. Далее значения N_1 и N_2 , переобозначив соответственно через j_i и j_2 , подставим в приведенную из [2] формулу

$$N^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1} (j_i - 1) \prod_{i=l+1}^k n_i + j_k \quad (7)$$

при $k = 2$, откуда и получаем искомый номер $N^{(2)}$ итогового исхода схемы.

Приведем численный пример.

Пример 5. Пусть параметры схемы заданы в примере 3, в соответствии с которыми на рисунке 4 приведен граф перечисления всех состояний, и пусть вид исхода $R = R^{(2)} = (1, 4, 3, 5, 2)$. Требуется найти его номер $N = N^{(2)}$. По графу на рисунке 4 искомый номер равен 27. Определим его по формулам (6) и (7). По данным примера, $n_1 = n_2 = 3! = 6$.

Для этого выпишем составляющие нашу схему перестановки как два последовательных действия: $R_2 = (4, 3, 5)$ и $R_1 = (1, *, 2)$, заменив их для стандартизации вычислений по формулам [1] и [2] соответственно на $R_{2*} = (2, 1, 3)$ и $R_{1*} = (1, 3, 2)$. Найдем их номера по (6), указав значения M_2 и M_3 для обеих схем перестановок из их видов. Расчеты начинаем по (6) со второй схемы, т. к. она является внутренней для первой. Для второй схемы $M_2 = 3$, $M_3 = 1$, поэтому

$$N_2 = j_2 = (M_2 - 1) \frac{3!}{2!} + M_3 = (1 - 1)3 + 3 = 3.$$

Для первой схемы $M_2 = 2$, $M_3 = 2$, поэтому

$$N_1 = j_1 = (M_2 - 1) \frac{3!}{2!} + M_3 = (2 - 1)3 + 2 = 5.$$

Отсюда по формуле (7) получаем $N^{(2)} = (5 - 1)6 + 3 = 27$, что совпадает с визуальным результатом по графу на рисунке 4.

Пример 6. Проведем теперь проверку совпадения номера последнего исхода схемы с общим числом исходов в примере 3. По логике дисциплины нумерации исходов при их перечислении по методу графов вид последнего исхода очевиден и есть $R = (1, 2, 3, 4, 5)$. Решив обратную задачу нумерации, проверим, что его номер $N^{(2)}$ совпадает с числом исходов схемы N , вычисляемой по (1): $N = 3!3! = 36$. Здесь все рассуждения полностью повторяют пример 5 и будут опущены. Приведем только конкретные вычисления: $R_2 = (3, 4, 5)$ и $R_1 = (1, 2, *)$, $R_{2*} = (1, 2, 3)$ и $R_{1*} = (1, 2, 3)$. Для обеих схем перестановок $M_1 = 1$, $m_2 = 2$, $M_3 = 3$, поэтому

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = j_1 = j_2 &= (M_2 - 1) \frac{3!}{2!} + M_3 = \\ &= (2 - 1)3 + (3 - 1) + 1 = 6. \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (7) получаем $N^{(2)} = (6 - 1)6 + 6 = 36$, что совпадает с визуальным результатом по графу на рисунке 4 и совпадает с результатом по (1).

4. ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

В силу очевидной симметрии исходов в процессе их перебора все они равновероятны. Отсюда следует, что условная вероятность любого из них при выполнении условия ограничения в схеме перестановок есть величина, обратная числу исходов нашей схемы (с данным

ограничением) и равна $1/(n - t + 1)!$, доля же таких исходов среди всех в схеме перестановок p есть вероятность выполнения в ней данного ограничения и вычисляется по формуле отношения исходов в нашей схеме к числу исходов схемы перестановок:

$$p = \frac{(n - t + 1)!}{n!} = \frac{n - t + 1}{C_n^t} \quad (8)$$

Проверим формулу (8) на примере.

Пример 7. Пусть параметры схемы заданы в примере 3, в соответствии с которыми на рисунке 4 приведен граф перечисления всех состояний. Их число по графу равно 36, а число исходов в схеме перестановок того же размера 5 равно $5! = 120$. Тогда получаем, что вероятность выполнения данного ограничения в схеме перестановок $p = 36/120 = 0,3$, а по формуле (8) $p = (5 - 3 + 1)/C_5^3 = 0,3$, т. е. результаты совпали.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМОЖНОГО ИСХОДА СХЕМЫ

Первый способ заключается в моделировании возможных исходов схемы перестановок того же размера, приведенном в [1] и [3]. Тогда требуемое число исходов схемы перестановок для получения одного возможного значения нашей схемы имеет геометрическое распределение с параметром p , вычисляемым по (8), со средним числом $1/p$.

Второй способ состоит в «быстром» моделировании методом маркировки ([3]) для разыгрывания по одному случайному числу одного из равновероятных номеров, определенных по (1), возможных исходов схемы с дальнейшим нахождением его вида по результату решения прямой задачи нумерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин А. В., Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. Петрозаводск. 2014. № 4. С. 80–86.
2. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.
3. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

Поступила в редакцию 05.04.2016

REFERENCES

1. Kolchin A. V., Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy perestанovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN [Transactions of the KarRC of the RAS]*. 2014. No. 4. P. 80–86.
2. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhem odnovremennykh i posledovatel'nykh deist-

vii [Combinatorial Analysis of the Scheme of simultaneous and Sequential Action]. *Promyshlennye ASU i kontroliery [Industrial Automatic Control Systems and Controllers]*. 2016. No. 2. P. 35–41.

3. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modeling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

Received April 05, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: 89037411345

ХРОНИКА

РАБОЧЕЕ СОВЕЩАНИЕ «СЕТЕВЫЕ ИГРЫ И МЕНЕДЖМЕНТ»

(Петрозаводск, 5–7 июля 2015 г.)

Летом 2015 года в ИПМИ КарНЦ РАН прошло очередное международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент-2015» («Networking Games and management»). Мероприятие было организовано Институтом прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, а также факультетом прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Данное совещание является традиционным и проводилось уже в пятый раз, продолжая серию совещаний в области се-

тевых игр. Первое такое мероприятие было организовано в 2002 году под названием «Сетевые игры и распределение ресурсов» («Networking Games and Resource Allocation»). Затем, начиная с 2009 года оно стало проводиться под постоянным названием «Сетевые игры и менеджмент» («Networking Games and management»). Традиционно все совещания организовывались непосредственно перед либо после международной конференции «Теория игр и менеджмент» («Game Theory and Management») в г. Санкт-Петербурге, так как в тематике обоих мероприятий много общего.



В рабочем совещании приняли участие 26 человек из разных городов России, а также из Финляндии. В состав программного комитета вошли ведущие ученые из России и других стран: председатель Владимир Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН), Константин Авраченко (INRIA, Франция), Андрей Гарнаев (СПбГУ), Андрей Гуртов (Университет Аалто, Финляндия), Анатолий Клейменов (ИММ УрО РАН), Такаши Матсухиза (Национальный технологический колледж Ибараки, Япония), Бурхард Монин (Университет Падерборна, Германия), Евсей Морозов (ИПМИ КарНЦ РАН), Дмитрий Новиков (ИПУ РАН), Микеле Пагано (Университет г. Пиза, Италия), Леона Петросян (СПбГУ), Кжиштоф Шайовски (Технологический университет Вроцлава, Польша), Александр Васин (МГУ), Джордж Заккур (HEC Montreal, Канада), Виктор Захаров (СПбГУ), Алексей Жижченко (ОМН РАН).

Целью рабочего совещания является обсуждение последних разработок в области теории игр в сетях и менеджменте. Были представлены и обсуждались результаты по сле-

дующим направлениям в теории игр: сетевые игры и менеджмент, задачи оптимальной маршрутизации, аукционы, переговорные задачи, игры с обучением и адаптивные игры. Во время работы семинара заслушано три пленарных и 15 секционных докладов. Наибольший интерес вызвали доклады Д. Новикова («Теоретико-игровые модели информационного противоборства»), В. Мазалова («Центральность потоков для взвешенных сетей»), А. Клейменова («Альтруистическое поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц»). Секционные доклады представлялись на трех секциях: Сети и теория очередей, Социальные сети, Сетевые игры. К началу семинара были изданы расширенные тезисы докладов. По результатам работы совещания приняты следующие решения: продолжить серию рабочих совещаний «Сетевые игры и менеджмент», избранные результаты из представленных на семинаре опубликовать в будущих выпусках журнала «Математическая теория игр и ее приложения» (<http://mgta.krc.karelia.ru>).

Ю. В. Чиркова



КОНФЕРЕНЦИИ ИПМИ КАРНЦ РАН В ОБЛАСТИ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

(Петрозаводск, 31 августа – 4 сентября 2015 г.)

В 2015 году Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН выполнил большую работу по организации и проведению конференций в области параллельного программирования, высокопроизводительных и распределенных вычислений. В свой актив ИПМИ КарНЦ РАН записал сразу четыре мероприятия, в каждом из которых сотрудники института были не только в числе организаторов, но и среди активных участников.

Наиболее заметным мероприятием 2015 года стала международная конференция PaCT-2015 — 13th International Conference on Parallel Computing Technologies. Это крупнейшая международная научная конференция по высокопроизводительным вычислениям и технологиям параллельного программирования, проводимая в России. Основные организаторы конференции — Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирский государственный

и Новосибирский государственный технический университеты. Конференция проводится каждые два года, в 2015 г. право проводить это престижное мероприятие завоевал ИПМИ КарНЦ РАН. Подтверждением высокой значимости конференции стала ее поддержка компанией Интел и РФФИ.

На конференцию PaCT-2015 было подано 87 статей из 13 стран; из них отобрано 36 статей для регулярных устных докладов, 1 приглашенный доклад, 16 докладов были приняты в стендовую сессию. Труды конференции опубликованы в серии Lecture Notes in Computer Science издательством Springer и вошли в крупнейшие базы научного цитирования Web of Science и Scopus. В конференции приняли участие 94 участника из 11 стран. Из них россиян — 59 и 35 иностранных участников из Бельгии, Бразилии, Германии, Ирландии, Италии, Казахстана, Польши, США, Финляндии, Франции и Японии.



На докладе конференции PaCT-2015

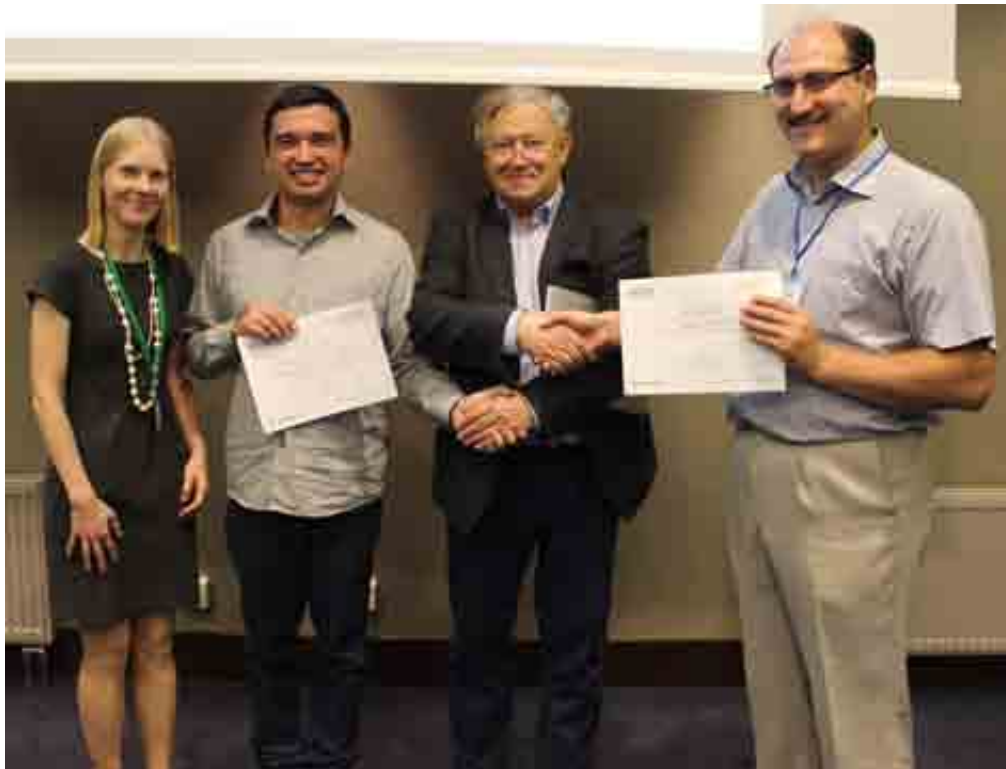
В последний день конференции состоялось заседание Программного комитета, на котором был отмечен высокий уровень организации мероприятия. Среди прочих вопросов Программный комитет отметил специальной

премией (спонсором которой выступило издательство Springer) два лучших доклада конференции. Одним из них стал доклад сотрудников ИПМИ КарНЦ РАН Ильи Чернова и Наталии Никитиной «Virtual Screening in

a Desktop Grid: Replication and the Optimal Quorum». В докладе представлена математическая модель, позволяющая более эффективно использовать вычислительные ресурсы Desktop Grid при проведении виртуального скрининга — одного из важнейших этапов разработки новых лекарственных препаратов. Другой доклад, удостоенный звания лучшего, — «A Parallel Genetic Algorithm to Adjust a Cardiac Model Based on Cellular Automaton and Mass-Spring Systems» — был представлен молодым ученым из Бразилии Р. С. Кампосом.

Приезд ведущих российских и иностранных специалистов стал хорошей возможностью и для обучения. Буквально за два дня

до PaCT-2015 на базе Петрозаводского государственного университета и при поддержке РФФИ была проведена Молодежная школа PaCT, которая стала «спутником» основной конференции. В молодежной школе приняли участие студенты и молодые ученые из Новосибирска, Петрозаводска, Алма-Аты и других городов. Сотрудники Института вычислительной математики и геофизики РАН СО РАН провели лекции и тьюториалы; лекции прочли также сотрудники ИПМИ КарНЦ РАН и директор Немецкого климатического вычислительного центра профессор Томас Людвиг. На школе-конференции молодыми учеными были представлены 9 докладов.



Председатель программного комитета В. Э. Малышкин поздравляет победителей

Другим важным мероприятием стала конференция BOINC-based High Performance Computing: Fundamental and Applied Science and Technology (BOINC:FAST'2015). Эта конференция, проводимая второй раз, собрала исследователей с двух континентов, пяти стран мира и нескольких городов России. Конференция привлекла большое внимание как российских, так зарубежных ис-

следователей, занимающихся вопросами высокопроизводительных вычислений в Desktop Grid на базе программной платформы BOINC, а также была поддержана РФФИ. Труды конференции опубликованы ресурсом CEUR Workshop Proceedings и проиндексированы системой Scopus.

Следующую конференцию BOINC:FAST запланировано провести в 2017 г.



Лекция директора Немецкого климатического вычислительного центра профессора Т. Людвиг

Наконец, уже традиционно, ИПМИ КарНЦ РАН стал соорганизатором одной из крупнейших и авторитетнейших суперкомпьютерных конференций России — Национального суперкомпьютерного форума. В рамках кон-

ференции ИПМИ КарНЦ РАН совместно с Институтом проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН провел секцию «Гриды из рабочих станций и комбинированные гриды».



Участники конференции BOINC:FAST'2015

Таким активным и щедрым на конференции по высокопроизводительным вычислениям

выдался для ИПМИ КарНЦ РАН 2015 год.

Е. Е. Ивашко

IX МЕЖДУНАРОДНАЯ ПЕТРОЗАВОДСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ» (ВМДМ-2016)

(Петрозаводск, 30 мая – 3 июня 2016 г.)

С 30 мая по 3 июня 2016 года в Карельском научном центре РАН проводилась традиционная, уже девятая, Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике».

Организаторами выступили Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Петрозаводский государственный университет, Академия криптографии Российской Федерации, Математический институт им. Стеклова РАН. Конференция была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований. Сопредседателями Программного комитета являлись В. Ф. Колчин (Математический институт РАН) и А. М. Райгородский (Московский физико-технический институт, МГУ им. М. В. Ломоносова, Яндекс).

В состав программного комитета вошли N. Alon (Тель-Авив, Израиль), В. А. Ватутин (Москва, Россия), академик РАН А. Б. Жижченко (Москва, Россия), А. М. Зубков (Москва, Россия), Г. И. Ивченко (Москва, Россия), А. П. Коваленко (Москва, Россия), T. Matsuhisa (Ибараку, Япония), Ю. И. Медведев (Москва, Россия), В. Г. Михайлов (Москва, Россия), Л. А. Петросян (Санкт-Петербург, Россия), В. Н. Сачков (Москва, Россия), J. Spencer (Нью-Йорк, США), K. Szajowski (Вроцлав, Польша), P. V. Tetali (Атланта, США), А. Н. Тихомиров (Сыктывкар, Россия), чл.-корр. НАНБ Ю. С. Харин (Минск, Белоруссия). Председатель оргкомитета В. В. Мазалов, зам. председателя Ю. Л. Павлов, ученый секретарь М. М. Лери (все – ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск). В состав оргкомитета вошли также А. В. Воронин и А. А. Рогов (ПетрГУ, Петрозаводск).

В конференции приняли участие 62 человека. Гости были размещены в разных гостиницах города, но основная часть проживала в

отеле Park Inn by Radisson, где и прошла основная часть заседаний.

Первая Петрозаводская конференция состоялась в 1983 году. На второй (1988 г.) было принято решение сделать ее регулярной и проводить один раз в четыре года. Тематика конференции в основном традиционная, но с появлением новых направлений исследований увеличивалось и число секций.

В 2016 г. работа проходила в семи секциях, в названиях которых отражены сформировавшиеся к настоящему времени главные проблемы развития вероятностных методов в дискретной математике: вероятностные и статистические задачи дискретной математики, теория случайных графов и гиперграфов, комбинаторные методы применительно к задачам анализа данных в Интернете, математические вопросы защиты информации, прикладная статистика, статистическое и имитационное моделирование, теория игр и задачи стохастической оптимизации. Всего состоялось 43 доклада, в том числе 8 пленарных, которые, естественно, вызвали наибольший интерес.

В докладе А. М. Зубкова и А. А. Серова «Итерации случайных равновероятных отображений конечного множества» дан обзор результатов, относящихся к последовательным независимым случайным отображениям конечного множества в себя. Приведены примеры применения этих результатов, связанные с передачей генетической информации и нахождением расстояния до ближайшего общего предка в развивающихся популяциях.

В докладе А. М. Райгородского «Случайные подграфы некоторых дистанционных графов» приводятся новые результаты о числе независимости и о хроматическом числе графов, в частности, кнессеровских графов. Эти задачи связаны с теорией кодирования, теорией Рамсея и проблемой Борсука.



Доклад В. В. Мазалова и В. Т. Цингуева «Меры центральности для взвешенных графов и применения в сетях коммуникаций» предлагает новый способ определения центральности взвешенных графов на основе законов Кирхгофа. Обсуждаются приложения этого метода к анализу социальной сети ВКонтакте и к ранжированию в графе публикаций математического портала Math-Net.ru. Проведено сравнение с методом PageRank.

В докладе А. Н. Реттневой «Асимметрия в теоретико-игровых задачах управления возобновляемыми ресурсами» излагается история математических моделей так называемых «рыбных войн» и предложены новые модели. Для них найдены вид равновесия по Нэшу, условия существования коэффициента дисконтирования, доказан ряд теорем о выигрышах и стратегиях игроков.

Доклад А. Н. Тихомирова «Локальные законы для случайных матриц», соавторами которого являются F. Gotze (Белефельд, Германия), А. А. Наумов и Д. А. Тимушев, посвящен исследованию свойств случайных матриц. Получены новые результаты об их спектрах. Найдены оценки скоростей сходимости эмпирических спектральных функций распределения и средних значений функций от собственных чисел к соответствующим пределам.

Доклад Ю. Л. Павлова «О новых направлениях в исследовании конфигурационных случайных графов» представляет собой обзор ре-

зультатов автора, полученных за последние четыре года. Найдены локальные предельные распределения числа петель и ребер конфигурационного графа, исследовано предельное поведение важнейших характеристик вблизи точек фазового перехода, изучены свойства графов при различных ограничениях на число ребер, рассмотрена динамика растущего графа, функционирующего в случайной среде.

В докладе Д. А. Шабанова «Вероятностные методы в комбинаторных задачах о раскрасках гиперграфов и теории Рамсея» дан обзор последних достижений в экстремальных задачах типа Эрдеша-Хейнала о раскрасках гиперграфов и в некоторых задачах теории Рамсея. Изложены вероятностные методы решения таких задач.

Доклад М. Е. Жуковского «Логика случайных графов» посвящен изучению асимптотики выполнимости формул первого и второго порядков на конечных графах. Значительное внимание уделено законам нуля или единицы.

К началу конференции были изданы расширенные тезисы докладов. В электронном виде эти тезисы находятся по адресу: http://resources.krc.karelia.ru/math/doc/pmdm2016/tezisy_vmdm-2016.pdf. Было принято решение проводить конференцию чаще и следующую, юбилейную десятую, провести в 2019 году.

М. М. Лери, Ю. Л. Павлов

ЮБИЛЕИ И ДАТЫ

АНАТОЛИЙ ДМИТРИЕВИЧ СОРОКИН (к 80-летию со дня рождения)



Анатолий Дмитриевич Сорокин родился 12 октября 1936 г. в Петрозаводске в семье слесаря Кировской железной дороги. После окончания железнодорожной средней школы № 9 в 1954 г. будущая специальность была выбрана без колебаний: Ленинградский политехнический институт, электромеханический факультет. Окончив успешно вуз в 1960 г. и проработав два года в конструкторском бюро в Выборге, поступил в очную аспирантуру Карельского филиала АН СССР. После окончания аспирантуры в 1965 г. был распределен на работу в Карельский НИИ лесной промышленности, где проработал до 1975 г. сначала в должности старшего научного сотрудника, затем заведующего лабораторией автоматизации учета вычислительных работ.

В 1971 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Техническая кибернетика». В январе 1975 г. прошел по конкурсу на должность заведующего лабораторией

автоматизации научных исследований Отдела математических методов и вычислительной техники КФ АН СССР, и с этого времени его научная и научно-организационная деятельность свыше 40 лет неразрывно связана с Карельским филиалом АН СССР.

Обладея организаторскими способностями, коммуникабельностью в отношениях с сотрудниками, являясь исключительно добросовестным и инициативным работником, А. Д. Сорокин привлек внимание руководства Карельского филиала АН СССР и был выдвинут на должность заместителя председателя Президиума КФ АН СССР по научной работе. В этой должности он проработал с 1977 по 1992 г., совмещая административную должность с руководством лабораторией.

Под его научным руководством и при непосредственном участии в Филиале было создано новое научное направление — автоматизация научных исследований, объединившее усилия сотрудников различных научных специальностей в создании систем автоматизации экспериментов и обработки данных. Под руководством А. Д. Сорокина формировались центры коллективного пользования по хроматографии и радиоизотопным методам исследований с автоматизацией сбора и обработки данных. Он проводил активную работу по координации и кооперации научно-исследовательских работ в области информатизации и автоматизации научных исследований на всесоюзном уровне, участвовал в работе международных конференций и совещаний.

В 1989 г. решением Президиума АН СССР А. Д. Сорокину присвоено ученое звание старшего научного сотрудника по специальности «применение вычислительной техники и математических методов в научных исследованиях». В 1992 г., после избрания по конкурсу на должность заведующего Отделом ММАНП Карельского научного центра РАН, А. Д. Сорокин переходит на работу в Отдел, уделяя большое внимание подготовке

и росту научных кадров, оснащенности Отдела техническими средствами, новому направлению исследований — информационно-телекоммуникационным системам. Исследования поддерживались грантами РФФИ, РГНФ и международного фонда ИНТАС.

При поддержке руководства КарНЦ и Отделения математики РАН А. Д. Сорокин ведет большую подготовительную работу по преобразованию Отдела в Институт. Отдел получил разрешение на подготовку аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук, с октября 1993 г. переведен на самостоятельный баланс с правами юридического лица, имеет свой Устав, гербовую печать, прошел аккредитацию. Отдел осуществляет научно-методическое руководство работами по организации компьютерной сети КарНЦ и созданию инфраструктуры доступа к сети Internet, поддержке WWW-сервера центра, активно сотрудничает с вузовской наукой, проводит международные конференции и семинары, исследования поддерживаются РФФИ, РГНФ, научными фондами Правительства РФ и Института «Открытое общество».

В июне 1999 г. Постановлением Президиума РАН Отдел преобразован в Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН. А. Д. Сорокин назначен заместителем директора по научной работе, одновременно руководит научной темой по созданию и развитию электронных информационных ресурсов в КарНЦ. Разработанный подход к созданию и использованию электронных научных информационных ресурсов в виде комплексной распределенной информационно-аналитической системы поддержки и сопровождения научных исследований представляется перспективным и соответствует современному отечественному и зарубежному уровню исследований и разработок в этой области. Запущен в эксплуатацию вычислительный кластер, создан центр коллективного пользования КарНЦ РАН «Центр высокопроизводительной обработки данных». Организационно-технические мероприятия позволили добиться надежного функционирования компьютерной сети КарНЦ РАН и обеспечили высокую пропускную способность каналов связи.

А. Д. Сорокин имеет более 100 научных работ, из них 80 печатных, является соавтором четырех электронных коллекций научных информационных ресурсов, зарегистрированных в депозитарии электронных изданий НТЦ «Информрегистр». Он является членом Совета по информатизации при Главе РК, заместителем председателя научно-технического Со-

вета по телекоммуникациям при Президиуме КарНЦ РАН.

За успехи в научной и научно-организационной деятельности А. Д. Сорокин награжден Почетной грамотой Президиума РАН и профсоюза работников РАН, Почетной грамотой Республики Карелия, юбилейной медалью ФНПР «100 лет профсоюзам России», медалью ордена «За заслуги перед Отечеством 2 степени», ему присвоено звание «Заслуженный деятель науки РК».

Анатолий Дмитриевич до сих пор поддерживает спортивную форму. С молодости он увлекся парусным спортом. Был «кэпом» команды. Да и теперь обязательно раз в год вместе с дружной командой любителей и профессионалов ходит в недельный поход на яхте, «ловит ветер» на Онего, рыбачит. А зимой не засиживается у теплой печурки. Чтобы не быть голословным: на снимке он — победитель Спартакиады КарНЦ'16 в старшей возрастной группе!

Коллектив института сердечно поздравляет юбиляра, желает ему здоровья, попутного ветра и N футов под килем!

Ю. В. Заика

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ А. Д. СОРОКИНА

1967. Структурно-топологический метод расчета усилителей низкой частоты на ЦВМ // Сборник научных работ. Петрозаводск: Карельское книжное издательство. (Совместно с А. М. Сучилиным).

1969. Применение ЦВМ для автоматизации топологического метода расчета электронных схем // Труды ЛПИ им. Калинина. (Совместно с А. М. Сучилиным).

1970. Механизация учета труда и заработной платы на ЭВМ // Лесная промышленность. № 12. (Совместно с В. А. Лебедевым).

1973. Эксплуатация системы механизации труда и заработной платы с помощью ЭВМ (на примере Суккозерского ЛПХ) // Автоматизированные системы управления и вопросы экономики в лесной и лесоперерабатывающей промышленности. М. (Совместно с Л. Н. Курчиной, Л. Я. Храбуновой).

1974. Разработка первой очереди подсистемы бухгалтерского учета: Сборник научно-технических статей. Петрозаводск: Карелия.

1975. Решение задачи учета труда и заработной платы на ЭВМ. ВНИПИЭИлеспром // Экономика и управление. № 8. (Совместно с Р. Г. Безручко, Л. Я. Храбуновой).

1978. Автоматизация обработки графической информации с использованием ЭВМ

«Минск-32» и АЦП типа Ф-001: Оперативно-информационные материалы КФ АН СССР. (Совместно с В. П. Похлебкиным).

1979. Об одном подходе к изучению свойств объектов автоматизации научных исследований // Автоматизация обработки данных при исследовании сложных объектов. Петрозаводск: КФ АН СССР. (Совместно с М. И. Федоровым.)

1980. Основные направления автоматизации научных исследований в Карельском филиале АН СССР // Автоматизация эксперимента и обработки данных. Петрозаводск: КФ АН СССР.

1982. Комплексная программа работ по автоматизации научных исследований в КФ АН СССР в 1981–1985 гг. и на период до 1990 г. Препринт. Петрозаводск: КФ АН СССР. (Совместно с Г. А. Борисовым, В. А. Лебедевым).

Автоматизация многопрофильных исследований // Труды I Междунар. школы по АНИ. (Совместно с Ю. Л. Павловым, М. И. Федоровым, В. В. Яковлевым).

Предпроектные исследования АСНИ регионального научного центра // Материалы XVI Всесоюз. школы по АСНИ. Горький: Институт прикладной физики АН СССР. (Совместно с В. А. Лебедевым, Ю. Л. Павловым).

1984. Анализ использования технических средств и математических методов при автоматизации экспериментов. АСНИ регионального научного центра. Петрозаводск: КФ АН СССР. (Совместно с М. И. Федоровым, В. Н. Хариным).

АСНИ Карельского филиала АН СССР. Петрозаводск: КФ АН СССР. (Совместно с Г. А. Борисовым, В. А. Лебедевым).

1986. Подсистема автоматизации экспериментов на газожидкостных хроматографах. Информационный листок, Карельский ЦНТИ. № 24. (Совместно с В. П. Похлебкиным, А. А. Степановым, М. И. Федоровым).

Подсистема автоматизации исследований эмпирических зависимостей. Разработка и внедрение комплексной автоматизированной системы научных исследований КФ АН СССР. (Совместно с Т. П. Лайкачевой, Ю. Л. Павловым и др.).

Внедрение результатов научных исследований в производство // Годы свершений. Петрозаводск: Карелия. (Совместно с Г. С. Бискэ).

1993. Прибор для оперативного сбора информации в полевых условиях // Приборы и техника эксперимента. № 5. (Совместно с В. С. Клыпучто, Л. В. Солововой).

1994. Возможности и перспективы использования ЛВС в КНЦ РАН // Труды ОМАД

КНЦ РАН. Вып. 1. (Совместно с В. С. Клыпучто, Н. П. Анисимовой, В. В. Яковлевым).

1995. Система баз по экологии в научном центре // Материалы междунар. конф. НТИ-95, ВИНТИ. (Совместно с В. А. Лебедевым).

1997. Состояние и перспективы формирования и использования информационных ресурсов в Карельском научном центре РАН // Труды 3-й Междунар. конф. «Информационные ресурсы. Интеграция. Технология». ВИНТИ. (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

1998. Состояние и перспективы развития информационно-телекоммуникационной среды КарНЦ // Труды VI С.-Петербургской Междунар. конф. «Региональная информатика-98». (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

1999. Вопросы организации функционирования информационно-телекоммуникационной сети KRCNet // Труды Института прикладных математических исследований, вып. 1. Методы математического моделирования и информационные технологии. Петрозаводск: КарНЦ РАН. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, В. С. Клыпучто).

2000. Создание и развитие электронных информационных ресурсов в КарНЦ РАН // Доклады второй Всерос. науч. конф. «Электронные библиотеки: методы и технологии, электронные коллекции». Протвино. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, Н. Б. Луговой).

2001. Электронная коллекция информационных ресурсов по топонимии Европейского Севера // Труды третьей Всерос. науч. конф. «Электронные библиотеки: методы и технологии, электронные коллекции». RCDL-2001. Петрозаводск. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, Г. М. Кертом, Н. А. Беляевой и др.).

2002. Вопросы построения электронной библиотеки Карельского НЦ РАН // Труды четвертой Всерос. науч. конф. RCDL-2002. Дубна. (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

Концепция развития системы телекоммуникаций КарНЦ РАН // Труды Института прикладных математических исследований, вып. 3. Петрозаводск: КарНЦ РАН. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, В. С. Клыпучто, А. А. Бедоревым и др.).

2003. Технология публикации и сопровождения документов в коллекциях научных информационных ресурсов электронной библиотеки КарНЦ РАН // Труды пятой Всерос. науч. конф. «Электронные библиотеки: методы и технологии, электронные коллекции». СПб. (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

Разработка многоагентной системы для организации поиска данных в распределенной

информационной системе // Труды Всерос. научн. конф. «Научный сервис в сети Интернет». Новороссийск. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, Н. Б. Луговой, И. В. Чудаковой).

Вопросы построения единой информационной системы Карельского НЦ РАН // «Современные технологии в информационном обеспечении науки». М.: Научный мир. (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

Концепция создания единой информационной системы Карельского НЦ РАН // Труды ИПМИ КарНЦ РАН, вып. 4. Петрозаводск: КарНЦ РАН. (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

2004. Вопросы формирования и использования электронных научных информационных ресурсов // Информационные ресурсы России. № 4. (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

Электронная библиотека научных информационных ресурсов КарНЦ РАН: состояние и перспективы // Труды шестой Всерос. научн. конф. «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции». RCDL-2004. Пущино. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, Н. Б. Луговой).

Развитие программных сервисов и контента ЭБ КарНЦ РАН // Труды седьмой Всерос. науч. конф. «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции». Ярославль. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, Н. Б. Луговой).

2006. Электронные информационные ресурсы для поддержки инвестиционной дея-

тельности в регионе // Информационные ресурсы России. № 4. (Совместно с А. В. Бархатовым, В. Т. Вдовицыным, Н. Б. Луговой).

Институт прикладных математических исследований // Академическая наука в Карелии. 1946–2006. Т. 2. М.: Наука. (Совместно с В. В. Мазаловым).

Электронные научные информационные ресурсы Карельского научного центра РАН: состояние, проблемы и перспективы // Труды КарНЦ РАН, вып. 9. (Совместно с В. Т. Вдовицыным).

2007. Институт прикладных математических исследований // Карелия. Энциклопедия. Т. 1. Петрозаводск: Петропресс. (Совместно с Г. В. Воиновой).

2011. Основные результаты деятельности ЦКП КарНЦ РАН «Центр высокопроизводительной обработки данных» // Труды КарНЦ РАН. № 5. Сер. Матем. моделиров. и информационные технологии, вып. 2. С. 125–129. (Совместно с В. Т. Вдовицыным, Е. Е. Ивашко, А. С. Румянцевым, Н. Н. Никитиной.)

2012. Владимир Трофимович Вдовицын (к 60-летию со дня рождения) // Труды КарНЦ РАН. № 5. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. Вып. 3. С. 134–135.

2014. Институту прикладных математических исследований КарНЦ РАН – 15 лет // Труды КарНЦ РАН. № 4. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. С. 162–165.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук», с 2015 г.)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учётом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редколлегия серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляет за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкеты» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия «Анкеты» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Журнал имеет полноценную электронную версию на базе Open Journal System (OJS), позволяющую перевести предоставление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегиями серий и рецензентами в электронный формат и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Редационный совет журнала «Труды Карельского научного центра РАН» (Труды КарНЦ РАН) определил для себя в качестве одного из приоритетов полную открытость издания. Это означает, что пользователям на условиях свободного доступа разрешается: читать, скачивать, копировать, распространять, печатать, искать или находить полные тексты статей журнала по ссылке без предварительного разрешения от издателя и автора. Учредители журнала берут на себя все расходы по редакционно-издательской подготовке статей и их опубликованию.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru/>; <http://journals.krc.karelia.ru/>

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объём рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объём рисунков не должен превышать 1/4 объёма статьи. Рукописи большего объёма (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в двух экземплярах, напечатанных на одной стороне листа формата А4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: *УДК* курсивом на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; инициалы, фамилии всех авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: ВВЕДЕНИЕ. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ. ВЫВОДЫ. ЛИТЕРАТУРА); благодарности; литература (с новой страницы).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на вкладышах (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. Ссылки на литературу в тексте даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Диаграммы и графики не должны дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5—2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления (http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.—2008). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

ТРАНСЛИТЕРИРОВАННЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (References). Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Описания русскоязычных работ указываются в латинской транслитерации, рядом в квадратных скобках помещается их перевод на английский язык. Выходные данные приводятся на английском языке (допускается транслитерация названия издательства). При наличии переводной версии источника можно указать его библиографическое описание вместо транслитерированного.

Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала. Для составления списка рекомендуется использование бесплатной программы транслитерации на сайте <http://translit.ru/>, вариант ВСІ.

Внимание! С 2015 года каждой статье, публикуемой в «Трудах Карельского научного центра РАН», редакцией присваивается уникальный идентификационный номер цифрового объекта (DOI) и статья включается в базу данных CrossRef. **Обязательным условием является указание в списках литературы DOI для тех работ, у которых он есть.**

Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате .tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>.

TABLE OF CONTENTS

N. N. Ermolaeva. NON-STATIONARY MODELS OF HEAT EXCHANGE AND GAS TRANSPORTATION THROUGH A MARINE GAS PIPELINE	3
Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. APPROXIMATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION BY ODE SYSTEM: CONVERGENCE ACCELERATION	11
Yu. V. Zaika, N. I. Rodchenkova. BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH FREE BOUNDARY: ZIRCONIUM ALLOY HYDROGENATION	24
V. A. Kashtanov, E. S. Dlinnova. ON A MATHEMATICAL SECURITY MODEL	34
A. N. Kirillov, A. A. Krizhanovsky. SYNSET GEOMETRY STRUCTURE MODEL	45
A. N. Kirillov, N. V. Smirnov. MATHEMATICAL MODEL OF WASTEWATER TREATMENT PROCESS OPTIMIZATION	55
Yu. L. Pavlov. ON CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPHS WITH RANDOM DISTRIBUTION OF VERTEX DEGREES	62
Yu. L. Pavlov. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE NUMBER OF VERTICES WITH GIVEN DEGREE IN CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH	73
A. A. PECHNIKOV, A. V. LANKIN. DEVELOPMENT OF A PROGRAM FOR COLLECTION OF WEBSITE STRUCTURE DATA	81
A. N. Rettieva. ENVIRONMENTAL-ECONOMIC SYSTEM OF BIORESOURCE USE WITH ASYMMETRIC AGENTS	91
A. V. Sokolov, A. M. Sazonov, E. V. Morozov, R. S. Nekrasova, R. V. Razumchik. MATHEMATICAL MODELS AND ALGORITHMS FOR THE OPTIMAL CONTROL OF FIFO-QUEUES IN SHARED MEMORY	98
L. V. Cherkesov, T. Ya. Shul'ga. STUDY OF THE TRANSFORMATION OF POLLUTION CAUSED BY CYCLONES PASSING OVER THE SEA OF AZOV	108
I. A. Chernov, A. V. Tolstikov, N. G. Iakovlev. A COMPREHENSIVE MODEL OF THE WHITE SEA: HYDROTHERMODYNAMICS OF WATER AND SEA ICE	116
L. V. Shchegoleva, A. V. Zhukov. THE PROBLEM OF POSITIONING A MOVING OBJECT BY MEASURING THE DISTANCE TO IT	129
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A COMBINATIONS CIRCUIT WITH GIVEN MINIMAL RANGE OF SAMPLE	136
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION CIRCUIT WITH A GIVEN NUMBER OF CONSECUTIVE FIXED ELEMENTS	141
CHRONICLE	
Yu. V. Chirkova. Working meeting «Network games and management» (Petrozavodsk, July 5–7, 2015)	147

E. E. Ivashko. IAMR KarRC RAS conferences on high performance computing (Petrozavodsk, August 31 – September 4, 2015)	149
M. M. Leri, Yu. L. Pavlov. 9 th International Petrozavodsk Conference «Probabilistic Methods in Discrete Mathematics»	152
DATES AND ANNIVERSARIES	
Yu. V. Zaika. Anatoly D. Sorokin (on the 80 th anniversary)	154
INSTRUCTIONS FOR AUTHORS	158

Научное издание

**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**
№ 8, 2016

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению
Президиума Карельского научного центра РАН*

Выходит 12 раз в год

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-65995 от 06.06.2016 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций

Редактор А. И. Мокеева
Компьютерная верстка Е. Н. Спектор
Стилевой файл А. С. Румянцев

Подписано в печать 24.08.2016. Дата выхода 31.08.2016. Формат 60x84^{1/8}.
Гарнитура CMR. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 17,6. Усл. печ. л. 18,8.
Тираж 100 экз. Заказ 375. Цена свободная

Учредитель и издатель: Карельский научный центр РАН, 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50