А. Н. Кириллов, А. С. Иванова. ПЕРИОДИЧЕСКИЙ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ ВИДОВОГО СОСТАВА БИОСООБЩЕСТВА **99**

А. Н. Лазутченко. О РОБАСТНОМ УПРАВЛЕНИИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ, ХАРАКТЕРИЗУЕМОЙ НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДОХОДОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ **107**

Ю. Л. Павлов, Е. В. Феклистова. ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЧИСЛА РЕБЕР СЛУЧАЙНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК **114**

И. А. Чеплюкова. О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА **123**

Н. Ю. Энатская. АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПОДСТАНОВОК С *S*-ЗАПРЕТОМ. **131**

Н. Ю. Энатская. О ЧИСЛЕ ИНВЕРСИЙ В ИСХОДАХ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК И ИХ АНАЛИЗ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ИНВЕРСИЙ **137**

Хроника

В. В. Мазалов, А. А. Ивашко. Третий Российско-Финский симпозиум по дискретной математике (RuFiDiM-2014) (Петрозаводск, 15–18 сентября 2014 г.) **145**

Юбилеи и даты

Ю. В. Заика. Георгий Александрович Борисов (к 80-летию со дня рождения) **147**

Утраты

Коллектив ИПМИ. Владимир Трофимович Вдовицын (1952–2014). **151**

Правила для авторов **153**

Подписной индекс в каталоге «Роспечать» **57397**

ТРУДЫ КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН. № 10, 2015. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ISSN 1997-3217 (печатная версия)
ISSN 2312-4504 (онлайн-версия)

Труды
КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 10, 2015

transactions.krc.karelia.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

СОДЕРЖАНИЕ

Ю. Л. Павлов, Т. П. Тихомирова. ОБ ИСТОРИИ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ **3**

Ю. Г. Абакумов, В. Г. Банин. ТОЧКИ ВТЯГИВАНИЯ В КОНУС И ТЕОРЕМЫ ТИПА ТЕОРЕМЫ ВОРОНОВСКОЙ **8**

Б. З. Белашев, К. А. Долгий. ПРИМЕНЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В КЛАСТЕРНОМ АНАЛИЗЕ ДАННЫХ **15**

Г. А. Борисов, Т. П. Тихомирова. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ МАКСИМАЛЬНОГО УВЕЛИЧЕНИЯ РЕСУРСА ИЗОЛЯЦИИ СИЛОВЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ **24**

В. В. Гусев. СИТУАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ В ИГРЕ ПАТРУЛИРОВАНИЯ С КАМЕРОЙ СЛЕЖЕНИЯ **28**

А. Б. Жижченко, В. В. Мазалов, Б. Т. Цынгуев. РАНЖИРОВАНИЕ ВЕРШИН ГРАФА ПУБЛИКАЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОРТАЛА MATH-NET.RU **34**

Ю. В. Заика, Е. К. Костикова. АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА СИСТЕМОЙ ОДУ **42**

Ю. В. Заика, Н. И. Родченкова. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ МЕМБРАН ГАЗОРАЗДЕЛЕНИЯ **54**

Т. В. Каушинис, А. Н. Кириллов, Н. И. Коржицкий, А. А. Крижановский, А. В. Пилинович, И. А. Сихонина, А. М. Спиркова, В. Г. Старкова, Т. В. Степкина, С. С. Ткач, Ю. В. Чиркова, А. Л. Чухарев, Д. С. Шорец, Д. Ю. Янкевич, Е. А. Ярышкина. ОБЗОР МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ РАЗРЕШЕНИЯ ЛЕКСИЧЕСКОЙ МНОГОЗНАЧНОСТИ: ВВЕДЕНИЕ **69**

Карельский научный центр
Российской академии наук

ТРУДЫ

КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

№ 10, 2015

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Петрозаводск
2015

Научный журнал
Труды Карельского научного центра Российской академии наук
№ 10, 2015
Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Scientific Journal
Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences
No 10, 2015
MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES Series

Главный редактор
А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; Т. ВИХАВАЙНЕН, доктор истории, проф.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; С. П. ГРИППА, к. г. н., доцент; Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; А. С. ИСАЕВ, академик РАН, д. б. н., проф.; А. М. КРЫШЕНЬ (зам. главного редактора), д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; И. И. МУЛЛОНЕН, д. фил. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. ОКРЕПИЛОВ, академик РАН, д. э. н.; О. Н. ПУГАЧЕВ, член-корр. РАН, д. б. н.; Ю. В. САВЕЛЬЕВ, д. э. н.; Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Editor-in-Chief
A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; S. P. GRIPPA, PhD (Geog.), Assistant Prof.; A. S. ISAEV, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; A. M. KRYSHEN' (Deputy Editor-in-Chief), DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; I. I. MULLONEN, DSc (Philol.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. OKREPILOV, RAS Academician, DSc (Econ.); O. N. PUGACHYOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); Yu. V. SAVELIEV, DSc (Econ.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); T. VIHAVAINEN, PhD (Hist.), Prof.; A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Редакционная коллегия серии «Математическое моделирование и информационные технологии»

Ю. В. ЗАИКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; В. Ф. КОЛЧИН, д. ф.-м. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент

Editorial Board of the «Mathematical Modeling and Information Technologies» Series

YU. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. F. KOLCHIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; YU. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.

ISSN 1997-3217 (печатная версия)
ISSN 2312-4504 (онлайн-версия)

Зав. редакцией А. И. Мокеева
Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
тел. (8142) 762018; факс (8142) 769600
e-mail: trudy@krc.karelia.ru
Электронная полнотекстовая версия: http://transactions.krc.karelia.ru

© Карельский научный центр РАН, 2015
© Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, 2015

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 3–7

К 70-летию Карельского научного центра РАН

ОБ ИСТОРИИ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Предтечей Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (далее – ИПМИ) был созданный в 1957 г. Отдел энергетики, позднее получивший название Отдел энергетики и автоматизации. В этом отделе проводились работы, связанные с автоматизацией программирования, причем коллектив Отдела был одним из первых в СССР, осуществлявших такие исследования.

Самым заметным результатом этого направления был созданный транслятор языка Суб-Алгол для появившейся в 1961 г. ЭВМ «Минск-1». Этот транслятор был внедрен во многих организациях СССР. Основоположником и руководителем работ был Н. Г. Зайцев. К сожалению, в 1963 г. Карельский филиал АН СССР (КФ АН СССР) был расформирован, а Институт леса, в состав которого входил Отдел энергетики и автоматизации, объединился с Карельским научно-исследовательским институтом лесной промышленности. Н. Г. Зайцев в 1964 г. переехал в Киев и стал сотрудником знаменитого Института кибернетики АН УССР, а впоследствии доктором технических наук, профессором и заведующим отделом.

После воссоздания в 1967 г. КФ АН СССР, в 1969 г. появилась лаборатория математических методов и вычислительной техники, которую сначала возглавлял В. Л. Файнберг, а в 1971 г. заведующим стал к. т. н. Г. А. Борисов.

С его приходом сформировались два основных направления работы. Первое направление, которым руководил Г. А. Борисов, составляли исследование методов и разработка систем автоматизированного проектирования коммуникационных сетей. Были созданы теоретические основы автоматизированного проектирования лесовозных дорог и лесомелиоративных каналов. При проектировании таких объектов впервые были построены оптимизационные модели на основе методов динамического программирования. Проведены исследования методов многопараметрической оптимизации систем автоматизированного проектирования и созданы система проектирования объектов лесоосушения (руководители – Г. В. Воинова (1974–1976 гг.), Т. П. Тихомирова (1977–1984 гг.), система проектирования лесотранспортных сетей (рук. С. П. Андреева) и система проектирования автомобильных дорог (рук. Р. А. Сюкияйнен). Их авторы награждены медалями ВДНХ, сами системы, по рекомендации Министерства лесной промышленности СССР, внедрялись и широко использовались в проектных организациях страны.

Второе направление было вызвано потребностями всех институтов КФ АН СССР в обработке имеющейся информации методами математической статистики. Такие исследования состояли главным образом в создании и практическом использовании систем программ статистической обработки данных. Необходимость в программных средствах статистического анализа была вызвана еще и тем, что для появившейся в 1972 г. ЭВМ «Минск-32» практически не было такого программного обеспечения. Созданные в кратчайшие сроки статистические системы успешно работали не только в КФ АН СССР, но и внедрялись во многих организациях СССР. Руководителем этого направления был Ю. С. Раутиайнен.

В 1974 г. был создан вычислительный центр в Антарктиде, на советской станции Молодежная. Первым начальником вычислительного центра был назначен сотрудник нашего Отдела Ю. С. Раутиайнен.

В первой половине 70-х годов была проведена большая работа по созданию самостоятельного научного подразделения математического профиля в КФ АН СССР. Сорок лет назад, в январе 1975 г. был организован Отдел математических методов автоматизации научных исследований и проектирования (ОММАНИП) под руководством к. т. н. Г. А. Борисова, ученый секретарь Г. В. Воинова. Решающую роль в создании отдела сыграли Президент АН СССР, академик М. В. Келдыш, Председатель Президиума КФ АН СССР, член-

корреспондент АН СССР Н. И. Пьявченко и выдающийся математик, член Президиума КФ АН СССР, член-корреспондент АН СССР В. Я. Козлов. ОММАНИП состоял из четырех лабораторий:

– научных основ автоматизации проектирования (НОАП, руководитель к. т. н. Г. А. Борисов);

– автоматизации научных исследований (АНИ, зав. лаб. к. т. н. А. Д. Сорокин);

– вычислительной техники (ВТ, зав. лаб. к. т. н. Г. Н. Пырх);

– математического обеспечения ЭВМ (МО ЭВМ, зав. лаб. В. В. Аксенов).

В том же 1975 г. была создана и пятая лаборатория автоматизированных информационных систем (зав. лаб. к. э. н. В. А. Лебедев).

Во второй половине 70-х и в начале 80-х годов продолжалось развитие работ по названным ранее двум направлениям, но появились и новые. Среди них центральное место заняло создание автоматизированной системы научных исследований (АСНИ) Карельского филиала АН СССР. Эти работы проводились под руководством к. т. н. А. Д. Сорокина. В состав системы входил ряд подсистем автоматизации экспериментов для различных институтов КФ АН СССР. Для этого использовалась разнообразная вычислительная техника, в том числе мощная ЭВМ ЕС 1052, заменившая в 1982 г. «Минск-32». Одним из важнейших результатов стала разработанная и утвержденная в 1982 г. Комплексная программа работ по автоматизации научных исследований в КФ АН СССР в 1981–1985 гг. и на период до 1990 г. В рамках этой программы создавались различные подсистемы АСНИ. В частности, была реализована идея Г. А. Борисова о том, что АСНИ должна быть ориентирована на достижение целей любого научного исследования – получение новых знаний о законах природы и общества. Для этого на основе теории эмпирического предсказания была создана подсистема обнаружения эмпирических зависимостей. Кроме того, была создана автоматизированная информационная система для научных исследований, работающая с реляционными базами данных и повышающая уровень математического моделирования изучаемых объектов как в КФ АН СССР, так и в других организациях.

Развивалась теория супералгебр Ли – математического аппарата современной теоретической физики (к. ф.-м. н. Д. А. Лейтес).

В середине 80-х годов тематика исследований расширялась. В соответствии с этим в 1986 г. произошли изменения структуры Отдела. На базе лабораторий автоматизированных информационных систем и математического обеспечения была создана лаборатория программных средств автоматизации (зав. лаб. к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын). Из лаборатории автоматизации научных исследований выделилась лаборатория математического моделирования (зав. лаб. к. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов), а оставшаяся часть объединилась с лабораторией вычислительной техники, и, таким образом, возникла лаборатория микропроцессорных систем (рук. к. т. н. А. Д. Сорокин). Позднее, в 1989 г., возникла лаборатория геоинформатики (зав. лаб. к. э. н. В. А. Лебедев).

Первый персональный компьютер появился в 1986 г. Это позволило постепенно перейти к исследованиям, техническое и программное обеспечение которых соответствует мировому уровню.

В 80-х годах сформировалось направление, связанное с разработкой и использованием вероятностных методов дискретной математики. В частности, задачи, возникшие в ходе создания систем автоматизированного проектирования дорог и каналов, привели к необходимости создания теории случайных лесов, что и было впоследствии сделано (докторская диссертация Ю. Л. Павлова, 1996 г.)

В конце 80-х годов начали проводиться исследования, направленные на создание экспертных систем (к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын), на решение задач энергетики (к. т. н. Г. А. Борисов), а также на создание вычислительной сети Карельского научного центра (так в 1990 г. стал называться КФ АН СССР) под руководством к. т. н. А. Д. Сорокина.

В 1992 г. Отдел ММАНИП переименован в Отдел математики и анализа данных (ОМАД), который возглавил к. т. н. А. Д. Сорокин, занимавший до этого пост заместителя Председателя Президиума Карельского научного центра (КарНЦ РАН). В этом же, 1992 г., в связи с событиями, возникшими в период распада СССР, в ОМАД из Украины вернулся профессор Н. Г. Зайцев, энергично занявшийся разработкой программы информатизации Республики Карелия.

В эти же годы математические исследования расширились за счет развития алгебраической теории правоупорядочиваемых групп, которая в 1998 г. была изложена в докторской диссертации В. М. Тарарина.

В 1999 г. ОМАД преобразован в Институт прикладных математических исследований (ИПМИ). Решающее значение в создании института имела поддержка вице-президента РАН, академика А. А. Гончара,

академика-секретаря Отделения математики РАН Л. Д. Фаддеева, его заместителя, академика А. Б. Жижченко и, конечно, Председателя КарНЦ РАН, член-корреспондента РАН А. Ф. Титова. Директором ИПМИ избран д. ф.-м. н., профессор В. В. Мазалов, его заместителем по научной работе стал к. т. н. А. Д. Сорокин, по финансовым и кадровым вопросам – Г. В. Войнова, ученым секретарем – к. т. н. Т. П. Тихомирова (с 2002 г.). В состав нового Института вошли пять лабораторий:

— математической кибернетики (рук. д. ф.-м. н. В. В. Мазалов);

— теории вероятностей и компьютерной статистики (зав. д. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов);

— моделирования природно-технических систем (зав. к. т. н. Г. А. Борисов);

— телекоммуникационных систем (рук. к. т. н. А. Д. Сорокин);

— информационных компьютерных технологий (зав. к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын).

В. В. Мазалову постепенно удалось привлечь в ИПМИ ряд специалистов высшей квалификации, в их числе д. ф.-м. н. профессор Ю. В. Заика (с 1999 г. возглавивший лабораторию моделирования природно-технических систем), д. ф.-м. н. профессор Е. В. Морозов, А. В. Соколов (с 2007 г. – д. ф.-м. н., с 2009 г. профессор), А. А. Печников (с 2007 г. – д. т. н., с 2014 г. – и. о. зав. лаб. телекоммуникационных систем), д. ф.-м. н. А. Н. Кириллов. Тематика проводимых работ существенно расширилась, заметно повысились качество и результативность исследований. Далее приводится перечень (далеко не полный) важнейших результатов ИПМИ за 15 лет существования института.

В лаборатории математической кибернетики под руководством профессора В. В. Мазалова получила развитие математическая теория игр. Разработан новый подход к нахождению решений многокритериальных задач наилучшего выбора в условиях неопределенности. Построены теоретико-игровые модели эколого-экономических систем и найдены эволюционно-устойчивые стратегии в задачах этологии с учетом миграции, конкуренции за ресурсы, фуражирования, выбора партнера (1999–2006 гг.). Создан комплекс моделей оптимального управления биоресурсами на основе выделения охранных территорий (2005–2013 гг.). Предложены новые схемы переговоров (2004–2012 гг.). Разработан теоретико-игровой подход к исследованию моделей коммуникационных сетей, связанных с рынком транспортных перевозок (2014 г.).

Профессор Е. В. Морозов вместе со своими учениками занимался развитием регенеративного метода моделирования сетей обслуживания и коммуникационных сетей. Найдены условия, при которых слабая регенерация позволяет существенно эффективнее оценивать характеристики сетей обслуживания, чем классическая регенерация (2002 г.). Исследовались свойства телекоммуникационных сетей различных типов (2008–2009 гг.). Проводился анализ сетевого трафика (2010–2012 гг.). Методы высокопроизводительных вычислений использовались при вероятностном анализе коммуникационных сетей, и найдены условия устойчивости регенеративных сетей обслуживания (2011–2014 гг.).

В лаборатории теории вероятностей и компьютерной статистики в 1999–2005 гг. проводились исследования случайных комбинаторных структур. Получен ряд новых результатов о случайных лесах, подстановках и отображениях. В 2012–2015 гг. эти исследования были продолжены для структур, имеющих различные ограничения на число элементов. Развивались методы математической и прикладной статистики, в частности, выявлены условия возникновения эффекта вздувания коэффициента детерминации (эффект А. Н. Колмогорова) в линейном регрессионном анализе (2001 г.). Методы и программные средства прикладной статистики повседневно использовались для решения разнообразных задач совместно со специалистами как всех институтов КарНЦ РАН, так и других организаций. С 2005 г. началось изучение случайных конфигурационных графов, моделирующих сложные сети коммуникаций, таких, например, как Интернет. Показана нормальность объема гигантской компоненты связности при большом числе вершин (2006 г.). Впервые рассматривались условные графы при известном числе ребер и изучены их основные свойства (2008–2012 гг.). Даны оценки устойчивости сетей к разрушающим воздействиям различного характера (2012–2015 гг.).

В лаборатории моделирования природно-технических систем профессор Ю. В. Заика руководил работами, связанными с моделированием взаимодействия водорода с конструктивными материалами. Для этого разрабатывались методы и алгоритмы параметрической идентификации моделей и решались краевые задачи с нелинейными динамическими граничными условиями и подвижными границами раздела фаз (2000–2006 гг.). Рассматривались нелинейные краевые задачи диффузионного типа с обратным захватом (2009–

2010 гг.). Разработан численный метод решения нелинейных краевых задач термодесорбции и водородопроницаемости конструкционных материалов при наличии дефектов защитного покрытия (2014 г.).

Продолжаются исследования в области энергетики (к. т. н. Г. А. Борисов). Разработаны концепция развития и использования возможностей малой и нетрадиционной энергетики в Карелии (1999 г.), а также методика оценки потенциала нетрадиционной энергетики (2000 г.). Решались задачи моделирования и оптимизации структуры и параметров энергетических и транспортных систем (2007–2014 гг.).

В 2012–2014 гг. проводились моделирование и анализ динамики развития предприятий, рассматривались проблемы управления системами со структурными изменениями и системами биологической очистки (профессор А. Н. Кириллов).

Совместные усилия лабораторий телекоммуникационных систем и информационных компьютерных технологий (к. т. н. А. Д. Сорокин, к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын) были направлены на исследование, разработку и развитие единой информационной системы КарНЦ РАН. В частности, проводилась работа по созданию электронной библиотеки научного центра. Благодаря многолетней работе коллективов этих двух лабораторий, выполнявшейся под руководством А. Д. Сорокина, сегодня оснащенность КарНЦ РАН вычислительными ресурсами и программным обеспечением полностью соответствует современным требованиям.

С 2008 г. в лаборатории телекоммуникационных систем развиваются вебометрические исследования (д. т. н. А. А. Печников). Разработаны модели фрагментов Веба, они применялись для анализа взаимодействия российских академических и университетских вебсайтов с целью улучшения их характеристик присутствия в Интернете.

В лаборатории информационных компьютерных технологий (к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын, к. э. н. В. А. Лебедев) совместно с другими институтами КарНЦ РАН создавались тематические информационные системы: электронный архив фольклорной фонетики (1999 г.), геоинформационная система «Водные ресурсы Республики Карелия» (2002 г.), система поддержки топонимических исследований (2005 г.), система «Природные ресурсы Карелии» (2012 г.) и др. Еще одним направлением работы лаборатории является разработка моделей оптимального управления динамическими структурами данных (профессор А. В. Соколов). Предложены модели и алгоритмы динамического распределения компьютерной памяти (2008 г.) и параллельные алгоритмы оптимального управления динамическими структурами (2012–2014 гг.).

В 2008 г. в КарНЦ РАН введен в эксплуатацию мощный вычислительный кластер, на базе которого позднее был создан центр коллективного пользования для высокопроизводительной обработки данных.

Ежегодно работы ИПМИ поддерживаются грантами различных научных фондов. За время существования института (с 1999 г.) победителями только конкурсов РФФИ и РГНФ были 62 проекта. Регулярно выполняются исследования в рамках программ Президиума РАН и Отделения математических наук РАН. Неоднократно сотрудники ИПМИ включались в состав научных школ Российской Федерации. Гранты выделялись и зарубежными научными фондами (Австралия, Австрия, Германия, Испания, Италия, Финляндия, Швейцария, Швеция, Япония).

С каждым годом повышается публикационная активность, ежегодно выходят из печати десятки статей в ведущих рецензируемых российских и зарубежных журналах. В 2014 г. среднее число статей, опубликованных в журналах из списков Web of Science и Scopus, впервые достигло единицы на одного научного сотрудника. У нас нет возможности перечислить опубликованные статьи, поэтому ниже приводится только список монографий.

В 1999–2009 гг. ИПМИ ежегодно издавал сборники трудов, а с 2010 г. выпускается серия «Математическое моделирование и информационные технологии» Трудов КарНЦ РАН, входящих в список ВАК. С 2009 г. ИПМИ издает журнал «Математическая теория игр и ее приложения», также входящий в список ВАК, статьи из которого переводятся на английский язык в журнале «Automatica and Remote Control».

Каждый год институт проводит всероссийские и международные конференции высокого уровня, сотрудники регулярно приглашаются для чтения лекций, научных стажировок и для участия в конференциях во многих странах.

Большое внимание уделяется подготовке кадров. Все ведущие сотрудники преподают в ПетрГУ и в других вузах. В 2007 г. был создан учебно-научный комплекс, в состав которого вошли существовавшие до этого филиалы кафедр математического факультета

ПетрГУ, это филиал кафедры теории вероятностей и анализа данных (рук. профессор Ю. Л. Павлов) и филиал кафедры информатики и математического обеспечения (рук. к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын). Успешно работает аспирантура, подавляющее большинство ее выпускников защищает диссертации в срок или даже досрочно. В 2003–2005 гг. в ИПМИ функционировал диссертационный совет (специальность 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика). Четыре сотрудника ИПМИ являются постоянными членами докторского диссертационного совета в Петрозаводском университете.

В настоящее время все научные сотрудники имеют ученые степени.

В институте много молодых ученых, они вносят значительный вклад в проводимые исследования. Среди наиболее заметных их результатов можно отметить работы по экологическому менеджменту биоресурсов водоемов Карелии (к. ф.-м. н. А. Н. Реттиева), по моделированию состояния воды и льда Белого моря (к. ф.-м. н. И. А. Чернов), по разработке математических моделей информационных систем для повышения эффективности работы кластеров и центров обработки данных (председатель Совета молодых ученых ИПМИ, к. ф.-м. н. Е. Е. Ивашко), по разработке моделей и алгоритмов для решения задач лексикографии и создания электронного словаря русского языка (к. т. н. А. А. Крижановский, с 2014 г. – и. о. зав. лаб. информационных компьютерных технологий), по разработке математических моделей и программных средств прогнозирования нагрузки центров высокопроизводительной обработки данных (к. ф.-м. н. А. С. Румянцев).

Ю. Л. Павлов, Т. П. Тихомирова

СПИСОК МОНОГРАФИЙ ИПМИ

1. *Борисов Г. А.* Методы автоматизированного проектирования лесотранспорта. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1978.

2. *Лейтес Д. А.* Теория супермногообразий. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1983.

3. *Лебедев В. А.* Реляционная система программирования. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1984.

4. *Лебедев В. А.* Реляционная система программирования обработки данных. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1988.

5. *Павлов Ю. Л.* Случайные леса. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1996.

6. *Борисов Г. А., Сидоренко Г. И.* Энергетика Карелии: современное состояние, ресурсы и перспективы развития. СПб.: Наука, 1999.

7. *Pavlov Yu. L.* Random forests. Utrecht: VSP, 2000.

8. *Соколов А. В.* Математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных. Петрозаводск: ПетрГУ, 2002.

9. *Борисов Г. А., Сидоренко Г. И. и др.* Ресурсы и эффективность использования нетрадиционных источников энергии в России. СПб.: Наука, 2002.

10. *Сидоренко Г. И. и др.* Концепция и использование ветровой энергии в России. М.: Книга-Пента, 2005.

11. *Мазалов В. В.* Математическая теория игр и приложения. СПб.: Лань, 2010.

12. *Мазалов В. В., Менчер А. Э., Токарева Ю. С.* Переговоры. Математическая теория. СПб.: Лань, 2012.

13. *Заика Ю. В.* Интегральные операторы прогнозирования и идентификации моделей. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2013.

14. *Mazalov V.* Mathematical game theory and applications. New York: John Wiley and sons, 2014.

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 8–14
DOI: 10.17076/mat139

УДК 517.51

ТОЧКИ ВТЯГИВАНИЯ В КОНУС И ТЕОРЕМЫ ТИПА ТЕОРЕМЫ ВОРОНОВСКОЙ

Ю. Г. Абакумов[1], **В. Г. Банин**[2]

[1] *Забайкальский государственный университет,*
[2] *Финансовый университет при правительстве РФ*

Рассмотрен общий подход к теоремам типа теоремы Вороновской о скорости сходимости последовательности линейных операторов к функциям из некоторых классов с помощью введенного функционала, который во многих конкретных ситуациях имеет дифференциальный вид. Для представления этого функционала применен метод точек втягивания в конус банахова пространства.

Ключевые слова: линейные операторы, конус, аппроксимирующая последовательность.

Yu. G. Abakumov, V. G. Banin. POINTS OF RETRACTION INTO CONE AND VORONOVSKAYA TYPE THEOREMS

The general approach to Voronovskaya theorems about the rate of convergence of linear operators sequence to the functions of some classes is considered. These theorems are proved with the help of a functional which in many concrete situations may have a differential structure. The method of retraction points into some cone of Banach space is used to define this functional.

Key words: linear operators, cone, approximation sequence.

Введение

Раздел теории приближений, посвященный равномерному приближению функций алгебраическими полиномами, был заложен теоремой К. Вейерштрасса, согласно которой любую непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию можно приблизить на этом отрезке алгебраическими полиномами с любой точностью (как мы сейчас говорим, в метрике $C[a, b]$). Результат имел важное теоретическое значение, однако предложенный Вейерштрассом способ нахождения приближающего полинома для практических целей был не пригоден. Вскоре появилось несколько новых доказательств теоремы Вейерштрасса. Различные авторы (Э. Ландау, С. Н. Бернштейн, Л. Фейер и др.) предлагали свои аппроксимирующие последовательности (у Фейера это были тригонометрические операторы). Однако для практической аппроксимации эти операторы также не годились ввиду низкой скорости приближения. Начиная, видимо, с работ Д. Джексона (см. [9]) возникают новые задачи: получение аппроксимационных оценок. Эти задачи прочно вошли в практику теории приближений. Аппроксимационные оценки получены как для конкретных операторов, так и для классов операторов. Для практики они дают ориентиры о возможностях известных (а также и неизвестных еще) аппроксимирующих конструкций. Теорема Вороновской [5] (конкретная информация в п. 1 предлагаемой статьи) занимает особое место. Этот результат, полученный в 1932 г., содержит элементы двух

направлений, которые определились в теории приближений значительно позже. Это точные константы [7] и явление насыщения [3].

В 60-е годы прошлого века ряд задач теории приближения стали изучать, используя аппарат банаховых и некоторых абстрактных пространств более общего вида. Для нас, с точки зрения исследований аппроксимирующих последовательностей операторов, представляет интерес работа Климова и др. [6]. Первоначально мы использовали введенное в этой работе понятие точки гладкости конуса, однако впоследствии пришли к выводу, что более целесообразно ввести новое понятие точки втягивания (см. п. 2 статьи).

1. Источник постановки задачи

В 1912 г. С. Н. Бернштейн ввел операторы

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

f определенная на [0, 1] функция, $x\in[0,1]$.

Обстоятельства открытия этих операторов описаны в статье В. С. Виденского [4]. Последовательность $B_n(f,x)$ является аппроксимирующей, то есть для любой $f\in C[0,1]$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-B_n(f,x)\|=0. \qquad (1)$$

Операторы $B_n(f,x)$ положительные. Это значит, что из $f(x)\geqslant 0$ при $x\in[0,1]$ следует $B_n(f,x)\geqslant 0$. Непосредственным вычислением устанавливается:

$$B_n(1,x)=1,$$

$$B_n(t,x)=x,$$

$$B_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)}{n},$$

$$B_n((t-x)^3,x)=\frac{x(1-x)}{n^2}(1-2x),$$

$$B_n((t-x)^4,x)=\frac{x(1-x)}{n^2}(\frac{1}{n}(1-6x(1-x))+3x(1-x)).$$

Здесь и в приведенных ниже примерах для линейных операторов L, отображающих пространство $C[a,b]$ в себя, используем классические обозначения Коровкина [8]. $L(f)$ обозначим $L(f(t),x)$ или $L(f,x)$, где буква x выделена для обозначения образа функции $f(t)$ при отображении L, так как этот образ является функцией из $C[a,b]$. При фиксированных x получаем функционалы.

Для достаточно гладких функций $f(t)$ предельное равенство (1) допускает уточнения. Например, если f дважды дифференцируема и $\|f''(t)\|=M$ (чебышевская норма пространства $C[0,1]$), то для любого $x\in[0,1]$ выполняется

$$|f(x)-B_n(f,x)|\leqslant\frac{M}{2}B_n((t-x)^2,x).$$

Уточнение к этому результату составляет теорему Вороновской: если f дважды дифференцируема , то для любого $x\in[0,1]$

$$B_n(f,x)-f(x)=\frac{f''(x)}{2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}+o(\frac{1}{n}). \qquad (2)$$

Это равенство обеспечивается благодаря тому, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n((t-x)^4,x)}{B_n((t-x)^2,x)}=0.$$

Схема получения равенств типа (2) допускает рассмотрение в довольно общей ситуации. Рассмотрению условий сходимости последовательностей функционалов в терминах линейных нормированных пространств (ЛНП) посвящен ряд работ: [1], [2], [6] и некоторые другие. Дальнейшее изложение содержит обзор некоторых результатов, полученных авторами (см. [1], [2]).

2. Основные понятия

Полагаем, что читателю известны понятия ЛНП и линейного непрерывного функционала, заданного на элементах ЛНП.

Если X некоторое ЛНП, то множество $K\subset X$ называется конусом, если оно выпуклое и замкнутое и, кроме того, из $p\in K,\lambda\geqslant 0$ следует $\lambda p\in K$. Множество линейных, непрерывных неотрицательных на K функционалов обозначается K^* и называется конусом, сопряженным K.

Считаем, что зафиксировано действительное ЛНП X и конус $K\subset X$, а также линейный непрерывный функционал $\mu\in K^*$ (то есть $p\in K\Rightarrow\mu(p)\geqslant 0$). Предполагаем, что имеется элемент $g\in K$ такой, что $g\neq 0$, $\mu(g)=0$ (в этом случае говорят, что μ проходит через g).

Пусть, далее, зафиксированы $p_0,p_1\in X$ такие, что $p_0\in K\bigcap Ker\mu$ $(p_0\neq 0)$, $\mu(p_1)>0$ ($Ker\mu$ множество нулей функционала μ).

Обозначим $\gamma(p_0,p_1)$ – множество, принадлежащее $Ker\mu$, при этом $p\in\gamma(p_0,p_1)$, тогда и только тогда, когда найдется $\varepsilon_0>0$ такое, что для всякого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ можно найти число $c>0$ (зависящее от p и ε) такое, что

$$\begin{aligned} &cp_0+\varepsilon p_1-p\in K,\\ &-cp_0-\varepsilon p_1-p\in -K. \end{aligned} \qquad (3)$$

Далее положим

$$T(p_0,p_1)=lin(\gamma(p_0,p_1)\bigcup\{p_1\}).$$

Здесь $linQ$ – линейная оболочка множества Q.

По отношению к любому подпространству $Y\subset T(p_0,p_1)$ будем говорить, что p_0 является точкой μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.

С помощью понятия точек втягивания в конус и некоторых функционалов, проходящих через них, можно доказать теоремы о скорости сходимости последовательности линейных операторов типа теоремы Вороновской [5].

Докажем две вспомогательные теоремы.

Теорема 1. *Пусть K конус в действительном ЛНП X, $\mu\in K^*$ – линейный непрерывный функционал. Если для последовательности линейных непрерывных функционалов $\mu_n\in K^*$ выполнены условия:*

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(p_0)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\mu_n(p_1)=\mu(p_1)\ ,\quad (4)$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(p)=\mu(p) \qquad (5)$$

для всех $p\in T(p_0,p_1)$, где p_0 – точка μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.

Доказательство. Пусть $p\in T(p_0,p_1)$.
Тогда $\tilde p=p-p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1}\in\gamma(p_0,p_1)$.
Действительно,

$$\mu(\tilde p)=\mu(p)-\mu(p)\mu(p_1)(\mu(p_1))^{-1}=0$$

и p является линейной комбинацией $\tilde p$ и p_1. Следовательно, по любому достаточно малому $\varepsilon>0$ найдется $c>0$ такое, что

$$cp_0+\varepsilon p_1+p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1}-p\in K,$$

$$-cp_0-\varepsilon p_1+p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1}-p\in -K.$$

Тогда в силу того что $\mu_n\in K^*$ (μ_n неотрицательны на K) и следующих отсюда неравенств

$$\mu_n(-cp_0-\varepsilon p_1+p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1}-p)\leqslant 0,$$

$$\mu_n(cp_0+\varepsilon p_1+p_1\mu(p)(\mu(p_1))^{-1}-p)\geqslant 0$$

из линейности μ_n получим

$$-c\mu_n(p_0)-\varepsilon\mu_n(p_1)\leqslant$$

$$\leqslant\mu_n(p)-\mu_n(p_1)(\mu(p_1))^{-1}\mu(p)\leqslant$$

$$\leqslant c\mu_n(p_0)+\varepsilon\mu_n(p_1).$$

Отсюда, учитывая (4), получим

$$-\varepsilon\mu(p_1)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(\mu_n(p)-\mu(p))\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(\mu_n(p)-\mu(p))\leqslant\varepsilon\mu(p_1).$$

Так как ε может быть как угодно мало, получаем (5).
Теорема 1 доказана. □

Следующая теорема будет в дальнейшем весьма полезна.

Теорема 2. *Пусть линейный непрерывный функционал μ, подпространство Y, конус K, элементы $p_0,p_1\in Y$ связаны соотношениями: $\mu(p_0)=0$, $\mu(p_1)>0$, $\mu\in K^*$, $Y=lin(Y_\mu\bigcup\{p_1\})$, где $Y_\mu=Y\bigcap Ker\mu$, $p_0\in K$.*
Пусть, далее, для любого $z\in Y$ такого, что $\mu(z)>0$, найдется $\lambda\in(0,1)$ такое, что $\lambda z+(1-\lambda)p_0\in K$.
Тогда p_0 является точкой μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.

Доказательство. Пусть $p\neq 0$ – произвольный элемент $p\in Y_\mu$. Это значит, что $\mu(p)=0$. Возьмем произвольно $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Так как $\mu(\varepsilon p_1-p)=\varepsilon\mu(p_1)>0$, то найдется $\lambda\in(0,1)$ такое, что $\lambda(\varepsilon p_1-p)+(1-\lambda)p_0\in K$. Тогда $\varepsilon p_1-p+\lambda^{-1}(1-\lambda)p_0\in K$. Обозначив $c_1=(1-\lambda)\lambda^{-1}$, имеем

$$c_1p_0+\varepsilon p_1-p\in K. \qquad (6)$$

Далее, $\mu(p+\varepsilon p_1)=\varepsilon\mu(p_1)>0$. Следовательно, найдется $\sigma\in(0,1)$ такое, что

$$\sigma(p+\varepsilon p_1)+(1-\sigma)p_0\in K.$$

И если обозначить $c_2=\sigma^{-1}(1-\sigma)$, то получим

$$c_2p_0-\varepsilon p_1-p\in -K. \qquad (7)$$

Обозначим $c=\max(c_1,c_2)$.
Очевидно, $(c-c_1)p_0\in K$. Отсюда и из (6) получим

$$cp_0+\varepsilon p_1-p\in K.$$

Далее, $-(c-c_2)p_0\in -K$. Отсюда и из (7) имеем

$$-cp_0-\varepsilon p_1-p\in -K.$$

В силу произвольности $p\in Y_\mu$ получаем, по определению, что p_0 является точкой μ-втягивания Y в конус K по направлению p_1.
Теорема 2 доказана. □

3. Теорема Вороновской с общей точки зрения

Пусть функционал $\mu\in X^*$, конус K, элементы p_0,p_1 удовлетворяют тем условиям, о которых была речь в предыдущем пункте. Последовательность $\mu_n\in K^*$ такова, что $\mu_n(p_0)\to 0$, $\mu_n(p_1)\to\mu(p_1)>0$. Тогда, если

элемент $p \in Ker\mu$ удовлетворяет (3), то можно поставить вопрос: как определить предел последовательности $\frac{\mu_n(x)}{\mu_n(x_0)}$?

Предполагаем, что существует элемент $y \in Ker\mu$, $y \in K$, $y \notin lin(\{p, p_0\})$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n(y)}{\mu_n(p_0)} = 0.$$

Рассмотрим пространство $P = lin(\{p, p_0, y\})$ и конус $K(p) = K \bigcap P$.

Если обозначить z – текущий элемент пространства P, то равенством

$$\Phi_n(z) = \frac{\mu_n(z)}{\mu_n(p_0)}$$

определяется последовательность линейных непрерывных на P функционалов Φ_n.

При этом Φ_n неотрицательны на элементах $K(p)$, $\Phi_n(p_0) = 1$, $\Phi_n(y) \to 0$.

Если, кроме того, на P определен линейный непрерывный функционал $v(z)$, неотрицательный на $K(p)$ и проходящий через y, и если y – точка v-втягивания P в $K(p)$ по направлению p_0 и $v(p_0) = 1$, то в случае существования конечного предела

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n(z)}{\mu_n(p_0)} = v(z) \qquad (8)$$

для всех $z \in P$ будем называть функционал v из (8) функционалом Вороновской.

Каких-то общих правил нахождения (вычисления) функционала Вороновской неизвестно, но с помощью теоремы 2 в конкретных ситуациях можно проверить, является или нет тот или иной функционал функционалом Вороновской.

Вид функционала Вороновской зависит от выбора элементов p_0 и y. Для практических приложений наиболее удобны случаи, в которых функционалы Вороновской имеют дифференциальный вид (см. [1], [2]).

4. Некоторые примеры

Пример 1. Классический вариант теоремы Вороновской. Положительные операторы.

Пусть $L_n : C[a, b] \to C[a, b]$ произвольная последовательность линейных положительных операторов. Для сходимости операторов L_n в точке $x \in [a, b]$ к значению $f(x)$, если x – точка непрерывности ограниченной функции $f(t)$, достаточно выполнения двух предельных отношений: $L_n(1, x) \to 1$, $L_n((t - x)^2, x) \to 0$ (теорема Коровкина [8]).

Пусть $f(t)$ дважды дифференцируема в точке $t = x$ и в ее окрестности. Обозначим

$$\varphi(t) = f(t) - f(x) - f'(x)(t - x),$$
$$p_0(t) = (t - x)^2, y(t) = (t - x)^4,$$
$$P = lin(\{\varphi(t), p_0(t), y(t)\}),$$

K – конус неотрицательных функций, $K(\varphi) = K \bigcap P$. Применяя теорему 2, можно убедиться, что функционалом Вороновской в этом случае является

$$v(z) = \frac{1}{2} z''(x)$$

(см. [1]). Доказательство приведем в примере 2 для более сложного случая положительных операторов, определенных на функциях двух переменных.

Таким образом, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n((t - x)^4, x)}{L_n((t - x)^2, x)} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\varphi, x)}{L_n((t - x)^2, x)} = \frac{1}{2}\varphi''(x).$$

Если обозначить теперь

$$\varphi(t) = f(t) - f(x) - f'(x)(t - x) - \frac{1}{2}(t - x)^2 - \frac{1}{6}(t - x)^3,$$
$$p_0(t) = (t - x)^4, y(t) = (t - x)^6,$$

то функционалом Вороновской будет

$$v(z) = \frac{1}{4!} z^{(4)}(x).$$

(см. [1]).

Пример 2. Положительные операторы, определенные на функциях двух переменных.

Пусть $L_n(f(t, u), x, y) : C[a, b]^2 \to C[a, b]^2$ последовательность линейных положительных операторов таких, что

$$\begin{array}{l} \|L_n(1,\ x,\ y) - 1\| \to 0, \\ \|L_n(t^i,\ x,\ y) - x^i\| \to 0, \\ \|L_n(u^i,\ x,\ y) - y^i\| \to 0 \end{array} \qquad (9)$$

при $n \to \infty$, $i = 1, 2$.

Тогда, если для $(x, y) \in [a, b]^2$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n((t - x)^4 + (u - y)^4, x, y)}{L_n((t - x)^2 + (u - y)^2, x, y)} = 0,$$

то для $f(t, u) \in C^2[a,\ b]^2$ выполняется

$$\begin{array}{l} L_n(f(t, u), x, y) = f(x, y)L_n(1, x, y) + \\ + f'_t(x, y)L_n(t - x, x, y) + \\ + f'_u(x, y)L_n(u - y, x, y) + \\ + 0.5(f''_{tt}(x, y)L_n((t - x)^2, x, y) + \\ + 2f''_{tu}(x, y)L_n((t - x)(u - y), x, y) + \\ + f''_{uu}(x, y)L_n((u - y)^2, x, y)) + \\ + o(L_n((t - x)^2 + (u - y)^2, x, y)). \end{array} \qquad (10)$$

Действительно, при выполнении условий (9) для любой функции $f(t,u) \in C^2[a,b]^2$ выполняется равенство

$$\|L_n(f(t,u),x,y) - f(x,y)\| = O(\gamma_n),$$

где γ_n максимальная из величин

$$\|L_n(1,x,y) - 1\|,$$

$$\|L_n(t^i,x,y) - x^i\|,$$

$$\|L_n(u^i,x,y) - y^i\|,$$

$i = 1,2$ (см., например, [1], гл. 1, п. 5).

Пусть произвольным образом зафиксирована точка $(x,y) \in [a,b]^2$. Для функции $f(t,u) \in C^2[a,b]^2$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(t,u) = f(t,u) - f(x,y) - f'_t(x,y)(t-x) -$$

$$-f'_u(x,y)(u-y) - (t-x)(u-y)f''_{tu}(x,y) +$$

$$+\frac{1}{2}(u-y)^2(f''_{tt}(x,y) - f''_{uu}(x,y)).$$

Пространство P определим равенством

$$P = lin\{\Phi(t,u), p_0(t,u), Y(t,u)\},$$

где

$$p_0(t,u) = (t-x)^2 + (u-y)^2,$$

$$Y(t,u) = (t-x)^4 + (u-y)^4.$$

Здесь $Y(t,u)$ играет роль элемента p_1 из условия теоремы 2.

Заметим, что любой элемент $z(t,u) \in P$ обладает следующими свойствами:

$$z(x,y) = z'_t(x,y) = z'_u(x,y) = z''_{tu}(x,y) = 0,$$

$$z''_{tt}(x,y) = z''_{uu}(x,y),$$

так как этими свойствами обладают функции p_0, Φ и Y.

Обозначим через $K(\Phi)$ пересечение с пространством P конуса K неотрицательных функций. Покажем, что если обозначить

$$v(z) = \frac{1}{2}z''_{tt}(x,y),$$

(v – функционал Вороновской), то $Y(t,u)$ является точкой v-втягивания пространства P в конус $K(\Phi)$ по направлению $p_0(t,u)$.

Пусть $z(t,u) \in P$ произвольный элемент такой, что $z''_{tt}(x,y) > 0$. Тогда в силу свойств элементов пространства P

$$z''_{tt}(x,y)z''_{uu}(x,y) - [z''_{tu}(x,y)]^2 > 0.$$

Следовательно, найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для точки $(t,u) \in U(\varepsilon)\bigcap[a,b]^2$ выполняется

$$z''_{tt}(t,u)z''_{uu}(t,u) - [z''_{tu}(t,u)]^2 > 0.$$

Здесь $U(\varepsilon)$ это ε-окрестность точки (x,y).

Это означает, что функция $z(t,u)$ выпукла вниз на $U(\varepsilon)$. А так как $z(x,y) = z'_t(x,y) = z'_u(x,y) = 0$, то $z(t,u) \geqslant 0$, если точка $(t,u) \in U(\varepsilon)\bigcap[a,b]^2$. Следовательно, при любом $\lambda \in (0;1]$, для $(t,u) \in U(\varepsilon)\bigcap[a,b]^2$ выполняется неравенство

$$\lambda z(t,u) + (1-\lambda)Y(t,u) \geqslant 0. \qquad (11)$$

Далее, для $(t,u) \in [a,b]^2\backslash U(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$Y(t,u) \geqslant 0,5\varepsilon^4, |z(t,u)| \leqslant \|z(t,u)\| = m.$$

Тогда если для $\lambda \in (0;1]$ выполняется неравенство $\lambda < \frac{0,05\varepsilon^4}{m}$, то

$$\lambda z(t,u) + (1-\lambda)Y(t,u) \geqslant 0$$

для $(t,u) \in [a,b]^2\backslash U(\varepsilon)$. Таким образом, для этих λ неравенство (11) выполняется для всех точек $(t,u) \in [a,b]^2$. Значит, $\lambda z + (1-\lambda)Y \in K$. Из теоремы 2 следует, что Y является точкой v-втягивания в конус K по направлению p_0.

Теперь мы можем сделать вывод, что при выполнении равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(Y(t,u),x,y)}{L_n(p_0(t,u),x,y)} = 0$$

выполняется аналогичное равенству (8) равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\Phi(t,u),x,y)}{L_n(p_0(t,u),x,y)} = \frac{1}{2}\Phi''_{tt}(x,y).$$

Раскрывая выражения для $\Phi(t,u)$ и $p_0(t,u)$ и учитывая, что $\Phi''_{tt}(x,y) = f''_{tt}(x,y)$, после преобразований получим (10).

Пример 3. Квазиположительные операторы.

Смысл термина «квазиположительные операторы» будет ясен из дальнейшего изложения.

Пусть зафиксировано $x \in [a,b]$. Пусть, далее, $f(t) \in Lip1$ имеет в точке x односторонние производные, при этом, очевидно, $|f'_+(x)| < \infty$ и $|f'_-(x)| < \infty$. Полагаем, кроме того, что $f(t)$ дифференцируема на $[x-\delta_0, x]$ и на $[x, x+\delta_0]$ при некотором $\delta_0 > 0$.

Конус K состоит из функций, обращающихся в нуль при $t = x$, не возрастающих на $[a,x]$, не убывающих на $[x,b]$. Обозначим

$$t^- = \frac{1}{2}(t - |t|),$$

$$\varphi(t) = f(t) - f(x) - (f'_+(x) + f'_-(x))(t-x)^- =$$

$$= f(t) - f(x) - (f'_+(x) + f'_-(x))\frac{1}{2}(t - x - |t-x|),$$

$$p_0(t) = |t-x|, y(t) = (t-x)^2,$$

$$P = lin(\{p_0(t), y(t), \varphi(t)\}).$$

Очевидно, для любого $z(t) \in P$, $z'_-(x) = -z^-_+(x)$.

Тогда определенный в пространстве P функционал $v(z) = z'_+(x)$ является функционалом Вороновской, а $y(t)$ является точкой v-втягивания P в конус $K(\varphi) = K \bigcap P$ по направлению $p_0(t)$ (см. [1]).

Отсюда получим, что из

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n((t-x)^2, x)}{L_n(|t-x|, x)} = 0$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\varphi(t), x)}{L_n(|t-x|, x)} = f'_+(x)$$

или, по-другому

$$L_n(f(t), x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{2}(f'_+(x) + f'_-(x))L_n(t-x, x) +$$

$$+\frac{1}{2}(f'_+(x) - f'_-(x))L_n(|t-x|, x) + o(L_n(|t-x|, x)).$$

Пример 4. Положительные операторы, определенные на функциях нескольких переменных.

Далее обозначаем $\Delta = [a,b]^r$, $r > 0$ – целое, $t, x \in \Delta$, $t = (t_1, ..., t_r)$, $x = (x_1, ..., x_r)$, $L_n : C(\Delta) \to C(\Delta)$ – последовательность линейных положительных операторов.

Размещением с повторениями из r элементов, а для определенности, из элементов множества $\{1, 2, ..., r\}$ по μ элементов, будем называть упорядоченное множество (последовательность) $(n_1, n_2, ..., n_\mu)$, где $n_i \in \{1, 2, ..., r\}$. (Для каждого i можно записать $n_i \in (n_1, n_2, ..., n_\mu)$).

T_r^μ – множество всех размещений с повторениями из r элементов по μ. Если $\tau \in T_r^\mu$, то будем писать $|\tau| = \mu$.

Пользуясь этими обозначениями, формулу Тейлора для $f(t) \in C^{2m}(\Delta)$ в окрестности $t = x$ можно записать в виде

$$f(t) = f(x) + \sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{i!} \sum_{|\tau|=i} \frac{\partial^i f}{\prod_{j\in\tau} \partial t_j}(x) \prod_{j\in\tau}(t_j - x_j) + \rho(t).$$

Положим

$$\varphi(t) = f(t) - f(x) -$$

$$-\sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{i!} \sum_{|\tau|=i} \frac{\partial^i f}{\prod_{j\in\tau} \partial t_j}(x) \prod_{j\in\tau}(t_j - x_j) +$$

$$+\frac{1}{(2m)!} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^{2m} f}{\partial t_1^{2m}}(x)(t_j - x_j)^{2m}$$

и

$$p_0(t) = \sum_{j=1}^{r}(t_k - x_k)^{2m},$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{r}(t_k - x_k)^{2m+2}.$$

K – конус неотрицательных на Δ функций, $P = lin(\{p_0(t), y(t), \varphi(t)\})$, $K(\varphi) = K \bigcap P$.

Функционал

$$v(z) = \frac{1}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} z}{\partial t_1^{2m}}(x)$$

является функционалом Вороновской, $y(t)$ – точка v-втягивания P в $K(\varphi)$ по направлению $p_0(t)$. (см. [1]).

Итак, имеем следующее утверждение: пусть $L_n : C(\Delta) \to C(\Delta)$ последовательность линейных положительных операторов, таких, что $L_n(1, x) = 1$, $\|L_n(\sum_{i=1}^r (t_i - x_i)^2, x)\| \to 0$. Если, кроме того, для $x \in \Delta$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(\sum_{i=1}^r (t_i - x_i)^{2m+2}, x)}{L_n(\sum_{i=1}^r (t_i - x_i)^{2m}, x)} = 0,$$

то для $f(t) \in C^{2m}(\Delta)$ верна оценка

$$L_n(f(t), x) = f(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{i!} \sum_{|\tau|=i} \frac{\partial^i f}{\prod_{j\in\tau} \partial t_j}(x) L_n(\prod_{j\in\tau}(t_j - x_j), x) +$$

$$+o(L_n(\sum_{j=1}^{r}(t_j - x_j)^{2m}, x)).$$

Заключение

Итак, как показывают примеры, рассмотренные в п. 4, теоремы 1 и 2 из п. 2 являются эффективным аппаратом получения теорем типа теоремы Вороновской. Хотя и нет способа «вычисления» функционала Вороновской, применение метода точек втягивания позволяет разобраться в ситуациях, которые вызывают большие технические трудности при непосредственном подходе. Так, случай функций нескольких переменных (пример 4 п. 4) удалось разобрать только используя выше указанный метод.

Литература

1. *Абакумов Ю. Г., Банин В. Г.* Аппроксимативные свойства некоторых классов линейных операторов. Чита: СО РАН, ЧГПИ, 1993. 62 с.

2. *Абакумов Ю. Г.* Последовательности линейных функционалов и аппроксимативные свойства линейных операторов. Чита: ЧитГУ, 2004. 179 с.

3. *Бабенко К. И.* О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 1 (241). С. 3–27.

4. *Виденский В. С.* К столетию открытия полиномов Бернштейна // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 15 (50). 2014. С. 40–46.

5. *Вороновская Е. В.* Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. Сер. А. 1932. Т. 4. С. 79–85.

6. *Климов В. С., Красносельский М. А., Лифшиц Е. А.* Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1966. Т. 15. С. 55–69.

7. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. М.: Наука, 1987. 424 с.

8. *Коровкин П. П.* Линейные операторы и теория приближений. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.

9. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ИНТ, 1987. Т. 14. С. 105–260.

Поступила в редакцию 02.04.2015

References

1. *Abakumov Y. G., Banin V. G.* Approksimativnye svojstva nekotoryh klassov linejnyh operatorov [Approximation properties of some classes of linear operators]. Chita: SO RAN, CHGPI, 1993. 62 p.

2. *Abakumov Y. G.* Posledovatelnosti linejnyh funkcionalov i approksimativnye svojstva linejnyh operatorov [Sequences of linear functionals and approximation properties of linear operators]. Chita: ChitGU, 2004. 179 p.

3. *Babenko K. I.* O nekotorih zadachah teorii priblizheniy i chislennogo analiza [Some problems in approximation theory and numerical analysis]. Uspehi mat. nauk [Russian mathematical surveys]. 1985. Vol. 40, iss. 1 (241). P. 3–27.

4. *Videnskiy V. S.* K stoletiyu otkrytiya polinomov Bernshteyna [The centenary of the discovery of Bernstein polynomials]. Istoriko-matematicheskie issledovaniya. Vtoraya seriya [Historical and mathematical surveys. 2nd ser.]. 2014. Iss. 15 (50). P. 40–46.

5. *Voronovskaja E. V.* Opredelenie asimptoticheskogo vida priblizheniya funkciy polinomami S. N. Bernshteyna [Determination of the asymptotic form of the approximation of functions by S. N. Bernstein polynomials]. DAN SSSR. Ser. A [Proc. USSR AS. Ser. A.]. 1932. Vol. 4. P. 79–85.

6. *Klimov V. S., Krasnoselskiy M. A., Lifshitc E. A.* Tochki gladkosti konusa i shodimost polozhitelnyh funkcionalov i operatorov [Points of smoothness of a cone and the convergence of positive functionals and operators]. Tr. Mosk. mat. o-va [Trans. Mosc. math. soc.]. Moscow, 1966. Vol. 15. P. 55–69.

7. *Kornejchuk N. P.* Tochnye konstanty v teorii priblizheniy [Exact constants in approximation theory]. Moscow: Nauka, 1987. 424 p.

8. *Korovkin P. P.* Linejnye operatory i teorija priblizheniy [Linear operators and approximation theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 212 p.

9. *Tihomirov V. M.* Teorija priblizheniy [Approximation theory]. Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya [Encyclopedia of mathematical sciences. Fundamental surveys]. Moscow: INT, 1987. Vol. 14. P. 105–260.

Received April 02, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Абакумов Юрий Георгиевич
профессор, к. ф.-м. н.
Забайкальский государственный университет
ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Россия, 672039
эл. почта: abakumovug@yandex.ru
тел.: (8302) 2416444

Банин Виктор Григорьевич
доцент, к. ф.-м. н.
Финансовый университет при правительстве РФ
Ленинградский проспект, 49, Москва, Россия, 125993
эл. почта: vikbanin@mail.ru
тел.: (8499) 2772118

CONTRIBUTORS:

Abakumov, Yury
Zabaykalskiy State University
30 Alexandro-Zavodskaya St., 672039 Chita, Russia,
e-mail: abakumovug@yandex.ru
tel.: (8302) 2416444

Banin, Victor
Financial University (Government of Russian Federation)
49 Leningradskiy St., 125993 Moscow, Russia,
e-mail: vikbanin@mail.ru
tel.: (8499) 2772118

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 15–23
DOI: 10.17076/mat151

УДК 519.17,519.856,658.012

ПРИМЕНЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В КЛАСТЕРНОМ АНАЛИЗЕ ДАННЫХ

Б. З. Белашев[1,2], **К. А. Долгий**[2]

[1] *Институт геологии Карельского научного центра РАН*
[2] *Петрозаводский государственный университет*

На основе методов глобальной оптимизации в системе компьютерной математики «Matlab» разработаны алгоритмы четкой и нечеткой кластеризации данных для определения параметров прототипов кластеров. Предложен способ нахождения границ кластеров. На симулированных данных показано, что центры кластеров, получаемые алгоритмами на основе «patternsearch» и «K-средних», совпадают. Примененные к обработке геологических данных, разработанные алгоритмы упрощают анализ горных пород, например, позволяют по изображению горной породы оценивать ее минеральный состав.

Ключевые слова: алгоритмы глобальной оптимизации, четкая и нечеткая кластеризация данных, центры, границы, форма кластеров, области кластеризации данных.

B. Z. Belashev, K. A. Dolgy. APPLICATION OF GLOBAL OPTIMIZATION IN DATA CLUSTERING ANALISYS

On the basis of global optimization methods in the system of computer mathematics «Matlab» algorithms of clear and fuzzy data clustering had developed to determine the parameters of prototypes of clusters. A method of finding the clusters boundaries was proposed. On simulated data it had been show that the cluster centers derived by algorithms based on «patternsearch» and «K-means» are the same. Applied to the processing of geological data, the developed algorithms simplify the analysis of rocks, for example, allow on the image of the rocks assess their mineral composition.

Key words: algorithms of global optimization, clear and fuzzy clustering data, centers, boundaries, shape of clusters, areas of clustering data.

Введение

Кластеризация данных предполагает автоматическое разделение исходных данных на группы без использования априорной информации. Процедуру применяют при анализе данных, их группировке, распознавании образов, извлечении информации. Там, где информацию структурируют, выделяют ее главные признаки, кластеризация является необходимым этапом, во многом определяющим успех обработки данных в целом [1, 2].

При кластеризации данных определяют число кластеров, оценивают их форму, положения центров, границы. Распространенным приемом является сведение задачи кластеризации к поиску экстремума некоторого функционала, например, минимума дисперсии кластеризации. Многие известные методы в этих

случаях часто подвержены предварительной сходимости: даваемый ими локальный экстремум может значительно отличаться от глобального экстремума [3]. Особое значение проблема приобретает в случае, когда элемент данных одновременно принадлежит нескольким кластерам [4].

Статья посвящена изучению возможностей применения алгоритмов глобальной оптимизации [5] в кластерном анализе данных. Преимущества этих алгоритмов состоят в получении единственного решения, близкого к оптимальному решению, и в отсутствии требований к форме функционала. Пользоваться оптимизационными алгоритмами удобно благодаря их реализациям в системах компьютерной математики.

Моделирование демонстрационных примеров и задач с использованием алгоритмов глобальной оптимизации проведено в системе «Matlab» фирмы Mathworks inc. [6].

Методы кластеризации данных

В агломеративных методах первоначально все объекты считают отдельными кластерами, которые затем объединяют в более крупные кластеры. Процесс объединения наглядно представлен иерархическим деревом-дендрограммой [7].

В методе главных компонент при помощи преобразования Карунена – Лоэва [8] переходят к собственным векторам матрицы корреляции системы случайных величин и компонентам в виде суммы проекций данных на эти вектора, эффективно уменьшающим общую дисперсию случайных величин. В системе координат с осями, ориентированными по главным компонентам, данные подразделяются на кластеры, и такому разделению часто можно придать смысл исходя из формы главных компонент. Нелинейным обобщением метода главных компонент являются карты самоорганизации нейронных моделей [9].

Для отнесения объектов к кластерам в методе горной кластеризации используют эвристические потенциальные функции, выбирая в качестве группирующих элементов элементы с наибольшими значениями потенциалов [10]. Как в агломеративных методах и методе главных компонент, в этом методе число кластеров задавать не требуется.

Если число кластеров известно, центры кластеров получают итеративным методом K-средних [11]. Начальные положения центров выбирают произвольно. Затем, следуя правилу «ближайшего соседа», отбирают объекты, относящиеся к каждому кластеру, а его центр вычисляют как арифметическое среднее или центр тяжести его элементов. Процедуру повторяют до тех пор, пока происходят изменения.

Для перекрывающихся кластеров применяют нечеткую кластеризацию на основе метода c-средних [12]. Центры кластеров ищут, используя функции принадлежности элементов к кластерам и число кластеров. Часто локальные экстремумы нечетких функционалов дают разные значения центров в зависимости от выбора начальных точек.

Алгоритмы глобальной оптимизации

Генетические алгоритмы [13] реализуют идею естественного отбора Ч. Дарвина – совершенствования вида путем передачи потомкам лучших генов. Функцию приспособленности особей к среде определяют на множестве хромосом особей – последовательностей единиц и нулей, представляющих числа в коде Грея. Чем значение функции меньше, тем более особь считают приспособленной к среде. Генетический алгоритм ищет глобальный минимум этой функции начиная с произвольной совокупности особей, рассматриваемой в качестве популяции. На каждой итерации особи объединяют в пары и производят потомков путем кроссинговера – обмена хвостами хромосом и мутации – случайной инверсии значения в случайном разряде числа. Отбор особей в новую популяцию ведут по значениям функции приспособленности потомков и родителей. Алгоритм сходится, если новая популяция не отличается от предыдущей. Преимущества этих алгоритмов состоят в отсутствии требований к непрерывности и дифференцируемости функций, нечувствительности к попаданию в локальные минимумы, в возможности многокритериальной оптимизации, многократного ускорения сходимости по сравнению со случайным поиском, простоте реализации. Ускорению сходимости способствуют коды, напрямую не зависящие от аргументов целевой функции, использование нескольких точек пространства поиска, детерминированного и случайного механизмов поиска решения. Недостатками являются затрудняющая понимание биологическая терминология, работа с битовыми и псевдобитовыми строками, сложное кодирование решения, невысокая точность определения глобального экстремума, которую повышают, выполняя алгоритм несколько раз и выбирая значение экстремума с наилучшей функцией приспособленности. Примером применения глобальной оптимиза-

ции к проблемам кластеризации является генетический алгоритм К-средних [14].

Меньшие затраты по сравнению с генетическими алгоритмами имеет алгоритм поиска по шаблону – множеству точек в виде вершин n-мерного куба, расширяющегося или сжимающегося, в зависимости от того, имеет или нет точка шаблона значение, меньшее, чем текущее значение функции [15]. Минимальный размер шаблона является основанием для прекращения поиска.

В алгоритмах глобальной оптимизации используют биологическую или другую специальную терминологию. Муравьиный алгоритм, например, применяемый для поиска оптимального пути в графе, копирует поведение муравьев, прокладывающих путь от муравейника к источнику пищи [16]. Алгоритм роя частиц оптимизирует функцию, поддерживая популяцию решений в виде пчел или частиц, перемещаемых в пространстве по простому закону. Положения частиц меняются при нахождении более выгодных позиций [17]. Алгоритм отжига построен на аналогии с состоянием решетки кристалла в процессе охлаждения [18].

Глобальная оптимизация в кластерном анализе

Если число кластеров m известно, их центры могут быть найдены из условия глобального минимума дисперсии кластеризации. Для n входных объектов с координатами u_i и v_i, $i = 1, \dots n$ и центров кластеров с координатами x_k и y_k , $k = 1, \dots, m$ дисперсию кластеризации D выразим соотношением

$$D = \sum_{i=1}^{n}[(u_i - xr_i)^2 + (v_i - yr_i)^2]. \qquad (1)$$

Здесь xr_i, yr_i – координаты центра кластера с вектором r_i. В отличие от [14], рассчитывающего координаты вектора r_i как средние значения элементов кластера, для его нахождения использовано условие:

$$r_i = arg(min_k((u_i - x_k)^2 + (v_i - y_k)^2)). \qquad (2)$$

Три кластера по сорок элементов в каждом формировали около выбранных центров, используя равномерное случайное распределение. Данные обрабатывали методами горной кластеризации, К-средних, алгоритмом глобальной оптимизации в соответствии с (1–2). Обработку данных вели в системе компьютерной математики «Matlab». В этом и последующих примерах в качестве средства глобальной оптимизации использована процедура «patternsearch» пакета «Global Optimization Toolbox», более точная и быстрая по сравнению с генетическими алгоритмами [6, 15]. Система компьютерной математики «Matlab» содержит большой набор инструментов обработки и представления данных. Для ее установки на переносном компьютере требуется около 3ГБайт памяти. Результаты обработки показаны на рис. 1. Полученные алгоритмом глобальной оптимизации центры кластеров отличаются от элементов с наибольшими значениями потенциалов (а). Центры кластеров в методе К-средних и в алгоритме глобальной оптимизации совпадают (б), что, по-видимому, является следствием несмещенности оценки.

Для перекрывающихся кластеров применяли нечеткую кластеризацию, использующую функции принадлежности элементов к кластерам μ_{ik}, принимающих значения из интервала [0, 1]. В этом случае для оценки качества разбиения использован критерий

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mu_{ik}^{l}[(u_i - x_k)^2 + (v_i - y_k)^2] \to \min, \quad (3)$$

где l – экспоненциальный вес, выбираемый в диапазоне [0,∞], задающий уровень нечеткости кластеров, усиливающий влияние элементов с большими степенями принадлежности. Теоретически обоснованного правила для выбора значения экспоненциального веса не существует. Обычно его выбирают равным 2 [4].

Преждевременная сходимость ограничивает применение для нахождения минимума (3) известного алгоритма с–средних с неопределенными множителями Лагранжа [19]. Использование для этих целей алгоритмов глобальной оптимизации и, в частности, «patternsearch» является более приемлемым.

Определение границ кластеров представляет важную и неоднозначно решаемую проблему анализа данных. Пусть на плоскости имеются элементы двух кластеров с координатами u_i, v_i (рис. 2). Границу между кластерами будем считать прямой, параметры которой A, B, C найдем из условия (4):

$$\rho = (\sum_{k=1}^{n}(\mu_{i1}^{l} + \mu_{i2}^{l})\frac{Au_i + Bv_i + C}{\sqrt{A^2 + B^2}})^2 \to \min. \quad (4)$$

Оптимизационные алгоритмы применимы для визуализации кластеров заданных форм. Часто в качестве элементов, образующих каркас кластеров, выступают геометрические фигуры или линии: дуги окружностей, спиралей, отрезки прямые. Если данные группируются

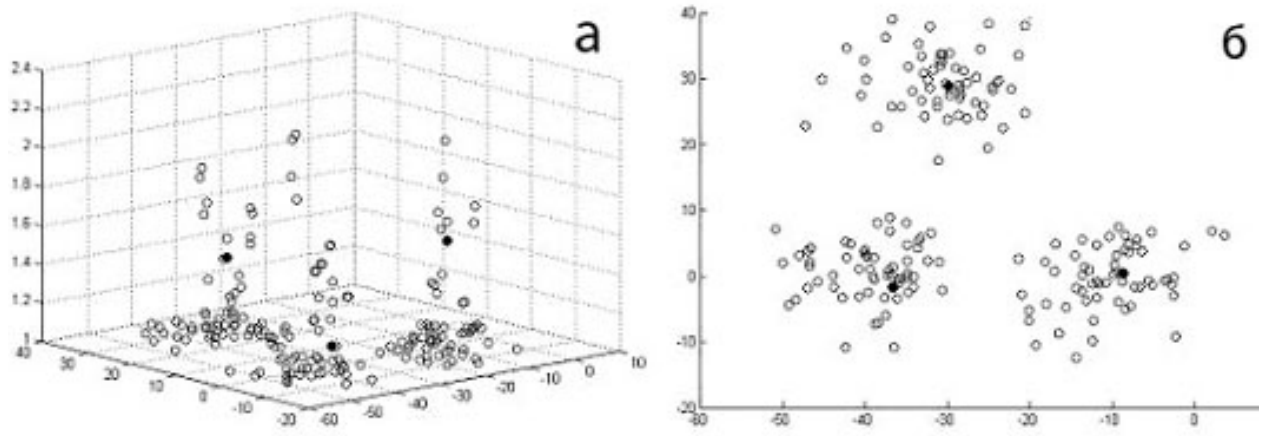


Рис. 1. Результаты кластеризации симулированных данных методом горной кластеризации (а), методом К-средних и алгоритмом глобальной оптимизации (б)

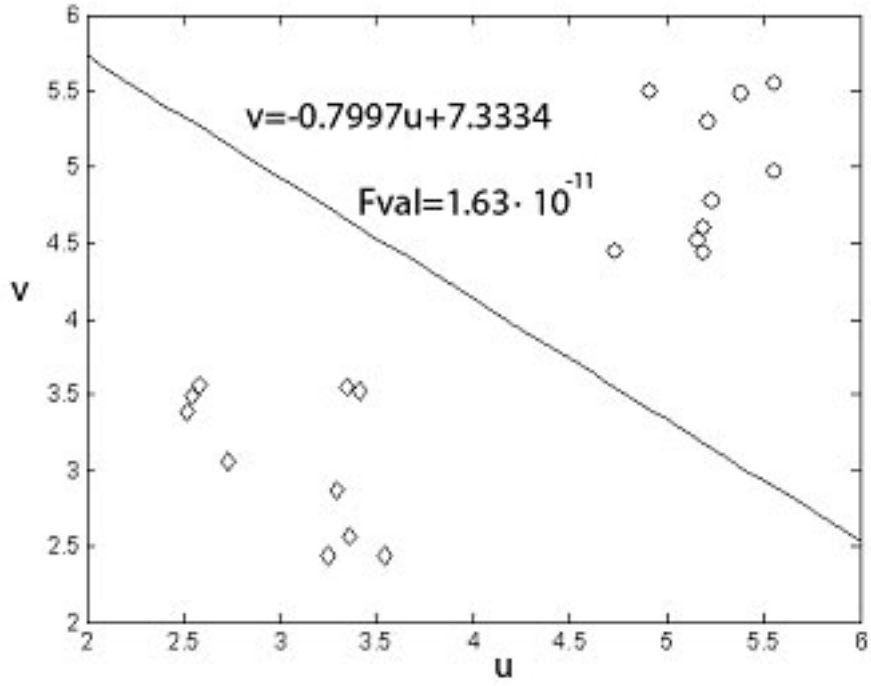


Рис. 2. Определение границы между кластерами из условия (4)

вблизи окружности и прямой, дисперсию кластеризации представим в виде:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (\sqrt{(u_i - x_0)^2 + (v_i - y_0)^2} - r_0)^2 + \sum_{i=1}^{n} \eta_i (v_i - a u_i - b)^2, \quad (5)$$

где x_0, y_0, r_0 – соответственно координаты центра и радиус окружности, a и b – угловой коэффициент и смещение прямой. Коэффициенты ω_i и η_i принимают значения, равные нулю или единице в зависимости от условий:

$$\omega_i = 1, \eta_i = 0, if \mid \sqrt{(u_i - x_0)^2 + (v_i - y_0)^2} - r_0 \mid \leqslant \frac{\mid A u_i + B v_i + C \mid}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$\omega_i = 0, \eta_i = 1, if \mid \sqrt{(u_i - x_0)^2 + (v_i - y_0)^2} - r_0 \mid \geqslant \frac{\mid A u_i + B v_i + C \mid}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (6)$$

Глобальный минимум дисперсии D дает геометрические параметры прототипов кластеров. Рис. 3 а демонстрирует кластеризацию данных, относящихся к окружности и трем прямым. Аналитическое задание образующих каркас кластеров линий позволяет найти точки их пересечений. Для приложений в области физики высоких энергий такая возможность может представлять самостоятельный интерес.

Элементы пересечений считаем принадлежащими нескольким кластерам, а в описании (6) вместо коэффициентов используем функции принадлежности и нечеткий алгоритм кластеризации

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik}^{l} \varphi_{ik} \to \min, \quad (7)$$

где φ_{ik} – квадрат отклонения i-ого элемента данных до k-кластера. Результаты нечеткой аппроксимации данных окружностью и прямой показаны на рис. 3 б.

Предметные области кластерного анализа

Кластеризацию данных алгоритмами глобальной оптимизации можно применять в разных предметных областях. В физике высоких энергий, изучающей взаимодействия сталкивающихся частиц, на первоначальном этапе обработки данных идентифицируют вторичные частицы по их трекам [20]. Оптимизационные алгоритмы позволяют автоматически отнести образующиеся в материале детекторов пятна к отрезкам прямых, дугам окружностей, спиралей и количественно оценить параметры этих объектов и связать с зарядом, энергией и импульсом частиц [21]. Попутно возможно решение специальных задач, например, поиск вершины взаимодействия.

Цель автоматической кластеризации данных при интерпретации результатов дистанционного зондирования Земли и планет состоит в дешифровке погребенных под чехлом осадочных отложений разломов, контактов тел, границ пород разного состава, кольцевых структур. Руководящее правило такой кластеризации составляет принцип минимизации, означающий максимальную локализацию перспективных площадей при минимальном числе используемых критериев. Обычно в рельефе ищут линиаменты, крупные дуговые, кольцевые структуры, блоки глубинного строения, трансформные и региональные разломы, выясняют их рудоконтролирующую роль. Задачей линиаментного анализа является оценка трещиноватости и глубинного строения кристаллического фундамента. Кластеры азимутов поверхностных трещин о. Валаам (рис. 4), выделенные из данных [22], дают направления, связанные с процессами контракции при кристаллизации горных пород и наложенной тектоникой. Кольцевые структуры образуются при купольных поднятиях, вулканно-тектонических процессах, импактных событиях. С кольцевыми структурами поднятия и пересекающими их линиаментами связывают месторождения полезных ископаемых, в частности, такие крупные золоторудные, серебряные, платиновые и урановые месторождения, как рифтогенный бассейн Витватерсанд (Южно-Африканская Республика), месторождение Мурунтау (Казахстан) [23].

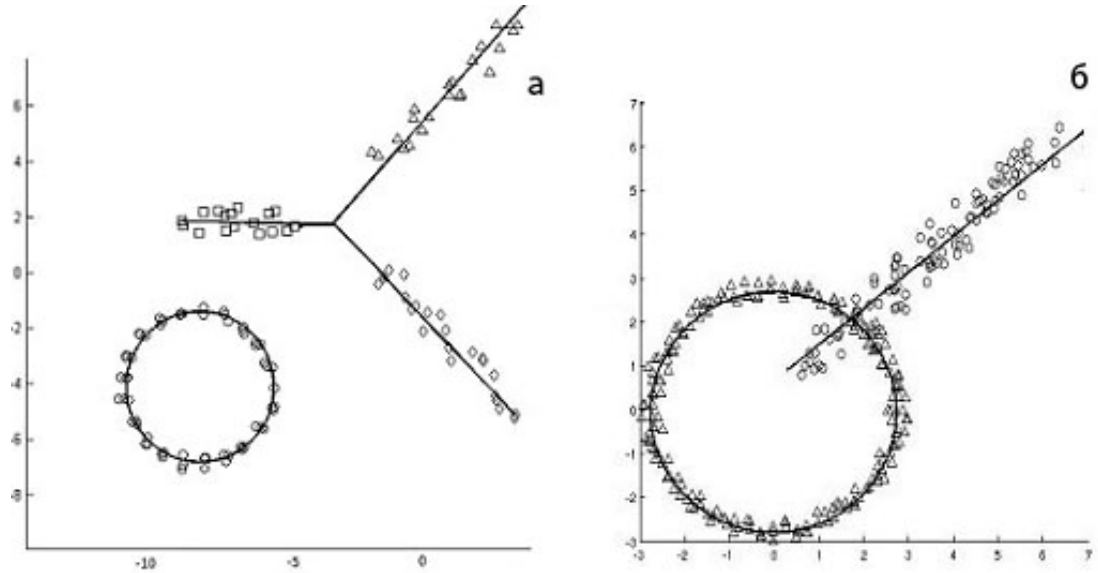


Рис. 3. Аппроксимация данных по алгоритму (5–6) с определением параметров линий и точки их пересечения (а); нечеткая аппроксимация данных окружностью и прямой (б)

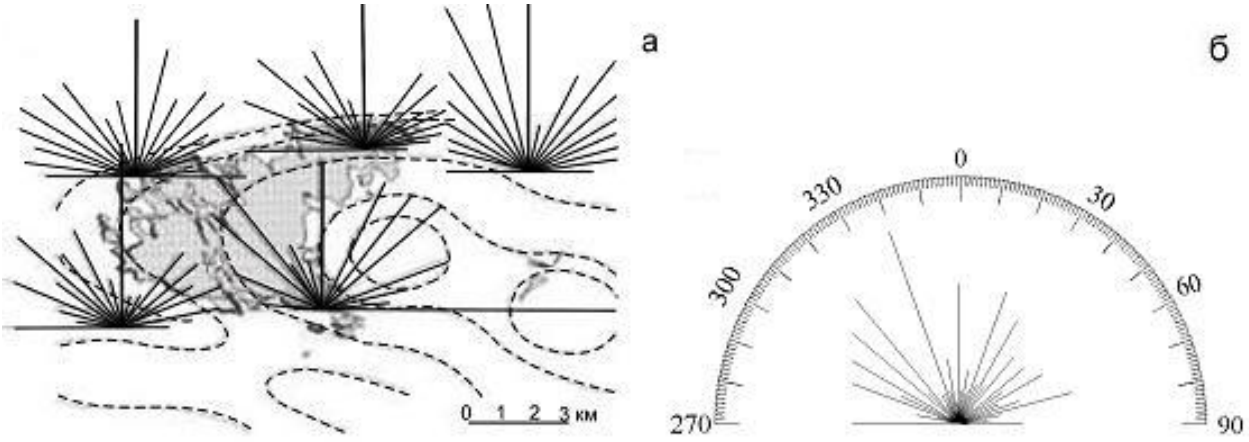


Рис. 4. Азимутальные гистограммы распределения трещин по разным участкам о. Валаам (а) и наложенной трещиноватости (б)

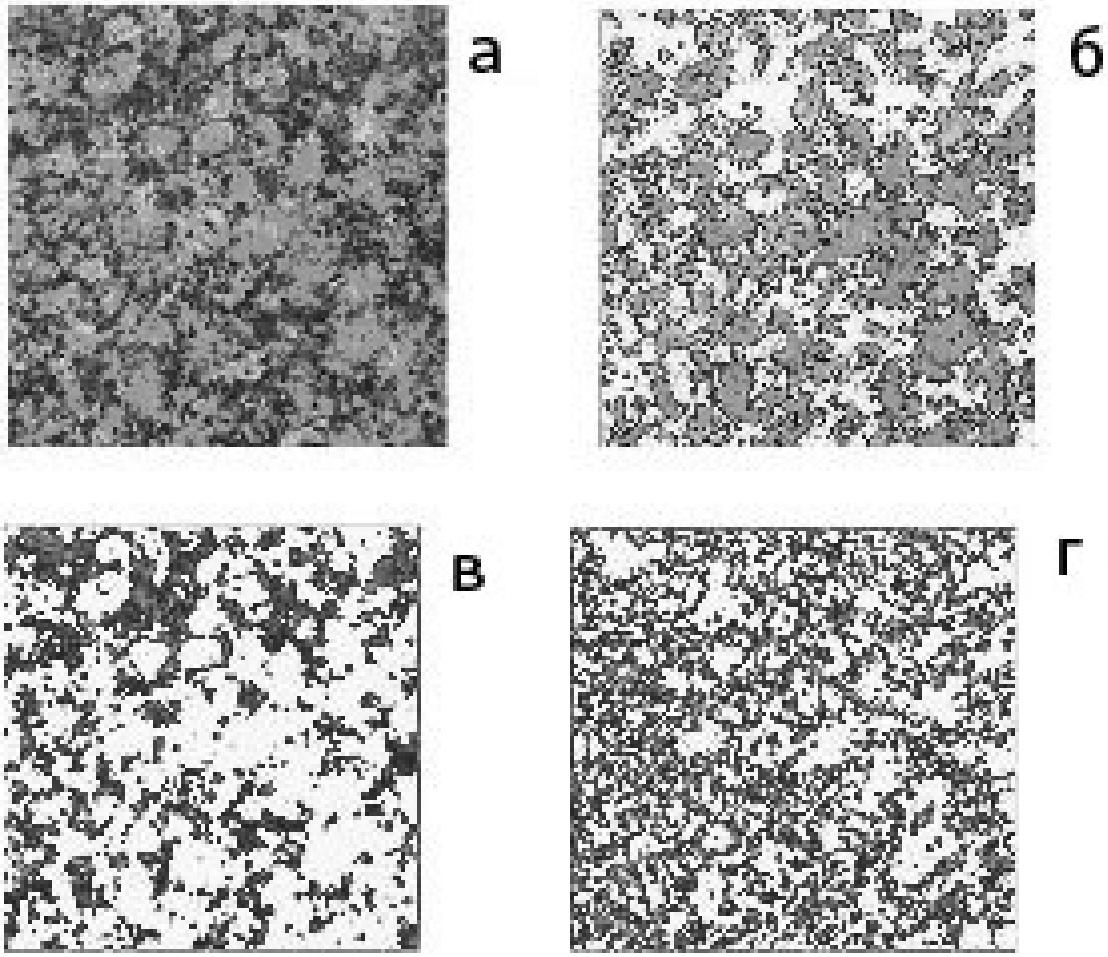


Рис. 5. Фото гранита рапакиви (а) и его выделенные в результате обработки кластеры: калишпат (б), кварц (в), олигоклаз (г)

В геохимии алгоритмы кластеризации помогают выявлять скрытые связи. Устраняя кажущуюся хаотичность геохимических данных, кластеризация способствует их упорядочению, выделению однородных совокупностей и аномальных значений, помогает пониманию механизмов процессов, эволюционных изменений, дает основу для выдвижения и обсуждения гипотез.

При обработке изображений часто пользуются процедурой сегментации. Разделение пикселей по цвету позволяет выделить цветовые компоненты изображения [24]. Подход может быть применен для количественной экспрессной оценки минерального состава горных пород, особенно полезной в полевых условиях. Рис. 5 в черно-белом виде содержит изображения гранита рапакиви (а), выделенные методом K-средних по цветовым координатам его компоненты, соответствующие калишпату (б), кварцу (в) и олигоклазу (г), кристаллизующемуся позднее и занимающему промежуточные области. Объемное содержание этих минералов в породе оценивали по площади их кластеров на изображении: 46, 26, 28 % соответственно.

В информационных технологиях кластеризация данных на основе глобальной оптимизации может быть полезна в системах безопасности, например, при обнаружении посторонних данных в сетевом трафике и других приложениях.

Заключение

Алгоритмы глобальной оптимизации дают решение, близкое к оптимальному реше-

нию, свободны от требований непрерывности и дифференцируемости функций, учитывают ограничения, накладываемые на переменные. Реализованные в системах компьютерной математики, они доступны широкому кругу пользователей, решают оптимизационные задачи кластеризации, связанные с определением положения, формы и границ кластеров. Их применение в физике высоких энергий, науках о Земле, обработке изображений, информационных технологиях повышает качество анализа данных.

Литература

1. *Jain A. K., Murty M. N., Flynn P. J.* Data Clustering: A Review (http://www.csee.umbe.edu/nicholas/clustering/ p264-jain.pdf)
2. *Kogan J., Nicholas C., Teboulle M.* Clustering Large and High Dimensional Data (http://www.csee.umbe.edu /nicholas/clustering/ tutorial.pdf)
3. *Ходасевич Г. Б.* Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Учебное пособие. СПб.: СПбГУТ, 2002. (http://dvo.sut.ru/libr/opds/ i130hod2/index.htm)
4. *Штовба С. Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. М.: Горячая линия. Телеком, 2007. С. 72–74.
5. *Гладков Л. А. и др.* Биоинспирированные методы в оптимизации. Монография. М.: Физматлит, 2009. 384 с.
6. *Global* Optimization Toolbox (http://matlab.ru/products/global-optimization-toolbox)
7. *Лекция:* Методы кластерного анализа. Иерархические методы: версия для печати и PDA. http://vudguit.no-ip.biz:3232/department/database/datamining/13/datamining_13.html
8. *Jolliffe I. T.* Principal Component Analysis, Series: Springer Series in Statistics. 2nd ed. Springer. NY. 2002. XXIX. 487 p.
9. *Хайкин С.* Нейронные сети. Полный курс. Изд-е 2. М.: Издательский дом «Вильямс», 2008. С. 573–621.
10. *Yager R., Filev D.* Essentials of Fuzzy Modeling and Control. USA: John Wiley & Sons, 1984. 387 p.
11. *Электронный* учебник MatLab www.MatLab.ru
12. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978. С. 109–112.
13. *Holland J.* Adaptation in natural and artificial systems. University of Michigan Press Ann Arbor. USA. 1975.
14. *Krishna K., Murty M. N.* Genetic K means algorithm // IEEE Transaction on System. Man and Cybernetics. 1999. Vol. 29, N 3. P. 433–439.
15. *Шаблоны* и теорема шаблонов (http://qai.narod.ru/GA/schema.html)
16. *Dorigo M., Gambardella L. M.* Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 1997. Vol. 1, N 1. P. 53–66.
17. *Parsopoulos K. E.* Recent Approaches to Global Optimization Problems Through Particle Swarm Optimization // Natural Computing. 2002. Vol. 1, N 2–3. P. 235–306.
18. *Джонс М. Т.* Программирование искусственного интеллекта в приложениях. М.: ДМК Пресс, 2004. С. 25–42.
19. *Bezdek J. C.* Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function. New York: Plenum Press, 1981.
20. *Физика* микромира. Маленькая энциклопедия / Под ред. Д. В. Ширкова. М.: Советская энциклопедия, 1980. 284 с.
21. *Денисов С. П.* Детекторы черенковского излучения // Природа. 2004. № 7. С. 22–29.
22. *Свириденко Л. П., Светов А. П.* Валаамский силл габбро-долеритов и геодинамика котловины Ладожского озера. Монография. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2008. 123 с.
23. *Аэрокосмические* методы геологических исследований / Под ред. А. В. Перцова. СПб.: Изд-во СПб картфабрики ВСЕГЕИ, 2000. 316 с.
24. *Ohlander R., Price K., Reddy D. R.* Picture Segmentation Using a Recursive Region Splitting Method // Computer Graphics and Image Processing. 1978. Vol. 8. P. 313–333.

Поступила в редакцию 30.06.2015

References

1. *Jain A. K., Murty M. N., Flynn P. J.* Data Clustering: A Review (http:// www.csee.umbe.edu/nicholas/clustering/p.264-jain.pdf)
2. *Kogan J., Nicholas C., Teboulle M.* Clustering Large and High Dimensional Data (http://www csee.umbe.edu/nicholas/clustering/tutorial.pdf)
3. *Hodasevich G. B.* Obrabotka jeksperimental'nyh dannyh na JeVM. Uchebnoe posobie. SPb, SPbGUT, 2002 (http://dvo.sut.ru/libr/opds/ i130hod2/index.htm)
4. *Shtovba S. D.* Proektirovanie nechetkih sistem sredstvami MATLAB. Moscow: Gorjachaja linija Telekom, 2007. P. 72–74.

5. *Gladkov L. A. i dr.* Bioinspirirovannye metody v optimizacii: monografija. Moscow: Fizmatlit, 2009. 384 p.
6. *Global* Optimization Toolbox (http://matlab.ru/products/global optimization-toolbox)
7. *Lekscija:* Metody klasternogo analiza. Ierarhicheskie metody: versija dlja pechati i PDA http://vudguit.no-ip.biz:3232/department/database/datamining/13/datamining 13.html
8. *Jolliffe I. T.* Principal Component Analysis, Series: Springer Series in Statistics, 2nd ed., Springer, NY, 2002. XXIX. 487 p.
9. *Hajkin S.* Nejronnye seti. Polnyj kurs. 2 izd. Moscow: Izdatel'skij dom «Vil'jams», 2008. P. 573–621.
10. *Yager R., Filev D.* Essentials of Fuzzy Modeling and Control. USA: John Wiley and Sons, 1984. 387 p.
11. *Tu Dzh., Gonsales R.* Principy raspoznavanija obrazov. Moscow: Mir, 1978. P. 109–112.
12. *Jelektronnyj* uchebnik MatLab // www.MatLab.ru
13. *Holland J.* Adaptation in natural and artificial systems. University of Michigan Press Ann Arbor, USA, 1975.
14. *Krishna K., Murty M. N.* Genetic K means algorithm. IEEE Transaction on System. Man and Cybernetics. 1999. Vol. 29, N 3. P. 433–439.
15. *Shablony* i teorema shablonov (http://qai.narod.ru/GA/schema.html)
16. *Dorigo M., Gambardella L. M.* Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1997. Vol. 1, N 1. P. 53–66.
17. *Parsopoulos K. E.* Recent Approaches to Global Optimization Problems Through Particle Swarm Optimization. Natural Computing. 2002. Vol. 1, N 2–3. P. 235–306.
18. *Dzhons M. T.* Programmirovanie iskusstvennogo intellekta v prilozhenijah. Moscow: DMK Press, 2004. P. 25–42.
19. *Bezdek J. C.* Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function. New York: Plenum Press, 1981.
20. *Fizika* mikromira. Malen'kaja jenciklopedija / Pod red. D. V. Shirkova. Moscow: Sovetskaya jenciklopedija, 1980. 284 p.
21. *Denisov S. P.* Detektory cherenkovskogo izluchenija. Priroda. 2004. N 7. P. 22–29.
22. *Sviridenko L. P., Svetov A. P.* Valaamskij sill gabbro-doleritov i geodinamika kotloviny Ladozhskogo ozera. Monografija. Petrozavodsk: KarNC RAN, 2008. 123 p.
23. *Ajerokosmicheskie* metody geologicheskih issledovanij / Pod red. A. V. Percova. SPb: Izd-vo SPb kartfabriki VSEGEI, 2000. 316 p.
24. *Ohlander R., Price K., Reddy D. R.* Picture Segmentation Using a Recursive Region Splitting Method. Computer Graphics and Image Processing. 1978. Vol. 8. P. 313–333.

Received June 30, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Белашев Борис Залманович
ведущий научный сотрудник, д. т. н.
Институт геологии Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
профессор кафедры информационно-измерительных систем и физической электроники
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: belashev@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 782753

Долгий Константин Анатольевич
аспирант кафедры информационно-измерительных систем и физической электроники
физико-технического факультета Петрозаводского государственного университета
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: dolkons@gmail.com
тел.: (8142) 719675

CONTRIBUTORS:

Belashev, Boris
Institute of Geology, Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
Petrozavodsk State University
33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: belashev@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 719675

Dolgy, Konstantin
graduate student of information-measuring systems and physical electronics of physical and technical department of Petrozavodsk State University
33 Lenina St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: dolkons@gmail.com
tel.: (8142) 719675

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 24–27
DOI: 10.17076/mat137

УДК 338.45:621.31(470.22)

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ МАКСИМАЛЬНОГО УВЕЛИЧЕНИЯ РЕСУРСА ИЗОЛЯЦИИ СИЛОВЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Г. А. Борисов, Т. П. Тихомирова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

В статье обосновывается зависимость срока службы изоляции трансформаторов от их нагрузки. На ее основе сформулирована задача для максимального увеличения суммы сроков службы изоляции параллельно работающих трансформаторов и, как частный случай, для одного трансформатора. Доказано, что максимум достигается полной стабилизацией нагрузки во времени.

Ключевые слова: срок службы изоляции, стабилизация нагрузки, коэффициент нагрузки.

G. A. Borisov, T. P. Tikhomirova. TASKS AND METHODS FOR MAXIMIZING THE INSULATION RESOURCE OF POWER TRANSFORMERS

The dependence of transformer service life on the load has been substantiated. Relying thereon, the problem for maximizing the sum of service lives of insulation on transformers in parallel operation and, as a specific case, on a single transformer, has been formulated. It is proved that a maximum will be achieved if the load is completely stabilized over time.

Key words: insulation service life, load stabilization, load factor.

Ввиду многолетнего дефицита инвестиций преобладающая часть электрооборудования, в том числе и силовые трансформаторы, находится в эксплуатации длительное время и приблизилась к исчерпанию или исчерпала назначенный ресурс. Так, например, при полном сроке службы силовых трансформаторов, в соответствии с ГОСТом равным 30 годам [1], силовые трансформаторы напряжением 110–330 кВ, работающие в Карелии на подстанциях, принадлежащих Федеральной сетевой компании, находятся в эксплуатации от 7 (Лоухи, Ляскеля) до 49 лет (ПС Древлянка), а в среднем 30,4 года. В результате увеличиваются частота и объем их ремонтного обслуживания, увеличиваются издержки эксплуатации, вероятность отказа и перерыва в электроснабжении потребителей.

У силовых трансформаторов явления, связанные с проблемой их старения, привели в последнее десятилетие к увеличению доли повреждений из-за износа бумажной изоляции. Так, например, у блочных трансформаторов мощностью 63 МВА и более напряжением 110–500 кВ, работающих на электрических станциях с высокими коэффициентами нагрузки, после наработки назначенного ресурса, 45 % общего числа повреждений сопровождается внутренними короткими замыканиями, связанными с возникновением витковых замыканий при

износе изоляции [4]. Следовательно, для длительно работающих трансформаторов обостряется необходимость найти щадящие режимы при их дальнейшей эксплуатации, максимально продлевающие наработку оставшегося ресурса (срока службы) их изоляции.

Эффект старения используется для описания первичных изменений изоляции, например, химического состава вследствие реакции старения или диффузии. Эти изменения происходят под воздействием термического фактора [2] и влияют на ее срок службы [3], количественно определяемый законом Аррениуса.

Для силовых трансформаторов с бумажной изоляцией класса А ее нагревостойкости срок службы изоляции конкретно определяется зависимостью [3]

$$T = 1,5 \cdot 10^4 \exp\left[-0,088(\nu_{\text{ос}} + \Delta\nu_n)\right], \quad (1)$$

где $\nu_{\text{ос}}$ – температура окружающей среды, °С; $\Delta\nu_n$ – превышение температуры изоляции над температурой окружающей среды, °С.

В соответствии с формулой (1) у изоляции обмоток выбирается предельно допустимая температура нагрева в зависимости от принимаемого срока ее службы и класса по нагревостойкости, так называемая максимальная номинальная рабочая температура. Получаемые при максимальной номинальной рабочей температуре мощность и ток принимаются за номинальные. Вследствие этого в установившемся режиме работы с постоянным значением максимальной номинальной рабочей температуры $\nu_{\text{ос}} + \Delta\nu_n^{max}$ все тепло изолированного проводника, образующееся в нем потерями мощности $\Delta P_{\text{н}}$ при номинальном значении нагрузки $P_{\text{н}}$, рассеивается в окружающую среду и соблюдается простейший баланс [5]

$$\Delta P_{\text{н}} = R \cdot \Delta\nu_n^{max}, \quad (2)$$

где R – коэффициент теплоотдачи с поверхности изоляции, Вт/°С; ν_n^{max} – предельно допустимое превышение температуры обмотки над температурой окружающей среды $\nu_{\text{ос}}$, °С.

Исходя из условия (2) определяется численное значение коэффициента теплоотдачи

$$R = \frac{\Delta P_{\text{н}}}{\Delta\nu_n^{max}}. \quad (3)$$

Ввиду постоянства коэффициента теплоотдачи появляется возможность определять текущее значение температуры перегрева изоляции при любом установившемся значении потерь мощности ΔP:

$$\Delta\nu_n = \frac{\Delta P}{R} = \frac{\Delta P \cdot \Delta\nu_n^{max}}{\Delta P_{\text{н}}}. \quad (4)$$

В свою очередь, потери мощности имеют две составляющие – постоянную (холостого хода) $\Delta P_{\text{хх}}$ и переменную (нагрузочную), поэтому

$$\Delta P = \Delta P_{\text{хх}} + \Delta P_{\text{нн}} \cdot k_{\text{нг}}^2 = \Delta P_{\text{хх}} + \Delta P_{\text{нн}} \cdot \frac{P^2}{P_{\text{н}}^2}, \quad (5)$$

где $\Delta P_{\text{нн}}$ – нагрузочные потери при номинальной мощности; $k_{\text{нг}}$ – коэффициент нагрузки. Тогда температура нагрева обмотки и изоляции в формуле (1) при любом значении нагрузки будет определяться тремя составляющими:

$$\nu_{\text{ос}} + \Delta\nu_n^{max} = \nu_{\text{ос}} + \frac{\Delta P_{\text{хх}}}{R} + \frac{\Delta P_{\text{нн}}}{R} \cdot \frac{P^2}{P_{\text{н}}^2}, \quad (6)$$

т. е. суммой температур окружающей среды, перегрева при работе в длительном режиме холостого хода, перегрева от нагрузочных потерь, пропорциональных квадрату коэффициента нагрузки $k_{\text{нг}} = P/P_{\text{н}}$.

В итоге формула (1) при подстановке в нее (6) принимает вид

$$T = 1,5 \cdot 10^4 \exp\left[-0,088 \cdot \left(\nu_{\text{ос}} + \frac{\Delta\nu_n^{max}}{\Delta P_{\text{н}}} \cdot \Delta P_{\text{хх}} + \frac{\Delta\nu_n^{max}}{\Delta P_{\text{н}}} \cdot \Delta P_{\text{нн}} \cdot \frac{P^2}{P_{\text{н}}^2}\right)\right]. \quad (7)$$

Такой вид зависимости срока службы изоляции в годах от текущей нагрузки дает возможность сформулировать задачи управления режимом нагрузки в целях определения максимального срока службы изоляции у параллельно работающих трансформаторов.

Примем, что m трансформаторов параллельно работают на общую полную мощность S_c, которая изменяется через каждый j-й одинаковый интервал времени Δt по графику $S_c = \{S_{c1}, \ldots, S_{cj}, \ldots, S_{cn}\}$, в течение которого выполняется условие баланса мощностей

$$S_{cj} = \sum\nolimits_{i=1}^{m} S_{ij}. \quad (8)$$

За рассматриваемое время $n \cdot \Delta t$ на выходе трансформаторов получается полная энергия

$$W_c = \Delta t \sum\nolimits_{j=1}^{n} S_{cj} = \Delta t \sum\nolimits_{i=1}^{m} \sum\nolimits_{j=1}^{n} S_{ij}. \quad (9)$$

У каждого трансформатора срок службы изоляции изменяется от текущего значения нагрузки S_{ij} в каждый j-й интервал времени по формуле (7). Требуется найти $n \cdot m$ значений нагрузок трансформатров S_{ij}, которые дают максимум суммы сроков службы их изоляции при заданном условии (9) количества энергии

$$T_c = \max \sum\nolimits_{i=1}^{m} \sum\nolimits_{j=1}^{n} T_{\text{из } i}(S_{ij}). \quad (10)$$

Решение этой задачи можно получить методом неопределенных множителей Лагранжа [6], сводящим условия задачи (7), (8), (9) к системе нелинейных уравнений, каждое из которых является первой производной целевой функции (10) по всем переменным S_{ij}, т. е.

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_1(S_{11})}{\partial S_1} = \ldots = \frac{\partial T_i(S_{i1})}{\partial S_i} = \ldots = \frac{\partial T_m(S_{m1})}{\partial S_m} = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = \frac{\partial T_1(S_{1j})}{\partial S_1} = \ldots = \frac{\partial T_i(S_{ij})}{\partial S_i} = \ldots = \frac{\partial T_m(S_{mj})}{\partial S_m} = \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = \frac{\partial T_1(S_{1n})}{\partial S_1} = \ldots = \frac{\partial T_i(S_{in})}{\partial S_i} = \ldots = \frac{\partial T_m(S_{mn})}{\partial S_m}.\end{gathered} \tag{11}$$

Вследствие равенств по условию (11) и одинаковости производных функций (10) $T_i = F(S_{ij})$ у одного и того же i-го агрегата вытекает, что

$$S_{i1} = \ldots = S_{ij} = \ldots = S_{in} = S_i, \tag{12}$$

т. е. у каждого агрегата в любой интервал времени мощность неизменна, или, иными словами, стабилизирована на время $T = n \cdot \Delta t$.

Вследствие этого система уравнений (11) упростится до

$$\frac{\partial T_1(S_1)}{\partial S_1} = \ldots = \frac{\partial T_i(S_i)}{\partial S_i} = \ldots = \frac{\partial T_m(S_m)}{\partial S_m}, \tag{13}$$

а условие (8) до

$$S_{cj} = \frac{W_c}{\Delta t \cdot n} = S_{c\,\text{ср}} = \text{const}. \tag{14}$$

В итоге можно заключить, что для максимального увеличения суммарного срока службы изоляции при заданной величине трансформируемой энергии в заданный промежуток времени $T = n \cdot \Delta t$ у параллельно работающих трансформаторов требуется стабилизация общей мощности (14) и каждого агрегата при распределении общей мощности системы между агрегатами по условию (13).

Отсюда получаются частные задачи.

1. Когда стабилизация общей нагрузки у потребителей невозможна, тогда в каждый j-й интервал времени общая нагрузка S_{cj} распределяется между m трансформаторами по условиям

$$S_{1j} + \ldots + S_{ij} + \ldots + S_{mj} = S_{cj}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial T_1(S_{1j})}{\partial S_1} = \ldots = \frac{\partial T_i(S_{ij})}{\partial S_i} = \ldots = \frac{\partial T_m(S_{mj})}{\partial S_m}. \tag{16}$$

2. При одном трансформаторе, работающем на заданную нагрузку, максимальный срок службы его изоляции достигается, когда нагрузка стабилизирована во времени.

3. При параллельной работе трансформаторов с одинаковыми количественными характеристиками (класс изоляции по нагревостойкости, мощности, потерям холостого хода и короткого замыкания) суммарный максимальный срок службы их изоляции достигается при равенстве нагрузок трансформаторов и их стабилизации во времени.

Выводы

1. В условиях, когда значительная часть трансформаторного парка приблизилась к исчерпанию или исчерпала срок службы (назначенный ресурс) изоляции, основной задачей дальнейшей эксплуатации становится максимальное продление срока ее службы.

2. Температура перегрева изоляции обмоток трансформаторов и соответствующий ей срок службы зависят от квадрата коэффициента нагрузки.

3. Максимум суммарного срока службы изоляции параллельно работающих силовых трансформаторов достигается при стабилизации их общей нагрузки и ее распределении между ними пропорционально первым производным их зависимостей срока службы изоляции от их нагрузки.

Литература

1. *ГОСТ* 11677-85 Трансформаторы силовые. Общие технические условия.

2. *ГОСТ* 27905.1-2009 (МЭК 505-75) Системы электрической изоляции электрооборудования.

3. *Костенко М. П., Пиотровский Л. М.* Электрические машины. Часть 2. ГЭИ. М.; Л., 1958. 651 с.

4. *Львов М. Ю.* Анализ повреждаемости силовых трансформаторов напряжением 110 кВ и выше // Электричество. 2010. № 2. С. 27–31.

5. *Проектирование* электрических машин. Учебник для вузов / Под ред. И. П. Копылова. М.: Высшая школа, 2002. 757 с.

6. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Т. 1. СПб.: Лань, 1999. 448 с.

Поступила в редакцию 02.04.2015

References

1. *GOST* 11677-85 Transformatory silovye. Obshhie tehnicheskie uslovija [GOST 11677-85 Power transformers. General specification].

2. *GOST* 27905.1-2009 (MJeK 505-75) Sistemy jelektricheskoj izoljacii jelektrooborudovanija [GOST 27905.1-2009 (MEK 505-75) Electrical insulation systems of electrical equipment].

3. *Kostenko M. P., Piotrovskij L. M.* Jelektricheskie mashiny. Chast' 2 [Electrical machines. Part 2]. Moscow; Leningrad: GJeI, 1958. 651 p.

4. *L'vov M. Ju.* Analiz povrezhdaemosti silovyh transformatorov naprjazheniem 110 kV i vyshe [An analysis of the damage susceptibility of 110 kV and higher power transformers]. Jelektrichestvo [Electricity]. 2010. N 2. P. 27–31.

5. *Proektirovanie* jelektricheskih mashin. Uchebnik dlja vuzov [Design of electric machines: university textbook]. Ed. I. P. Kopylov. Moscow: Vysshaja shkola, 2002. 757 p.

6. *Fihtengol'c G. M.* Osnovy matematicheskogo analiza [The fundamentals of mathematical analysis]. SPb: Lan', 1999. Vol. 1. 448 p.

Received April 02, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Борисов Георгий Александрович
старший научный сотрудник, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: borisov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Тихомирова Тамара Петровна
ученый секретарь, к. т. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: tihomiro@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 785520

CONTRIBUTORS:

Borisov, George
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: borisov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Tikhomirova, Tamara
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: tihomiro@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 785520

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 28–33
DOI: 10.17076/mat145

УДК 519.8

СИТУАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ В ИГРЕ ПАТРУЛИРОВАНИЯ С КАМЕРОЙ СЛЕЖЕНИЯ

В. В. Гусев

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

С помощью методов теории игр получены ситуации равновесия в задаче патрулирования на графе. В статье найдено решение игры для графа, который является моделью потока информации от источника к приемнику данных. Сделано предположение, что в каждой вершине графа установлена камера слежения. При таком предположении найдено равновесие в игре для неориентированного связного и ориентированного деревьев.

Ключевые слова: антагонистическая игра, патрулирующий, атакующий, граф, равновесие, стратегия, камера слежения.

V. V. Gusev. AN EQUILIBRIUM SITUATION IN A PATROLLING GAME WITH A TRACKING CAMERA

Equilibrium situations in a problem of patrolling on a graph were obtained using game theory methods. The solution of the game was found for a graph modeling the flux of information from data source to sink. It is assumed that there is a tracking camera in each graph vertex. Under this assumption, equilibrium was found in the game for an undirected connected tree and a directed tree.

Key words: antagonistic game, patrolling, attacking, graph, equilibrium, strategy, tracking camera.

Введение

В данной статье рассматривается антагонистическая игра патрулирования с двумя игроками. Первый игрок – это патрулирующий, второй – атакующий. Цель патрулирующего – поймать атакующего. Игра проходит на некоторой местности, моделью которой является граф. В зависимости от разных видов графов в статье найдены ситуации равновесия. В некоторых случаях предполагается, что в каждой вершине установлена камера слежения, т. е. как только атакующий появится на местности, об этом сразу же узнает патрулирующий и направляется к месту атаки. В настоящей работе проводится сравнение выигрыша патрулирующего в игре без установленных камер слежения с выигрышем патрулирующего в игре, когда камеры установлены. Об играх патрулирования можно ознакомиться в [3, 4].

Постановка задачи

Рассмотрим игру патрулирования $G = < P, A; Q; S_1, S_2; H >$, в которой P – патрулирующий; A – атакующий; $Q = < V, E >$ – неориентированный граф, где V – множество вершин, E – множество ребер, $n = |V|$ – количество вершин в графе. Q может быть как ориентированным, так и нет. Вершины графа Q будем обозначать $v_j, j = 1, ..., n$, запись

$v_j = 0$ означает, что v_j не является вершиной. Две разные вершины графа могут соединяться только одним ребром, может существовать ребро вида (v_k, v_k). Заметим, что граф Q может быть несвязным. В примерах вершины графа обозначаются натуральными числами.

Множество стратегий патрулирующего S_1 представляет пути патрулирования $u = v_{k_1} - v_{k_2} - ... - v_{k_T}$, где $\forall j = 1, ..., T : v_{k_j} \in V, 1 \leqslant k_j \leqslant n, T \geqslant 1; \forall t = 1, ..., T-1 : (v_{k_t}, v_{k_{t+1}}) \in E$. Элементы множества S_2 стратегии атакующего, которые будем называть атаками, представим в виде $\underbrace{0 - ... - 0}_{t} - \underbrace{v - ... - v}_{m} - 0 - ... - 0$ $t = 0, ..., T - m$, или более кратко $w = (t, v)$, где t – момент посещения вершины v.

Функцией выигрыша $H(u, w), u \in S_1, w \in S_2$ является вероятность поимки атакующего игрока патрулирующим игроком:

$$H(u, w) = \begin{cases} 0, \forall j = 1, ..., m : v_{k_{t+j}} \neq v; \\ 1, \exists j = 1, ..., m : v_{k_{t+j}} = v. \end{cases}$$

Если $H(u, w) = 1$, то будем говорить, что путь u ловит атаку w.

Игру $G = < P, A; Q; S_1, S_2; H >$ для краткости запишем как $G\,(Q, T, m)$, где m – время, которое необходимо атакующему для проведения атаки; T – длина пути ($m \leqslant T$). Нас будут интересовать в данной игре ситуация равновесия и значение игры.

Значение игры $G(Q, T, m)$ при $Q = B_n$

Пусть B_n – ориентированный граф из n вершин, в котором каждая вершина является либо начальной вершиной, либо конечной. Обозначим за N – множество начальных вершин, за K – множество конечных вершин. $|N|, |K|$ – количество начальных и конечных вершин соответственно. Например, два графа B_{15} изображены на рис. 1.

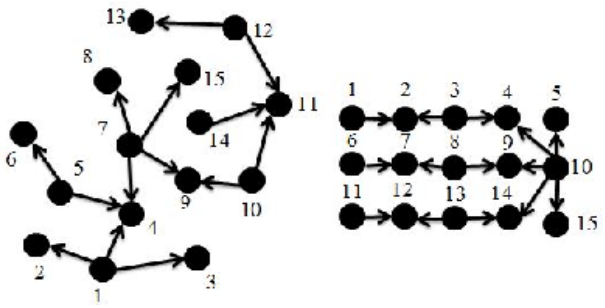


Рис. 1. Графы B_{15}

Рассматриваемый граф B_n является моделью перехода информации от некоторого источника к некоторому приемнику данных.

Теорема 1. *Значение игры $G(B_n, T, m)$ равно*

$$H = \begin{cases} \frac{1}{n}, T \geqslant 2m - 1; \\ \frac{1}{r}, T < 2m - 1, \end{cases}$$

где r – минимальное число подграфов из двух вершин, на которые можно разбить граф B_n.

Доказательство. Предположим, что $T \geqslant 2m - 1$. Пусть x – смешанная стратегия патрулирующего, при которой игрок равновероятно выбирает пути из множества $\overline{S_1} = \{\underbrace{v_n - ... - v_n}_{T-m+1} - \underbrace{v_l - ... - v_l}_{m-1}, \underbrace{v_p - ... - v_p}_{m-1} - \underbrace{v_k - ... - v_k}_{T-m+1} | n = 1, ..., |N|,\ k = 1, ..., |K|\ v_n \in N,\ v_k \in K\ v_l, v_p \in V,\ (v_n, v_l), (v_p, v_k) \in E\}$, y – смешанная стратегия атакующего, при которой игрок равновероятно выбирает атаки из множества $\overline{S_2} = \{0 - ... - 0 - v_n - ... - v_n, v_k - ... - v_k - 0 - ... - 0 | n = 1, ..., |N|,\ k = 1, ..., |K|, v_n \in N, v_k \in K\}$. Докажем, что стратегии x, y – ситуация равновесия. Для того чтобы x, y являлись ситуацией равновесия, достаточно доказать, что для любых чистых стратегий $u \in S_1, w \in S_2$ выполняются неравенства $H(u, y) \leqslant H(x, y) \leqslant H(x, w)$ [1], $H(x, y) = \frac{1}{n}$. Докажем первое неравенство $H(u, y) \leqslant H(x, y) \forall u \in S_1$ методом от противного. Предположим, что существует такой путь u', для которого выполняется $H(u', y) > H(x, y)$. Тогда путь u' должен поймать не менее двух атак из множества $\overline{S_2}$. Так как атаки на конечные вершины начинаются в первый момент времени, а атаки на начальные вершины заканчиваются в момент времени T, то путь u' может поймать не менее одной атаки только тогда, когда $T < 2m - 1$. Но, по предположению, $T \geqslant 2m - 1$. Получаем противоречие, следовательно $H(u, y) \leqslant H(x, y) \forall u \in S_1$. Докажем второе неравенство $H(x, y) \leqslant H(x, w)$. Предположим, что существует такая атака $w' \in S_2$, что $H(x, y) > H(x, w')$. Так как платежная матрица для путей и атак из множеств $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ – единичная, то w' – это такая атака из S_2, которая не ловится ни разу путями из $\overline{S_1}$. Но пути из $\overline{S_1}$ подобраны так, что любая атака из S_2 ловится хотя бы одним путем из $\overline{S_1}$. Получаем противоречие, следовательно $H(x, y) \leqslant H(x, w)$. Значит x, y – ситуация равновесия.

Пусть $T < 2m - 1$. Разобьем граф B_n на орграфы $B_2^1, B_2^2, ..., B_2^l$ (орграфы из двух вершин) так, чтобы $B_n = \min\limits_{l} \bigcup_{k=1}^{l} B_2^k$. Если одна и та же вершина принадлежит двум разным графам B_2^i и B_2^j, то объединение происходит путем наложения одинаковых вершин. Если между двумя разными вершинами графов B_2^i

и B_2^j существует ребро, то объединение графов происходит за счет этого ребра. Предположим, что граф B_n разбит на r орграфов. Пусть y – смешанная стратегия атакующего, при которой игрок равновероятно выбирает атаки из множества $\overline{S_2} = \{0 - ... - 0 - v_i - ... - v_i\}$. Опишем, какие вершины выбирает атакующий для атаки (т. е. v_i): если существуют два графа B_2^i и B_2^j, которые имеют общую вершину, то v_i – это такая вершина, которая принадлежит только одному из графов B_2^i и B_2^j; если при разбиении существует такой граф B_2^i, который не имеет общих вершин с другими графами, то v_i – это крайняя вершина графа B_2. Обозначим множество вершин, на которые нападает атакующий, буквой L. Пусть x – смешанная стратегия патрулирующего, при которой игрок выбирает пути из множества $\overline{S_1} = \{\underbrace{v_n - ... - v_n}_{m-1} - v_i - ... - v_i, v_j - ... - v_j - \underbrace{v_k - ... - v_k}_{m-1} | v_n, v_k \in L, v_n \in N, v_k \in K, v_i, v_j \in V, (v_n, v_i), (v_j, v_k) \in E\}$. Докажем, что стратегии x, y являются ситуацией равновесия. Для того чтобы x, y являлись ситуацией равновесия, достаточно доказать, что для любых чистых стратегий $u \in S_1, w \in S_2$ выполняются неравенства $H(u, y) \leqslant H(x, y) \leqslant H(x, w)$. Число путей и атак в множествах $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ равно r, и любой путь из $\overline{S_1}$ ловит только одну атаку из $\overline{S_2}$, так же, как любая атака из $\overline{S_2}$ ловится только одним путем из $\overline{S_1}$. Значит, $H(x, y) = \frac{1}{r}$. Путь $u \in S_1$ не может поймать более двух атак из $\overline{S_2}$, так же, как и атака $w \in S_2$ ловится хотя бы одним из путей множества $\overline{S_1}$. Поэтому x, y – ситуация равновесия. □

Пример 1. Рассмотрим игру $G(B_{15}, 7, 3)$, где B_{15} изображен на рис. 1 слева. Составим платежную матрицу для путей и атак из множеств $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ (табл. 1).

Таблица 1. Платежная матрица для путей и атак из множеств $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ в игре $G(B_{15}, 7, 3)$

	0-0-0-0-1-1-1	2-2-2-0-0-0-0	3-3-3-0-0-0-0	4-4-4-0-0-0-0	0-0-0-0-5-5-5	6-6-6-0-0-0-0	0-0-0-0-7-7-7	8-8-8-0-0-0-0	9-9-9-0-0-0-0	0-0-0-0-10-10-10	11-11-11-0-0-0-0	0-0-0-0-12-12-12	13-13-13-0-0-0-0	0-0-0-0-14-14-14	15-15-15-0-0-0-0
$1-1-1-1-1-4-4$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-1-2-2-2-2-2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-1-3-3-3-3-3$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$7-7-4-4-4-4-4$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$5-5-5-5-5-6-6$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$5-5-6-6-6-6-6$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$7-7-7-7-7-15-15$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$7-7-8-8-8-8-8$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$10-10-9-9-9-9-9$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$10-10-10-10-10-11-11$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$14-14-11-11-11-11-11$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$12-12-12-12-12-13-13$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$12-12-13-13-13-13-13$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$14-14-14-14-14-11-11$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$7-7-15-15-15-15-15$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Игроки выбирают пути и атаки с вероятностью $\frac{1}{n} = \frac{1}{15}$, значение игры $H = \frac{1}{n} = \frac{1}{15}$.

Пример 2. Рассмотрим игру $G(B_{15}, 5, 4)$, где B_{15} изображен на рис. 1 слева. Так как $T < 2m - 1$, то нужно разбить B_{15} на орграфы B_2 (рис. 2). Составим платежную матрицу для путей и атак из множеств $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ (табл. 2).

Таблица 2. Платежная матрица для путей и атак из множеств $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ в игре $G(B_{15}, 7, 3)$

	0-2-2-2-2	0-3-3-3-3	0-4-4-4-4	0-6-6-6-6	0-8-8-8-8	0-10-10-10-10	0-13-13-13-13	0-14-14-14-14	0-15-15-15-15
$1-1-2-2-2$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-1-3-3-3$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$7-7-7-4-4$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$5-5-6-6-6$	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$7-7-8-8-8$	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$10-10-10-9-9$	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$12-12-13-13-13$	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$14-14-14-11-11$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$7-7-15-15-15$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

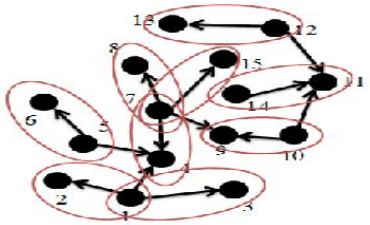


Рис. 2. Разбиение графа L_{15}

Игроки выбирают пути и атаки с вероятностью $\frac{1}{r} = \frac{1}{9}$, значение игры $H = \frac{1}{r} = \frac{1}{9}$.

Игра патрулирования с камерой слежения

Введем обозначения: $u(x, y)$ – путь в графе, который начинается в вершине $x \in V$ и заканчивается в вершине $y \in V$, причем каждая вершина в пути встречается только один раз; $\lambda(u(x, y))$ – число вершин в пути $u(x, y)$, считая x и y; $d = \max\limits_{x,y \in V} \lambda(u(x, y))$ – диаметр, максимальное количество вершин, которое может находиться между двумя произвольными вершинами $x, y \in V$. Центром графа Q назовем такую вершину $v_c \in V : \forall v \in V |\lambda(u(v_c, v))| \leqslant [\frac{d}{2}] + 1$.

Определение 1. Пусть атакующий выбирает атаку (t, v). Тогда динамический путь $v_{k_1} - v_{k_2} - ... - v_{k_T}$ – это путь, у которого $v_{k_1} = v_{k_2} = ... = v_{k_{t-1}} = v_1$, где v_1 – начало пути патрулирующего, а $v_{k_t} - v_{k_{t+1}} - ... - v_{k_T}$ – кратчайший путь патрулирующего из вершины v_1 до v. Если патрулирующий пришел в вершину v в момент времени $l < T$, то $v_{k_l} = v_{k_{l+1}} = ... = v_{k_T} = v$.

Разобьем граф Q на графы $Q_1, Q_2, ...Q_r$, $r \geqslant 1$ так, чтобы выполнялись два условия:

(i). $d_i \leqslant 2m + 1$ в $Q_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, где d_i – диаметр графа Q_i;

(ii). Разбиваем граф Q так, чтобы для любого другого разбиения $Q'_1, Q'_2, ...Q'_l$ выполнялось $r \leqslant l$.

Теорема 2. *Пусть в каждой вершине графа Q (связный неориентированный граф) установлена камера слежения. Тогда значение игры $G(Q, T, m)$ равно $\frac{1}{r}$.*

Доказательство. Разбиваем граф Q на r графов так, чтобы выполнялись условия (i) и (ii). Пусть x – смешанная стратегия патрулирующего, при которой игрок выбирает динамический путь, который равновероятно начинается в вершине из множества $M = \{v_c^1, v_c^2, ..., v_c^r\}$, где v_c^i – центр графа Q_i, y – смешанная стратегия атакующего, при которой игрок равновероятно выбирает атаки на вершины из множества M в первый момент времени. Докажем, что x, y – ситуация равновесия. Для того чтобы смешанные стратегии x, y являлись ситуацией равновесия, достаточно доказать, что для любых чистых стратегий $u \in S_1, w \in S_2$ выполнялись неравенства $H(u, y) \leqslant H(x, y) \leqslant H(x, w)$. Докажем, что выполняется $H(u, y) \leqslant H(x, y)$. Предположим, что $\exists u \in S_1 : H(u, y) > H(x, y)$. Тогда путь u должен ловить как минимум две атаки на центры графов $Q_1, Q_2, ..., Q_r$. Но это невозможно, потому что из-за условий 1. и 2. расстояние между центрами превышает значение m и патрулирующему не хватает времени, чтобы поймать хотя бы две атаки, следовательно, первое неравенство выполняется. Докажем второе неравенство $\leqslant H(x, y) \leqslant H(x, w)$. Предположим, что $\exists w \in S_2 : H(x, w) < H(x, y)$. Но тогда атака w не ловится ни одним путем из S_1, что

невозможно. Значит, x, y – ситуация равновесия. □

В [4] найдено значение игры патрулирования на линейном графе – $\frac{m}{2(n-1)}$ при больших T, для цикла – $\frac{m}{n}$, для звезды – $\frac{m}{2(n-1)}$. Если предположить, что в каждой вершине графа установлена камера слежения, то значение игры на линейном графе будет составлять $\frac{1}{[\frac{n}{2m+1}]+I}$, где $I = 1$, если дробная часть частно $\frac{n}{2m+1}$ не равна 0, и $I = 0$ иначе. Для звезды значение игры равно 1.

Пример 3. Рассмотрим игру $G(Q, T, m)$. Пусть Q изображен на рис. 3, а $m = 3$, T – любое (только $T \geqslant m$). Разбиваем граф таким образом, чтобы выполнялись условия (i) и (ii). Патрулирующий равновероятно выбирает начало движения среди вершин v_1, v_2, v_3, а атакующий в любой момнт времени нападает на эти же вершины. Как только происходит атака атакующего, патрулирующий направляется к месту атаки. Значение игры равно $H = \frac{1}{3}$.

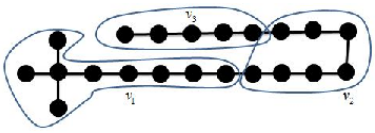


Рис. 3. Граф Q

Значение игры $G(Q, T, m)$ для ориентированного дерева

Пусть Q – ориентированное дерево, причем всегда существует путь из корня дерева до любой вершины графа.

Определение 2. Концевой узел – вершина в графе Q, в которую идет только одна дуга и не исходит ни одной дуги [2].

Определение 3. Уровень вершины v – число вершин в пути $u(v_{kor}, v)$, где v_{kor} – корневая вершина Q [2].

Разобьем граф Q на графы следующим образом:

Шаг 1. Находим в графе концевой узел, который имеет наибольший уровень в графе Q. Обозначим эту вершину v^a, а уровень вершины v_a как U^a.

Шаг 2. Для вершины v^a определяем местоположение вершины v^b, такое, что путь $u(v^b, v^a)$ существует, и уровень вершины v^b равен $U^a - m$ (если $U^a - m < 0$, то v^b – корень дерева Q).

Шаг 3. Удаляем из графа Q ориентированный граф с корневой вершиной v^b. Удаленный граф является одним из графов, на которые разбивается граф Q.

Шаг 4. Продолжаем выполнять операции 1–3 до тех пор, пока вершина v^b не совпадет с корнем дерева графа Q.

Теорема 3. *Значение игры $G(Q, T, m)$ равно $\frac{1}{r}$*

Доказательство. Выполняя шаги 1–4, разбиваем граф Q. Пусть Q разбился на r графов. Обозначим x – смешанная стратегия патрулирующего, при которой игрок выбирает динамические пути, которые начинаются в вершинах $\{v_k^1, ..., v_k^r\}$, где $v_k^i, 1 \leqslant i \leqslant r$ корень i-го дерева, на которые разбили Q. Пусть y – смешанная стратегия атакующего, при которой игрок равновероятно выбирает напасть на вершины $\{v_h^1, ..., v_h^r\}$ в первый момент времени, где $v_h^i, 1 \leqslant i \leqslant r-1$ – концевой узел i-го дерева и v_h^i имеет уровень, равный $m+1$. А v_k^r – концевой узел с наибольшим уровнем, причем дерево, которому принадлежит v_k^r, содержит корень графа Q. Докажем, что x, y – ситуация равновесия. Для того чтобы смешанные стратегии x, y являлись ситуацией равновесия, достаточно доказать, что для любых чистых стратегий $u \in S_1, w \in S_2$ выполнялись неравенства $H(u, y) \leqslant H(x, y) \leqslant H(x, w)$. Докажем, что выполняется $H(u, y) \leqslant H(x, y)$. Предположим, что $\exists u \in S_1 : H(u, y) > H(x, y)$. Тогда путь u должен ловить как минимум две атаки на концевые узлы двух разных графов. Но это невозможно, потому что из-за условий 1. и 2. расстояние между концевыми узлами превышает значение m и патрулирующему не хватает времени, чтобы поймать хотя бы две атаки, следовательно, первое неравенство выполняется. Докажем второе неравенство $H(x, y) \leqslant H(x, w)$. Предположим, что $\exists w \in S_2 : H(x, w) < H(x, y)$. Но тогда атака w не ловится ни одним путем из S_1, что невозможно. Значит, x, y – ситуация равновесия. □

Пример 4. Рассмотрим игру $G(Q, 3, 2)$, где Q изображен на рис. 4. По теореме, граф Q удалось разбить на 8 частей. Патрулирующий равновероятно выбирает в качестве начала пути корень дерева из разбиения Q, а атакующий равновероятно в каждом подграфе выбирает концевую вершину, которая наиболее удалена от корня i-го графа, которому она принадлежит. Получаем, что значение игры равно $\frac{1}{r} = \frac{1}{8}$.

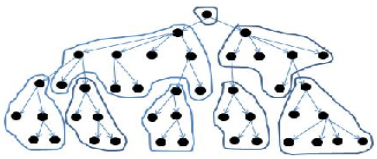


Рис. 4. Граф Q

Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что допущение предположения о камере слежения существенно меняет решение задачи. Граф разбивается на подграфы, патрулирующий не начинает движения до тех пор, пока не начнется атака атакующего.

По мнению автора, полученные результаты могут применяться на практике для анализа полезности камер слежения.

Литература

1. *Мазалов В. В.* Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2010. 448 с.

2. *Носов В. И., Бернштейн Т. В., Носкова Н. В., Храмова Т. В.* Элементы теории графов. Учебное пособие. Новосибирск: СибГУТИ, 2008. 107 с.

3. *Alpern S., Gal. S.* The theory of search games and rendezvous. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

4. *Alpern S., Morton A., Papadaki K.* Optimizing randomized patrols // Operational Research Group. 2009. P. 392–419.

Поступила в редакцию 04.04.2015

References

1. *Mazalov V. V.* Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya: ucheb. posobie [Mathematical game theory and applications: textbook]. St. Petersburg: Lan', 2010. 448 p.

2. *Nosov V. I., Bernshteyn T. V., Noskova N. V., Hramova T. V.* Elementy teorii grafov. Uchebnoe posobie [Elements of graph theory: textbook]. Novosibirsk: SibGUTI, 2008. 107 p.

3. *Alpern S., Gal. S.* The theory of search games and rendezvous. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

4. *Alpern S., Morton A., Papadaki K.* Optimizing randomized patrols. Operational Research Group. 2009. P. 392–419.

Received April 04, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Гусев Василий Васильевич
аспирант
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: gusev@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTOR:

Vasily, Gusev
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: gusev@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 34–41
DOI: 10.17076/mat167

УДК 004.421.2, 519.178

РАНЖИРОВАНИЕ ВЕРШИН ГРАФА ПУБЛИКАЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОРТАЛА MATH-NET.RU

А. Б. Жижченко[1], В. В. Мазалов[2], Б. Т. Цынгуев[3]

[1] *Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН*
[2] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*
[3] *Забайкальский государственный университет*

В данной работе предлагается новый способ определения центральности для взвешенных графов на основе законов Кирхгофа. Рассматриваемый метод имеет относительно невысокую вычислительную сложность. Метод иллюстрируется результатами расчетов электрической центральности для ранжирования вершин графа публикаций математического портала Math-Net.ru. Сделано сравнение с широко используемым методом PageRank.

Ключевые слова: мера центральности, взвешенный граф, анализ социальных сетей.

A. B. Zhizhchenko, V. V. Mazalov, B. T. Tsynguev. RANKING OF NODES IN THE MATHEMATICAL PORTAL MATH-NET.RU PUBLICATIONS GRAPH

We propose a new method for determining betweenness centraity for weighted graphs based on Kirchhoff's law. This method has low computational complexity. The results of numerical experiments are presented for the coauthors graph from the math portal Math-Net.ru. A comparison is drawn with the PageRank method.

Key words: betweenness centrality, weighted graph, social networks analysis.

Введение

Современные методы исследования сетевых структур получили бурное развитие в связи с появлением феномена социальных сетей (*social network analysis*). Методы анализа социальных сетей применяются во многих областях науки, таких, как экономика, физика, социология, биология и информационные технологии.

Одним из базовых понятий в анализе сетевых структур является центральность (betweenness centrality). Центральность вершины – это важная мера, отражающая то, насколько вершина участвует в процессе распространения информации между остальными вершинами в графе. Пусть задан граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин, E – множество ребер. Обозначим число вершин как $n = |V|$, а число ребер как $m = |E|$. Тогда центральность вершины $v \in V$ определяется следующей формулой [9]:

$$c_B(v) = \frac{1}{n_B} \sum_{s,t \in V} \frac{\sigma_{s,t}(v)}{\sigma_{s,t}}, \qquad (1)$$

где $\sigma_{s,t}$ – число геодезических путей между вершинами $s \in V$ и $t \in V$, $\sigma_{s,t}(v)$ – число геодезических путей между вершинами s и t, проходящих через вершину v. Коэффициент

нормировки n_B равен $n_B = (n-1)(n-2)$, если вершина v не может быть начальной s или конечной t вершинами, и $n_B = n(n-1)$ иначе. Наилучшая вычислительная сложность алгоритма поиска центральности равна $O(mn)$ и представлена в [5].

Для определения центральности можно использовать методы кооперативной теории игр. Здесь вершины графа представляют игроков, а ребра представляют связи между игроками. Игроки могут кооперироваться только если они связаны, т. е. кооперация ограничена неориентированным графом. Далее задается характеристическая функция, определяющая выигрыш коалиции. Таким образом, задается коммуникационная игра, в которой, определив вектор Майерсона [11], можно определить центральность всех вершин.

Известно, что поиск вектора Майерсона имеет высокую вычислительную сложность. В [10] была предложена специальная характеристическая функция, которая существенно упростила процесс вычисления вектора Майерсона.

В [6, 12] мера центральности вычисляется на основе модели электрической цепи. В данной модели граф рассматривается как электрическая цепь с идеальными элементами, где каждое ребро имеет некую пропускную способность (значение обратное сопротивлению), а вершины графа являются ее узлами. Для поиска меры центральности в модели электрической цепи используются правила Кирхгофа. Для этого электрическая цепь заземляется в некоторой вершине t и подается электрический ток в некоторой вершине s. В [6] ток подается в некоторой единственной вершине s, а также в единственной вершине t сеть заземляется. Мерой центральности вершины v служит средняя величина тока, проходящего через вершину v по всем возможным парам s и t. Таким образом, в модели электрической цепи при расчете меры центральности учитываются не только геодезические пути.

Наилучшая вычислительная сложность известного на текущий момент алгоритма поиска меры центральности в модели электрической цепи равна $O(I(n-1) + mn\log n)$, где $I(n-1)$ – сложность вычисления обратной матрицы размерности $n-1$.

В [2] рассматривается модель электрической цепи, где пропускная способность всех ребер графа принимается равной некоторому постоянному параметру α. В отличие от [6] в модели [2] в электрическую цепь искусственно вводится $n+1$ заземленная вершина, и каждая вершина сети соединена с ней ребром с пропускной способностью $1-\alpha$. Эти изменения позволили существенно уменьшить вычислительную сложность алгоритма. Кроме того, это дало возможность применить стохастические методы в вычислении меры центральности в графах с большой размерностью. Но данная модель была предусмотрена только для невзвешенных графов.

В данной работе предлагается новый способ определения центральности для взвешенных графов на основе законов Кирхгофа. Метод имеет относительно невысокую вычислительную сложность. Метод иллюстрируется результатами расчетов электрической центральности для ранжирования вершин графа публикаций математического портала Math-Net.ru [1, 8]. Сделано сравнение с широко используемым методом PageRank [7].

Мера центральности для взвешенных графов на основе закона Кирхгофа

Пусть дан взвешенный граф $G = (V, E, W)$, где V – множество вершин, E – множество ребер, W – матрица весов:

$$W(G) = \begin{pmatrix} 0 & w_{1,2} & \dots & w_{1,n} \\ w_{2,1} & 0 & \dots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1} & w_{n,2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $w_{i,j} \geqslant 0$ – вес ребра между вершинами v_i и v_j, $n = |V|$ – число вершин. Если вершины v_i и v_j несмежные, то $w_{i,j} = 0$. Если G – неориентированный граф, то $w_{i,j} = w_{j,i}$.

Обозначим $D(G)$ диагональную матрицу вида:

$$D(G) = \begin{pmatrix} d_{v_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{v_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{v_n} \end{pmatrix},$$

где $d_{v_i} = \sum_{j=1}^{n} w_{i,j}$ – сумма весов ребер инцидентных вершине v_i в графе G.

Определение. Матрица $L(G)$ называется *матрицей Кирхгофа* (Laplacian matrix) взвешенного графа G, если

$$L(G) = D(G) - W(G) =$$

$$\begin{pmatrix} d_{v_1} & -w_{1,2} & \dots & -w_{1,n} \\ -w_{2,1} & d_{v_2} & \dots & -w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{n,1} & -w_{n,2} & \dots & d_{v_n} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Пусть граф G' получен из графа G путем добавления дополнительной v_{n+1} вершины, связанной со всеми вершинами графа G

ребрами с постоянной проводимостью δ. Таким образом, получим следующую матрицу Кирхгофа графа G':

$$L(G') = D(G') - W(G') =$$
$$\begin{pmatrix} d_{v_1}+\delta & -w_{1,2} & \dots & -w_{1,n} & -\delta \\ -w_{2,1} & d_{v_2}+\delta & \dots & -w_{2,n} & -\delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -w_{n,1} & -w_{n,2} & \dots & d_{v_n}+\delta & -\delta \\ -\delta & -\delta & \dots & -\delta & \delta n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Предположим, что единица электрического тока подается в некоторую вершину $s \in V$, а вершина v_{n+1} заземлена. Пусть φ^s_v обозначает абсолютный потенциал в вершине v при условии, что источник электрического тока подключен к вершине s. Тогда вектор абсолютных потенциалов $\varphi^s(G') = [\varphi^s_{v_1}, \dots, \varphi^s_{v_n}, \varphi^s_{v_{n+1}}]^T$ в вершинах графа G' определится следующей системой уравнений (правила Кирхгофа) [6]:

$$\varphi^s(G') = L(G')^{-1} b'_s, \quad (4)$$

где b'_s – вектор-столбец, состоящий из $n+1$ элементов, значения которых равны:

$$b'_s(v) = \begin{cases} 1 & v = s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

Так как матрица Кирхгофа (2) является вырожденной, примем в вершине v_{n+1} абсолютный потенциал равным 0.

Тогда из (3) получим:

$$\tilde{\varphi}^s(G') = \tilde{L}(G')^{-1} b_s, \quad (6)$$

где $\tilde{\varphi}^s(G')$ и b_s получены из $\varphi^s(G')$ и b'_s путем удаления элементов, соответствующих вершине v_{n+1}, а $\tilde{L}(G')$ получен из $L(G')$ путем удаления строки и столбца, соответствующих вершине v_{n+1}. Отметим, что при этом из $\varphi^s(G')$ и b'_s удаляются элементы равные нулю.

Несложно видеть, что

$$\tilde{\varphi}^s(G') = [D(G) - W(G) + \delta I]^{-1} b_s, \quad (7)$$

где I – единичная матрица размерности n.

Так как абсолютные потенциалы могут быть определены с точностью до постоянного слагаемого, то абсолютные потенциалы $\tilde{\varphi}^s(G')$ можно принять в качестве абсолютных потенциалов в вершинах графа G, т. е.

$$\tilde{\varphi}^s(G) = [L(G) + \delta I]^{-1} b_s.$$

Представим (7) в следующем виде.

$$\tilde{\varphi}^s(G) = [(D(G) + \delta I) - W(G)]^{-1} b_s =$$
$$= [I - (D(G) + \delta I)^{-1} D(G) D^{-1}(G) W(G)]^{-1} \times$$
$$\times (D(G) + \delta I)^{-1} b_s.$$

Матрицы $(D(G) + \delta I)^{-1}$ и $(D(G) + \delta I)^{-1} D(G)$ диагональные с элементами на диагонали $\frac{1}{d_i+\delta}$ и $\frac{d_i}{d_i+\delta}$, $i = 1, ..., n$, обозначим их D_1 и D_2, соответственно. Матрица $D^{-1}(G)W(G)$ стохастическая, обозначим ее P. Тогда

$$\tilde{\varphi}^s(G) = [I - D_2 P]^{-1} D_1 b_s =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (D_2 P)^k D_1 b_s. \quad (8)$$

Из (8) следует, что потенциал можно вычислить рекуррентно в виде

$$\tilde{\varphi}^s_{k+1}(G) = D_2 P \tilde{\varphi}^s_k(G) + D_1 b_s, \quad \tilde{\varphi}^s_0(G) = 0.$$

Ток, протекающий через ребро $e = (v_i, v_j)$, согласно закону Ома равен $x^s_e = |\varphi^s_{v_i} - \varphi^s_{v_j}| \cdot w_{i,j}$.

Величину тока, протекающего через вершину v, можно найти, определив сумму токов на ребрах, инцидентных ей, и поделив полученную сумму на 2. Отметим, что необходимость в делении на 2 возникла в связи с тем, что при суммировании всех токов на ребрах, инцидентных вершине, учитывается электрический ток как входящий в вершину, так и выходящий из нее.

Соответственно величину тока, протекающего через некоторую вершину v, при условии, что источник тока находится в вершине s, можно найти по формуле

$$x^s(v) = \frac{1}{2}(b_s(v) + \sum_{e: v \in e} x^s_e), \quad (9)$$

где $b_s(v) = \begin{cases} 1 & v = s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Таким образом, меру центральности в вершине v для взвешенных графов $CF_\delta(v)$ можно определить по формуле:

$$CF_\delta(v) = \frac{1}{n} \sum_{s \in V} x^s(v). \quad (10)$$

Вычислительная сложность алгоритма поиска меры центральности для взвешенных графов (10) равна сложности поиска обратной матрицы размерности n, т. е. $O(n^3)$.

Пример 1. Частный случай графа G в форме звезды.

Рассмотрим частный случай, когда граф G – звезда с n вершинами, у которой одна из ребер имеет вес равный k, а остальные ребра имеют вес равный единице. Пусть 1 – центр звезды, 2 – вершина, инцидентная ребру с весом k. Тогда матрица Кирхгофа имеет вид

$$\tilde{L} = L + \delta I = D(G) - W(G) + \delta I = \begin{pmatrix} n-2+k+\delta & -k & -1 & \dots & -1 \\ -k & k+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1+\delta \end{pmatrix}$$

Обратная матрица имеет вид

$$\tilde{L}^{-1} = (L+\delta I)^{-1} = \frac{1}{\delta(1+\delta)X} \begin{pmatrix} (k+\delta)(1+\delta)^2 & k(1+\delta)^2 & (k+\delta)(1+\delta) & \dots & (k+\delta)(1+\delta) \\ k(1+\delta)^2 & (k+(n-1)\delta+k\delta+\delta^2)(1+\delta) & k(1+\delta) & \dots & k(1+\delta) \\ (k+\delta)(1+\delta) & k(1+\delta) & k+\delta+\delta X & \dots & k+\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k+\delta)(1+\delta) & k(1+\delta) & k+\delta & \dots & k+\delta+\delta X \end{pmatrix},$$

где $X = nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2$.

При $s = 1$ получим следующее

$$x^s(s) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k(1+\delta) + (n-2)(k+\delta)}{nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2}\right),$$

$$x^s(2) = \frac{1}{2}\frac{k(1+\delta)}{nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2},$$

$$x^s(i) = \frac{1}{2}\frac{k+\delta}{nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2}, i = 3, \dots, n.$$

При $s = 2$

$$x^s(1) = \frac{1}{2}\frac{k(\delta + 2n - 3)}{nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2},$$

$$x^s(s) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k(\delta + n - 1)}{nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2}\right),$$

$$x^s(i) = \frac{1}{2}\frac{k}{nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2}, i = 3, \dots, n.$$

При $s = i$, где $i = 3, \dots, n$

$$x^s(1) = \frac{1}{2}\frac{\delta^2 + \delta(3k + 2n - 5) + k(2n-3)}{(nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2)(1+\delta)},$$

$$x^s(2) = \frac{1}{2}\frac{k}{nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2},$$

$$x^s(s) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1+\delta} - \frac{k+\delta}{(nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2)(1+\delta)}\right),$$

$$x^s(i) = \frac{1}{2}\frac{k+\delta}{(nk + (n-1)\delta + 2k\delta + \delta^2)(1+\delta)}, i = 3, \dots, n.$$

Получаем следующий результат

$$CF_\delta(1) = \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{2k(\delta + n - 1)}{X} + \frac{2(n-2)(\delta^2 + \delta(2k + n - 2) + k(n-1))}{(1+\delta)X}\right),$$

$$CF_\delta(2) = \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{2k(\delta + n - 1)}{X}\right),$$

$$CF_\delta(i) = \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{1+\delta} + \frac{(k+\delta)(n-4)}{(1+\delta)X} + \frac{2k+\delta}{X}\right), i = 3, \dots, n.$$

На рис. 1 представлены графики зависимостей значений электрической центральности от значений n и k при $\delta = 1$. С увеличением значений n и k центральность $CF_\delta(1)$ растет. С другой стороны, с увеличением n центральности $CF_\delta(2)$ и $CF_\delta(i)$ уменьшается. Изменение k незначительно влияет на изменение центральностей $CF_\delta(2)$ и $CF_\delta(i)$.

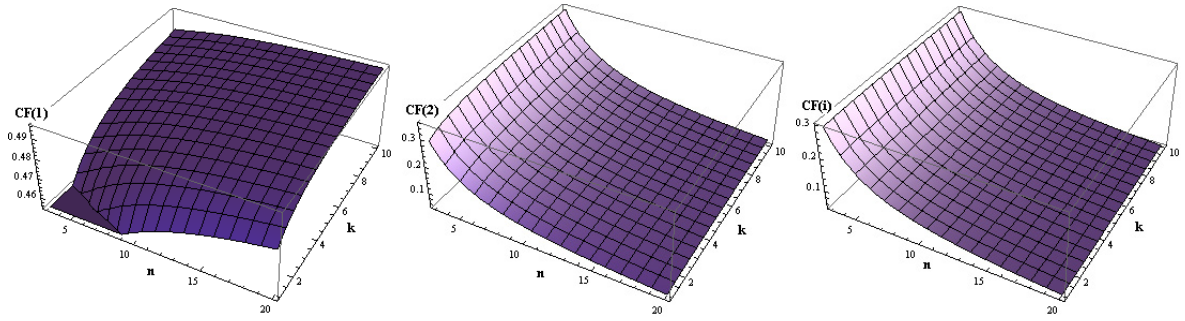


Рис. 1. Зависимость значений $CF_\delta(1)$, $CF_\delta(2)$ и $CF_\delta(i)$ от n и k при $\delta = 1$

Пример 2. Расчет центральности вершин графа публикаций математического портала Math-Net.ru.

На рис. 2 представлен фрагмент графа публикаций, составленного на основе данных математического портала Math-Net.ru. Общее число авторов математического портала Math-Net.ru на момент написания данной работы составляло 78839. Фрагмент графа публикаций Math-Net.ru, исследуемый в данной работе, содержит 7606 авторов и 10747 статей, написанных в соавторстве. Здесь вершины графа – это авторы статей, а вес ребра – это число совместных научных статей авторов. Отметим, что при построении данного графа не учитывались статьи, имеющие более 6 соавторов.

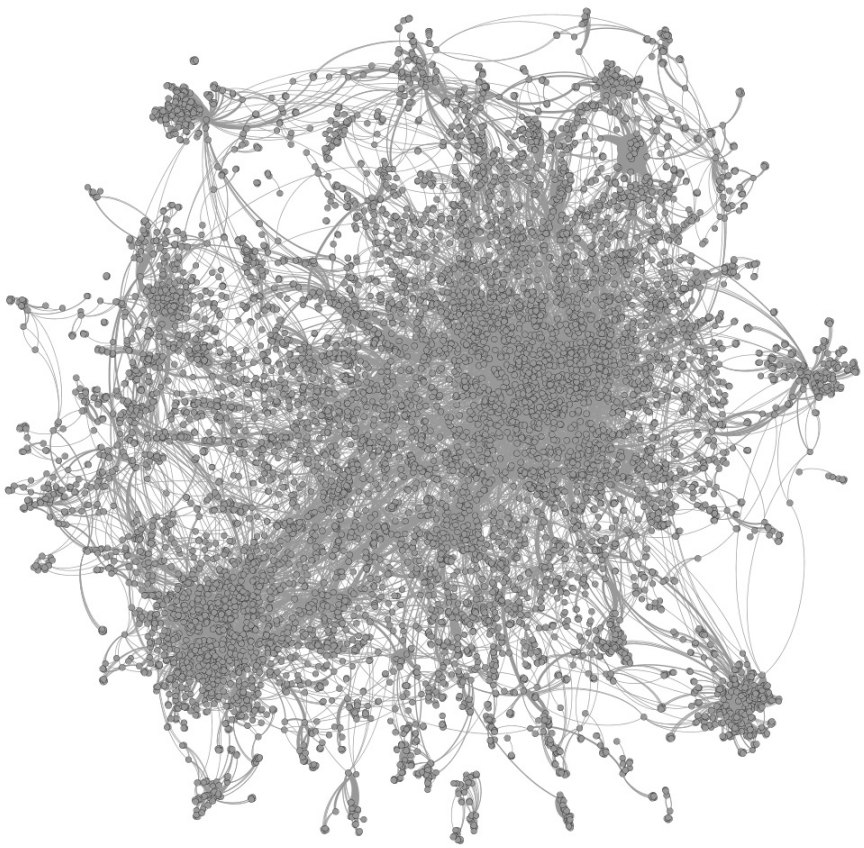


Рис. 2. Фрагмент графа публикаций Math-Net.ru

Для большей наглядности результатов ранжирования на рис. 3 представлена главная компонента графа, полученная путем удаления ребер с весом меньше 7 из графа, представленного на рис. 2.

Из рис. 3 видно, что вершины *40, 34, 56* и *20* являются центрами «локальных» звезд и, соответственно, должны иметь высокую центральность. Заметим, что вершина *32* также должна иметь высокую центральность, т. к.

она соединяет в единый граф две отдельные компоненты.

В табл. 1 приведены результаты ранжирования для 11 первых вершин графа, представленного на рис. 3. Здесь в качестве методов ранжирования используются электрическая центральность, рассчитанная по формуле (10) с параметром $\delta = 1$, PageRank с параметром $\alpha = 0.85$, и электрическая центральность (CF-betweenness), описанная в [6].

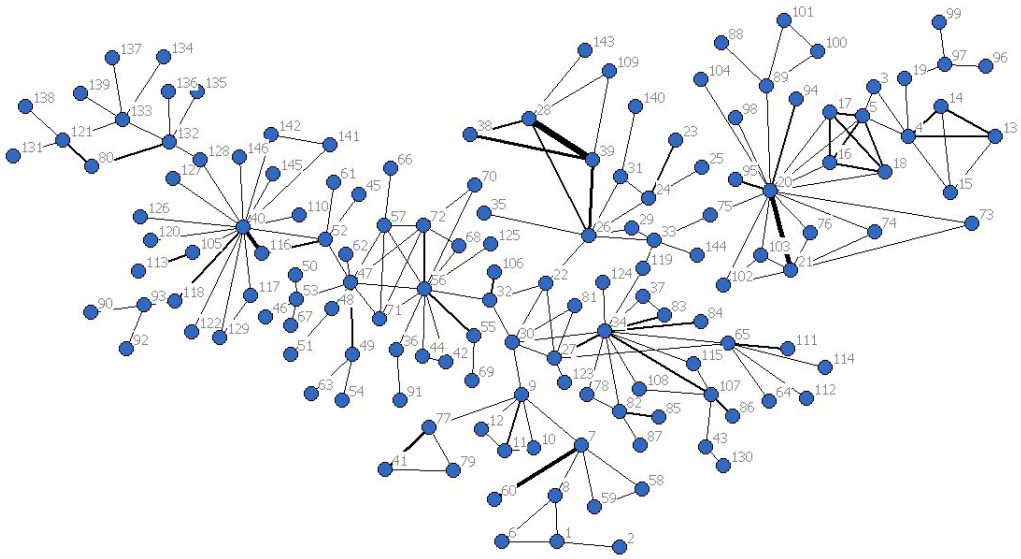


Рис. 3. Главная компонента графа публикаций Math-Net.ru

Таблица 1. Результаты ранжирования вершин для графа публикаций Math-Net.ru

Вершина	Центральность (CF_δ)	Вершина	PageRank	Вершина	CF-betweenness центральность
40	0.15740	40	0.04438	56	0.54237
34	0.14981	34	0.03285	32	0.53027
20	0.13690	20	0.03210	47	0.48222
47	0.12566	56	0.02774	22	0.41668
56	0.12518	47	0.02088	33	0.41361
26	0.10880	39	0.01874	34	0.39517
30	0.09098	28	0.01824	30	0.39426
9	0.08149	21	0.01695	52	0.37421
33	0.08024	65	0.01632	40	0.36946
32	0.07959	26	0.01552	26	0.35259
22	0.07903	107	0.01424	20	0.34413

Как и предполагалось ранее, вершины *40, 34, 56* и *20* получили высокие ранги по всем рассматриваемым методам ранжирования. Однако для метода PageRank вершина *32* получила относительно низкий ранг (34-е место). Это связано с тем, что метод PageRank дает малое значение центральности для вершин, имеющих небольшое число инцидентных ре-

бер, но связывающих компоненты в единый граф.

В качестве примера раскроем только некоторые данные по вершинам графа публикаций Math-Net.ru. Вершина *40* – Гельфанд И. М., *34* – Олейник О. А., вершина *56* – Кутателадзе С. С., а вершина *32* – Новиков С. П.

Рис. 1 подготовлен в программном комплексе Gephi [3]. Рис. 2 подготовлен с использованием компоненты NETDRAW, входящей в состав программного продукта «UCINET» [4].

Работа частично поддержана Отделением математических наук РАН и грантом РГНФ (проект 15-02-00352).

Литература

1. *Жижченко А. Б., Изаак А. Д.* Информационная система Math-Net.Ru. Применение современных технологий в научной работе математика // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, № 5 (377). С. 107–132.

2. *Avrachenkov K., Litvak N., Medyanikov V., Sokol M.* Alpha current flow betweenness centrality // Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8305. P. 106–117.

3. *Bastian M., Heymann S., Jacomy M.* Gephi: an open source software for exploring and manipulating networks // International AAAI Conference on Weblogs and Social Media. 2009.

4. *Borgatti S. P., Everett M. G., Freeman L. C.* Ucinet for Windows: Software for Social Network Analysis // MA: Analytic Technologies. 2002.

5. *Brandes U.* A faster algorithm for betweenness centrality // Journal of Mathematical Sociology. 2001. Vol. 25. P. 163–177.

6. *Brandes U., Fleischer D.* Centrality measures based on current flow // In Proceedings of the 22nd annual conference on Theoretical Aspects of Computer Science. 2005. P. 533–544.

7. *Brin S., Page L.* The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. Computer Networks and ISDN Systems. 1998. Vol. 30, N 17. P. 107–117.

8. *Chebukov D., Izaak A., Misurina O., Pupyrev Yu., Zhizhchenko A.* Math-Net.Ru as a digital archive of the Russian mathematical knowledge from the XIX century to today. Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 7961. P. 344–348.

9. *Freeman L. C.* A set of measures of centrality based on betweenness // Sociometry. 1977. Vol. 40. P. 35–41.

10. *Mazalov V. V., Trukhina L. I.* Generating functions and the Myerson vector in communication networks // Discrete Mathematics and Applications. 2014. Vol. 24, N 5. P. 295–303.

11. *Myerson R. B.* Graphs and cooperation in games // Math. Oper. Res. 1977. Vol. 2. P. 225–229.

12. *Newman M. E. J.* A measure of betweenness centrality based on random walks // Social networks. 2005. Vol. 27. P. 39–54.

Поступила в редакцию 30.04.2015

References

1. *Zhizhchenko A.B., Izaak A.D.* Informatsionnaya sistema Math-Net.Ru. Primenenie sovremennykh tekhnologii v nauchnoi rabote matematika [Informational system Math-Net.Ru. Application of modern technologies in mathematical scientific work]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk [Russian Mathematical Surveys]. 2007. Vol. 62, N 5 (377). P. 107–132.

2. *Avrachenkov K., Litvak N., Medyanikov V., Sokol M.* Alpha current flow betweenness centrality. Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8305. P. 106–117.

3. *Bastian M., Heymann S., Jacomy M.* Gephi: an open source software for exploring and manipulating networks. International AAAI Conference on Weblogs and Social Media. 2009.

4. *Borgatti S.P., Everett M.G., Freeman L.C.* Ucinet for Windows: Software for Social Network Analysis. MA: Analytic Technologies. 2002.

5. *Brandes U.* A faster algorithm for betweenness centrality. Journal of Mathematical Sociology. 2001. Vol. 25. P. 163–177.

6. *Brandes U., Fleischer D.* Centrality measures based on current flow. In Proceedings of the 22nd annual conference on Theoretical Aspects of Computer Science. 2005. P. 533–544.

7. *Brin S. and Page L.* The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. Computer Networks and ISDN Systems. 1998. Vol. 30, N 17. P. 107–117.

8. *Chebukov D., Izaak A., Misurina O., Pupyrev Yu., Zhizhchenko A.* Math-Net.Ru as a digital archive of the Russian mathematical knowledge from the XIX century to today. Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 7961. P. 344–348.

9. *Freeman L. C.* A set of measures of centrality based on betweenness. Sociometry. 1977. Vol. 40. P. 35–41.

10. *Mazalov V. V., Trukhina L. I.* Generating functions and the Myerson vector in communication

networks. Discrete Mathematics and Applications. 2014. Vol. 24, N 5. P. 295–303.

11. *Myerson R. B.* Graphs and cooperation in games. Math. Oper. Res. 1977. Vol. 2. P. 225–229.

12. *Newman M. E. J.* A measure of betweenness centrality based on random walks. Social networks. 2005. Vol. 27. P. 39–54.

Received April 30, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Жижченко Алексей Борисович
профессор, академик РАН, д. ф.-м. н.
Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН
Ленинский пр. 32а, Москва, Россия, 119991
эл. почта: om@ras.ru

Мазалов Владимир Викторович
профессор, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: vmazalov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781108

Цынгуев Булат Тимурович
аспирант
Забайкальский государственный университет
ул. Александро-Заводская, 30, Чита, Забайкальский край, Россия, 672039
эл. почта: btsynguev@gmail.com

CONTRIBUTORS:

Zhizhchenko, Aleksei B.
Joint Supercomputer Center of Russian Academy of Sciences
32a Leninski st., 119991 Moscow, Russia
e-mail: om@ras.ru

Mazalov, Vladimir V.
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Science
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru
tel: (8142) 781108

Tsynguev, Bulat T.
Transbaikal State University
30 Aleksandro-Zavodskaya St., 672039 Chita, Russia
e-mail: btsynguev@gmail.com

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 42–53
DOI: 10.17076/mat147

УДК 519.6:539.2

АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА СИСТЕМОЙ ОДУ

Ю. В. Заика, Е. К. Костикова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

В рамках технологических задач водородного материаловедения (включая проект ITER) ведется интенсивный поиск различных по назначению конструкционных материалов с заранее заданными пределами водородопроницаемости. Одним из экспериментальных методов является термодесорбционная спектрометрия (ТДС). Образец, насыщенный водородом, дегазируется в условиях вакуумирования и монотонного нагрева. С помощью масс-спектрометра регистрируется десорбционный поток, позволяющий судить о характере взаимодействия изотопов водорода с твердым телом. Интерес представляют такие параметры переноса, как коэффициенты диффузии, растворения, десорбции. В статье представлены распределенная краевая задача термодесорбции и численный метод моделирования ТДС-спектра, требующий лишь интегрирования нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) невысокого порядка (по сравнению, например, с методом прямых).

Ключевые слова: водородопроницаемость, термодесорбция, нелинейные краевые задачи, динамические граничные условия, численное моделирование.

Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. APPROXIMATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION BY ODE SYSTEM

One of the technological challenges for hydrogen materials science (including ITER project) is the currently active search for structural materials with various potential applications that will have predetermined limits of hydrogen permeability. One of the experimental methods is thermodesorption spectrometry (TDS). A hydrogen-saturated sample is degassed under vacuum and monotone heating. The desorption flux is measured by mass spectrometer to determine the character of interactions of hydrogen isotopes with the solid. We are interested in such transfer parameters as the coefficients of diffusion, dissolution, desorption. The paper presents a distributed boundary value problem of thermal desorption and a numerical method for TDS-spectrum simulation, where only integration of a non-linear system of low order (compared with, e. g., the method of lines) ordinary differential equations (ODE) is required. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project N 15-01-00744).

Key words: hydrogen permeability, thermal desorption, nonlinear boundary-value problems, dynamical boundary conditions, numerical simulation.

Введение

Интерес к взаимодействию водорода с различными материалами носит многоплановый характер [1–10]. Достаточно упомянуть задачи энергетики, защиты металлов от водородной коррозии, проектирования химических реакторов, ракетостроения. Гидриды позволяют удерживать большое количество водорода. С этим связаны перспективы водородных аккумуляторов и двигателей с высоким уровнем безопасности: без высоких давлений и низких температур. На обратимом легировании металлов водородом основаны пластифицирование и термоводородная обработка титановых сплавов. Некоторые частные задачи водородного материаловедения исследованы в [11–15]. Энтузиасты говорят не только о водородной энергетике, но и о водородной экономике [7].

Экспериментальный опыт показывает, что лимитирующими являются не только диффузия, но и физико-химические процессы на поверхности [1, 2]. Параметры переноса зависят и от технологических особенностей получения партии материала, поэтому вряд ли следует ориентироваться на получение «табличных данных», нужны эффективные алгоритмы обработки экспериментальных кривых. В статье остановимся на моделировании термодесорбции, учитывая лишь основные факторы и информационные возможности рассматриваемого ТДС-эксперимента.

Математическая модель переноса

Рассмотрим перенос водорода сквозь образец тестируемого металла (пластину толщины ℓ). Физико-химическую терминологию в дальнейшем используем в минимально необходимом объеме. Кратко говорим о металлической мембране, хотя это может быть многокомпонентный сплав, интерметаллид. Считаем, что нагрев относительно медленный, практически равномерный, так что градиент температуры пренебрежимо мал и диффузионный поток можно считать пропорциональным градиенту концентрации. Концентрация растворенного водорода (в атомарном состоянии) мала. Материал достаточно однороден, чтобы пренебречь взаимодействием H с ловушками (микродефектами кристаллической структуры, которые могут удерживать водород). Для диффузии примем стандартное уравнение:

$$c_t(t,x) = D(T)c_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in Q_{t_*}, \qquad (1)$$

где t – время, $Q_{t_*} = (0,t_*)\times(0,\ell)$; $c(t,x)$ – концентрация диффундирующего водорода (атомарного); D – коэффициент диффузии. Зависимость D от текущей температуры $T(t)$ соответствует закону Аррениуса (с предэкспоненциальным множителем D_0 и энергией активации E_D; R – универсальная газовая постоянная): $D = D_0\exp\{-E_D/[RT(t)]\}$.

Известны более детализированные модели переноса. В частности, можно учесть несколько каналов диффузии (транскристаллическую, по границам зерен, вдоль дефектов) с взаимообменом между ними. Однако значительное увеличение числа неизвестных априори параметров делает задачу их оценки труднообозримой. В контексте прикладных задач, выделяя только лимитирующие факторы, находят компромисс между полнотой модели и возможностями ее параметрической идентификации по экспериментальным данным.

Основные трудности численного анализа связаны не с уравнением (1), а с динамическими нелинейными граничными условиями. Пусть пластина контактирует с газообразным H_2 и поверхность является существенным потенциальным барьером (см. [2, с. 177–206; Габис, Компаниец, Курдюмов]). Тогда с учетом (де)сорбционных процессов краевые условия моделируются следующим образом:

$$c(0,x) = \bar{c}(x), \;\; x \in [0,\ell], \;\; t \in [0,t_*], \qquad (2)$$

$$c_0(t) = g(T)q_0(t), \;\; c_\ell(t) = g(T)q_\ell(t), \qquad (3)$$

$$\dot{q}_0(t) = \mu s(T)p_0(t) - b(T)q_0^2(t) + Dc_x(t,0)\,, \qquad (4)$$

$$\dot{q}_\ell(t) = \mu s(T)p_\ell(t) - b(T)q_\ell^2(t) - Dc_x(t,\ell)\,, \qquad (5)$$

$$b(T) = b_0\exp\{-E_b[RT]^{-1}\}, \;\; s(T) = \ldots$$

Здесь: $c_0(t) \equiv c(t,0)$, $c_\ell(t) \equiv c(t,\ell)$ – граничные объемные концентрации диффундирующего атомарного водорода; $q_0(t)$, $q_\ell(t)$ – концентрации на поверхностях ($x = 0,\ell$); $g(T)$ – параметр локального равновесия между концентрациями на поверхности и в приповерхностном объеме; μ – кинетический коэффициент; $s(T)$ – параметр, отражающий тот факт, что только малая часть «налетающего» водорода окажется в форме атомов на поверхности материала (для краткости будем называть s коэффициентом прилипания, имея в виду, что он характеризует итог общего процесса физадсорбции-диссоциации-хемосорбции молекулярного газа в атомы на поверхности); $p_0(t)$, $p_\ell(t)$ – давления молекулярного газа; $b(T)$ – коэффициент десорбции.

Кратко поясним формулы (2)–(5). Если предварительно образец обезводорожен, то $\bar{c}(x) = 0$. Соотношения (3) означают, что объ-

емные приповерхностные концентрации $c_{0,\ell}(t)$ пропорционально «отслеживают» концентрации $q_{0,\ell}(t)$ на поверхности, скорость растворения достаточно велика. В балансе потоков (4), (5) производные слева отражают возможность накопления H на поверхности. Чем больше внешнее давление H_2, тем больше атомов в единицу времени попадает на единичную площадку (первые слагаемые в правых частях). Вторые слагаемые означают, что часть атомов, оказавшихся на поверхности, снова соединяются в молекулы водорода и покидают поверхность (десорбционные потоки $J_{0,\ell}(t) = b(t)q^2_{0,\ell}(t)$). Говоря о потоках, обычно подразумеваем их плотность. Квадратичность десорбции характерна для водорода, исключая экстремальные температуры. Последние слагаемые в правых частях (4), (5) соответствуют притоку или оттоку атомов H к поверхности за счет диффузии в объеме.

В модели фигурирует как молекулярный, так и атомарный водород. Для единообразия подсчет будем вести в атомах: $[c] = 1/\text{см}^3$, $[q] = 1/\text{см}^2$, $[Dc_x]=[J]=1/\text{см}^2\text{с}$ $\big(J=bq^2\big)$. В кинетической теории газов величина μp определяет число частиц (в данном случае молекул H_2), соударяющихся с единичной площадкой поверхности в единицу времени. Но за счет множителя s удобно воспринимать слагаемое μsp как плотность потока атомов, оседающих на поверхности. Это интегральный показатель, без разделения процесса на стадии. Вместо s можно написать $2s$ и интерпретировать s как долю адсорбируемых атомов H.

Замечание 1. Модель (3) быстрого растворения (локального равновесия) на поверхности получается из более общих соотношений

$$k^-(T)q_0(t) - k^+(T)c_0(t) = -D(T)c_x(t,0),$$

$$k^-(T)q_\ell(t) - k^+(T)c_\ell(t) = D(T)c_x(t,\ell).$$

Коэффициенты k^-, k^+ характеризуют интенсивность процессов растворения в объеме и выхода на поверхность. Если эти процессы в рассматриваемом диапазоне температур существенно быстрее диффузии, то, полагая в относительном масштабе $Dc_x \approx 0$, получаем соотношение (3) с $g = k^-/k^+$. Если поверхность изотропна (в смысле $E_{k^-} \approx E_{k^+}$), то $g(T)$ слабо зависит от температуры. Формально можно записать аррениусовскую зависимость $g(T) = g_0 \exp\{-E_g/[RT]\}$, $E_g = E_{k^-} - E_{k^+}$, но «энергия активации» E_g не обязательно положительна. Дополнительно можно учитывать степени заполнения поверхности и насыщенности приповерхностного объема:

$$k^-(T)\big[1 - c_{0,\ell}(t)c^{-1}_{\max}\big]q_{0,\ell}(t) -$$
$$- k^+(T)\big[1 - q_{0,\ell}(t)q^{-1}_{\max}\big]c_{0,\ell}(t) = \mp\, D(T)c_x\big|_{0,\ell}\,.$$

Наличие «порогового» множителя $[1 - c/c_{\max}]$ приводит к следующему. Если концентрация c в приповерхностном объеме близка к максимально возможной, то растворение практически прекращается. Аналогично интерпретируется другой множитель, где величина $\theta(t) = q(t)/q_{\max}$ означает степень заполнения поверхности. В балансовых уравнениях (4), (5) можно моделировать плотность потока адсорбции атомов H (диссоциативной хемосорбции водорода на поверхности) выражением $\mu s(T)p(t)[1 - \theta(t)]^2$. Но в диапазоне малых концентраций $\theta \ll 1$, что согласовано с квадратичной десорбцией, линейностью уравнения диффузии, $D \neq D(c)$. В масштабе рассматриваемого далее ТДС-эксперимента удобно выбрать $[p] = \text{Торр}$, откуда $\mu(T) = (2\pi mkT)^{-1/2} \approx 2.484 \cdot 10^{22}/\sqrt{T}$. Здесь $[\mu] = 1_{H_2}/(\text{Торр}\,\text{см}^2\text{с})$, $[T] = \text{К}$, k – постоянная Больцмана, m – масса молекулы водорода. Зависимостью кинетической константы от температуры ($\mu \propto 1/\sqrt{T}$) часто пренебрегают на фоне экспоненты в формуле для $s(T)$.

Замечание 2. Не для всех материалов целесообразно придавать особую роль поверхности. В случае высокой степени пористости («рыхлости») разумно уравнения (3)–(5) заменить граничными условиями III рода:

$$\mu s(T)p_{0,\ell}(t) - b(T)c^2_{0,\ell}(t) = \mp\, D(T)c_x\big|_{0,\ell}\,. \quad (6)$$

Плотность потока абсорбции μsp (в тонкий приповерхностный слой) пропорциональна (s) давлению молекулярного водорода снаружи. Формально (6) получается из уравнений (4), (5) при малой скорости накопления на поверхности ($\dot q \approx 0$). Коэффициент десорбции обозначается одной буквой, хотя в (6) и (4), (5) это разные величины (включая размерность). Их согласованность понимаем в смысле $b_{surface} = g^2 b_{volume}$ (см. (3)). В [3] приводится более обстоятельный анализ различных стадий проникновения водорода из газа в металл и обратно. С учетом итогового «усреднения», коэффициент b в условии (6) является *эффективным коэффициентом рекомбинации*.

Отметим следующее. Если с обеих сторон пластины поддерживать постоянное давление насыщения $\bar p$ (H_2) при $T = \text{const}$, то через некоторое время установится равновесная концентрация $\bar c$ растворенного атомарного диффузионно подвижного водорода. Из модели (3)–(5), приравнивая производные к нулю, получаем $\bar c = \Gamma\sqrt{\bar p}$, $\Gamma \equiv g\sqrt{\mu s/b}$ ($\bar c = g\bar q$). Таким образом, модель соответствует диапазону адекватности закона Сивертса ($\bar c \propto \sqrt{\bar p}$).

ТДС-эксперимент и модель измерений

В камеру с лентой из исследуемого металла или сплава подается водород в газовой фазе при сравнительно большом давлении. Лента нагрета с целью увеличения скорости сорбции. После того как образец поглотит достаточное количество водорода (до состояния равновесного насыщения), он быстро охлаждается (отключается ток нагрева). При этом резко падают скорости физико-химических процессов и значительное количество водорода остается в образце. В режиме последующего постоянного вакуумирования камеры лента снова нагревается. Закон нагрева $T(t)$ может варьироваться в широких пределах. С помощью масс-спектрометра измеряется давление молекулярного водорода в вакуумной камере, обусловленное десорбцией $J(t) = b(t)q^2(t)$:

$$p(t) = \theta_1 \int_0^t J(\tau) \exp\bigl\{(\tau - t)\theta_0^{-1}\bigr\}\, d\tau. \quad (7)$$

Здесь и далее для упрощения обозначений примем сокращенную запись (знак тождества трактуется как равенство по определению):

$$b(t) \equiv b(T(t)),\ D(t) \equiv D(T(t)),\ s(t) \equiv s(T(t)).$$

Коэффициент g быстрого растворения (локального равновесия «поверхность – объем») считаем константой ($E_{k^-} = E_{k^+}$) в пределах рассматриваемого ТДС-пика десорбции.

Для метода ТДС выполнена симметрия:

$$p(t) = p_{0,\ell}(t),\ q(t) = q_{0,\ell}(t),\ c_0(t) = c_\ell(t), \quad (8)$$

$$D(t)c_x(t,0) = -D(t)c_x(t,\ell),\ \bar{c}(x) = \bar{c} = \text{const}.$$

Константа θ_1 зависит от площади поверхности ленты S ($\theta_1 = S\theta_2$), θ_0 и θ_2 определяются конкретными характеристиками экспериментальной установки, в частности, объемом камеры V и скоростью откачки вакуумной системы v ($\theta_0 = V/v$). В дифференциальной форме $J(t) = [p(t)/\theta_0 + \dot{p}(t)]/\theta_1$.

Время t_* окончания эксперимента определим условием практически полной дегазации:

$$p(t) \approx 0,\ t \geqslant t_*, \quad c(t_*, x) \approx 0,\ x \in [0, \ell].$$

Интегро-дифференциальное уравнение типа Риккати

Принятая модель ТДС-дегазации:

$$c_t = D(t)c_{xx}\,,\ c(0,x) = \bar{c},\ c_{0,\ell}(t) = gq(t),$$

$$\dot{q}(t) = r(t) - b(t)q^2(t) + D(t)c_x(t,0),$$

$$p(t) = \theta_1 \int_0^t J(\tau) \exp\bigl\{(\tau - t)\theta_0^{-1}\bigr\}\, d\tau,$$

$$r(t) \equiv \mu s(t)p(t),\ J(t) \equiv b(t)q^2(t).$$

Вакуумную систему считаем достаточно мощной, чтобы после насыщения, на этапе дегазации пренебречь ресорбцией ($r(t) = 0$) в динамическом граничном условии ($\dot{q} = \ldots$). Разрешимость краевой задачи (и в более общем случае учета обратимого захвата в объеме) обоснована в [16]. Для обратной задачи параметрической идентификации входными данными являются функции времени $p(t)$ и $J(t)$.

В данной статье ограничимся прямой задачей численного моделирования ТДС-спектра $J = J(T)$. Этот этап необходим как итерационная составляющая алгоритма идентификации. Нагрев $T(t)$ обычно реализуют линейным ($T(t) = T_0 + vt$). Скорость нагрева v невелика (< 1 K/c). По достижении максимальной температуры (если дегазация еще не завершилась) нагрев прекращается: $T(t) = T_{\max}$. Поскольку включение-выключение нагрева не происходит мгновенно, то, не выделяя явно эти относительно быстрые переходные процессы, можно считать в формальных математических выкладках коэффициенты $D(T(t))$, $b(T(t))$, $s(T(t))$ гладкими по $t \in \mathbb{R}$.

Теперь мы в состоянии математически сформулировать задачу. В [16, 17] представлены разностные схемы решения краевой задачи (в том числе и с учетом ловушек различных типов). Но чтобы сравнивать модельные и экспериментальные ТДС-спектры, нужна только поверхностная концентрация ($J = bq^2$). Естественно попытаться избежать итерационного решения краевой задачи при текущих приближениях параметров модели D_0, E_D, b_0, E_b, s_0, E_s, g. С этой целью проведем преобразования, придя в итоге к необходимости интегрировать лишь систему ОДУ невысокого порядка.

Сделаем замену времени $t' = \int_0^t D ds$ (оставив прежнее обозначение t):

$$c_t(t,x) = c_{xx}(t,x),\ c(0,x) = \bar{c},\ c_{0,\ell} = gq(t), \quad (9)$$

$$c_x|_0 = -c_x|_\ell = \dot{q}(t) + [J(t) - r(t)]D^{-1}(t). \quad (10)$$

Считаем $q(t)$ функциональным параметром, а (10) – дополнительным соотношением к линейной задаче (9). Сделаем замену, приводящую краевые условия в (9) к однородным:

$$\hat{c} = c(t,x) - gq(t),\ \hat{c}_t(t,x) = \hat{c}_{xx}(t,x) + f(t),$$

$$f(t) = -g\dot{q}(t),\ \hat{c}(0,x) = \hat{\varphi}(x) = 0,\ \hat{c}|_{0,\ell} = 0.$$

Запишем решение с помощью функции мгновенного источника (функции Грина) [18, гл. 2]:

$$\hat{c}(t,x) = \int_0^\ell G_1(x,\xi,t)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi +$$

$$+\int_0^t\int_0^\ell G_1(x,\xi,t-\tau)f(\tau)\,d\xi\,d\tau,\ G_1(x,\xi,t)=$$
$$=\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\,t\Big\}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi\xi}{\ell}.$$

В динамические граничные условия входит производная $\hat{c}_x(t,0)$:

$$\hat{c}_x|_0=-\frac{4g}{\ell}\int_0^t\dot{q}(\tau)\sum{}'\exp\Big\{\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}(\tau-t)\Big\}\,d\tau,$$

$\sum' \equiv \sum_{n=1,3,5\ldots}$. При $\tau = t$ ряд расходится, так что подразумевается почленное интегрирование. В исходном времени t имеем

$$c_x(t,0)=\hat{c}_x(t,0)=c_x(t,\ell)=\hat{c}_x(t,\ell),\ c_x(t,0)=$$
$$=-\frac{4g}{\ell}\sum{}'\int_0^t\dot{q}(\tau)\exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\int_\tau^t D(s)\,ds\Big\}\,d\tau.$$

Окончательно динамическое граничное условие запишется в форме

$$\dot{q}(t)=r(t)-b(t)q^2(t)- \qquad (11)$$
$$-\frac{4gD}{\ell}\sum{}'\int_0^t\dot{q}(\tau)\exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\int_\tau^t D(s)\,ds\Big\}\,d\tau.$$

Полученное уравнение (11) с квадратичной нелинейностью (которая входит и в функцию $r(t)$ при «расшифровке» $p(t)$) будем классифицировать как интегро-дифференциальное уравнение Риккати нейтрального типа. Уравнение эквивалентно исходной краевой задаче в том смысле, что решение $q(t)$ однозначно определяет решение $c(t,x)$. Аналогия с функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа [19] связана с тем, что избавиться от производной $\dot{q}$ в правой части интегрированием по частям нельзя, так как появится расходящийся ряд. Нас интересует отрезок времени $[t_1,t_2]\subset(0,t_*)$, соответствующий выраженному пику термодесорбции (измерения при t близких к $0,t_*$ малоинформативны). Для мощной вакуумной системы ресорбцией пренебрегают ($r(t)=0$), что упрощает уравнение. Уравнениям Риккати посвящена обширная литература (см. [20]).

Безразмерная форма задачи

Для численного моделирования удобно перейти к безразмерным переменным, выполнив замены: $t'=\int_0^t D(s)ds/\ell^2$, $x'=x/\ell$, $v=q/\bar{q}$ ($\bar{c}=g\bar{q}$). Не меняя обозначения t, получаем:

$$\tilde{b}(t)\equiv\frac{b(t)\ell^2\bar{q}}{D(t)},\quad \dot{v}(t)=-\tilde{b}(t)v^2(t)- \qquad (12)$$
$$-4g\ell\sum{}'\int_0^t\dot{v}(\tau)\exp\big\{-n^2\pi^2[t-\tau]\big\}d\tau,$$

$v(0)=1$ (начальные данные). Ограничимся первыми k слагаемыми ряда. Обозначим:

$$z_i(t)=\int_0^t\dot{v}(\tau)\exp\big\{-(2i-1)^2\pi^2[t-\tau]\big\}\,d\tau.$$

Продифференцируем z_i по t и подставим вместо $\dot{v}$ выражение (12) (сумма до $n=2k-1$):

$$\dot{z}_i=-\tilde{b}v^2-\big[(2i-1)^2\pi^2+4g\ell\big]z_i-$$
$$-4g\ell(z_1+\ldots+z_{i-1}+z_{i+1}+\ldots+z_k).$$

В итоге получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v\\z_1\\\ldots\\z_k\end{pmatrix}=-\tilde{b}(t)v^2(t)\begin{pmatrix}1\\1\\\ldots\\1\end{pmatrix}-$$
$$-4g\ell\begin{pmatrix}1&1&\ldots&1\\\alpha_1&1&\ldots&1\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\1&1&\ldots&\alpha_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\ldots\\z_k\end{pmatrix},$$

$\alpha_i\equiv 1+(2i-1)^2\pi^2/(4g\ell)$, $v(0)=1$, $z_i(0)=0$ (размерность матрицы $(k+1)\times k$). Система быстро интегрируется численно с помощью стандартного метода Рунге-Кутты 4-го порядка (авторы пользовались пакетом Scilab 5.5). Поскольку экспериментальные погрешности измерений не оцениваются ниже 10 % и в экспонентах n^2, то достаточно ограничиться небольшим порядком системы $(k+1)$ по сравнению, например, с методом прямых.

Процедура выбора шага интегрирования не вызывает принципиальной трудности. В эксперименте фиксируется ТДС-спектр $J(T)$ ($T\leftrightarrow t\leftrightarrow t'$). Представление ТДС-пика на равномерной сетке из 100 узлов достаточно (и даже избыточно). Из соображений численной аппроксимации с запасом можно брать шаг порядка секунды (даже при экспериментах на очень тонких мембранах за это время никаких заметных изменений не наблюдается). Практически такая «пристрелка» шага в физическом контексте не вызывает затруднений. Другое дело, что эта равномерная сетка при пересчете на безразмерную переменную $t'=\int_0^t D(s)ds/\ell^2$ дает монотонно растущий шаг и экономию объема вычислений.

Этап начального насыщения

Остановимся на начальном насыщении водородом и коэффициенте при квадратичной нелинейности $\tilde{b}(t)$. Начальное насыщение проводится при относительно высоких температуре $T=\overline{T}=\text{const}$ и давлении напуска $\bar{p}=\text{const}$

(для интенсификации сорбции). После установления равновесной концентрации имеем

$$\mu(\overline{T})s(\overline{T})\bar{p} = b(\overline{T})\bar{q},\ \ \bar{c} = g\bar{q}\ (g = \text{const}),$$

$$\Rightarrow \bar{c} = gb_0^{-1/2}\sqrt{\mu s\bar{p}}\,\big|_{\overline{T}} \exp\left\{E_b[2R\overline{T}]^{-1}\right\},$$

$$\tilde{b}(t) = \bar{q}\,b(t)\ell^2 D^{-1} = \bar{c}\,b(t)\ell^2[gD(t)]^{-1},$$

$$\tilde{b}_0 \exp\left\{-E_{\tilde{b}}[RT(t)]^{-1}\right\},\ \ E_{\tilde{b}} \equiv E_b - E_D,$$

$$\tilde{b}_0 \equiv \ell^2 D_0^{-1}\sqrt{b_0\mu s\bar{p}}\,\big|_{\overline{T}} \exp\left\{E_b[2R\overline{T}]^{-1}\right\}.$$

Формально $\tilde{b}(t) \equiv \tilde{b}(T(t))$ – аррениусовский параметр с энергией активации $E_b - E_D$. Как правило, $E_b > E_D$ и поверхностные процессы быстрее интенсифицируются с нагревом ($\dot{b} = \ldots E_b\dot{T}$, $\dot{D} = \ldots E_D\dot{T}$), так что $E_{\tilde{b}} > 0$. Предэкспонента $\tilde{b}_0$ зависит от всех параметров D_0, b_0, E_b, s_0, E_s (кроме E_D). Тем самым коэффициент $\tilde{b}$ в ТДС-эксперименте меняется строго монотонно и находится в определенном ограниченном диапазоне $0 < \tilde{b}^- \leqslant \tilde{b}(t) \leqslant \tilde{b}^+$.

Первое приближение

Качественную картину отражает уже первое приближение (у второго в сумме слагаемого на порядок больше n^2 в экспоненте):

$$\dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) -$$

$$-\varkappa\int_0^t \dot{v}(\tau)\exp\left\{-\pi^2[t-\tau]\right\}d\tau,\ \ \varkappa \equiv 4g\ell,$$

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - \varkappa z(t),\ \ z \equiv z_1, \\ \dot{z}(t) = -\tilde{b}(t)v^2(t) - (\varkappa + \pi^2)z(t), \end{cases} \qquad (13)$$

$v(0) = 1$, $z_1(0) = 0$. Качественный характер движения на фазовой плоскости (v, z) изображен на рис. 1. Пунктиром показаны параболы

$$\dot{v}, \dot{z} = 0\colon\ z = -\tilde{b}(t)\varkappa^{-1}v^2,\ \ -\tilde{b}(t)[\varkappa + \pi^2]^{-1}v^2.$$

Поле фазовой скорости системы (13) нестационарно, но его изменение монотонно и ограниченно в силу $\tilde{b}(t) \in [\tilde{b}^-, \tilde{b}^+]$. Параболы несколько сдвигаются влево ($E_b > E_D$) или вправо ($E_b < E_D$). Качественная структура поля остается неизменной. Обоснуем неограниченную продолжимость решения $v(t), z(t)$. В соответствии с общей теорией [21, с. 110] решение либо продолжимо вперед неограниченно, либо достигнет границы треугольника (компакта). Структура поля скоростей такова, что гипотетически можно достичь только начала координат. Но оценка во время движения

$$\dot{v} \geqslant -\tilde{b}v^2,\ \ v(0) = 1 \Rightarrow v(t) \geqslant \left[1 + \int_0^t \tilde{b}(\tau)\,d\tau\right]^{-1}$$

показывает, что за конечное время это невозможно. Фазовая траектория движения, выходя из точки $(1, 0)$, пересекает первую параболу и в дальнейшем, не покидая «клюв» между параболами, асимптотически стремится к началу координат при $t \to +\infty$ (формально $T = \text{const}$ по достижении $T_{\max}$ и дегазацию можно наблюдать бесконечно).

Аналогично можно рассматривать и второе приближение уравнения типа Риккати (12):

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\tilde{b}(t)v^2 - \varkappa z_1(t) - \varkappa z_2(t), \\ \dot{z}_1(t) = -\tilde{b}(t)v^2 - \left[\varkappa + \pi^2\right]z_1 - \varkappa z_2, \\ \dot{z}_2(t) = -\tilde{b}(t)v^2 - \varkappa z_1 - \left[\varkappa + 9\pi^2\right]z_2. \end{cases} \qquad (14)$$

Результаты моделирования

Для численных экспериментов были использованы данные по никелю и нержавеющей стали марки 12Х18Н10Т. Варьирование параметров позволяет оценить степень чувствительности («производные») ТДС-спектра к выделенным лимитирующим факторам.

Данные по никелю [5]: $[E]$ = кДж/моль; $D = 7.5 \times 10^{-3}\exp\{-40/RT\}$ [см^2/с]; $b_{\text{vol}} = 1.53 \times 10^{-18}\exp\{-43.2/RT\}$ [см^4/с]; $s = 1.8 \times 10^{-2}\exp\{-61.4/RT\}$; $\bar{p} = 37.4$ [Торр]; $\ell = 0.02$ [см]; $\overline{T} = 770$ [K], $T(0) = 295$ [K]; $\dot{T} = 0.5$ [K/с]. Для определенности зафиксируем $b_{0\ \text{surf}} = 1.53 \times 10^{-14}$ [см^2/с]; $g = 100$ [1/с].

Данные по стали марки 12Х18Н10Т [5, 22]: $D = 3.09 \times 10^{-4}\exp\{-27.78/RT\}$; $b_{\text{vol}} = 5.05 \times 10^{-13}\exp\{-97.14/RT\}$; $s = 7.05 \times 10^{-2}\exp\{-59.51/RT\}$; $T(0) = 300$. Для определенности $b_{0\text{surf}} = 5.05 \times 10^{-9}$; $\ell = 0.1$; $g = 100$; $\bar{p} = 100$; $\overline{T} = 850$, $\dot{T} = 0.5$ [K/с].

При моделировании потока термодесорбции численно решалась система 15 уравнений. На рис. 2, 3 параметры перечисляются в порядке убывания максимумов кривых.

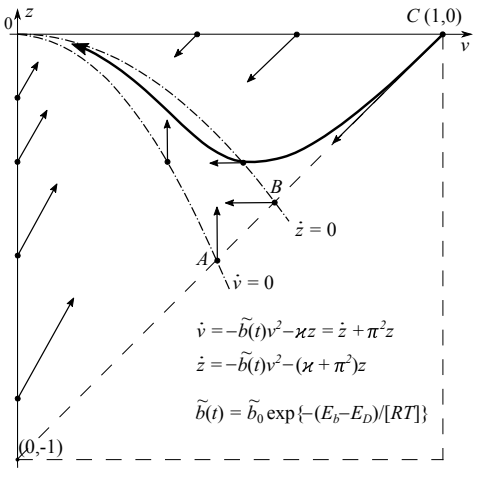


Рис. 1. Движение на фазовой плоскости (v, z)

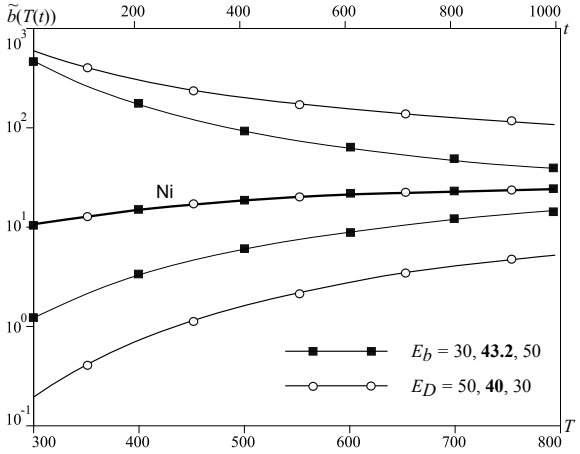


Рис. 2. Влияние энергий активации на $\tilde{b}(t)$, Ni

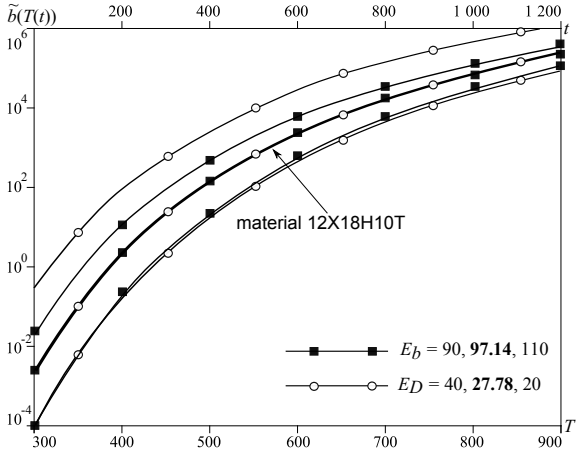


Рис. 3. Влияние энергий активации на $\tilde{b}(t)$

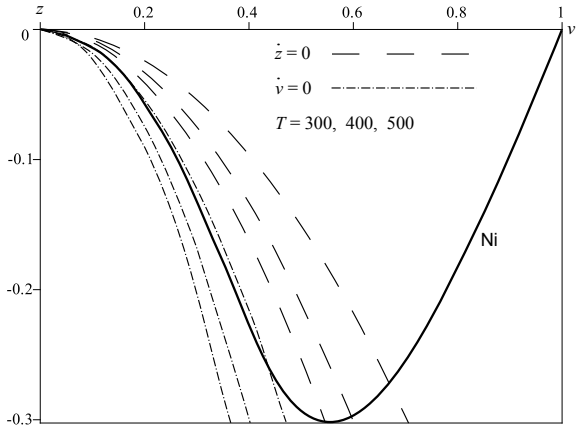


Рис. 4. Первое приближение (13), Ni

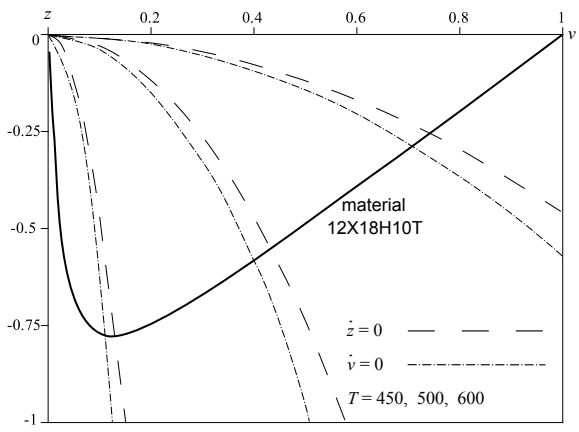


Рис. 5. Первое приближение (13), сталь

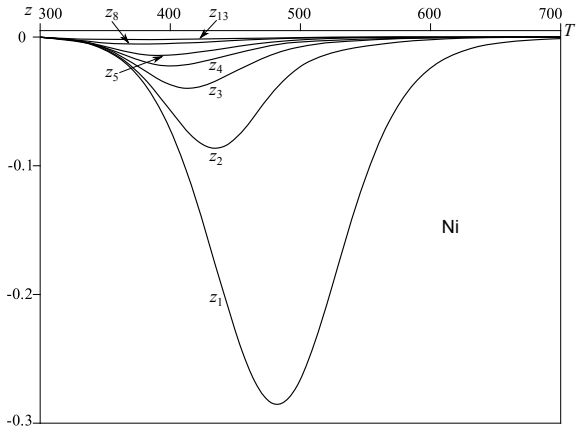


Рис. 6. Убывание функций $|z_i(t)|$, Ni

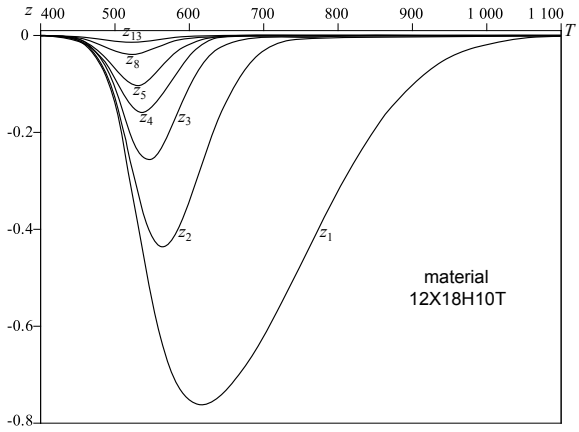


Рис. 7. Убывание функций $|z_i(t)|$, сталь

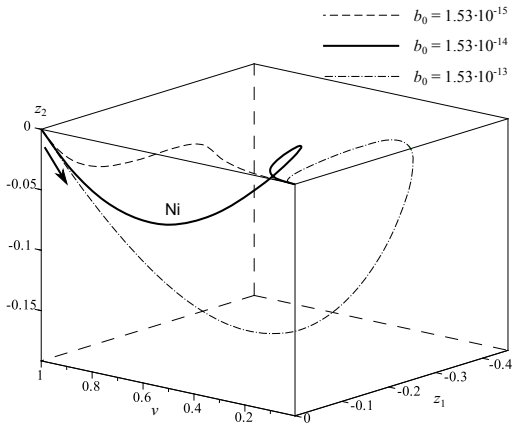


Рис. 8. Система (14), влияние b_0, Ni

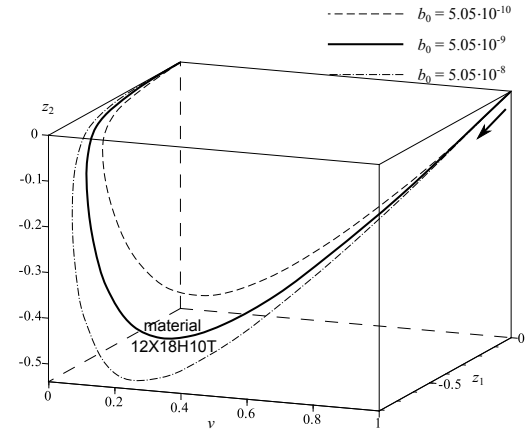


Рис. 9. Система (14), влияние b_0, сталь

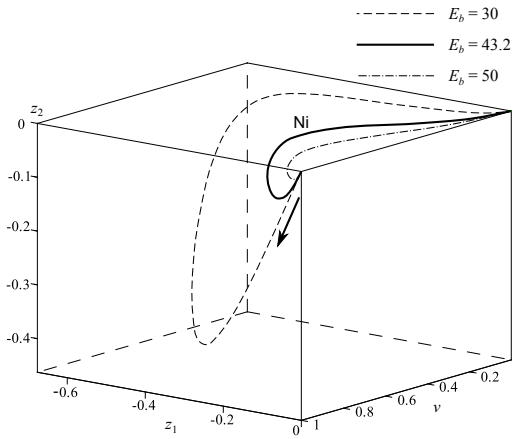


Рис. 10. Система (14), влияние E_b, Ni

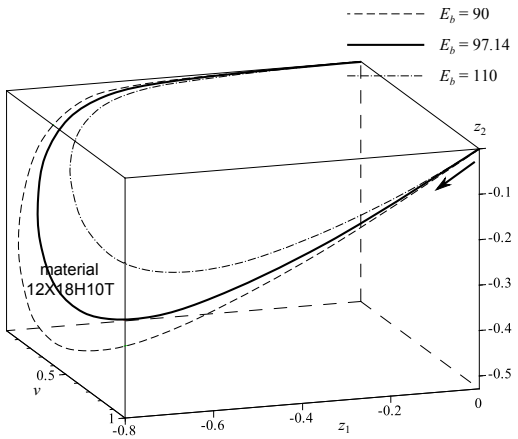


Рис. 11. Система (14), влияние E_b, сталь

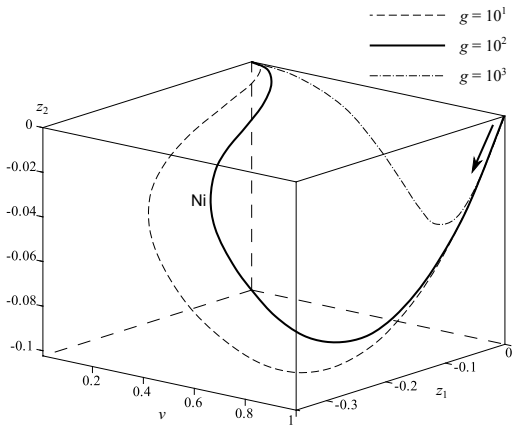


Рис. 12. Система (14), влияние g, Ni

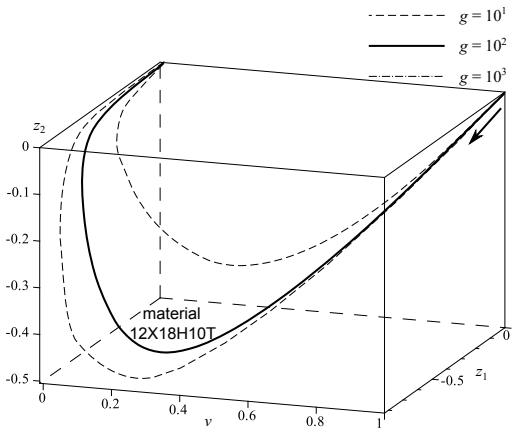


Рис. 13. Система (14), влияние g, сталь

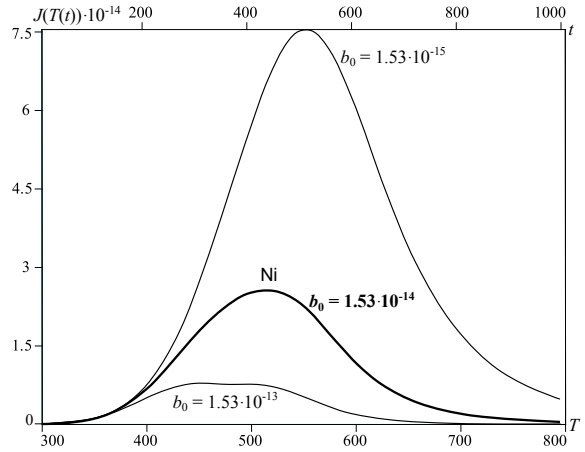


Рис. 14. ТДС-спектр, влияние b_0, Ni

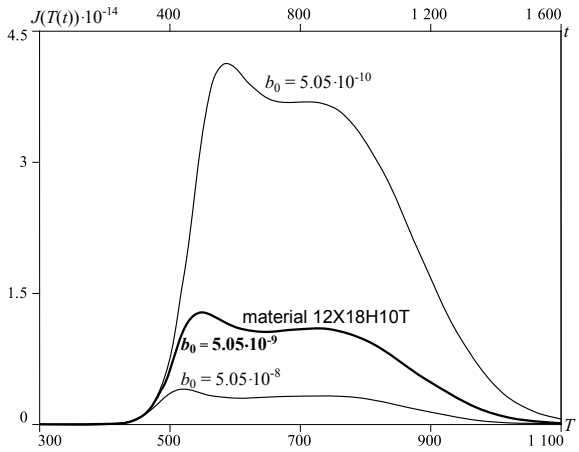


Рис. 15. ТДС-спектр, влияние b_0, сталь

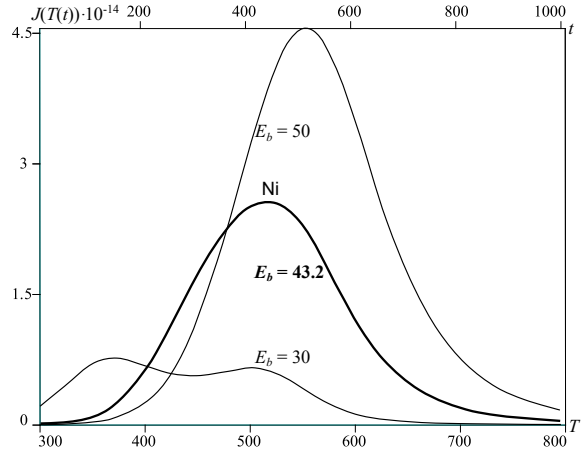


Рис. 16. ТДС-спектр, влияние E_b, Ni

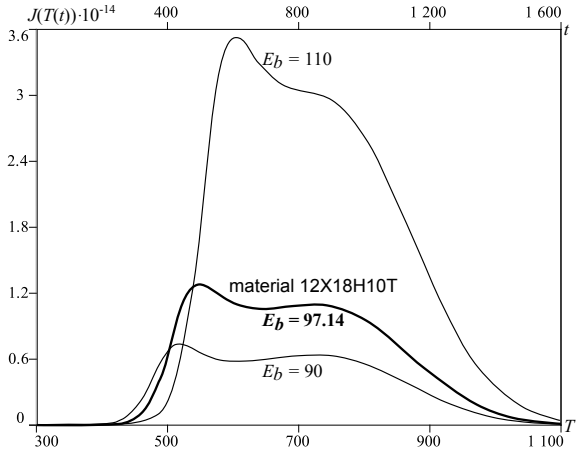


Рис. 17. ТДС-спектр, влияние E_b, сталь

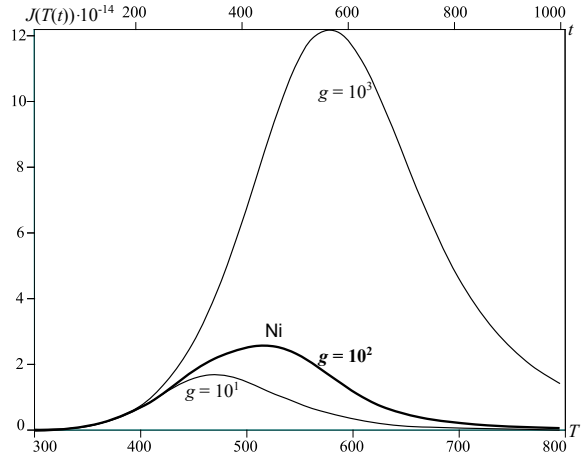


Рис. 18. ТДС-спектр, влияние g, Ni

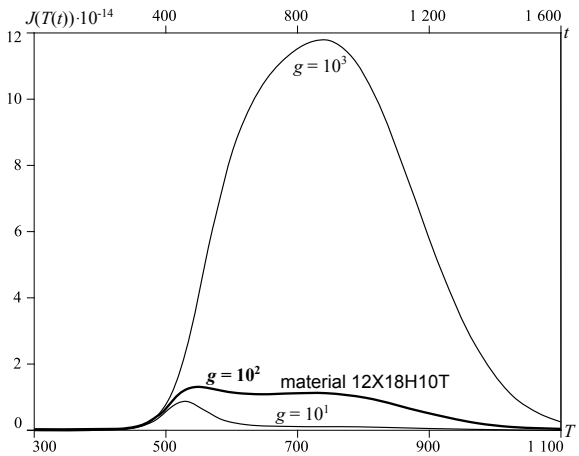


Рис. 19. ТДС-спектр, влияние g, сталь

Заключение

В статье представлена краевая задача с нелинейными динамическим граничными условиями для моделирования ТДС-спектра дегазации конструкционного материала, предварительно насыщенного водородом, в условиях вакуумирования и монотонного нагрева. Решение прямой задачи необходимо для качественного сопоставления с экспериментальными данными и как итерационная составляющая алгоритма параметрической идентификации. Для моделирования термодесорбционного потока предложен вычислительный алгоритм, требующий (вместо приближенного решения распределенной краевой задачи с текущими приближениями параметров) лишь интегрирования нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений невысокого порядка (по сравнению, например, с методом прямых). Приведены результаты вычислительных экспериментов, использующих данные по никелю и конструкционной стали.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-00744).

Литература

1. *Водород* в металлах / Ред. Г. Алефельд, И. Фёлькль. М.: Мир, 1981. Т. 1, 506 с. Т. 2, 430 с.

2. *Взаимодействие* водорода с металлами / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.

3. *Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярко С. С.* Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.

4. *Черданцев Ю. П., Чернов И. П., Тюрин Ю. И.* Методы исследования систем металл – водород. Томск: ТПУ, 2008. 286 с.

5. *Изотопы* водорода. Фундаментальные и прикладные исследования / Ред. А. А. Юхимчук. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 697 с.

6. *Varin R. A., Czujko T., Wronski Z. S.* Nanomaterials for solid state hydrogen storage. Springer, New York, 2009. 338 p. doi: 10.1007/978-0-387-77712-2.

7. *The hydrogen* economy / Eds. M. Ball, M. Wietschel. Cambridge University Press, 2009. 646 p.

8. *Handbook* of hydrogen storage: new materials for future energy storage / Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.

9. *Gabis I. E.* The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids // Technical Physics. 1999. Vol. 44, N 1. P. 90–94. doi:10.1134/1.1259257

10. *Lototskyy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review // International Journal of Hydrogen Energy. 2014. Vol. 39. P. 5818–5851. doi:10.1016/j.ijhydene.2014.01.158

11. *Indeitsev D. A., Semenov B. N.* About a model of structure-phase transfomations under hydrogen influence // Acta Mechanica. 2008. Vol. 195. P. 295–304. doi:10.1007/s00707-007-0568-z

12. *Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A.* Kinetics of hydrogen evolution from MgH_2: experimental studies, mechanism and modelling // International Journal of Hydrogen Energy. 2010. Vol. 35. P. 9060–9069. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.05.092

13. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // Applied Mathematical Modelling. Elsevier. 2009. Vol. 33, N 10. P. 3776–3791. doi:10.1016/j.apm.2008.12.018

14. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of a hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations // International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, N 1. P. 1295–1305. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.07.099

15. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface // Mathematical Modelling. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

16. *Заика Ю. В.* Интегральные операторы прогнозирования и идентификация моделей водородопроницаемости. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2013. 505 с.

17. *Zaika Yu. V., Kostikova E. K.* Computer simulation of hydrogen thermodesorption // Advances in Materials Science and Applications. World Acad. Publ. 2014. Vol. 3, Iss. 3. P. 120–129. doi:10.5963/AMSA0303003

18. *Мартинсон Л. К., Малов Ю. И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: МГТУ, 2002. 368 с.

19. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

20. *Егоров А. И.* Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

21. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: РХД, 2000. 368 с.

22. *Popov V. V., Denisov E. A.* Inhibition of hydrogen permeability by TiN: evaluation of kinetic parameters / Hydrogen Materials Science and Chemistry of Carbon Nanomaterials / Eds. T. N. Veziroglu et al. Springer. 2007. P. 671–680. doi:10.1007/978-1-4020-5514-0

Поступила в редакцию 06.04.2015

References

1. *Vodorod* v metallakh [Hydrogen in metals] / Eds. G. Alefeld, J. Völkl. Moscow: Mir, 1981. Vol. 1, 506 p. Vol. 2, 430 p.

2. *Vzaimodeistvie* vodoroda s metallami [Interaction of hydrogen with metals] / Ed. A. P. Zakharov. Moscow: Nauka, 1987. 296 p.

3. *Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarko S. S.* Pronitsaemost' vodoroda cherez metally [Hydrogen permeability through metals]. Moscow: MIFI, 2008. 144 p.

4. *Cherdantsev Yu. P., Chernov I. P., Tyurin Yu. I.* Metody issledovaniya sistem metall – vodorod [Methods of studying metal–hydrogen systems]. Tomsk: TPU, 2008. 286 p.

5. *Izotopy* vodoroda. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya [Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies] / Ed. A. A. Yukhimchuk. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. 697 p.

6. *Varin R. A., Czujko T., Wronski Z. S.* Nanomaterials for solid state hydrogen storage. Springer, New York, 2009. 338 p. doi:10.1007/978-0-387-77712-2

7. *The hydrogen* economy / Eds. M. Ball, M. Wietschel. Cambridge University Press, 2009. 646 p.

8. *Handbook* of hydrogen storage: new materials for future energy storage / Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.

9. *Gabis I. E.* The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids. Technical Physics. 1999. Vol. 44, N 1. P. 90–94. doi:10.1134/1.1259257

10. *Lototskyy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review. International Journal of Hydrogen Energy. 2014. Vol. 39. P. 5818–5851. doi:10.1016/j.ijhydene.2014.01.158

11. *Indeitsev D. A., Semenov B. N.* About a model of structure-phase transfomations under hydrogen influence. Acta Mechanica. 2008. Vol. 195. P. 295–304. doi:10.1007/s00707-007-0568-z

12. *Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A.* Kinetics of hydrogen evolution from MgH_2: experimental studies, mechanism and modelling. International Journal of Hydrogen Energy. 2010. Vol. 35. P. 9060–9069. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.05.092

13. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding. Applied Mathematical Modelling. Elsevier. 2009. Vol. 33, N 10. P. 3776–3791. doi:10.1016/j.apm.2008.12.018

14. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of a hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations. International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, N 1. P. 1295–1305. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.07.099

15. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface. Mathematical Modelling. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

16. *Zaika Yu. V.* Integral'nye operatory prognozirovaniya i identifikatsiya modelei vodorodopronitsaemosti [Integral forecasting operators and identification of hydrogen permeability models]. Petrozavodsk: KarRC of RAS, 2013. 505 p.

17. *Zaika Yu. V., Kostikova E. K.* Computer simulation of hydrogen thermodesorption. Advances in Materials Science and Applications. World Acad. Publ. 2014. Vol. 3, Iss. 3. P. 120–129. doi:10.5963/AMSA0303003

18. *Martinson L. K., Malov Yu. I.* Differentsial'nye uravneniya matematicheskoi fiziki [Differential equations of mathematical physics]. Moscow: MGTU, 2002. 368 p.

19. *Kheil Dzh.* Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii [Theory of functional-differential equations]. Moscow: Mir, 1984. 421 p.

20. *Egorov A. I.* Uravneniya Rikkati [Riccati equation]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p.

21. *Arnol'd V. I.* Obyknovennye differentsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. Izhevsk: RKhD, 2000. 368 p.

22. *Popov V. V., Denisov E. A.* Inhibition of hydrogen permeability by TiN: evaluation of kinetic parameters. Hydrogen Materials Science and Chemistry of Carbon Nanomaterials / Eds. T. N. Veziroglu et al. Springer. 2007. P. 671–680. doi:10.1007/978-1-4020-5514-0

Received April 06, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Заика Юрий Васильевич
зав. лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Костикова Екатерина Константиновна
младший научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: fedorova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Zaika, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Kostikova, Ekaterina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: fedorova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 54–68
DOI: 10.17076/mat137

УДК 519.6:539.2

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ МЕМБРАН ГАЗОРАЗДЕЛЕНИЯ

Ю. В. Заика, Н. И. Родченкова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Производство высокочистого водорода необходимо для экологически чистой энергетики и различных химико-технологических процессов. Значительная часть водорода будет производиться за счет конверсии метана, а также его выделения из других углеводородных газов, не вовлеченных в процесс производства энергии. Методом измерения удельной водородопроницаемости исследуются различные сплавы, перспективные для использования в газоразделительных установках. Требуется оценить параметры диффузии и сорбции с тем, чтобы иметь возможность численно моделировать различные сценарии и условия эксплуатации материала (включая экстремальные), выделять лимитирующие факторы. В статье представлены нелинейная модель водородопроницаемости и ее модификации в соответствии со спецификой эксперимента, разностная схема решения краевой задачи и результаты численного моделирования.

Ключевые слова: водородопроницаемость, нелинейные краевые задачи, разностные схемы, численное моделирование.

Yu. V. Zaika, N. I. Rodchenkova. BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HYDROGEN PERMEABILITY OF GAS SEPARATION MEMBRANES

High-purity hydrogen is required for clean energy and a variety of chemical technology processes. A considerable part of hydrogen is to be obtained by methane conversion and its separation from other hydrocarbon gases not involved in energy production. Different alloys, which may be well-suited for use in gas-separation plants, were investigated by measuring specific hydrogen permeability. One had to estimate the parameters of diffusion and sorption to numerically model the different scenarios and experimental conditions of the material usage (including extreme ones), and identify the limiting factors. This paper presents a nonlinear model of hydrogen permeability and its modifications in accordance with the specifics of the experiment, the difference scheme for the solution of the boundary-value problem, and the results of numerical modelling. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 15-01-00744).

Key words: hydrogen permeability, nonlinear boundary-value problems, difference schemes, numerical simulation.

Введение

Интерес к взаимодействию водорода с различными материалами носит многоплановый характер [1–10]. Достаточно упомянуть задачи энергетики, защиты металлов от водородной коррозии, проектирования химических реакторов, ракетостроения. Гидриды позволяют удерживать большое количество водорода. С этим связаны перспективы водородных аккумуляторов и двигателей с высоким уровнем безопасности: без высоких давлений и низких температур. На обратимом легировании металлов водородом основаны пластифицирование и термоводородная обработка титановых сплавов. Некоторые частные задачи материаловедения исследованы в [11–15]. Энтузиасты говорят не только о водородной энергетике, но и о водородной экономике [7].

Экспериментальный опыт показывает, что лимитирующими являются не только диффузионные процессы, но и физико-химические явления на поверхности [1, 2]. Параметры переноса зависят и от технологических особенностей получения партии материала, поэтому вряд ли следует ориентироваться на получение «табличных данных», нужны эффективные алгоритмы обработки экспериментальных кривых. В статье остановимся на методе проницаемости, учитывая лишь основные факторы и информационные возможности рассматриваемого эксперимента. Основой для проведенных исследований послужили работа [16] и данные по водородопроницаемости некоторых перспективных сплавов [20].

Модель водородопроницаемости

Вначале кратко опишем эксперимент. Образец конструкционного материала, нагретого до фиксированной температуры, является перегородкой вакуумной камеры. Предварительно проведена дегазация. В начальный момент времени на входной стороне создается давление молекулярного водорода (впрыскивается порция газа). Измеряется падающее давление на входе и растущее давление водорода в выходной емкости. Информационные возможности эксперимента ограничены, поэтому в модели водородопроницаемости будем учитывать только основные факторы для прикладной задачи мембранной фильтрации.

Рассмотрим перенос водорода сквозь образец материала (пластину толщины ℓ и площади S). Температура T постоянна в течение одного эксперимента. Концентрация растворенного водорода (в атомарном состоянии) относительно мала, и диффузионный поток можно считать пропорциональным градиенту концентрации. Часть атомов H взаимодействует с ловушками (микродефекты различной природы, включая микрополости), которые могут удерживать водород. Ориентируясь на прикладной смысл задачи и возможности метода проницаемости, ограничимся представлением об «ограниченном стоке» без дополнительной детализации. В качестве модели диффузии с ограниченным захватом в объеме примем нелинейную систему уравнений

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(T)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - f(T,z,c), \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f \equiv a(T)\Big[1 - \frac{z(t,x)}{z_{\max}}\Big]c - a_{\text{out}}(T)z, \tag{2}$$

где $c(t,x)$ – концентрация диффундирующего водорода (атомарного); $z(t,x)$ – концентрация захваченного диффузанта; D – коэффициент диффузии; $a \equiv a_{\text{in}}$ и a_{out} – коэффициенты поглощения и высвобождения атомов H ловушками. Знак тождества часто используем в смысле равенства по определению. Величину $z_{\max}$ считаем малой, захват носит характер поправки и не требует более детального моделирования. Для конструкционных материалов (рассматривается металлический сплав) в рабочем диапазоне температур $T \in [500, 800]$ K, как правило, $a_{\text{out}} \ll a_{\text{in}}$ и в процессе насыщения (проницаемости) нет необходимости усложнять модель (далее полагаем $a_{\text{out}} = 0$). Величины D, a зависят от температуры T образца по закону Аррениуса с предэкспоненциальными множителями D_0, a_0 и энергиями активации E_D, E_a (R – универсальная газовая постоянная): $D = D_0 \exp\{-E_D/[RT(t)]\}$, $a = a_0 \exp\{-E_a/[RT(t)]\}$. Начальные данные: в силу предварительной дегазации

$$c(0,x) = 0,\ z(0,x) = 0,\ x \in [0,\ell]. \tag{3}$$

Из баланса потоков получаем следующие нелинейные граничные условия:

$$-\frac{dQ_{\text{in}}}{dt} = \big[\mu(T)s(T)p_0(t) - b(T)c_0^2(t)\big]S = -SD\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0}, \tag{4}$$

$$-\frac{dQ_{\text{out}}}{dt} = \big[\mu(T)s(T)p_\ell(t) - b(T)c_\ell^2(t)\big]S = SD\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=\ell}. \tag{5}$$

Здесь $Q_{\text{in}}(t)$, $Q_{\text{out}}(t)$ – количество атомов водорода во входной емкости объема V_{in} и выходной емкости объема V_{out}, $c_0(t) \equiv c(t,0)$, $c_\ell(t) \equiv c(t,\ell)$. Газообразный водород в рассматриваемом «рабочем» диапазоне температур находится в молекулярной форме, но для

единообразия, поскольку сквозь металлическую мембрану диффундирует атомарный водород, подсчет ведем в атомах. Согласно кинетической теории газов, плотность J_p падающего на поверхность потока частиц связана с давлением p по формуле Герца–Кнудсена: $J_p = p/\sqrt{2\pi mkT}$ (k – постоянная Больцмана, m – масса молекулы водорода). В контексте рассматриваемой методики эксперимента удобно в качестве единиц измерений выбрать $[\ell] = \mathrm{cm}$, $[p] = \mathrm{Torr}$. Тогда численно получаем зависимость $J_p = \mu p$, $\mu(T) \approx 2.474 \cdot 10^{22}/\sqrt{T}$ $\big([\mu] = 1_{H_2}/(\mathrm{Torr\,cm^2\,s}), [T] = \mathrm{K}\big)$. На поверхности происходят процессы физической адсорбции, хемосорбции, диссоциации молекул на атомы, растворения. Лишь малая часть «налетающих» атомов H окажется в абсорбированном состоянии в объеме. Это отражается множителем s. Итак, μsp – результирующий поток атомов в объем сквозь поверхность без разделения на более элементарные стадии. По контексту слово «плотность» обычно опускаем. Можно вместо s написать $2s$ и интерпретировать безразмерный вероятностный множитель s как долю абсорбируемых атомов H.

Далее, $J_{0,\ell} = bc_{0,\ell}^2$ ($[J] = 1_H/(\mathrm{cm^2\,s})$) – это плотности десорбции из образца (квадратичность является следствием соединения двух атомов водорода в молекулу), b – коэффициент десорбции. Для s и b также предполагаем аррениусовскую зависимость от температуры. По крайней мере формально: в экспоненте «энергия активации» E_s может оказаться и отрицательной величиной как линейная комбинация энергий активаций и теплот поверхностных процессов на пути «из газа в раствор».

Отметим следующее. Если с обеих сторон мембраны поддерживать постоянное давление насыщения $\bar{p}$ молекулярного водорода при постоянной температуре T, то через некоторое время установится равновесная концентрация $\bar{c}$ растворенного атомарного диффузионно подвижного водорода. Из модели (4), (5), приравнивая производные к нулю, получаем $\bar{c} = \Gamma\sqrt{\bar{p}}$, $\Gamma \equiv \sqrt{\mu s/b}$. Таким образом, модель соответствует диапазону адекватности закона Сивертса ($\bar{c} \propto \sqrt{\bar{p}}$).

Уточним экспериментальные условия. Объемы $V_{\mathrm{in,out}}$ – несколько литров, толщина мембраны ℓ меньше mm, площадь S – около $\mathrm{cm^2}$, давление напуска $p_0(0)$ – несколько десятков Torr. Диапазон $[p_{\min}, p_{\max}]$ невелик, ограничимся $z_{\max} = \sigma\bar{c}$, $\sigma \leqslant 0.1$. Это не приведет к нарушению закона Сивертса $\big(\bar{c} + z_{\max} \propto \sqrt{\bar{p}}\big)$, причем $\bar{c} + z_{\max} \approx \bar{c} = \Gamma\sqrt{\bar{p}}$ в пределах экспериментальной точности.

Остается определить величины Q_{in}, Q_{out}. В масштабе времени установления диффузии газ находится в термодинамическом квазиравновесии с поверхностью, поэтому воспользуемся формулой $N = pV/(kT)$. Здесь N – количество частиц газа, занимаемого объем V при температуре T и давлении p (в системе СИ $[p] = \mathrm{Pa}$, $[V] = \mathrm{m^3}$, $[k] = \mathrm{J/K}$). С учетом соотношений $\mathrm{Torr} = 133.322\,\mathrm{Pa}$, $\mathrm{Pa} = \mathrm{J/m^3}$ (формально), получаем для соответствующих давлений и объемов в граничных условиях (4), (5) $Q = 2N = \alpha pV/T$, $\alpha \approx 1.931 \cdot 10^{19}$. Здесь p, V, T означают численные значения в выбранных единицах (Torr, $\mathrm{cm^3}$, K).

Функция стока

Остановимся более подробно на функции стока $f(T, z, c) = a\big[1 - zz_{\max}^{-1}\big]c$ $\big([a] = 1/\mathrm{s}\big)$. Скорость поглощения атомов H увеличивается с ростом концентрации диффузанта и уменьшается по мере заполнения ловушек. Уравнение диффузии обладает неограниченной скоростью передачи возмущения, но переход к модификации уравнения «с конечной скоростью» не представляется целесообразным. Более разумно учесть захват части атомов неоднородностями структуры материала. Косвенным подтверждением являются трудности полной дегазации – процесс требует высоких температур, глубокого вакуумирования и длительного времени. Диффундирующий растворенный водород относительно быстро десорбируется, а «оторвать» захваченные атомы H значительно труднее. Как уже упоминалось, учесть возможность полной дегазации можно введением дополнительного параметра: $f = a_{\mathrm{in}}\big[1 - zz_{\max}^{-1}\big]c - a_{\mathrm{out}}z$. Захват ограниченной емкости можно интерпретировать и следующим образом. Часть атомов водорода идет на «расширение решетки» металла, причем эта связь приоритетна по сравнению с диффузионным перемещением вглубь. Тогда при достаточно большом коэффициенте a сначала будет преимущественно заполняться эта «ловушка», обеспечивающая и определенное запаздывание переноса водорода.

Величину $z_{\max}$ можно считать независимым параметром модели. Связь $z_{\max} = \sigma\bar{c}$ принята по следующим соображениям. Значение $z_{\max}$ зависит от материала и внешних условий, что «коррелирует» с равновесной растворимостью диффузионно подвижного водорода. В рамках модели $\bar{c} = \bar{c}(s, b, \bar{p}, T)$. Полагая в указанном диапазоне температур и давлений эту связь монотонной, принимаем пропорцию $z_{\max} = \sigma\bar{c}$ ($\sigma \ll 1$) с учетом того, что материал однороден и захват невелик. Общая растворимость определяется кон-

центрацией $\bar{c} + z_{\max} \propto \bar{p}$. Это согласуется с известным мнением [17, с. 512]: «Правильнее, по всей вероятности, считать, что часть водорода прочно удерживается дефектами решетки и поэтому не должна учитываться при определении концентрации, градиент которой входит в уравнение закона Фика, т. е. часть водорода является полуинертной примесью. Закон Фика применим только к оставшейся части».

Итак, эффект захвата (включая «расширение решетки») учтен без дополнительных параметров в соответствии с ограниченной информативностью метода проницаемости (на входе давление монотонно падает, на выходе монотонно растет до установления). Другое дело, например, пористый вольфрам [3], когда микропоры достаточно велики для рекомбинации атомов водорода в молекулы. Это уже требует более детального моделирования захвата.

Возможные модификации

Представленную модель (1)–(5) будем считать *базовой*. При необходимости можно учесть емкость поверхности как дополнительной «удерживающей силы». Кроме того, на поверхности могут образовываться заметные оксидная пленка и гидридная фаза (по существу слой другого материала), что существенно сказывается на водородопроницаемости. За счет химических связей в гидриде значительно больше водорода, чем в том же объеме жидкого водорода. В принципе можно считать мембрану трехслойной и учесть динамическое накопление в приповерхностных слоях, в том числе и за счет гидридообразования. Появятся дополнительные коэффициент диффузии и коэффициенты в условиях сопряжения на стыках слоев (равенство диффузионных потоков, но скачки концентраций)… Далее, при большом перепаде давлений мембрана испытывает изгиб. Простейший вариант (без учета напряжений и деформаций) – считать значения s, b различными при $x = 0, \ell$. При такой детализации образуется «снежный ком» параметров с неизвестными априори значениями.

Для примера остановимся на «интегральном» учете влияния включений гидридной фазы. Выделим слой малой толщины $\lambda \ll \ell$, который будет играть роль «физической» поверхности. Вместо $z_{\max} = \text{const}$ полагаем $z_{\max}(x)$: $z_{\max} = \sigma\bar{c}$ $\big(x \in [\lambda, \ell - \lambda],\ \sigma < 0.1\big)$ и

$$
\begin{aligned}
z_{\max} &= \zeta\bar{c} - 2(\zeta - \sigma)\bar{c}\lambda^{-1}x + \\
&\quad + (\zeta - \sigma)\bar{c}\lambda^{-2}x^2, \quad \zeta > 1,\ x \in [0, \lambda], \\
z_{\max} &= \zeta\bar{c} + 2(\zeta - \sigma)\bar{c}\lambda^{-1}(x - \ell) + \\
&\quad + (\zeta - \sigma)\bar{c}\lambda^{-2}(x - \ell)^2,\ \ x \in [\ell - \lambda, \ell].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Прокомментируем эти формулы. Внутри мембраны $\big(x \in [\lambda, \ell - \lambda]\big)$ учитываем только малый захват дефектами структуры материала. Образование гидрида связано с изменением объема (как правило, с увеличением). Если это происходит внутри в заметном масштабе, то материал растрескивается и непригоден для рассматриваемых целей. На поверхности возникнуть гидридному «вздутию» значительно легче. Растет зародыш гидрида за счет растворенного атомарного водорода, из газовой фазы поглощение значительно медленнее. Обозначим $\zeta\bar{c}$ $(\zeta > 1)$ максимальную концентрацию водорода в приповерхностном слое с учетом частичной заполненности гидридом. Формулы (6) означают, что максимальная емкость ловушек быстро возрастает в приповерхностных слоях (используем квадратичную зависимость). Параболы гладко «стартуют» (с нулевой производной) с уровня $\sigma\bar{c}$ при $x = \lambda$, $x = \ell - \lambda$ и стремятся к $\zeta\bar{c}$ по мере приближения к геометрическим входной и выходной поверхностям. Различные «емкости» считаем пропорциональными равновесной растворимости диффундирующего водорода, так что при полной дегазации насыщенного водородом образца останется пропорциональность общей концентрации корню из давления насыщения. Отметим также, что в случае $z_{\max}(x)$ увеличивается интенсивность захвата $f(T, z, c)$ именно у поверхности (при равных z, c): там нет «симметрии сил» и дефектов больше.

Модифицируем изменение «свободных» поверхностей, через которые идет процесс растворения и десорбции. Обозначим их $S_{0,\ell}$ (геометрические объекты или площади – различаем по контексту). При частичной занятости начальной S «непроводящими» гидридными включениями имеем $S_{0,\ell} < S$. Примем модель

$$
\begin{aligned}
&S_0 = S,\ t < \tilde{t} \quad \big[z(t,0) < \sigma\bar{c},\ z(\tilde{t},0) = \sigma\bar{c}\big], \\
&S_0 = \xi S + (1 - \xi)S[\zeta\bar{c} - z(t,0)][\zeta\bar{c} - \sigma\bar{c}]^{-1},
\end{aligned}
$$

$\xi \in (0,1)$, $t \geqslant \tilde{t}$. По постановке эксперимента и модели динамика концентраций носит монотонный характер. Водород начинает поступать сквозь поверхность $S_0 = S$ с наибольшей локальной интенсивностью захвата, так что быстрее всего уровень насыщения дефектов $\sigma\bar{c}$ достигнет концентрация $z(t,0)$ (если вообще это произойдет, иначе $S_0 \equiv S$ и ничего не меняем). Если наступит ситуация $z(\tilde{t},0) = \sigma\bar{c}$ (с дальнейшим ростом $z(t,0)$), то это свидетельствует о начале образования и роста зародышей гидридной фазы. С этого момента S_0 начинает плавно уменьшаться. В случае до-

стижения максимума $\zeta\bar{c}$ уменьшение S_0 останавливается на уровне $\xi S < S$.

На выходе в приповерхностном слое концентрация диффундирующего водорода снижается, но быстрее растет $z_{\max}(x)$. Примем аналогичную модель для S_ℓ (с заменой $z(t,0)$ на $z(t,\ell)$). Имеется определенная асимметрия: момент начала уменьшения S_ℓ наступит позже. Добавим также, что неявно предполагаем гидридные включения достаточно дискретными, чтобы в целом перенос осуществлялся в перпендикулярном к поверхности направлении. Пренебрегаем и скоростью распада гидрида, что возможно при значительном снижении давления на входе.

Отметим, что задействованные дополнительные параметры λ (толщина «физической» поверхности), $\zeta\bar{c}$ (максимальная концентрация в ловушках с учетом гидридной фазы), ξ (минимальная доля свободной поверхности) можно грубо оценить из физических соображений или даже визуально по итогам эксперимента. Значения зависят не только от материала, но и от условий эксперимента (в частности, давления напуска и температуры). Предложенная модификация (зависимости $z_{\max}(x)$, $S_{0,\ell}(t)$) приводит лишь к некоторым техническим более громоздким выкладкам в излагаемом далее вычислительном алгоритме.

Безразмерная форма краевой задачи

Представим компактно *базовую модель*:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(T)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - a(T)\Big[1 - \frac{z(t,x)}{z_{\max}}\Big]c(t,x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\Big[1 - \frac{z(t,x)}{z_{\max}}\Big]c,\ c(0,x) = 0,\ z(0,x) = 0,$$

$$\mu(T)s(T)p_{0,\ell}(t) - b(T)c_{0,\ell}^2(t) = \mp D(T)\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0,\ell},$$

$$\frac{dQ_{\text{in,out}}}{dt} = -\big[\mu(T)s(T)p_{0,\ell}(t) - b(T)c_{0,\ell}^2(t)\big]S,$$

$$Q_{\text{in,out}} = \alpha p_{0,\ell}(t)V_{\text{in,out}}T^{-1}.$$

Выберем соответствующие нормировки. Температура T фиксирована. По максимальному давлению $\bar{p}_0 = p_0(0)$ определим соответствующие равновесную концентрацию диффундирующего водорода $\bar{c} = \Gamma\sqrt{\bar{p}_0}$ и количества атомов $\overline{Q}_{\text{in}} = \alpha\bar{p}_0V_{\text{in}}/T$, $\overline{Q}_{\text{out}} = \alpha\bar{p}_0V_{\text{out}}/T$. Перейдем к безразмерным координате $y = x/\ell$, концентрациям $u = c/\bar{c}$, $v = z/\bar{c}$ ($z_{\max} = \sigma\bar{c} \ll \bar{c}$) и времени τ: $t = D^{-1}\ell^2\tau$ ($[D] = \text{cm}^2/\text{s}$). Получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \tilde{a}\Big[1 - \frac{v}{v_{\text{m}}}\Big]u,\ \frac{\partial v}{\partial \tau} = \tilde{a}\Big[1 - \frac{v}{v_{\text{m}}}\Big]u,$$

$$u, v \in [0,1],\ y \in (0,1),\ \tau > 0,\ v_{\text{m}} \equiv v_{\max},$$

$$\tilde{a}(T) \equiv a\ell^2D^{-1},\ u_{0,1}(\tau) \equiv u(\tau,y)|_{y=0,1},$$

$$u(0,y) = 0,\ v(0,y) = 0,\ y \in [0,1],$$

$$\widetilde{p}_{0,1}(\tau) \equiv p_{0,\ell}(t){\overline{p}_0}^{-1},\quad \overline{P}_0 \equiv \mu s\overline{p}_0,$$

$$W(T) \equiv b\bar{c}\ell D^{-1} = \overline{P}_0\ell[D\bar{c}]^{-1},$$

$$W\big[\widetilde{p}_0 - u_0^2\big] = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0},$$

$$W\big[\widetilde{p}_1 - u_1^2\big] = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1},$$

$$\overline{Q}_m \equiv S\ell\bar{c} \equiv V_m\bar{c},$$

$$\overline{Q}_{\text{in}}\frac{d\widetilde{p}_0}{d\tau} = -\overline{Q}_mW\big[\widetilde{p}_0 - u_0^2\big],\quad \widetilde{p}_0(0) = 1,$$

$$\overline{Q}_{\text{out}}\frac{d\widetilde{p}_1}{d\tau} = -\overline{Q}_mW\big[\widetilde{p}_1 - u_1^2\big],\quad \widetilde{p}_1(0) = 0,$$

$$\overline{Q}_{\text{in}} \equiv \alpha V_{\text{in}}\,\overline{p}_0T^{-1},\quad \overline{Q}_{\text{out}} \equiv \alpha V_{\text{out}}\,\overline{p}_0T^{-1}.$$

«Емкость» $\overline{Q}_m$ равна количеству атомов водорода в образце в режиме равновесного насыщения при давлении $\bar{p}_0 = p_0(0)$ и температуре T. Отметим, что *транспортный параметр* W [3] играет определяющую роль при анализе варианта метода проницаемости, когда на выходе производится постоянное вакуумирование (метод прорыва).

Замечание. Формально нулевые начальные и граничное условие $W[\widetilde{p}_0 - u_0^2] = -\partial_y u|_{y=0}$ не согласованы при $t \to +0$ $\big(\widetilde{p}_0(0) = 1,\ u_0(0) = 0,$ $\partial_y u(0,0) = 0\big)$. На самом деле «мгновенный» напуск водорода на входе длится некоторое время, пусть и пренебрежимо малое. В вычислительном алгоритме решения краевой задачи это фактически учтено. В принципе дискретную аппроксимацию можно считать моделью «в атомах», а краевую задачу – ее компактным представлением, «континуальным замыканием». Иначе следует вести речь в терминах теории обобщенных решений.

Модель квазистационарной проницаемости

Для приемлемого времени установления равновесия или стационара в экспериментальной практике используются тонкие мембраны (доли миллиметра). Материал для газоразделения подбирается с высокой водородопроницаемостью. По этим причинам быстро устанавливается квазистационарный режим, когда распределение атомов водорода практически линейное с относительно медленным дрейфом. В такой ситуации нерационально решать

на каждой итерации идентификации модели нелинейные краевые задачи при текущих приближениях параметров. Изложим квазистационарную модель водородопроницаемости.

Экспериментально фиксируется время $t_0 \ll t_*$, когда на выходе начинается заметный рост давления молекулярного водорода, $\dot{p}_\ell(t_0) > 0$. Подразумеваются масштабы давления превышения шума и времени установления проницаемости t_*. За время t_0 заполняются ловушки малой емкости ($z_{\max} \ll \bar{c}$) и устанавливается линейный квазистационар: $c(t_0, x) \approx \tilde{c}(t_0, x) = A(t_0)x + B(t_0)$ $\big(B \approx c_0,\ A < 0\big)$. Выходной поток еще незаметен: $\tilde{c}(t_0, \ell) = A(t_0)\ell + B(t_0) = 0$. По падению входного давления вычисляем количество «пропавших» атомов $\overline{Q}_{\text{in}} - \alpha V_{\text{in}} p(t_0)/T$. Захвачено $S\ell z_{\max}$ атомов H, остаток равен $S\int_0^\ell \big[A(t_0)x + B(t_0)\big]dx = S\big[B(t_0)\ell + A(t_0)\ell^2/2\big]$. Это позволяет при фиксированном $z_{\max}$ определить значения $A(t_0)$ и $B(t_0)$. При $t = t_0$ приближенно имеем $\alpha V_{\text{out}} T^{-1}\dot{p}_\ell(t_0) =$

$$= \frac{dQ_{\text{out}}}{dt} = -SD\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = -SDA(t_0) > 0.$$

Это соотношение дает принципиальную возможность оценки коэффициента диффузии D. Измерения давления зашумлены, операция дифференцирования вычислительно некорректна, момент времени t_0 и наклон графика $p_\ell(t)$ достаточно условны, так что имеется в виду лишь начальная грубая оценка.

Дальнейшие выкладки проведем уже для безразмерной модели. Поскольку ловушки уже заполнены, то $f = 0$ и для уравнения диффузии квазистационаром ($\partial_\tau u \approx 0$) является линейное распределение

$$u(\tau, y) \approx \tilde{A}(\tau)y + \tilde{B}(\tau), \quad \tau \geqslant \tau_0 \equiv D\ell^{-2}t_0,$$
$$\tilde{A}(\tau_0) = A(t_0)\ell\bar{c}^{-1}, \quad \tilde{B}(\tau_0) = B(t_0)\bar{c}^{-1}.$$

Остается определить $\tilde{A}(\tau)$, $\tilde{B}(\tau)$ ($\tau > \tau_0$). Воспользуемся граничными условиями с учетом $\partial_y u = \tilde{A}$:

$$W\big[\widetilde{p}_0 - \tilde{B}^2\big] = -\tilde{A}, \quad W\big[\widetilde{p}_1 - [\tilde{A} + \tilde{B}]^2\big] = \tilde{A},$$
$$\beta_0\frac{d\widetilde{p}_0}{d\tau} = \tilde{A},\ \ \beta_1\frac{d\widetilde{p}_1}{d\tau} = -\tilde{A},\ \ \beta_{0,1} \equiv \overline{Q}_{\text{in,out}}\overline{Q}_m^{-1}.$$

Из последних двух уравнений получаем $\gamma d\widetilde{p}_0/d\tau = -d\widetilde{p}_1/d\tau$, где $\gamma \equiv \beta_0/\beta_1 = V_{\text{in}}/V_{\text{out}}$. Условие согласования наклонов $\gamma\dot{p}_0(t) = -\dot{p}_\ell(t)$ $(t \geqslant t_0)$ означает равенство потоков на входе и выходе мембраны и может считаться критерием выхода на квазистационарный режим проницаемости. Разумеется, подобные асимптотические равенства проверяются с большой погрешностью и носят скорее вспомогательный качественный характер. Интегрируя с учетом $\widetilde{p}_1(\tau_0) = 0$, имеем простую связь давлений $\widetilde{p}_1(\tau) = \gamma\big[\widetilde{p}_0(\tau_0) - \widetilde{p}_0(\tau)\big]$, $\tau \geqslant \tau_0$. Остается определить давление $\widetilde{p}_0$.

Заменяем в первом уравнении $\tilde{A} = \beta_0\dot{\widetilde{p}}_0$ $\big(\dot{\widetilde{p}}_0 \equiv d\widetilde{p}_0/d\tau\big)$ и выражаем

$$\tilde{B} = \{\widetilde{p}_0 + \beta_0 W^{-1}\dot{\widetilde{p}}_0\}^{1/2}.$$

В силу $\dot{\widetilde{p}}_0 < 0$ и $\beta_0 W^{-1}\dot{\widetilde{p}}_0 = -\widetilde{p}_0 + u_0^2 > -\widetilde{p}_0$ под корнем положительное число. Заменяя во втором уравнении $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ полученными выражениями, приходим к соотношению

$$\gamma\big[\widetilde{p}_0(\tau_0) - \widetilde{p}_0\big] - \big[\beta_0\dot{\widetilde{p}}_0 + \{\widetilde{p}_0 + \beta_0 W^{-1}\dot{\widetilde{p}}_0\}^{1/2}\big]^2$$
$$= \beta_0 W^{-1}\dot{\widetilde{p}}_0, \quad \widetilde{p}_0 = \widetilde{p}_0(\tau),\ \tau \geqslant \tau_0. \quad (7)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной. Не будем искать выражение $d\widetilde{p}_0/d\tau = F(\widetilde{p}_0)$ с целью последующего интегрирования, а рассмотрим (7) как алгебраическое уравнение относительно производной.

Удобно ввести нормированную переменную $Z(\tau) = -\beta_0 W^{-1}d\widetilde{p}_0/d\tau \in (0, 1)$, которая монотонно убывает и удовлетворяет соотношению вида $Z = F(Z)$:

$$\gamma\big[\widetilde{p}_0(\tau_0) - \widetilde{p}_0(\tau)\big] - \big[\sqrt{\widetilde{p}_0(\tau) - Z(\tau)} - WZ(\tau)\big]^2$$
$$= -Z(\tau), \quad \tau \geqslant \tau_0. \quad (8)$$

Начинаем с $\tau = \tau_0$. Начальное приближение $Z(\tau_0) = -\dot{p}_0(t_0)\beta_0\ell^2/(W\bar{p}_0 D)$ можно найти грубо по начальному наклону графика $p_\ell(t)$ $\big(\dot{p}_\ell(t_0) = -\gamma\dot{p}_0(t_0)\big)$. Для поиска неподвижной точки $Z = F(Z)$ применяем метод последовательных приближений $Z_{k+1} = F(Z_k)$. По $Z(\tau_0)$ вычисляем $d\widetilde{p}_0/d\tau \equiv \dot{\widetilde{p}}_0 = -Z(\tau_0)W/\beta_0$ и $\widetilde{p}_0(\tau_0 + \delta\tau) \approx \widetilde{p}_0(\tau_0) + \dot{\widetilde{p}}_0\delta\tau$ с малым шагом $\delta\tau$. Далее смещаемся в точку $\tau = \tau_0 + \delta\tau$ и снова решаем уравнение (8) относительно $Z(\tau_0 + \delta\tau)$. Итерационный процесс описан. Он не связан с решением краевых задач и требует незначительных вычислительных ресурсов.

Отметим, что формально в уравнение (8) входит только параметр W. Напомним, что

$$W = b\bar{c}\ell D^{-1} = \overline{P}_0\ell[D\bar{c}]^{-1},\ \ \overline{P}_0 = \mu s\bar{p}_0,$$
$$\bar{c} = \Gamma\sqrt{\bar{p}_0},\ \ \Gamma = \big[\mu s b^{-1}\big]^{1/2},\ \ t = D^{-1}\ell^2\tau.$$

Поэтому в исходных переменных расчет модельных давлений $p_0(t)$, $p_\ell(t)$ потребует текущих приближений D, b, s (помимо входных данных ℓ, S, $V_{\text{in,out}}$, T, $\bar{p}_0 = p_0(0)$, t_0).

Представляет интерес сравнение квазистационарного приближения с квазиравновесным, когда плотность потока водородопроницаемости сквозь мембрану моделируется формулой Ричардсона

$$J_R = -D\Gamma\big[\sqrt{p_\ell(t)} - \sqrt{p_0(t)}\big]\ell^{-1}.$$

Она получается, если в выражении $J_{\rm diff} = -D\partial_x c$ градиент концентрации заменить разностным отношением $(c_\ell - c_0)/\ell$ с подстановкой равновесной зависимости $c = \Gamma\sqrt{p}$. Учет общей концентрации $c + z_{\max}$ не изменит J_R.

Насколько такие приближения правомерны, может показать (в рамках принятой модели) решение исходной краевой задачи, включающей и начальный (во многом определяющий) этап водородопроницаемости.

Вычислительный алгоритм

Следуя технике разностных схем, введем сетку $\Omega = \{y_m = mh_y,\ m = 0, 1, \ldots, M\}$ ($h_y = 1/M$) по пространственной переменной и сетку по времени $\omega = \{\tau_n = nh_\tau,\ n = 0, 1, \ldots\}$. Обозначим через $\{U_m^n\}$, $\{V_m^n\}$ приближенные значения концентраций в объеме $(u(\tau_n, y_m))$ и ловушках $(v(\tau_n, y_m))$. Для уравнения диффузии в безразмерной форме рассмотрим неявную разностную схему

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{h_\tau} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h_y^2} - \\ - \tilde{a}\left[1 - \hat{V}_m^{n+1}\right]U_m^{n+1}, \quad \hat{V}_m^n \equiv v_{\max}^{-1}V_m^n. \qquad (9)$$

Здесь, на начальном этапе, чтобы иметь возможность использовать алгоритм прогонки, величину $\hat{V}_m^{n+1}$ предварительно вычисляем из неявной схемы по $\hat{V}$, сохраняя значение U_m^n:

$$\frac{\hat{V}_m^{n+1} - \hat{V}_m^n}{h_\tau} = \tilde{a}v_{\max}^{-1}[1 - \hat{V}_m^{n+1}]U_m^n,$$

$$\hat{V}_m^{n+1} = \frac{\hat{V}_m^n + h_\tau\tilde{a}v_{\max}^{-1}U_m^n}{1 + h_\tau\tilde{a}v_{\max}^{-1}U_m^n}. \qquad (10)$$

Это соответствует и последовательности во времени захвата диффундирующего атома. Данные соотношения рассматриваются во внутренних узлах сетки $(m = 1, \ldots, M-1)$.

Рассмотрим уравнения перехода с n-го на $(n+1)$-й слой по τ ($n \geqslant 0$, $0 < m < M$):

$$U_{m-1}^{n+1} - \big[s + 2 + \tilde{a}h_y^2\big(1 - \hat{V}_m^{n+1}\big)\big]U_m^{n+1} + \\ + U_{m+1}^{n+1} + sU_m^n = 0, \quad s \equiv h_y^2\,h_\tau^{-1}.$$

Значения в начальный момент известны: $U_m^0 = \hat{V}_m^0 = 0$ $(0 \leqslant m \leqslant M)$. Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на $(n+1)$-м слое в виде

$$U_m^{n+1} = \alpha_{m+1}U_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}, \quad m = 0, \ldots, M-1.$$

Прогоночные коэффициенты ($m\colon 1, \ldots, M-1$):

$$\alpha_{m+1} = \frac{1}{2 + s - \alpha_m + \tilde{a}\,h_y^2[1 - \hat{V}_m^{n+1}]},$$

$$\beta_{m+1} = \frac{\beta_m + s\,U_m^n}{2 + s - \alpha_m + \tilde{a}\,h_y^2[1 - \hat{V}_m^{n+1}]}. \qquad (11)$$

Для нахождения начальных коэффициентов α_1, β_1 воспользуемся следующими соображениями. Подсчитаем предварительно $U_{1,2}^{n+1}$ по явной разностной схеме (в равенстве (9) справа заменяем $n+1$ на n). На $(n+1)$-м слое по времени аппроксимируем производную $\partial_y u|_{y=0} \approx [-3U_0^{n+1} + 4U_1^{n+1} - U_2^{n+1}]/2h_y$ и подставим в условие $W[\widetilde{p}_0 - u_0^2] = -\partial_y u|_{y=0}$. Выражение величины $\widetilde{p}_0^{n+1}$ для подстановки в левую часть берем из аппроксимации

$$\overline{Q}_{\rm in}\frac{d\widetilde{p}_0}{d\tau} = -\overline{Q}_m W\big[\widetilde{p}_0 - u_0^2\big] \Rightarrow$$

$$\overline{Q}_{\rm in}\frac{\widetilde{p}_0^{n+1} - \widetilde{p}_0^n}{h_\tau} = (\approx) - \overline{Q}_m W\big[\widetilde{p}_0^{n+1} - \big(U_0^{n+1}\big)^2\big]$$

$$\Rightarrow \widetilde{p}_0^{n+1} = \frac{\widetilde{p}_0^n + A_1(U_0^{n+1})^2}{1 + A_1}, \quad A_1 \equiv \frac{h_\tau\overline{Q}_m W}{\overline{Q}_{\rm in}}.$$

В итоге получаем $U_0^{n+1} = f_0\big(U_1^{n+1}, U_2^{n+1}\big)$ (положительный корень квадратного уравнения):

$$B_1 \equiv \frac{1 + A_1}{2h_y W}, \quad U_0^{n+1} = 0.5\Big[-3B_1 + \\ + \sqrt{9B_1^2 - 4B_1\big(U_2^{n+1} - 4U_1^{n+1}\big) + 4\widetilde{p}_0^n}\Big].$$

Зная выражение $U_0^{n+1} = \alpha_1 U_1^{n+1} + \beta_1$ и значение U_0^{n+1}, получаем $\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = U_0^{n+1}$.

Поскольку при $t = 0$ в континуальной модели имеем формально скачок на входе, то проверим корректность вычисления U_0^1 на начальном этапе: $U_1^1 = U_2^1 = 0 \Rightarrow U_0^1 \in (0, 1)\,\forall B_1 > 0$.

Ближайшая цель – найти значение U_M^{n+1}, необходимое для реализации прогонки. Предварительно подсчитываем $U_{M-2,M-1}^{n+1}$ по явной разностной схеме. Далее определяем зависимость $U_M^{n+1} = f_M\big(U_{M-1}^{n+1}, U_{M-2}^{n+1}\big)$ из граничных условий при $y = 1$, используя аппроксимацию

$\partial_y u|_{y=1} \approx [U_{M-2}^{n+1} - 4U_{M-1}^{n+1} + 3U_M^{n+1}]/2h_y$:

$$B_2 \equiv \frac{1+A_2}{2h_y W},\ A_2 \equiv \frac{h_\tau \overline{Q}_m W}{\overline{Q}_{\text{out}}},\quad U_M^{n+1} = 0.5\times$$
$$\Big[-3B_2 + \sqrt{9B_2^2 - 4B_2\big(U_{M-2}^{n+1} - 4U_{M-1}^{n+1}\big) + 4\widetilde{p}_1^{\,n}}\Big].$$

Следующий этап: с текущими приближениями U_0^{n+1}, U_M^{n+1} решаем обратным ходом прогонки трехдиагональную систему линейных уравнений и находим новые приближения концентраций $U_{1,2}^{n+1}$, $U_{M-2,M-1}^{n+1}$ (и остальные значения U_m^{n+1} для $m = 3, \ldots, M-3$).

После этого корректируем значения $\hat{V}^{n+1}$, заменяя U_m^n в (10) на текущие приближения U_m^{n+1}, и значения коэффициентов (11) (выражения $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = U_0^{n+1}$ остаются). Далее снова пользуемся формулами

$$U_0^{n+1} = f_0\big(U_1^{n+1}, U_2^{n+1}\big),$$
$$U_M^{n+1} = f_M\big(U_{M-1}^{n+1}, U_{M-2}^{n+1}\big)$$

и повторяем вычисления, возвращаясь к предыдущему абзацу, до установления граничных значений $U_{0,M}^{n+1}$ (обычно 2–3 итерации).

Заключительный этап: переходим к следующему слою по τ, вычислив $\tilde{p}_{0,1}$ по формулам

$$\widetilde{p}_0^{n+1} = \frac{\widetilde{p}_0^n + A_1\big(U_0^{n+1}\big)^2}{1+A_1},$$
$$\widetilde{p}_1^{n+1} = \frac{\widetilde{p}_1^n + A_2\big(U_M^{n+1}\big)^2}{1+A_2}.$$

Результаты моделирования

Для определенности ориентируемся на экспериментальные возможности [16] и данные по сплаву $V_{85}Ni_{15}$ [20]. По результатам вычислительных экспериментов $\sigma = 0.1$, причем параметр скорости захвата в широком диапазоне $a \leqslant 0.1$ практически не влияет на проникающий поток, поскольку ловушки быстро насыщаются. Ориентировочно $\ell \approx 0.02\,\text{см}$, $S \approx 0.6\,\text{см}^2$, $V_{\text{in}} \approx V_{\text{out}} \approx 1500\,\text{см}^3$.

Модельные кривые давлений молекулярного водорода представлены на рис. 1–3. Скорость убывания «просвета» между кривыми $\big(p_{\text{in}}(t) - p_{\text{out}}(t)\big)$ указывает на рост проницаемости с увеличением температуры.

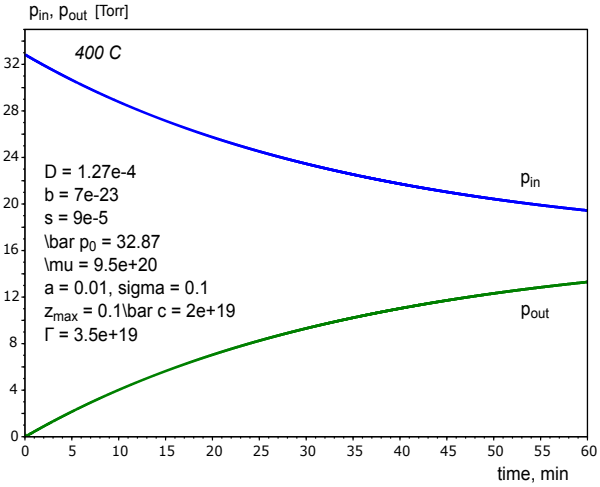


Рис. 1. Динамика давлений, 400 °C

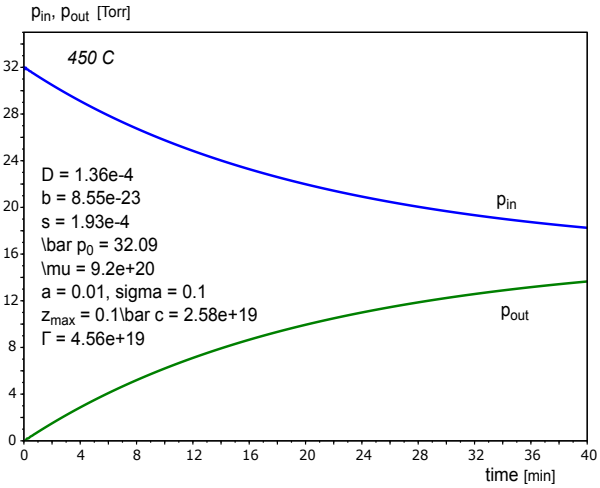


Рис. 2. Динамика давлений, 450 °C

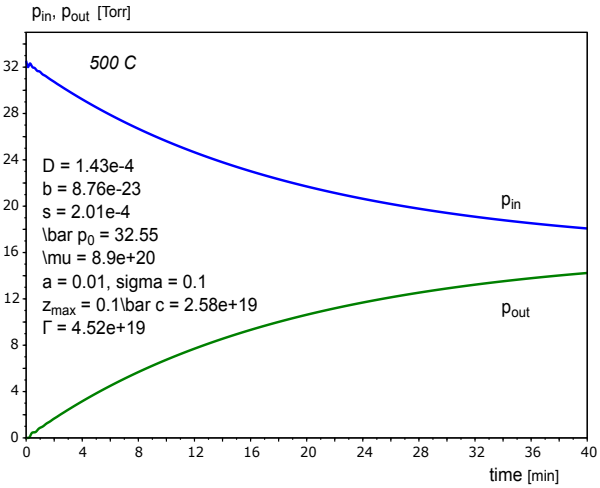


Рис. 3. Динамика давлений, 500 °C

Что касается обратной задачи параметрической идентификации, то следует учитывать ограничение монотонности с ростом температуры, что соответствует росту водородопроницаемости (рис. 1–3) и ориентировано на аррениусовскую зависимость физико-химических параметров переноса.

Тут возникает некоторая опасность. Для определенности остановимся на коэффициенте объемной десорбции (эффективном коэффициенте рекомбинации) $b = b_{\rm vol}$. Рассмотрим баланс потоков, учитывая поверхность как потенциальный барьер (см. [2, с. 177–206; Габис, Компаниец, Курдюмов]):

$$\dot q_{0,\ell}(t) = \mu(T) s(T) p_{0,\ell}(t)\big[1-\theta_{0,\ell}(t)\big]^2 - \\ - b_{\rm surf}(T) q^2_{0,\ell}(t) \pm D(T)\partial_x c|_{0,\ell}\,,$$

$$k^-(T)\big[1 - c_{0,\ell}(t) c^{-1}_{\max}\big] q_{0,\ell}(t) - \\ - k^+(T)\big[1-\theta_{0,\ell}(t)\big] c_{0,\ell}(t) = \mp D(T) c_x\big|_{x=0,\ell}\,,$$

где $q\,[1_H/({\rm cm}^2)]$ – поверхностная концентрация, $\theta(t) \equiv q(t)/q_{\max}$ – степень заполнения поверхности, множитель $[1-\theta]^2$ учитывает необходимость двух сорбционных центров для диссоциации молекулы водорода на атомы. Величина $q_{\max} \sim 10^{15}$ лимитируется монослоем атомов водорода на поверхности. Первое уравнение читается так: рассогласование потоков адсорбции, десорбции и диффузии (справа) идет на накопление атомов H на поверхности. Второе уравнение согласовывает потоки растворения и выхода из объема на поверхность. При относительно малых концентрациях и накоплении ($\theta \ll 1$, $cq \ll c_{\max}$, $\dot q \approx 0$), медленной диффузии по сравнению с растворением на поверхности, имеем в пределе $c = gq$, $g \equiv k^-/k^+$ и $b \equiv b_{\rm vol} = b_{\rm surf}/g^2$. Косвенно эти рассуждения фиксируют достаточно высокие температуры адекватности исходной базовой модели. Предполагая $b_{\rm surf}$, k^-, k^+ аррениусовскими, можем в принципе получить «отрицательную энергию активации» у коэффициента эффективной рекомбинации b. Ориентируясь, однако, на широкий спектр исследований конструкционных материалов [3, 5], мы постулировали в процессе параметрической идентификации монотонный рост b по температуре.

Еще одну опасность продемонстрируем на рис. 4. Согласно принятой модели, равновесная концентрация $\bar c$ при условиях насыщения $p = {\rm const}$, $T = {\rm const}$ определяется (после приравнивания к нулю всех производных) как $\bar c = \Gamma\sqrt{p}$, где $\Gamma \equiv \sqrt{\mu s/b}$ – коэффициент растворимости. Но следует помнить, что учтен только диффузионно подвижный растворенный водород. При непродолжительной дегазации выделится именно он. Если нацеливаться на полную дегазацию, то растворимость другая: $\bar c + z_{\max} = \Gamma_{\max}\sqrt{p}$. В принятой модели имеем $\Gamma_{\max} = \Gamma[1+\sigma]$ при сохранении закона Сивертса $\bar c + z_{\max} \propto \sqrt{p}$. По сравнению с рис. 1 на рис. 4 с гипотетическим значением $z_{\max} = 10\,\bar c$ фиксирована общая растворимость на порядок больше. Если фиксировать установившийся поток водородопроницаемости $J = -D\partial_x c$ в эксперименте прорыва, когда $p_0(t) = p = {\rm const}$, а на выходе вакуумирование, то в предположениях $c_0 = \bar c_0 = \Gamma\sqrt{p}$, $c_\ell = 0$ имеем $J = \Phi\sqrt{p}$, $\Phi \equiv D\Gamma = D\sqrt{\mu s/b}$. Если же коэффициент проницаемости Φ *вычислять* по имеющимся значениям коэффициентов диффузии и растворимости, то можем получить $D\Gamma_{\max}$. По-видимому, это одна из причин разброса литературных данных по растворимости и проницаемости. Проблема в том, что на очень тонких мембранах в режиме проницаемости трудно обнаружить «пропажу» водорода в ловушках даже при большой их емкости, существенно влияющей на общую растворимость в материале (при пересчете на кубические cm и m в условиях $\ell, S \ll 1$). С целью повышения точности параметрической идентификации следует дополнительно провести эксперименты насыщения-дегазации или проницаемости более массивного образца ($\ell \sim$ mm), чтобы заметнее проявились объемные характеристики материала на фоне поверхностных. Визуальным критерием сопоставимости влияния поверхности и объема можно считать заметную несимметричность графиков давлений $p_{0,\ell}(t)$ (с поправкой на различие объемов $V_{\rm in,out}$).

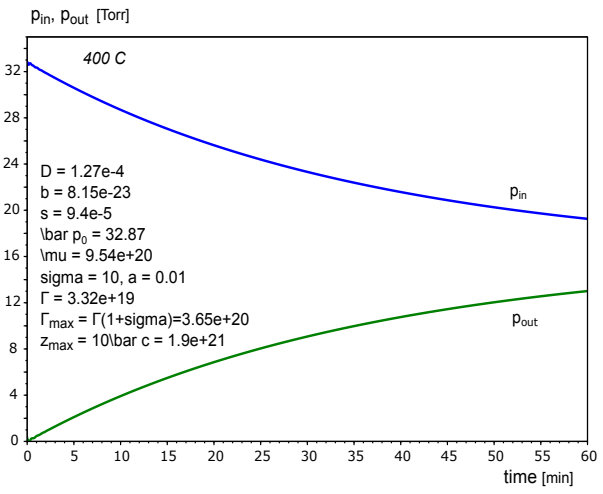


Рис. 4. Давления при $z_{\max} = 10\,\bar c$, 400 °C

Перейдем к анализу динамики объемных концентраций в рассматриваемом эксперименте «сообщающихся сосудов». Для определенности далее ограничимся $T = 400\,^\circ\mathrm{C}$, поскольку качественная картина остается неизменной и при других температурах в рассматриваемом диапазоне. Начнем с приповерхностных ($x = 0, \ell$) – рис. 5, 6. В течение минуты происходит практически полное заполнение ловушек: $z_0 \approx z_\ell \approx z_{\max}$. Концентрации $c_0(t) = c(t, 0)$, $c_\ell(t) = c(t, \ell)$ быстро стабилизируются, но, как видно в масштабе часа, это локально: происходит смена переходного режима всплеска на медленный тренд. Сравнимое время стабилизации c_ℓ (по отношению к c_0, когда на входе скачком создается давление в десятки Torr) объясняется большой водородопроницаемостью сплава и $\ell \ll 1$. Высокая скорость переходных процессов ожидаема, поскольку характеристическое время диффузии ℓ^2/D (с коэффициентом $D \approx 10^{-4}$ на расстояние $\ell \approx 0.02$) составляет всего несколько секунд. Общая концентрация определяется суммой $c + z$. Квазиравновесные (сивертсовские) концентрации растворенного диффундирующего водорода $\bar c_{0,\ell}(t) \propto \sqrt{p_{0,\ell}}$ (графики $bar\, c_{0,\ell}$) определяются по давлениям молекулярного водорода соотношениями $\mu s p_{0,\ell} = (\approx) bc^2_{0,\ell}$: $\bar c_{0,\ell}(t) = \Gamma\sqrt{p_{0,\ell}}$. С учетом захвата следует оперировать суммами $\bar c_{0,\ell}(t) + z_{\max}$ и $c_{0,\ell}(t) + z_{0,\ell}(t)$. По рис. 6 можно оценить, насколько рассогласование концентраций $c_\ell - \bar c_\ell$ на выходе существенно больше входного $\bar c_0 - c_0$. Лишь асимптотически (по мере приближения к истинному равновесию) происходит сближение этих величин. Конечно, с точки зрения газоразделения нас в первую очередь интересует проникающий поток. Но аппроксимация градиента концентрации $\partial_x c$ разностным отношением $[c_\ell(t) - c_0(t)]/\ell$ ухудшается переходом к квазиравновесным оценкам как на входе ($\bar c_0 > c_0$), так и на выходе ($\bar c_\ell < c_\ell$).

Проиллюстрируем последние рассуждения. Примем базовую модель за «начало отсчета» и упростим ее в предположении квазиравновесности приповерхностных концентраций и линейного распределения в объеме (приближение Ричардсона для потока проницаемости):

$$\frac{dQ_{\mathrm{in,out}}}{dt} = \pm SD(T)\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x=0,\ell} = \pm SD(T)\frac{c_\ell(t) - c_0(t)}{\ell} = \pm SD(T)\Gamma\frac{\sqrt{p_\ell(t)} - \sqrt{p_0(t)}}{\ell},$$

$$Q_{\mathrm{in,out}} = \alpha p_{0,\ell}(t) V_{\mathrm{in,out}} T^{-1} \Rightarrow \frac{dp_{0,\ell}}{dt} = \pm SD\Gamma\left[\alpha V_{\mathrm{in,out}}\ell\right]^{-1} T\left[\sqrt{p_\ell(t)} - \sqrt{p_0(t)}\right].$$

Решая численно систему двух дифференциальных уравнений для $p_{0,\ell}(t)$ с начальными данными $p_0(0) = \bar p_0$, $p_\ell(0) = 0$, получаем приближение (пунктир на рис. 7). Достаточно интегрировать одно уравнение в силу

$$\dot p_\ell(t) = -V_{\mathrm{in}}V_{\mathrm{out}}^{-1}\,\dot p_0(t) \Rightarrow p_\ell(t) = V_{\mathrm{in}}V_{\mathrm{out}}^{-1}\left[\bar p_0 - p_0(t)\right].$$

Результат неудовлетворителен, если сравнить с базовой моделью (рис. 1). Но ценою существенной вариации «истинных» значений параметров можно добиться хорошего приближения (сплошные модельные линии). Это одна из основных причин разброса оценок: читая в литературе об «измеренном» коэффициенте X, нужно следить, по какой модели его значение на самом деле вычислялось. Разумеется, каждая модель – всего лишь модель, но при сравнении мы за «начало отсчета» берем базовую модель, поскольку квазистационарное приближение является ее дальнейшим и существенным упрощением. «Истинный» коэффициент проницаемости (данные приведены на рис. 7) равен $\Phi = D\Gamma \approx 4.438 \cdot 10^{15}$. При подгонке по квазиравновесностационарной модели получается $2.453 \cdot 10^{15}$, т. е. почти в два раза заниженное значение. Сравнивая с отношением $[\bar c_0 - \bar c_\ell]/[c_0 - c_\ell] \approx 2$ (рис. 6), заключаем, что значительно более точной была бы квазистационарная модель $\dot p_{0,\ell}(t) = \pm SD\left[\alpha V_{\mathrm{in,out}}\ell\right]^{-1} T\left[c_\ell(t) - c_0(t)\right]$. Но информации о граничных концентрациях нет, и «вынужденная сивертсовская» подстановка $c_{0,\ell} = \Gamma\sqrt{p_{0,\ell}}$ занижает коэффициент проницаемости. Формально можно принять модель

$$\frac{dp_{0,\ell}}{dt} = \frac{\pm SD\Gamma}{\alpha V_{\mathrm{in,out}}\,\ell}\,T\eta\Big[\sqrt{p_\ell(t)} - \sqrt{p_0(t)}\Big],$$

$$p_\ell(t) = V_{\mathrm{in}}V_{\mathrm{out}}^{-1}\left[\bar p_0 - p_0(t)\right],\ \eta \in (0,1),\ t_0 \geqslant 0,$$

но об априорном множителе η нет информации (кроме $\eta \to 1$ с ростом момента t_0).

Ясно, что по мере стремления к равновесию (не обязательно реализовывать подгонку с момента времени $t_0 = 0$, лучше пропустить начальный переходный процесс) и с повышением температуры поправочный коэффициент η будет расти ($\eta \to 1$). Эта динамика проиллюстрирована на рис. 8 ($t_0 = 5\,\mathrm{min}$). Пунктиру соответствует квазиравновесная модель с исходными данными на рис. 3, а сплошные линии получены подгонкой за счет искажения коэффициента проницаемости Φ.

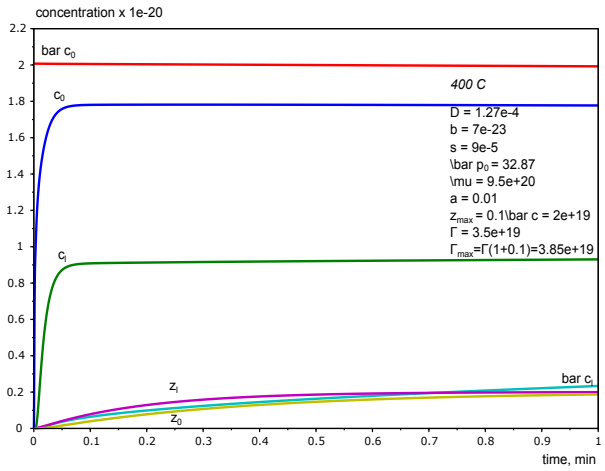


Рис. 5. Приповерхностные концентрации, 1 min

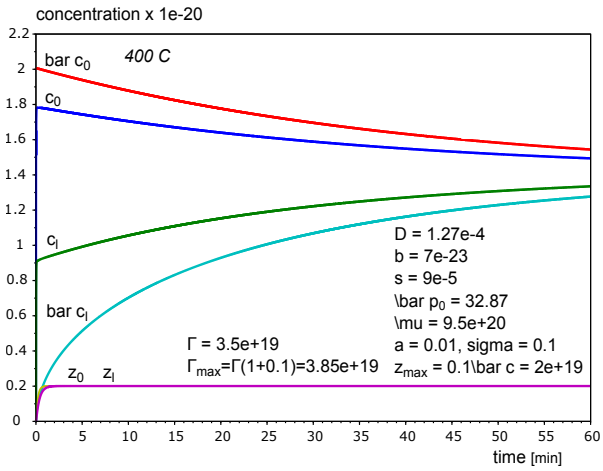


Рис. 6. Приповерхностные концентрации, 60 min

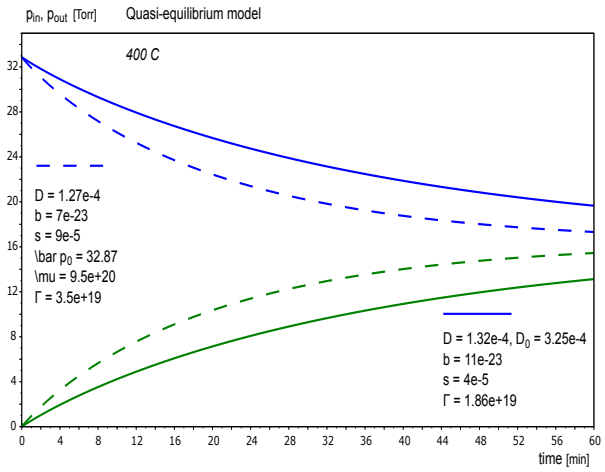


Рис. 7. Квазиравновесная модель, 400 °C

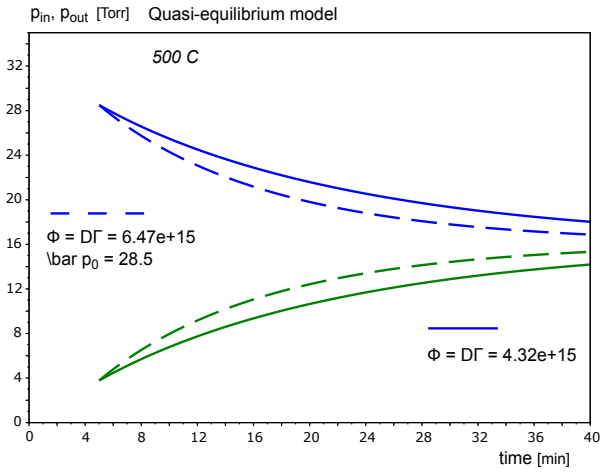


Рис. 8. Квазиравновесная модель, 500 °C

Отметим также следующее обстоятельство. В квазиравновесную модель входит только комплекс параметров переноса $\Phi = D\Gamma = D\sqrt{\mu s/b}$. При вариациях значений D, b, s, сохраняющих коэффициент проницаемости Φ, модельные графики давлений не изменятся. Для тонких мембран с большой водородопроницаемостью ситуация практически квазистационарна (линейные распределения концентрации), но отлична от квазиравновесной (из-за отличий $c_{0,\ell}$ от $\bar{c}_{0,\ell}$). С ростом времени квазистационары все ближе к квазиравновесным распределениям. Это означает, что обратная задача параметрической идентификации исходной базовой модели будет плохообусловлена (в смысле слабой чувствительности модельных давлений к вариациям параметров, сохраняющих значение Φ). Как показано на рис. 9 (параметры указаны в соответствии с аппроксимацией при $\ell = 0.02\,\mathrm{cm}$, рис. 1), увеличение толщины мембраны в разы кардинально не решит проблему: качественно картина сохраняется, а изменение уровней давлений происходит в значительно меньшем масштабе. Для «раскачки» комплекса $D\Gamma$ целесообразно провести эксперименты насыщения-дегазации (хотя бы при нескольких температурах) более массивного образца. Это дало бы информацию о коэффициенте растворимости Γ, что позволит «отделить» поверхностные параметры b, s от объемного D. Если емкость ловушек значительна, то следует фиксировать начальный всплеск десорбции диффузионно подвижного водорода и последующий длительный этап высвобождения из ловушек (для оценки Γ и $\Gamma_{\max}(z_{\max})$).

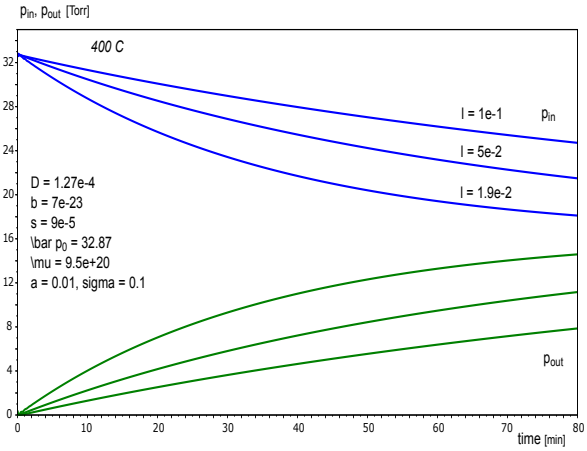


Рис. 9. Зависимость давлений от толщины ℓ

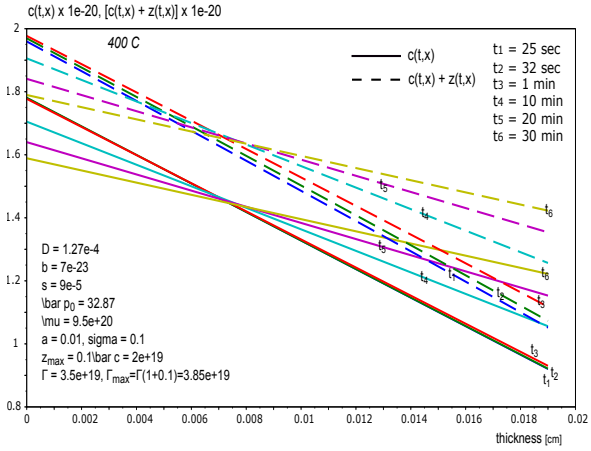


Рис. 10. Распределение концентрации $\sim 30\,\mathrm{min}$

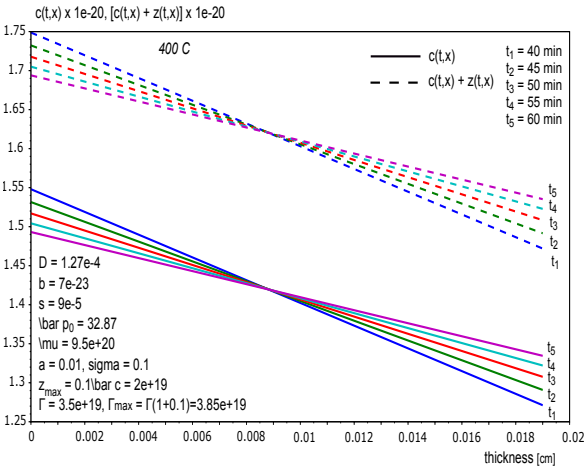


Рис. 11. Распределение концентрации $\sim 60\,\mathrm{min}$

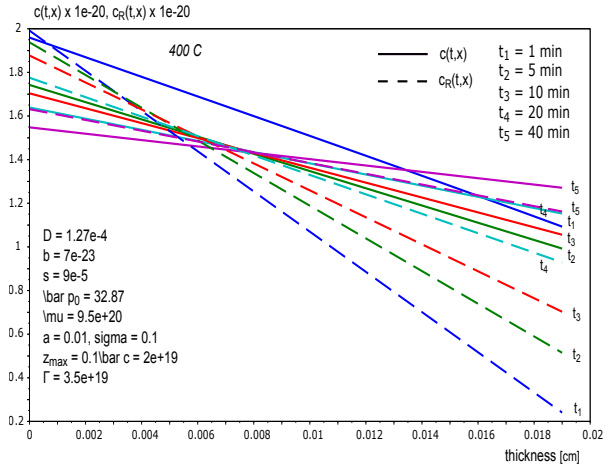


Рис. 12. Сравнение с приближением Ричардсона

Перейдем к распределениям концентрации в объеме, по толщине мембраны ($x \in [0, \ell]$) – рис. 10–12. Очень быстро устанавливается квазистационарный режим проницаемости, характеризуемый практически линейным распределением $c(t, x)$. Характеристическое время диффузии ℓ^2/D – несколько секунд. Учет захвата приводит к вертикальному сдвигу графиков, спадающему к $x = \ell$ лишь на этапе насыщения ловушек (при $z = z_{\max}$ сдвиг параллельный). В течение полминуты градиент растет (по абсолютному значению), а затем концентрация на входе начинает падать, на выходе – продолжает расти. В середине пластины формируется точка перегиба, что отчетливо видно при относительно больших временах (рис. 11). Рис. 12 иллюстрирует динамику различий квазистационарных и квазиравновесных (пунктиром) распределений. Под квазистационаром мы понимаем практически линейный по x профиль концентрации $c(t, x)$ с насыщенными ловушками (как при установлении стационарной проницаемости), который относительно медленно меняется со временем. Квазиравновесным считаем такой квазистационар, который характеризуется заменой $c_{0,\ell}(t)$ на «сивертсовские» концентрации $\bar{c}_{0,\ell} = \Gamma\sqrt{p_{0,\ell}(t)}$ $\big(z = z_{\max}\big)$.

Завершим обсуждение численного моделирования анализом динамики потоков (их плотности). Вследствие скачкообразного напуска водорода (под достаточно большим давлением) на входе происходит быстрый переходный процесс (рис. 13). Резкий всплеск (плотности) входного диффузионного потока $J_0(t) = -D\partial_x c(t, 0)$ (материал вначале «пуст») сменяется спадом и стабилизацией. На выходе по-

ток диффузии $J_\ell(t) = -D\partial_x c(t,\ell)$ практически совпадает с десорбционным, поскольку давление в выходном объеме еще пренебрежимо мало для регистрации заметной ресорбции $\mu(T)s(T)p_\ell(t)$. «Слипание» $J_0(t)$, $J_\ell(t)$ говорит о том, что наступил квазистационарный режим: сколько вошло атомов водорода в единицу времени в образец, столько и вышло, распределение в объеме линейное. Поток водородопроницаемости в приближении Ричардсона $-D\big[\bar c_\ell(t) - \bar c_0(t)\big]/\ell = -D\Gamma\big[\sqrt{p_\ell(t)} - \sqrt{p_0(t)}\big]/\ell$ обозначен как J_R. Локальная стабилизация потоков в масштабе часа (рис. 14) выглядит лишь переходом к длительным монотонным трендам. Потоки $\mu s p_{0,\ell}$ не отражены в силу баланса $\mu s p_{0,\ell} - bc_{0,\ell} = \pm J_{0,\ell}$. Заметна ошибка превышения J_R над «истинным» уровнем проницаемости $J_0 = J_\ell$. Качественные рассуждения понятны из физических соображений, здесь важны количественные характеристики.

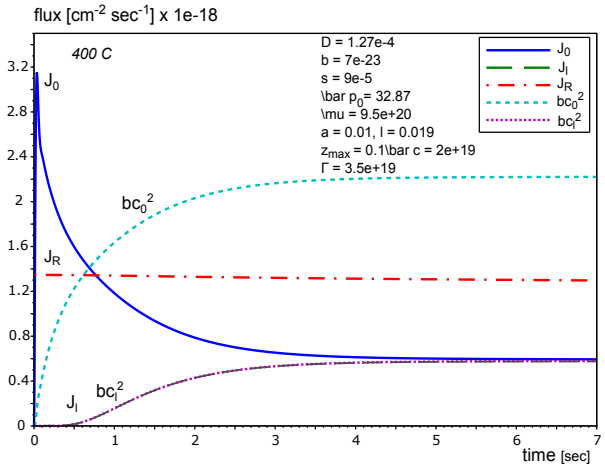


Рис. 13. Динамика потоков $\sim 10\,\mathrm{sec}$

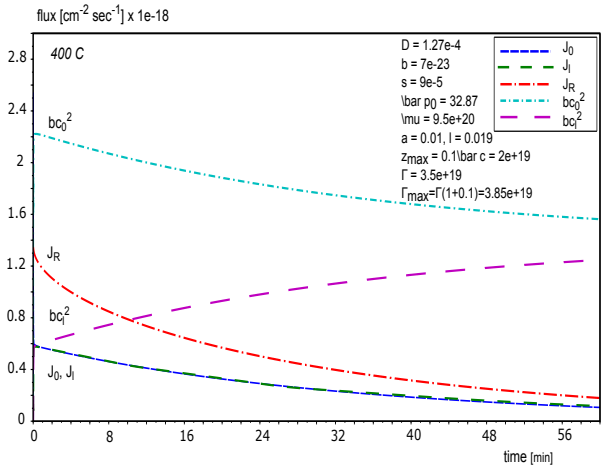


Рис. 14. Динамика потоков $\sim 60\,\mathrm{min}$

Заключение

Модель ориентирована на прикладную задачу выбора материалов для мембранной технологии выделения особо чистого водорода. Физико-технический характер задачи предполагает оценку основных интегральных показателей водородопроницаемости. Но параметров не должно быть слишком много, учитывая ограниченную информативность эксперимента. Введен параметр максимальной емкости стока $z_{\max}$ без детализации многообразия ловушек. Мембраны в установках газоразделения тонкие, материал достаточно однороден, с высокой водородопроницаемостью, так что захват носит характер малой поправки.

Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют способность принятой модели удовлетворительно аппроксимировать экспериментальные кривые (см. [16]). Результаты моделирования соответствуют физическим представлениям качественного характера, но позволяют дополнить их информацией о «производных» выходных данных по отношению к вариациям параметров водородопроницаемости материала. Однозначность определения значений параметров нельзя гарантировать без дополнительных физически оправданных предположений о монотонном росте с увеличением температуры в рассматриваемом «рабочем» диапазоне.

При относительно высоких давлениях напуска комплекс параметров $D\Gamma = D\sqrt{\mu s/b}$ является определяющим для тонких мембран с высокой водородопроницаемостью, что требует разработки специального математического аппарата при решении обратной задачи параметрической идентификации. В частности, с высокой точностью невозможно оценить емкость ловушек, чей вклад в общую растворимость в объеме материала может оказаться значительным. Целесообразно, наряду с проницаемостью, проводить оценку растворимости методом насыщения-дегазации. Это позволит «разделить» влияние объемных и поверхностных процессов.

Показано, что для очень тонких мембран с высокой водородопроницаемостью пользоваться приближением Ричардсона («сивертсовские» концентрации в приповерхностном объеме) можно лишь с целью оценки порядка коэффициента проницаемости. Представляется более целесообразной разработка предложенной квазистационарной модели с контролем точности вычислений в рамках базовой модели (требующей значительно бóльших вычислительных ресурсов).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-00744).

Литература

1. *Водород* в металлах / Ред. Г. Алефельд, И. Фёлькль. М.: Мир, 1981. Т. 1, 506 с. Т. 2, 430 с.

2. *Взаимодействие* водорода с металлами / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.

3. *Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярко С. С.* Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.

4. *Черданцев Ю. П., Чернов И. П., Тюрин Ю. И.* Методы исследования систем металл – водород. Томск: ТПУ, 2008. 286 с.

5. *Изотопы* водорода. Фундаментальные и прикладные исследования / Ред. А. А. Юхимчук. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 697 с.

6. *Varin R. A., Czujko T., Wronski Z. S.* Nanomaterials for solid state hydrogen storage. Springer, New York, 2009. 338 p. doi:10.1007/978-0-387-77712-2

7. *The hydrogen* economy / Eds. M. Ball, M. Wietschel. Cambridge Univ. Press, 2009. 646 p.

8. *Handbook* of hydrogen storage: new materials for future energy storage / Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.

9. *Gabis I. E.* The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids // Technical Physics. 1999. Vol. 44, N 1. P. 90–94. doi:10.1134/1.1259257

10. *Lototskyy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review // International Journal of Hydrogen Energy. 2014. Vol. 39. P. 5818–5851. doi:10.1016/j.ijhydene.2014.01.158

11. *Indeitsev D. A., Semenov B. N.* About a model of structure-phase transfomations under hydrogen influence // Acta Mechanica. 2008. Vol. 195. P. 295–304. doi:10.1007/s00707-007-0568-z

12. *Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A.* Kinetics of hydrogen evolution from MgH_2: experimental studies, mechanism and modelling // International Journal of Hydrogen Energy. 2010. Vol. 35. P. 9060–9069. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.05.092

13. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // Applied Mathematical Modelling. Elsevier. 2009. Vol. 33, N 10. P. 3776–3791. doi:10.1016/j.apm.2008.12.018

14. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of a hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations // International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, N 1. P. 1295–1305. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.07.099

15. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface // Mathematical Modelling. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

16. *Kojakhmetov S., Sidorov N., Piven V., Sipatov I., Gabis I. and Arinov B.* Alloys based on group 5 metals for hydrogen purification membranes // Journal of Alloys and Compounds. 2015. doi:10.1016/j.jallcom.2015.01.242

17. *Даркен Л. С., Гурри Р. В.* Физическая химия металлов. М.: Металлург-издат, 1960. 585 с. doi:10.1002/ange.19540660409

18. *Бокштейн Б. С.* Диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1978. 248 с.

19. *Алимов В. Н., Буснюк А. О., Ноткин М. Е., Лившиц А. И.* Перенос водорода металлами 5-й группы: достижение максимальной плотности потока сквозь ванадиевую мембрану // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, вып. 5. С. 88–94.

20. *Dolan M. D.* Non-Pd BCC alloy membranes for industrial hydrogen separation // Journal of Membrane Science. 2010. Vol. 362. P. 12–28. doi:10.1016/j.memsci.2010.06.068

Поступила в редакцию 31.03.2015

References

1. *Vodorod* v metallakh [Hydrogen in metals] / Eds. G. Alefel'd, J. Fel'kl'. Moscow: Mir, 1981. Vol. 1, 506 p. Vol. 2, 403 p.

2. *Vzaimodeistvie* vodoroda s metallami [Interactions of hydrogen with metals] / Ed. A. P. Zakharov. Moscow: Nauka, 1987. 296 p.

3. *Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarko S. S.* Pronitsaemost' vodoroda cherez metally [Hydrogen permeability through metals]. Moscow: MIFI, 2008. 144 p.

4. *Cherdantsev Yu. P., Chernov I. P., Tyurin Yu. I.* Metody issledovaniya sistem metall – vodorod [Methods of studying metal-hydrogen systems]. Tomsk: TPU, 2008. 286 p.

5. *Izotopy* vodoroda. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya [Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies] / Ed. A. A. Yukhimchuk. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2009. 697 p.

6. *Varin R. A., Czujko T., Wronski Z. S.* Nanomaterials for solid state hydrogen storage. Springer, New York, 2009. 338 p. doi:10.1007/978-0-387-77712-2

7. *The hydrogen* economy. Eds. M. Ball, M. Wietschel. Cambridge Univ. Press, 2009. 646 p.

8. *Handbook* of hydrogen storage: new materials for future energy storage / Ed. M. Hirscher. Wiley–VCH, 2010. 353 p.

9. *Gabis I. E.* The method of concentration pulses for studying hydrogen transport in solids. Technical Physics. 1999. Vol. 44, N 1. P. 90–94. doi:10.1134/1.1259257

10. *Lototskyy M. V., Yartys V. A., Pollet B. G., Bowman R. C. Jr.* Metal hydride hydrogen compressors: a review. International Journal of Hydrogen Energy. 2014. Vol. 39. P. 5818–5851. doi:10.1016/j.ijhydene.2014.01.158

11. *Indeitsev D. A., Semenov B. N.* About a model of structure-phase transfomations under hydrogen influence. Acta Mechanica. 2008. Vol. 195. P. 295–304. doi:10.1007/s00707-007-0568-z

12. *Evard E. A., Gabis I. E., Yartys V. A.* Kinetics of hydrogen evolution from MgH_2: experimental studies, mechanism and modelling. International Journal of Hydrogen Energy. 2010. Vol. 35. P. 9060–9069. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.05.092

13. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding. Applied Mathematical Modelling. Elsevier. 2009. Vol. 33, N 10. P. 3776–3791. doi:10.1016/j.apm.2008.12.018

14. *Zaika Yu. V., Bormatova E. P.* Parametric identification of a hydrogen permeability model by delay times and conjugate equations. International Journal of Hydrogen Energy. 2011. Vol. 36, N 1. P. 1295–1305. doi:10.1016/j.ijhydene.2010.07.099

15. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Hydrogen-solid boundary-value problems with dynamical conditions on surface. Mathematical Modelling. Nova Sci. Publishers. 2013. P. 269–302.

16. *Kojakhmetov S., Sidorov N., Piven V., Sipatov I., Gabis I., Arinov B.* Alloys based on group 5 metals for hydrogen purification membranes. Journal of Alloys and Compounds. 2015. doi:10.1016/j.jallcom.2015.01.242

17. *Darken L. S., Gurri R. V.* Fizicheskaya khimiya metallov [Physical chemistry of metals]. Moscow: Metallurgizdat, 1960. 585 p. doi:10.1002/ange.19540660409

18. *Bokshtein B. S.* Diffuziya v metallakh [Diffusion in metals]. Moscow: Metallurgiya, 1978. 248 p.

19. *Alimov V. N., Busnyuk A. O., Notkin M. E., Livshits A. I.* Hydrogen transport by group 5 metals: achieving the maximal flux density through a vanadium membrane . Technical Physics Letters. 2014. Vol. 40, N 3. P. 228–230. doi:10.1134/S1063785014030031

20. *Dolan M. D.* Non-Pd BCC alloy membranes for industrial hydrogen separation. Journal of Membrane Science. 2010. Vol. 362. P. 12–28. doi:10.1016/j.memsci.2010.06.068

Received March 31, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Заика Юрий Васильевич
зав. лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: zaika@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Родченкова Наталья Ивановна
научный сотрудник, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: nirodchenkova@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Zaika, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: zaika@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Rodchenkova, Natalia
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: nirodchenkova@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 69–98
DOI: 10.17076/mat135

УДК 81.32

ОБЗОР МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ РАЗРЕШЕНИЯ ЛЕКСИЧЕСКОЙ МНОГОЗНАЧНОСТИ: ВВЕДЕНИЕ

Т. В. Каушинис[1], А. Н. Кириллов[2], Н. И. Коржицкий[1], А. А. Крижановский[2], А. В. Пилинович[1], И. А. Сихонина[1], А. М. Спиркова[1], В. Г. Старкова[2], Т. В. Степкина[1], С. С. Ткач[1], Ю. В. Чиркова[2], А. Л. Чухарев[2], Д. С. Шорец[1], Д. Ю. Янкевич[1], Е. А. Ярышкина[1]

[1] *Петрозаводский государственный университет*
[2] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Разрешение лексической многозначности (WSD) – это задача выбора между разными значениями слов и словосочетаний в словаре в зависимости от контекста. В статье представлен краткий обзор методов и алгоритмов разрешения лексической многозначности. Эти методы используют различный математический и алгоритмический аппарат для решения WSD-задачи: нейронные сети, адаптивные алгоритмы улучшения точности обучения (AdaBoost), построение лексических цепочек, методы на основе применения теоремы Байеса и методы кластеризации контекстных векторов и семантически близких слов. Завершает работу сравнение разных алгоритмов решения WSD-задачи. Статья распространяется на правах свободной лицензии «CC Attribution».

Ключевые слова: разрешение лексической многозначности, нейронная сеть, бустинг, лексическая цепочка, наивный байесовский классификатор, байесовская сеть, сочетаемостные ограничения, различение значений слов.

T. V. Kaushinis, A. N. Kirillov, N. I. Korzhitsky, A. A. Krizhanovsky, A. V. Pilinovich, I. A. Sikhonina, A. M. Spirkova, V. G. Starkova, T. V. Stepkina, S. S. Tkach, Ju. V. Chirkova, A. L. Chuharev, D. S. Shorets, D. Yu. Yankevich, E. A. Yaryshkina. A REVIEW OF WORD-SENSE DISAMBIGUATION METHODS AND ALGORITHMS: INTRODUCTION

The word-sense disambiguation task is a classification task, where the goal is to predict the meaning of words and phrases with the help of surrounding text. The purpose of this short review is to acquaint the reader with the general directions of word-sense disambiguation methods and algorithms. These approaches include the following groups of methods: neural network, machine learning meta-algorithms (AdaBoost), lexical chain computation, methods based on Bayes' theorem, context clustering and words clustering algorithms. The experimental comparison of different algorithms concludes this review. This paper is licensed under the CC Attribution license.

Key words: word-sense disambiguation, neural network, boosting, lexical chain, Bayesian network, selectional preferences, word-sense discrimination.

Введение

В статье представлен обзор методов и алгоритмов разрешения лексической многозначности (word-sense disambiguation или WSD). Верный выбор в словаре одного из значений многозначного слова или фразы в зависимости от контекста является успешным результатом решения WSD-задачи.

Приведем несколько примеров употребления слов «коса» и «косой», найденных с помощью Национального корпуса русского языка (http://ruscorpora.ru) по запросу «коса»:

1. Поп сам в первой *косе* идет, но прихожане не торопятся, смотрят на солнышко и часа через полтора уже намекают, что обедать пора. [*М. Е. Салтыков-Щедрин. Мелочи жизни (1886–1887 гг.)*]

2. Но работа даже и после этого идет все вялее и вялее; некоторые и *косы* побросали. [*М. Е. Салтыков-Щедрин. Мелочи жизни (1886–1887 гг.)*]

3. В особенности жестоко было крепостное право относительно дворовых людей: даже волосы крепостных девок эксплуатировали, продавая их *косы* парикмахерам. [*М. Е. Салтыков-Щедрин. Мелочи жизни (1886–1887 гг.)*]

4. Это одинокая скала, соединяющаяся с материком намывной *косой* из песка и гальки. [*В. К. Арсеньев. По Уссурийскому краю, 1917 г.*]

5. Первая черепашка подскочила к гвардейцу и воткнула ему в спину сверкающий *косой* меч. [*Виктор Пелевин. S.N.U.F.F, 2011 г.*]

Первые четыре примера дают три разных значения существительного «коса»: ряд косарей, сельскохозяйственное орудие, заплетенные волосы, протяженная речная отмель. Последний пример содержит прилагательное «косой», совпадающее с одной из форм существительного «коса». Все эти значения и часть речи читатель легко определяет по контексту.

Именно многозначность слов, их неоднозначность и зависимость значений слов от контекста являются причиной возникновения такой задачи и одновременно обуславливают сложность ее решения. Уверенное решение WSD-задачи необходимо во многих приложениях, связанных с автоматической обработкой текста (например, информационный поиск, машинный перевод), и, на наш взгляд, является предтечей искусственного интеллекта.

Среди основных методов разрешения лексической многозначности выделяют: методы, использующие внешние источники информации, и методы, базирующиеся на машинном обучении, работающие на размеченных корпусах текстов. Также применяются комбинации этих методов [4] (с. 191–192).

По другой классификации, методы разрешения лексической многозначности различают по типу используемых *внешних источников информации* [45] (с. 10:6–10:8):

- структурированные источники данных (машиночитаемые словари, тезаурусы, онтологии). Тезаурусы содержат информацию об отношениях между словами, такими, как: синонимия, антонимия и другие. Классическим примером тезауруса и машиночитаемого словаря для английского языка является WordNet, в котором слова организованы в виде *синсетов* (от англ. ***synonym set***, группа синонимов), отношения указаны между синсетами;

- неструктурированные источники данных в виде корпусов текстов делятся на (а) неразмеченные корпуса (raw corpora) и (б) синтаксически и/или семантически размеченные корпуса.

На сегодняшний день на русском языке нет, по-видимому, достаточно объемных и серьезных обзоров по разрешению многозначности. Наиболее полное описание истории развития методов (20 страниц) есть в диссертации Д. Ю. Турдакова [7]. Такое положение дел послужило одной из причин написания этой статьи, которая будет заделом для полновесного обзора по данной теме.

Далее будут представлены примеры методов и алгоритмов разрешения лексической многозначности, разбитые на группы:

- нейронные сети – многообещающие методы с богатой историей;

- бустинг как метод улучшения точности алгоритма обучения;

- лексические цепочки – построение последовательности семантически связанных слов;

- метод ансамбля байесовских классификаторов и сочетаемостные ограничения на основе байесовских сетей;

- контекстная кластеризация – кластеризация контекстных векторов, где разные кластеры соответствуют разным значениям слова;
- кластеризация слов – это кластеризация семантически близких слов, при этом кластер соответствует некоторому значению.

Данная статья является «введением» в проблематику WSD, поскольку эта тема чрезвычайно обширна и существуют сотни интересных работ по каждому из затронутых направлений.

WSD на основе нейронных сетей, построенных по данным машиночитаемых словарей

А. Н. Кириллов

Использование нейронных сетей (NN) для WSD было предложено в 80-е годы в работах [16, 61]. В типичной NN на вход подается слово, значение которого требуется установить, т. е. целевое (*target*) слово, а также – контекст (фраза), его содержащий. Узлы выхода соответствуют различным значениям слова. В процессе обучения, когда значение тренировочного целевого слова известно, веса связующих узлы соединений (связей) настраиваются таким образом, чтобы по окончании обучения выходной узел, соответствующий истинному значению целевого слова, имел наибольшую активность. Веса соединений могут быть положительными или отрицательными и настраиваются посредством рекуррентных алгоритмов (алгоритм обратного распространения ошибки, рекуррентный метод наименьших квадратов и т. д.). Сеть может содержать скрытые (hidden) слои, состоящие из узлов, соединенных как прямыми, так и обратными связями. Для представления входной информации обычно используется одна из двух схем: распределенная (distributed) или локалистская (localist) ([9], [64], [27]).

В работе [60] описан метод автоматического построения ***очень больших нейронных сетей*** (VLNN) с помощью текстов, извлекаемых из машиночитаемых словарей (MRD), и рассмотрено использование этих сетей в задачах разрешения лексической неоднозначности. Поясним основную идею VLNN. Широко известен метод Леска [33] использования информации из MRD для задачи WSD. Суть этого метода состоит в вычислении так называемой *степени пересечения*, т. е. количества общих слов в словарных определениях слов из контекста («окна») условного размера, содержащего целевое слово. Основной недостаток метода Леска – зависимость от словарной статьи, т. е. от слов, входящих в нее. Стратегия преодоления этого недостатка – использование словарных статей, определяющих слова, входящие в другие словарные статьи, начиная со словарных статей, соответствующих словам из контекста. Таким образом, образуются достаточно длинные пути из слов, входящих в словарные статьи. Эта идея лежит в основе топологии VLNN. В работе [60] для построения VLNN использован словарь Collins English Dictionary.

Топология сети. Целевое слово представлено узлом, соединенным активирующими связями со смысловыми узлами, представляющими все возможные значения слова, имеющиеся в словарных статьях. Каждый смысловой узел, в свою очередь, соединен активирующими связями с узлами, представляющими слова в словарной статье, соответствующей толкованию данного значения. Процесс соединения повторяется многократно, создавая сверхбольшую сеть взаимосвязанных узлов. В идеале сеть может содержать весь словарь. Авторы [60], по практическим соображениям, ограничиваются несколькими тысячами узлов и 10–20 тысячами соединений. Слова представлены своими леммами. Узлы, представляющие различные значения слова, соединены запрещающими (inhibitory) связями.

Алгоритм. При запуске сети первыми активируются узлы входного слова (согласно принятой кодировке). Затем каждый входной узел посылает активирующий сигнал своим смысловым узлам, с которыми он соединен. В результате сигналы распространяются по всей сети в течение определенного числа циклов. В каждом цикле узлы слова и его значений получают обратные сигналы от узлов, соединенных с ними. Узлы конкурирующих значений посылают взаимно подавляющие сигналы. Взаимодействие сигналов обратной связи и подавления, в соответствии со стратегией «победитель получает все», позволяет увеличить активацию узлов-слов и соответствующих им правильных узлов-значений, одновременно уменьшая активацию узлов, соответствующих неправильным значениям. После нескольких десятков циклов сеть стабилизируется в состоянии, в котором активированы только узлы-значения с наиболее активированными связями с узлами-словами. При обучении сети используется метод обратного распространения (*back propagation*).

Бустинг

Т. В. Степкина, Ю. В. Чиркова

Бустинг – это общий и доказуемо-эффективный метод получения очень точного правила предсказания путем комбинирования грубых и умеренно неточных эмпирических правил [21]. Метод бустинга разработан на основе модели обучения «PAC» (probably approximately correct learning).

Метод бустинга имеет множество реализаций. Работы, посвященные бустингу, обычно описывают какой-либо из его алгоритмов. Так, например, в работах [5, 12] рассматривается алгоритм arc-x4. В [6, 23] приводится алгоритм AdaBoost.M1. Мы рассмотрим бустинг на примере алгоритма AdaBoost, который является базовым для многих модификаций, а также имеет прочный теоретический фундамент и является результатом строгого вывода [5].

Алгоритм AdaBoost был предложен в 1995 г. Фройндом и Шапиро [22]. В нем исправлены многие недостатки предыдущих алгоритмов бустинга.

AdaBoost является адаптивным алгоритмом [21], поскольку он может адаптироваться к уровням ошибок отдельных слабых гипотез. В названии первое слово «Ada» является сокращением от «adaptive» (адаптивный).

На вход алгоритма поступает обучающая выборка $(x_i; y_i); ..; (x_m; y_m)$, где каждый элемент x_i принадлежит некоторому домену или признаковому пространству X и каждая метка y_i принадлежит некоторому набору меток Y. Для каждого обучающего примера i вес распределения для целых t обозначается D_t (i), где t – это шаг алгоритма. За начальное распределение весов принимается $D_1(i) = 1/m$. Пусть метки принимают значения из множества $Y = \{-1, 1\}$.

Далее на каждом шаге t, где $t = 1 \dots T$, выполняется обучение с использованием текущего распределения D_t, после чего строится слабая гипотеза $h_t : X \to \{-1; 1\}$ с ошибкой первого рода $\varepsilon_t = \Sigma_{(i\,:\,h_t(x_i) \neq y_i)} D_t(i)$, по которой выбирается уровень значимости $\alpha_t = \frac{1}{2} ln(\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t})$ и строится новое распределение для следующего шага

$$D_{t+1}(i) = \frac{D_{t^i}}{Z_t} \times \begin{cases} e^{-\alpha t}, \text{ если } h_t(x_i) = y_i \\ e^{\alpha t}, \text{ если } h_t(x_i) \neq y_i \end{cases} = \\ = \frac{D_t(i) exp(-\alpha_t y_i h_t(x_i))}{Z_t}$$

Конечная гипотеза $H(x)$ – это среднее из большинства решений T слабых гипотез, где α_t – вес, присвоенный гипотезе h_t.

$$H(x) = sign(\sum_{t=1}^{T} \alpha_t h_t(x))$$

Идея алгоритма заключается в определении набора весов для обучающей выборки. Первоначально все веса примеров устанавливаются равными, но в каждом цикле веса неправильно классифицированных по гипотезе h_t примеров увеличиваются. Таким образом получаются веса, которые относятся к сложным примерам.

Основное теоретическое свойство AdaBoost – это способность алгоритма уменьшать ошибку обучения [21]. Фройнд и Шапиро показали, что так как каждая слабая гипотеза немного лучше случайного выбора, ошибка обучения уменьшается с экспоненциальной скоростью.

В статье [21] показано, как ограничена ошибка обобщения конечной гипотезы в терминах ошибки обучения, размера выборки m, VC размерности (размерности Вапника – Червоненкиса [56]) пространства слабых гипотез и количества циклов T. Также получена граница, не зависящая от T. Это показывает, что бустинг AdaBoost не подвержен эффекту переобучения.

Так как ошибка обучения и ошибка обобщения ограничены, как показано в статье [21], этот алгоритм действительно является бустинговым алгоритмом в том смысле, что он может эффективно преобразовать слабый алгоритм обучения в сильный, который может породить гипотезу со сколь угодно малой частотой ошибок, имея достаточное количество данных.

После того как авторы рассмотрели бинарный случай, где целью является различие лишь между двумя возможными классами, они переходят к рассмотрению мультиклассного, более приближенного к реальности. Есть несколько способов приведения AdaBoost к мультиклассному случаю. Самое простое обобщение называется AdaBoost.M1 [23], которое является приемлемым, если слабообучаемый алгоритм может достичь достаточно высокой точности на распределениях, созданных AdaBoost. Тем не менее этот метод завершается неудачно, если слабый ученик (алгоритм) не может достичь хотя бы 50 % точности при работе на этих распределениях. Для такого случая было разработано несколько методов:

1. Методы, которые работают за счет преобразования мультиклассной задачи в боль-

шую бинарную задачу или в набор бинарных задач. Эти методы требуют дополнительных усилий в разработке слабого алгоритма обучения.

2. Технология, которая включает в себя метод Диттерича и Бакири, – метод выходных кодов, исправляющих ошибки [56].

AdaBoost обладает определенными преимуществами. Его быстро и просто запрограммировать. Он не имеет никаких параметров для настройки, за исключением количества циклов. Он не требует никаких предварительных знаний о слабом обучаемом и поэтому может быть скомбинирован с любым методом для нахождения слабых гипотез.

Недостатки метода заключаются в следующем. Фактическая производительность бустинга на конкретной задаче явно зависит от данных и слабообучаемого алгоритма. Теоретически бустинг может выполниться плохо, если данных недостаточно, слабые гипотезы слишком сложные или, наоборот, слишком слабые. Также бустинг особенно восприимчив к шуму.

AdaBoost был протестирован эмпирическим путем многими исследователями. Например, Фройнд и Шапиро проверили AdaBoost на множестве эталонных наборов данных UCI [40] с использованием C4.5 [51] как слабого алгоритма обучения, а также алгоритм, который находит самое лучшее дерево решений с одним тестом. После проведения эксперимента был сделан вывод, что бустинг даже слабых деревьев решений с одним тестом, как правило, дает хорошие результаты, в то время как бустинг C4.5, как правило, дает алгоритм дерева принятия решений значительно улучшенной производительности.

Почти во всех этих экспериментах и для всех показателей эффективности бустинг работает так же хорошо или значительно лучше, чем в других методах испытаний. Бустинг также применяется к фильтрации текстов, проблемам ранжирования и проблемам классификации, возникающим при обработке естественного языка. В работе [14] бустинг наряду с другими семью WSD-методами, используется для решения тестовой задачи с китайской лексикой. Проведенные эксперименты показали, что бустинг по точности уступает только методу максимальной энтропии и классификатору, комбинирующему бустинг, наивный байесовский классификатор, метод максимальной энтропии и PCA-модель. Для задачи с английской лексикой опыт применения бустинга описан в работах [19, 20]. В них авторы рассматривают алгоритм LazyBoosting – модификция AdaBoost.MH [54]. По результатам сравнительных экспериментов бустинг оказывается по точности лучше таких методов, как наивный байесовский классификатор, метод, основанный на примерах (Exemplar Based) и MFS (naive Most-Frequent-Sense classifier).

Использование лексических цепочек для реферирования текстов

А. В. Пилинович

В статье [10] с целью реферирования текста строится модель в виде лексических цепочек. Реферирование включает четыре этапа: оригинальный текст делится на блоки (сегменты), строятся лексические цепочки, определяются сильные цепочки, извлекаются важные предложения.

Реферирование – это процесс сжатия исходного текста в более компактный при сохранении информативности текста. Реферирование выполняется для решения разных задач – от обзорного анализа текстов какой-либо научной области до быстрого выделения главных тем текста. Создание качественной информативной аннотации произвольного текста является сложной задачей, требующей полного понимания текста. Легче создавать приблизительные, указательные аннотации (indicative summaries), позволяющие принять решение – стоит ли читать текст. В работе [10] описан метод создания указательных аннотаций по произвольным текстам.

Интуитивное понятие *cohesion* (связность, склеивание, слияние), введенное в [24], указывает на объединение разных частей (фрагментов) текста в одно целое, в то, что имеет значение, смысл. Одним из видов связности является *лексическая связность* (lexical cohesion) [29]. Лексическая связность формируется с помощью семантически связанных слов. Халлидей и Хасан [24] выделили два способа формирования лексической связности: (1) с помощью категории повторений и (2) категории словосочетаний.

1. *Лексическая связность повторений* (reiteration category) достигается повтором слов, использованием синонимов и гипонимов.

2. *Лексическая связность словосочетаний* (collocation category) определена для слов, которые часто употребляются вместе, т. е. встречаются в одних и тех же контекстах.

Слова и фразы, между которыми существует лексическая связность, формируют лексическую цепочку (lexical chain) [29]. Метод лексических цепочек, предложенный Барзилей и Эльхадад [10], основан на анализе совместной встречаемости слов и лексических связей между словами.

Алгоритм построения цепочек. Достоинство лексических цепочек в том, что их легко распознать и построить. Первая вычислительная модель для лексических цепочек была представлена в работе Морриса и Хирста [44]. Цепочки создавались путем взятия нового слова из текста и поиска родственной (связанной) цепочки для слова в соответствии с критериями родства. Недостатком подхода в [44] было то, что в одну цепочку могло входить слово с разными значениями (для многозначных слов). Таким образом, выбор подходящей цепочки для слова эквивалентен решению WSD-задачи.

Метод построения лексических цепочек включает шаги:

1. Выбирается набор слов-кандидатов (существительные и составные существительные). Это кандидаты на включение в цепочки.

2. Строится список всех значений для каждого слова-кандидата (по словарю).

3. Для каждого значения каждого слова-кандидата находится (вычисляется) отношение (расстояние) до каждого слова во всех уже построенных цепочках (слово в цепочке имеет строго определенное значение, задаваемое другими словами в той же цепочке). Между двумя словами есть отношение (будет указана связь в цепочке), если мало расстояние между этими словами в тексте (text distance) или между значениями этих слов существует путь в тезаурусе WordNet. Выделяют три вида отношений [17] (с. 36):

   (а) *Extra-strong* отношение существует для слов, повторяющихся в тексте. Повтор может быть на любом расстоянии от первого употребления слова.

   (б) *Strong* отношение определено между словами, связанными отношением в WordNet. Два таких слова должны находиться в окне не более семи предложений.

   (в) *Medium-strong* отношение указывается для слов, синсеты которых находятся на расстоянии больше одного в WordNet (но есть еще и дополнительные ограничения на путь между синсетами). Слова в тексте должны находиться в пределах трех предложений.

4. Слово-кандидат добавляется в цепочки, со словами которых найдена связь. Смысловая неоднозначность устраняется, в цепочку добавляется не просто слово, а его конкретное значение (благодаря выбору значения в словаре на шаге 2).

Для выбора приоритетной цепочки (для вставки слова-кандидата) отношения упорядочены так: extra-strong, strong, medium-strong. В работе Хирста и Ст-Онж [28] предложен жадный алгоритм выбора цепочек. При этом слово-кандидат попадает ровно в одну цепочку и после этого выбор уже не может быть изменен, даже если последующий текст покажет ошибочность первоначального решения. В работе Барзилей и Эльхадад [10] предложена более сложная схема выбора «подходящего значения», требующая рассмотрения всех возможных цепочек. Таким образом, будут сформированы цепочки с учетом всех возможных значений слов с последующим выбором наилучшей цепочки. Эта более сложная схема и рассматривается далее.

Для иллюстрации метода приводится пример на отрывке текста, представленном ниже, посмотрим, какое значение будет выбрано для слова *machine*. Во-первых, для слова *Mr.* создается узел [лексема «Mr.», значение {*mister, Mr.*}]. Следующим по тексту существительным, представленным в тезаурусе WordNet, будет слово *person*, у него есть два значения: [лексема «person$_1$», значение *{human being}*] и [лексема «person$_2$», значение *{grammatical category of pronouns and verb forms}*]. Наличие двух значений у слова *person* разбивает пространство цепочек на два множества интерпретаций: в первой интерпретации используется значение $person_1$, во второй – $person_2$ (рис. 1).

Mr. *Kenny is the* ***person*** *that invented an anesthetic* ***machine*** *which uses* ***micro-computers*** *to control the rate at which an anesthetic is pumped into the blood. Such* ***machines*** *are nothing new. But his* ***device*** *uses two* ***micro-computers*** *to achieve much closer monitoring of the* ***pump*** *feeding the anesthetic into the patient.*

Компонентой в [10] называют список взаимоисключающих интерпретаций. Именно посредством компонент выбор одного из зна-

чений слов ведет к выбору соответствующей интерпретации, а следовательно, к невозможности других интерпретаций из этой компоненты. Интерпретации 1 и 2 на рис. 1 являются компонентой.

Следующее слово *anesthetic* не связано со словами из первой компоненты, поэтому для него создается компонента с одним значением (новая компонента содержит ровно одну интерпретацию).

Следующее слово *machine* имеет 5 значений: от $machine_1$ до $machine_5$. В первом значении $machine_1$ [лексема «machine», значение {*an efficient person*}] слово связано со значениями слов *person* и *Mr.*, поэтому слово *machine* вставляется в первую компоненту. После этой вставки изображение первой компоненты становится таким, как показано на рис. 2. Если продолжить этот процесс и вставить слова *micro-computer, device* и *pump,* то количество альтернативных вариантов значительно увеличивается. Самые сильные интерпретации представлены на рис. 3. При условии, что текст связный, лучшей интерпретацией считается та, которая имеет больше всего связей. В данном случае в конце шага 3 выбрана другая интерпретация $machine_4$ [лексема «machine», значение {*any mechanical or electrical device that performs or assists in the performance*}], что верно отражает значение слова *machine* в этом контексте.

Оценка интерпретации определяется как сумма оценок ее цепочек. Оценка цепочки определяется количеством и весом отношений между участниками цепочки. В эксперименте авторы зафиксировали следующий вес: повторения и синонимы – 10, антонимы – 7, гиперонимы и гипонимы – 4. Описанный алгоритм вычисляет все возможные интерпретации, не допуская противоречий между ними. Когда число возможных интерпретаций превышает определенный порог, слабые интерпретации удаляются, это необходимо для предотвращения экспоненциального роста использования памяти.

Объединение цепочек из разных сегментов. Текст предварительно разбивается на сегменты (несколько предложений или абзац). Пример выше (*Mr. Kenny...*) соответствует одному сегменту. Цепочки строятся для каждого сегмента на основе найденных отношений между словами (extra-strong, strong, medium-strong). На следующем этапе объединяются цепочки из разных сегментов, но для объединения нужно, чтобы выполнялось еще более жесткое условие: две цепочки объединяются, если они содержат одно и то же слово в одном и том же значении. Поскольку есть прямая связь между цепочками и смысловыми блоками текста, постольку с помощью лексических цепочек можно решать и обратную задачу – разбиение текста на сегменты [10].

Вычисление оценок цепочек. Для того чтобы использовать лексические цепочки для построения аннотации, в первую очередь следует выявить сильнейшие цепочки среди всех тех, которые создаются описанным выше алгоритмом. Барзилей и Эльхадад в [10] предложили эмпирическую методику для оценки силы цепочки. Они разработали среду, чтобы вычислить и графически визуализировать лексические цепочки, чтобы оценить экспериментально, насколько хорошо идентифицируются (определяются) основные темы текстов. Авторы собрали данные из 30 текстов, выбранных случайным образом из популярных журналов (например, «The Economist», «Scientific American»). Для каждого текста вручную выполнили ранжирование цепочек по степени соответствия основным темам текста.

Из множества параметров, которые можно измерить (длина цепочки; объем текста, покрываемого цепочкой; плотность; диаметр слов цепочки в графе тезауруса; число повторений), Барзилей и Эльхадад [10] опытным путем нашли следующие показатели значимости цепочек для построения реферата:

- *Длина (Length):* число употреблений в тексте элементов цепочки.
- *Индекс однородности (HomogeneityIndex):* 1 – количество различных употреблений в тексте элементов цепочки, деленное на длину (*Length*).

Таким образом, значимость цепочек оценивается так:

$$\text{Score(Chain)} = \text{Length} \times \text{HomogeneityIndex}$$

При ранжировании цепочек в соответствии с этой оценкой было найдено, что для построения реферата нужны цепочки, удовлетворяющие «критерию прочности (силы)»:

$$\text{Score(Chain)} > \text{Average(Scores)} + 2 \times \text{StandardDeviation(Scores)},$$

где *Average* – это средняя оценка по всем цепочкам, *StandardDeviation* – среднеквадратическое отклонение.

Извлечение важных предложений. После того как сильные цепочки отобраны, выполняется поиск соответствующих им предложений и извлечение этих предложений целиком из исходного текста.

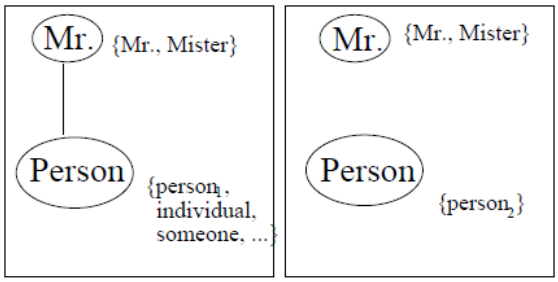
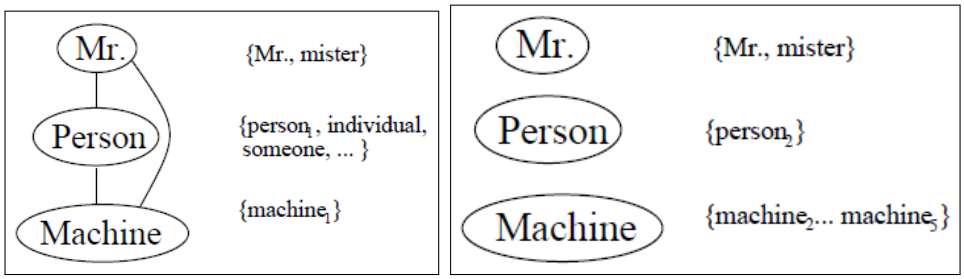
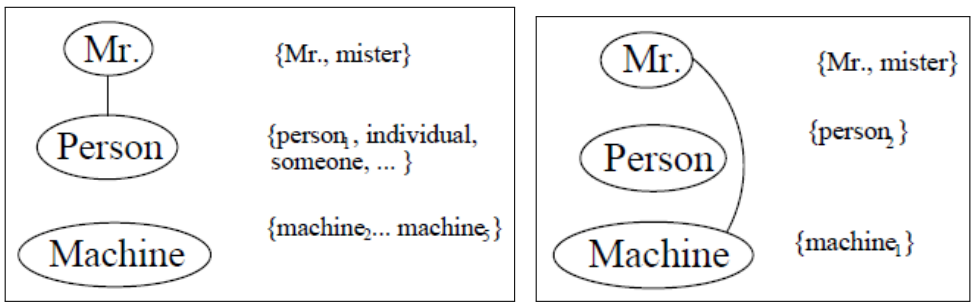


Рис. 1. Шаг 1, интерпретация 1 (слева) и 2 (справа)

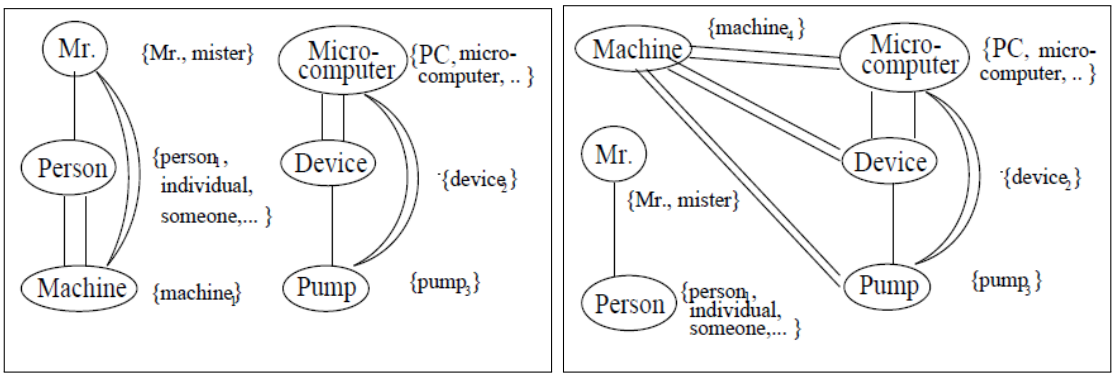


(a) Интерпретация 1 (b) Интерпретация 2



(c) Интерпретация 3 (d) Интерпретация 4

Рис. 2. Четыре интерпретации на втором шаге



(a) Интерпретация 1 (b) Интерпретация 2

Рис. 3. Две самые сильные интерпретации, полученные на третьем шаге

Для каждой сильной цепочки на основе разработанных эвристик выбирается ровно одно предложение для включения в текст реферата:

Эвристика 1: Для каждой цепочки для включения в реферат выбрать то предложение, которое содержит первое появление члена цепочки в тексте.

Эвристика 2: Для каждой цепочки для включения в реферат выбрать предложение, которое содержит первое появление *показательного* элемента цепочки в тексте. *Показательные* слова (representative words), служащие представителями цепочки, – это такие слова цепочки, которые встречаются в цепочке не реже, чем в среднем по всем словам цепочки.

Эвристика 3: Для каждой цепи найти блок текста, где есть высокая концентрация цепочки (т. е. много употреблений элементов из этой цепочки). Извлечь предложение с первого появления цепочки в этом блоке. Концентрация вычисляется как число появлений членов цепи в сегменте, разделенное на количество существительных в сегменте. Цепочка имеет высокую концентрацию, если ее концентрация является максимальной из всех цепочек. Кластер представляет собой группу последовательных сегментов, таких, что каждый сегмент содержит какие-либо элементы цепочки.

Эксперименты в [10] показали значительное преимущество алгоритма на основе лексических цепочек (точность 47–61 % и полнота 64–67 %) по сравнению с программой Microsoft Summarizer, доступной в Word'97 (точность 32–33 % и полнота 37–39 %). Эти результаты указывают на большой потенциал лексических цепочек в задаче реферирования.

Байесовский классификатор и сочетаемостные ограничения

В первой части главы строится ансамбль наивных байесовских классификаторов. Наивный байесовский классификатор – это простой вероятностный классификатор на основе применения теоремы Байеса. Для различения значений учитывается совместная встречаемость слов в окне заданного размера в текстах корпуса.

Во второй части главы для каждого глагола строится байесовская сеть. Байесовская модель обучается сочетаемостным ограничениям глаголов, т. е. обучается тому, с какими существительными глаголы могут употребляться. Сочетаемостные ограничения позволяют ограничить число значений целевого слова по данным контекста [45] (с. 10:32). Связи глагол-существительное извлекаются из корпуса текстов, а классы существительных задаются тезаурусом WordNet. Маловероятные значения слов при построении сочетаемостных ограничений отбрасываются (стратегия «explaining away»).

Разрешение лексической многозначности методом ансамбля байесовских классификаторов

А. Л. Чухарев, Т. В. Каушинис

В работе Педерсена [48] рассматривается подход к разрешению лексической многозначности слов (WSD), подразумевающий создание ансамбля наивных байесовских классификаторов, каждый из которых основан на оценке вероятности вхождения определенных слов в контекст целевого слова, значение которого определяется.

При разрешении лексической многозначности, представленном в виде задачи обучения с учителем, применяют статистические методы и методы машинного обучения к размеченному корпусу. В таких методах словам корпуса, для которых указано значение, соответствует набор языковых свойств. Педерсен [48] относит к языковым свойствам два вида особенностей: так называемые простые лексические признаки (shallow lexical features) и более сложные лингвистически обусловленные признаки (lingvistically motivated features). К первым относятся совместная встречаемость слов (co-occurence) и словосочетаний (collocations), в то время как вторые включают в себя такие свойства, как часть речи и отношение действие – объект. Обычно алгоритмы обучения строят модели классификаторов значений по этим языковым свойствам.

Автор статьи [48] предлагает подход, основанный на объединении ряда простых классификаторов в ансамбль, который разрешает многозначность с помощью голосования простым большинством голосов. Педерсен утверждает [48], что, во-первых, более сложные алгоритмы обычно не улучшают точность разрешения. Во-вторых, совместная встречаемость слов и словосочетаний имеет бóльшее

влияние на точность разрешения, чем оперирование более сложной лингвистической информацией.

В рассматриваемой статье [48] в ансамбль объединяются наивные байесовские классификаторы. При таком подходе предполагается, что все переменные, участвующие в представлении проблемы, – условно независимы при фиксированном значении переменной классификации. В проблеме разрешения лексической многозначности существует понятие контекста, в котором встречается многозначное слово. Этот контекст представляется в виде функции переменных $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, а значение многозначного слова представлено в виде классификационной переменной (S). Все переменные бинарные. Переменная, соответствующая слову из контекста, принимает значение ИСТИНА, если это слово находится на расстоянии определенного количества слов слева или справа от целевого слова. Совместная вероятность наблюдения определенной комбинации переменных контекста с конкретным значением слова выражается следующим образом:

$$p(F_1, F_2, \ldots, F_n S) = p(S)\Pi_{i=1}^{n} p(F_i|S),$$

где $p(S)$ и $p(F_i|S)$ – параметры данной модели. Для оценки параметров достаточно знать частоты событий, описываемых взаимозависимыми переменными (F_i, S). Эти значения соответствуют числу предложений, где слово, представляемое F_i, встречается в некотором контексте многозначного слова, упомянутого в значении S. Если возникают нулевые значения параметров, то они сглаживаются путем присвоения им по умолчанию очень маленького значения. После оценки всех параметров модель считается обученной и может быть использована в качестве классификатора.

Контекст в [48] представлен в виде bag-of-words (модель «мешка слов»). В этой модели выполняется следующая предобработка текста: удаляются знаки препинания, все слова переводятся в нижний регистр, все слова приводятся к их начальной форме (лемматизация). В [48] контексты делятся на два окна: левое и правое. В первое попадают слова, встречающиеся слева от неоднозначного слова, и, соответственно, во второе – встречающиеся справа.

Окна контекстов могут принимать 9 различных размеров: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 25 и 50 слов. Первым шагом в ансамблевом подходе является обучение отдельных наивных байесовских классификаторов для каждого из 81 возможных сочетаний левого и правого размеров окон. В статье [48] наивный байесовский классификатор (l, r) включает в себя l слов слева от неоднозначного слова и r слов справа. Исключением является классификатор (0,0), который не включает в себя слов ни слева, ни справа. В случае нулевого контекста классификатору присваивается **априорная вероятность** многозначного слова (равная вероятности встретить наиболее употребимое значение).

Следующий шаг в [48] при построении ансамбля – это выбор классификаторов, которые станут членами ансамбля. 81 классификатор группируется в три общие категории, по размеру окна контекста. Используются три таких диапазона: узкий (окна шириной в 0, 1 и 2 слова), средний (3, 4, 5 слов), широкий (10, 25, 50 слов). Всего есть 9 возможных комбинаций, поскольку левое и правое окна отделены друг от друга. Например, наивный байесовский классификатор (1, 3) относится к диапазону категории (узкий, средний), поскольку он основан на окне из одного слова слева и окне из трех слов справа. Наиболее точный классификатор в каждой из 9 категорий диапазонов выбирается для включения в ансамбль. Затем каждый из 9 членов классификаторов голосует за наиболее вероятное значение слова с учетом контекста. После этого ансамбль разрешает многозначность путем присвоения целевому слову значения, получившего наибольшее число голосов.

Экспериментальные данные. Для экспериментов были выбраны английские слова *line* и *interest*. Источником статистических данных по этим словам послужили работы [32], [13]. В статье приводится информация о частоте использования шести значений для каждого из этих слов (табл. 1, 2).

Таблица 1. Число употреблений слова *line* для шести наиболее часто встречаемых значений (из тезауруса WordNet) по данным корпусов *ACL/DCI Wall Street Journal и American Printing House for the Blind*

Значение	**Частота**
Product	2218
Written or spoken text	405
Telephone connection	429
Formation of people or things; queue	349
An artificial division; boundary	376
A thin, flexible object; cord	371
Всего	4148

Таблица 2. Число употреблений слова *interest* для шести наиболее часто встречаемых значений (из словаря Longman Dictionary of Contemporary English). Этот набор данных был получен в 1994 г. Брюсом и Виебе [13] путем указания значений для всех вхождений слова *interest* в корпус ACL/DCI Wall Street Journal

Значение	**Частота**
Money paid for the use of money	1252
A share in a company or business	500
Readiness to give attention	361
Advantage, advancement or favor	178
Activity that one gives attention to	66
Causing attention to be given to	11
Всего	2368

Результаты экспериментов. Итогом проделанной работы стали обучение и проверка 81 наивного байесовского классификатора на многозначных словах *line* и *interest*. Точность разрешения лексической многозначности составила 89 % для слова *interest* и 88 % для слова *line*. В [48] было получено, что ансамбль классификаторов с голосованием простым большинством дает более высокую точность, чем взвешенное голосование. Например, для слова *interest* при голосовании простым большинством точность составила 89 %, а взвешенное голосование дало только 83 %.

Построение сочетаемостных ограничений на основе байесовских сетей для разрешения многозначности

И. А. Сихонина

В статье [15] представлена байесовская модель, применяемая для разрешения лексической многозначности глаголов. Авторы рассматривают такое понятие, как сочетаемостные ограничения (selectional preferences). *Сочетаемостные ограничения* (далее SP) – это закономерности использования глагола относительно семантического класса его параметров (субъект, объект (прямое дополнение) и косвенное дополнение).

Модели автоматического построения SP важны сами по себе и имеют приложения в обработке естественного языка. Сочетаемостные ограничения глагола могут применяться для получения возможных значений неизвестного параметра при известных глаголах; например, из предложения *«Осенние хххх жужжали и бились на стекле»* легко определить, что «хххх» – мухи. При построении предложения SP позволяют отранжировать варианты и выбрать лучший среди них. Исследование SP могло бы помочь в понимании структуры ментального лексикона.

Системы обучения SP без учителя обычно комбинируют статистические подходы и подходы, основанные на знаниях. Компонент базы знаний (здесь WordNet [41]) – это обычно база данных, в которой слова сгруппированы в классы.

Статистический компонент состоит из пар предикат-аргумент, извлеченных из неразмеченного корпуса. В тривиальном алгоритме можно было бы получить список слов (прямых дополнений глагола), и для тех слов, которые есть в WordNet, вывести их семантические классы. В работе [15] семантическим классом называется *синсет* тезауруса WordNet, т. е. класс соответствует одному из значений слова. Таким образом, в тривиальном алгоритме на основе данных WordNet можно выбрать классы (значения слов), с которыми употребляются (встречаются в корпусе) глаголы.

Например, если в исходном корпусе текстов глагол *ползать* употребляется со словом *ящерица*, принадлежащим классу РЕПТИЛИИ, то в модели построения SP будет записано, что «глагол *ползать* употребляется со словами из класса РЕПТИЛИИ». Если слово *крокодил*, во-первых, также встречается в тексте с глаголом *ползать*, во-вторых, слово *крокодил* принадлежит сразу двум классам: РЕПТИЛИЯ и ВЕРТОЛЕТ, то из этого следует, что модель SP будет расширена информацией о том, что «глагол *ползать* употребляется со словами из классов и РЕПТИЛИЯ, и ВЕРТОЛЕТ».

В ранее разработанных моделях (Резник (1997) [52], Абни и Лайт (1999) [8]) было обнаружено, что главная трудность в таком тривиальном алгоритме – это наличие неоднозначных слов в обучающих данных. В тех же работах ([52], [8]) были предложены более сложные модели, в которых предполагается, что все значения многозначных слов появляются с одинаковой частотой.

Байесовские сети, или байесовские сети доверия (БСД), состоят из множества переменных (вершин) и множества ориентированных ребер, соединяющих эти переменные. Такой сети соответствует ориентированный ациклический граф. Каждая переменная может принимать одно из конечного числа взаимоисключающих состояний. Пусть все переменные будут бинарного типа, т. е. принимают одно из двух значений: истина или ложь.

Любой переменной A с родителями $B_1, ..., B_n$ соответствует таблица условных вероятностей (conditional probability table, далее CPT).

Например, построим SP для глагола *ползать*, и сеть на рис. 4 будет базой знаний.

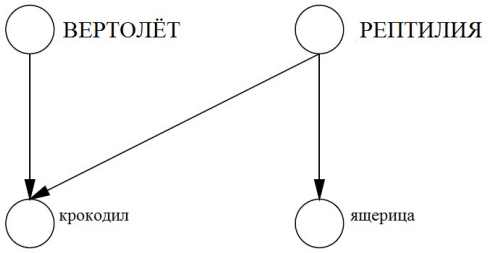


Рис. 4. Байесовская сеть для многозначного существительного *крокодил*

Глагол *ползать* употребляется со словами *крокодил* и *ящерица*. Переменные ВЕРТОЛЕТ и РЕПТИЛИЯ соответствуют более общим абстрактным значениям, переменные *крокодил* и *ящерица* являются более узкими, конкретными значениями. Переменная РЕПТИЛИЯ может принимать одно из двух значений, соответствующих словам *крокодил* и *ящерица*, именно эту задачу определения значения и нужно решить.

Таблица 3. Условные вероятности переменных *крокодил* и *ящерица* в зависимости от значений переменных ВЕРТОЛЕТ и РЕПТИЛИЯ, где (В, Р, к, я – это аббревиатуры слов ВЕРТОЛЕТ, РЕПТИЛИЯ, *крокодил* и *ящерица*)

	$P(X = x \mid Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$			
	В, Р	В, ¬Р	¬В, Р	¬В, ¬Р
к = *true*	0.99	0.99	0.99	0.01
к = *false*	0.01	0.01	0.01	0.99
я = *true*	0.99	0.99	0.01	0.01
я = *false*	0.01	0.01	0.99	0.99

При построении табл. 3 условных вероятностей (CPT) учтем следующие предположения:

- вероятность, что выбираем какой-либо из концептов (ВЕРТОЛЕТ и РЕПТИЛИЯ), очень мала, т. е. $P(B = true) = P(P = true) = 0{,}01$, следовательно, велика вероятность, что концепты не выбраны: $P(B = false) = P(P = false) = 0{,}99$;
- если какой-либо из концептов истинен (В, Р), то «выпадает» слово *крокодил*;
- если концепт РЕПТИЛИЯ истинен, то растут шансы встретить слово *ящерица*.

Из табл. 3 вероятности появления слов следует вывод, что использование сразу двух значений слова *крокодил (рептилия и вертолет МИ-24)* маловероятно. Вероятность использования значения РЕПТИЛИЯ намного больше, чем значения ВЕРТОЛЕТ. Таким образом, гипотеза «вертолет» «отброшена» («explaining away»).

Байесовские сети для построения SP. Иерархия существительных в WordNet представлена в виде ориентированного ациклического графа. Синсет узла принимает значение «истина», если глагол «выбирает» существительное из набора синонимов. Априорные вероятности задаются на основе двух предположений: во-первых, маловероятно, что глагол будет употребляться только со словами какого-то конкретного синсета, и во-вторых, если глагол действительно употребляется только со словами из данного синсета (например, синсет ЕДА), тогда должно быть правомерным употребление этого глагола с гипонимами этого синсета (например, ФРУКТ).

Те же предположения (что для синсетов) верны и для употреблений слов с глаголами:

1. слово, вероятно, является аргументом глагола в том случае, если глагол употребляется с каким-либо из значений этого слова;
2. отсутствие связки глагол-синсет говорит о малой вероятности того, что слова этого синсета употребляются с глаголом.

Словам «вероятно» и «маловероятно» должны быть приписаны такие числа, сумма которых равна единице.

Находкой работы [15] является разъяснение стратегии «explaining away», т. е. отбрасывание маловероятных значений слов при построении сочетаемостных ограничений. Такая стратегия является неотъемлемым свойством байесовских сетей и байесовского вывода, полезным свойством при разрешении лексической многозначности.

Каждому вхождению анализируемого слова в корпус соответствует контекстный вектор. Выполняется кластеризация векторов, где разные кластеры соответствуют разным значениям слова [45] (с. 10:26–10:28). Алгоритмы кластеризации полагаются на дистрибутивную гипотезу (Distributional Hypothesis) [25], в соответствии с которой слова, употребляемые в схожих контекстах, считаются близкими по смыслу.

В первой части выполняется разрешение лексической многозначности и поиск новых значений на основе контекстных векторов, построенных по биомедицинским текстам.

Во второй части представлена задача *различения значений слов*. Эта задача отличается от задачи разрешения лексической многозначности тем, что при различении значений слов нет никаких предопределенных значений слова, присоединенных к кластерам; здесь слова, употребляющиеся в схожих контекстах, группируются в кластеры (значения).

Кластеризация фрагментов биомедицинских текстов

Е. А. Ярышкина

В статье [53] изучаются методы кластеризации без учителя и их эффективность для решения лексической многозначности при обработке текстов по биомедицине. Решение проблем лексической многозначности в данной области включает в себя не только традиционные задачи присвоения ранее определенных смысловых значений для терминов, но также и обнаружения новых значений для них.

Для разрешения лексической многозначности Савова и др. [53] предложили разделять контексты (фрагменты текста), содержащие определенное целевое слово, на кластеры, где разные кластеры будут соответствовать различным значениям целевого слова. Каждый кластер состоит из близких по значению контекстов. Предполагается, что используемое целевое слово в аналогичном контексте будет иметь одно и то же или очень близкое значение (дистрибутивная гипотеза).

Процесс кластеризации продолжается до тех пор, пока не будет найдено предварительно заданное число кластеров. Выбор шести кластеров в работе [53] основан на том факте, что это больше, чем максимальное число возможных значений любого английского слова, наблюдаемое среди данных (большинство слов имеют два-три значения). Нормализация текста не выполняется.

Данные в этом исследовании состоят из ряда контекстов, которые включают данное целевое слово, где у каждого целевого слова вручную отмечено, какое значение из словаря было использовано в этом контексте. Контекст – это единственный источник информации о целевом слове. Цель исследования – преобразовать контекст в контекстные векторы первого и второго порядка [2]. Контекстные векторы содержат следующие «лексические свойства»: биграммы, совместную встречаемость и совместную встречаемость целевого слова. Биграммами являются как двухсловные словосочетания, так и любые два слова, расположенные рядом в некотором тексте. Для лингвистических исследований могут быть полезны только упорядоченные наборы биграмм [1].

Экспериментальные данные – это набор NLM WSD [59] (NLM – национальная библиотека медицины США), в котором значения слов взяты из UMLS (единая система медицинской терминологии). UMLS имеет три базы знаний:

- *Метатезаурус* включает все термины из контролируемых словарей (SNOMED-CT, ICD и другие) и понятия, которые представляют собой кластера из терминов, описывающих один и тот же смысл.
- *Семантическая сеть* распределяет понятия на 134 категории и показывает отношения между ними. SPECIALIST-лексикон содержит семантическую информацию для терминов Метатезауруса.
- *Medline* – главная библиографическая база данных NLM, которая включает приблизительно 13 миллионов ссылок на журнальные статьи в области науки о жизни с уклоном в биомедицинскую область.

Авторы успешно проверили по три конфигурации существующих методов (PB – Pedersen and Bruce [49], SC – Schütze [57]) и оценили эффективность использования SVD (сингулярное разложение матриц). Методы PB основаны на контекстных векторах первого порядка – признаки одновременного присутствия целевого слова или биграммы. Рассчитывается среднее расстояние между кластерами или применяется метод бисекций.

PB методы подходят для работы с довольно большими наборами данных. Методы SC основаны на представлениях второго порядка – матрицы признаков одновременного присутствия или биграммы, где каждая строка и столбец – вектор признаков первого порядка данного слова. Так же рассчитывается среднее расстояние между кластерами или применяется метод бисекций. SC методы подходят для обработки небольших наборов данных.

Метод SC2 (признаки одновременного присутствия второго порядка, среднее расстояние между элементами кластера в пространстве подобия) с применением и без SVD показал лучшие результаты: всего 56 сравниваемых экземпляров, в 47 случаях метод SC2 показал наилучшие результаты, в 7 случаях результаты незначительно отличаются от других проверяемых методов.

Все эксперименты, указанные в исследовании, выполнялись с помощью пакета SenseClusters [58]. В ходе исследования было проведено два эксперимента для разных наборов данных. Маленький тренировочный набор – это набор NLM WSD, который включает 5000 экземпляров для 50 часто встречаемых неоднозначных терминов из Метатезауруса UMLS. Каждый неоднозначный термин имеет по 100 экземпляров с указанным вручную значением. У 21 термина максимальное число экземпляров находится в пределах от 45 до 79 экземпляров. У 29 терминов число экземпляров от 80 до 100 для конкретного значения. Стоит отметить, что каждый термин имеет категорию «ни одно из вышеупомянутых», которая охватывает все оставшиеся значения, не соответствующие доступным в UMLS. Большой тренировочный набор является реконструкцией «1999 Medline», который был разработан Weeber [62]. Были определены все формы из набора NLM WSD и сопоставлены с тезисами «1999 Medline». Для создания тренировочного набора экземпляров использовались только те тезисы из «1999 Medline», которым было найдено соответствие в наборе NLM WSD.

Использование целиком текста аннотации статьи в качестве контекста приводит к лучшим результатам, чем использование отдельных предложений. С одной стороны, большой объем контекста, представленный аннотацией, дает богатую коллекцию признаков, с другой стороны, в коллекции WSD представлено небольшое число контекстов.

Различение значений слов на основе векторов свойств, расширенных словарными толкованиями

А. М. Спиркова

Амрута Пурандаре и Тед Педерсен в 2004 г. разработали «Алгоритм различения значений на основе контекстных векторов» (*Context vector sense discrimination*) [50]. В этом алгоритме (1) берется набор примеров употреблений исследуемого слова, (2) выполняется кластеризация этих примеров так, чтобы близкие по значению или связанные каким-либо образом слова объединились в одну группу [50].

Word sense discrimination – это задача группировки нескольких употреблений данного слова в кластеры, где каждому кластеру соответствует определенное значение целевого слова. Подходы к решению этой проблемы основываются на дистрибутивной гипотезе. Следует различать понятия *различение значений слов* и *разрешение лексической многозначности*. При *различении значений слов* нет никаких предопределенных значений слова, присоединенных к кластерам; здесь скорее слова, употребляющиеся в схожих контекстах, группируются в кластеры (значения).

При решении задачи *различения значений* используются контекстные вектора: если целевое слово встречается в тестовых данных, то контекст этого слова представляется в виде вектора контекста. *Вектор контекста* — это средний вектор по векторам свойств каждого из слов контекста. *Вектор свойств* содержит информацию о совместной встречаемости данного слова с другими словами, этот вектор строится по данным корпуса текстов на этапе обучения.

Метод различения значений Пурандаре и Педерсена [50] предназначен для работы при недостаточном объеме текстовых данных, при этом вектор свойств расширяется данными, извлеченными из толкований словарей. Этот метод группирует в кластеры близкие по значению употребления целевого слова.

Построение матрицы встречаемости слов. Первоначально строится матрица совместной встречаемости слов по данным обучающего корпуса (были использованы тексты Wall Street Journal и Британского национального корпуса).

Вектор свойств (строка матрицы) содержит информацию о совместной встречаемости данного слова с другими. Было решено в [50], что слова «встречаются», если они находятся в тексте на расстоянии не более пяти слово-

позиций (т. е. между ними находится не более трех слов).

Обработка матрицы. После создания матрицы выполняется разделение тестовых данных, т. е. группировка примеров употреблений (фраз) с целевым словом. Каждому слову в примере употребления в тестовых данных соответствует вектор свойств из матрицы встречаемости. Средний вектор свойств по всем словам соответствует вектору контекста. Таким образом, набор тестовых данных, включающих употребление исследуемого слова, преобразуется в набор контекстных векторов, каждый из которых соответствует одному из употреблений целевого слова.

Различение значений происходит путем кластеризации контекстных векторов с помощью разделяющего (partitional) или иерархического «сверху вниз» (agglomerative) алгоритма кластеризации [30], [31], [63]. Получающиеся кластеры составлены из употреблений близких по значению фраз, и каждый кластер соответствует отдельному значению целевого слова.

Векторы свойств, расширенные текстами толкований из словаря. Векторы свойств, полученные по небольшому корпусу текстов, имеют очень малую размерность (несколько сотен), что не позволяет полностью описать закономерности совместной встречаемости слов. Для решения этой проблемы векторы свойств слов расширяются содержательными словами (content words), извлеченными из словарных толкований разных значений данного слова. В табл. 4 представлены примеры толкований и содержательные слова для восьми значений слова «история» из Русского Викисловаря.

Таблица 4. Словарные толкования (и содержательные слова) по данным статьи «история» из Русского Викисловаря. Серым цветом и курсивом выделены те слова, которые уже были в векторе слов, черным — новые слова из толкований, которыми будет расширен вектор свойств

№	**Значение**	**Содержательные слова**
1	Закономерное, последовательное развитие, изменение действительности	*Развитие,* изменение
2	Наука, изучающая факты, тенденции и закономерности развития человеческого общества	*Наука,* факт, тенденция, закономерность
3	Наука, изучающая ход развития, последовательные изменения какой-либо области природы или культуры	*Наука, развитие,* изменение
4	Последовательный ход развития, изменения чего-либо, совокупность фактов о развитии какого-либо явления	*Развитие,* изменение, факт
5	Отдаленное время с его событиями, происшествиями; прошлое	Время, событие, происшествие
6	Эпическое повествование, рассказ	Повествование, *рассказ*
7	Смешная или неожиданная ситуация, происшествие, случай	Ситуация, случай, происшествие
8	Скандал, неприятность	Скандал, неприятность

Предположим, например, что вектор свойств (столбец в матрице встречаемости) для слова *история* имеет непустые значения в строках, соответствующих словам: *книга, мир, наука, образование, развитие, рассказ.*

В Русском Викисловаре различные значения слова *история* (табл. 4) включают содержательные слова: *время, закономерность, изменение, наука, неприятность, повествование, происшествие,* развитие, рассказ, *ситуация, скандал, случай, событие, тенденция, факт.* Таким образом, вектор свойств, соответствующий слову «история», будет расширен новыми (отсутствующими ранее) словами из словаря: *время, закономерность, изменение, неприятность, повествование, происшествие, ситуация, скандал, случай, событие, тенденция, факт.*

В итоге вектор свойств будет включать слова: *время, закономерность, изменение,* книга, мир, наука, *неприятность,* образование, *повествование, происшествие,* развитие, рассказ, *ситуация, скандал, случай, тенденция, факт.*

Для оценки результатов была выполнена ручная разметка значений в тестовых примерах. Кластеру присваивалось то значение, примеров употребления которого в нем было больше всего.

Авторами было проведено 75 экспериментов с использованием 72 слов из корпуса SENSEVAL-2 и со словами *line, hard* и *serve.*

В тестовых данных SENSEVAL-2 примеры употреблений включали 2–3 предложения. Для каждого слова было дано от 50 до 200 примеров употреблений в тестовых и тренировочных данных. Для этих слов известно много (порядка 8–12) значений. Малое число примеров при большем числе значений привело к тому, что для некоторых значений оказалось мало примеров употреблений. 43 из 72 слов SENSEVAL-2 показали улучшение F-меры и полноты (recall) при расширении вектора свойств текстами толкований словаря. Однако для 29 слов F-мера стала хуже, что, возможно, говорит о неправильном применении метода, в том числе о нерепрезентативности выборки. Для окончательной оценки необходима большая экспериментальная база: не десятки слов, а десятки и сотни тысяч.

Данный метод может быть полезен при различении значений слов без учителя при небольшом количестве обучающих данных.

Кластеризация слов

Кластеризация слов – это кластеризация семантически близких слов, при этом кластер соответствует одному из значений исследуемого слова [45] (с. 10:28–10:29).

В первой части описан метод построения пары взаимных ближайших соседей и автоматического создания тезауруса. Для этого из текста извлекаются тройки зависимостей (слово 1, слово 2, отношение), затем эти тройки используются для вычисления близости значений слов.

Алгоритм кластеризации посредством комитетов, представленный во второй части раздела, также можно отнести к задаче *различения значения слов*. В алгоритме последовательно вычисляется сходство между словами, строится набор компактных кластеров (комитетов), все слова распределяются по этим кластерам.

Автоматический поиск и кластеризация похожих слов

Д. С. Шорец

В работе [34] представлен метод автоматического создания тезауруса, основанный на анализе корпуса текста и вычислении сходства слов, близости их значений. Значение незнакомого слова часто можно определить по контексту [46]. Рассмотрим, например, следующий текст:

(1) *Бутылка Tezgüino стоит на столе. Всем нравится Tezgüino. Tezgüino может привести к опьянению. Мы делаем Tezgüino из зерна.*

Из этого контекста можно предположить, что *Tezgüino* – это алкогольный напиток, приготовленный из зерна.

Задача поиска похожих слов *(similar words)* является первым шагом в определении значения слова. Тогда при обработке корпуса, включающего предложение (1), результатом должно быть определение близости значения слова *Tezgüino* к словам *пиво, вино, водка.*

Методология автоматического создания тезауруса. Для вычисления сходства между словами в работе [34] использован парсер [35], извлекающий тройки из текста. Тройки зависимостей (от англ. *dependency triple*, далее просто *тройки*) состоят из двух слов и грамматического отношения между ними. Символ $||w, r, w'||$ означает частоту в корпусе тройки (w, r, w'), где w, w' – это слова в нормальной форме, r – синтаксическое отношение. Произвольное слово или отношение обозначается символом-джокером «*». Например, $||$*cook, obj,* *$||$ означает число троек со словом *cook* и отношением *obj*.

Например, из предложения *«У меня есть коричневая собака»* будут извлечены следующие тройки:

$||$*коричневый, прил_сущ, собака*$||$
$||$*есть, гл_сущ, собака*$||$

Определим следующие моменты:

1. *Описание слова* w – это частоты всех троек (w, *, *) в корпусе, т. е. всех троек, включающих w. Описание слова w является вектором.

2. *«Пересечение» двух слов* – это тройки, представленные в описании обоих слов; это пересечение векторов.

Сходство между двумя объектами вычисляется как количество информации в «пересечении» двух объектов (2), деленное на количество информации в описании двух объектов (1), далее обозначено как функция $sim(w_1, w_2)$ [36].

Предположив, что частоты троек не зависят друг от друга, получаем, что информация, представленная в описании слова w, равна сумме информации по каждой из уникальных троек в описании слова w.

Для измерения информации в утверждении $||w,\ r,\ w'|| = c$ выполним следующее:

1. измерим количество информации в утверждении, что произвольная тройка, извлеченная из текста, будет наша тройка *(w, r, w')* при условии, что значение $||w,\ r,\ w'||$ – неизвестно;
2. измерим то же при условии, что значение $||w,\ r,\ w'||$ – известно;
3. разница этих двух количеств является ответом.

Вероятность встретить в тексте тройку *(w, r, w')* можно рассматривать как одновременное возникновение трех событий:

A: случайно выбранное слово – это w;
B: случайно выбранное отношение – это r;
C: случайно выбранное слово – это w'.

1. Когда значение $||w,\ r,\ w'||$ неизвестно, то предполагаем, что **A** и **C** являются условно независимыми при наличии события **B**. Вероятность наступления сразу трех этих событий составляет $P_{MLE}(B)P_{MLE}(A|B)P_{MLE}(C|B)$, где P_{MLE} – это оценка максимального правдоподобия распределения вероятностей (*maximum likelihood estimation*)

$$P_{MLE}(B) = \frac{||*, r, *||}{||*, *, *||}$$

$$P_{MLE}(A|B) = \frac{||w, r, *||}{||*, r, *||}$$

$$P_{MLE}(C|B) = \frac{||*, r, w'||}{||*, r, *||}$$

2. Когда значение $||w,\ r,\ w'||$ известно, можно сразу получить $P_{MLE}(A, B, C)$:

$$P_{MLE}(A, B, C) = \frac{||w, r, w'||}{||*, *, *||}$$

3. Пусть ***I(w,r, w')*** обозначает количество информации, содержащейся в утверждении $||w,\ r,\ w'|| = c$. Можно вычислить это значение так:

$$I(w, r, w') = -log(P_{MLE}(B)P_{MLE}(A|B)P_{MLE}(C|B)) - (-log(P_{MLE}(A, B, C)) = log\frac{||w, r, w'|| \times ||*, r, *||}{||w, r, *|| \times ||*, r, w'||}.$$

Отметим, что значение *I(w,r,w')* равно количеству взаимной информации (*mutual information*) между w и w' [18].

Пусть $T(w)$ – это множество пар *(r, w')*, при которых

$$log\frac{||w, r, w'|| \times ||*, r, *||}{||w, r, *|| \times ||*, r, w'||}$$

имеет положительное значение. Определим значение сходства (похожести) двух слов w_1 и w_2 с помощью формулы:

$$sim(w_1, w_2) = \frac{\sum_{(r,w) \in T(w_1) \cap T(w_2)} (I(w_1, r, w) + I(w_2, r, w))}{\sum_{(r,w) \in T(w_1)} I(w_1, r, w) + \sum_{(r,w) \in T(w_2)} I(w_2, r, w)}.$$

Практическая реализация метода. Был обработан корпус, включающий 64 млн слов. Из него было извлечено 56.6 млн троек, включающих 8.7 млн уникальных троек.

Сам корпус был разбит на классы по частям речи. Исследовалось попарно сходство между всеми глаголами, всеми существительными, всеми прилагательными/наречиями по формуле $sim(w_1, w_2)$. Для каждого слова был построен аналог словарной статьи в тезаурусе, включающий упорядоченный набор 200 наиболее похожих слов. Статья в тезаурусе для слова w имела следующий формат:

$$w(pos) : w_1, s_1, w_2, s_2, \ldots, w_N, s_N,$$

где *pos* – это часть речи, w_i – это похожее слово, s_i – это значение сходства между w и w_i, слова упорядочены по убыванию значения сходства.

Два слова являются *парой взаимных ближайших соседей (RNN* от *respective nearest neighbors)*, если они являются наиболее похожими словами друг для друга (первыми в списке из двухсот слов). С помощью программы удалось получить 543 пары RNN существительных, 212 пар RNN глаголов, 382 пары RNN прилагательных/наречий в созданном автоматически тезаурусе. В табл. 5 представлен список каждого 10-го RNN для глаголов.

Таблица 5. Список пар взаимных ближайших соседей (RNN) глаголов

Ранг	**RNN**	**Значение сходства**
1	*fall rise*	0.67
11	*injure kill*	0.38
21	*concern worry*	0.34
31	*convict sentence*	0.29
41	*limit restrict*	0.27
51	*narrow widen*	0.26
61	*attract draw*	0.24
71	*discourage encourage*	0.23
81	*hit strike*	0.22
91	*distregard ignore*	0.21
101	*overstate understate*	0.20
111	*affirm reaffirm*	0.18
121	*inform notify*	0.17
131	*differ vary*	0.16
141	*scream yell*	0.15
151	*laugh smile*	0.143
161	*compete cope*	0.136
171	*add whisk*	0.13
181	*blossom mature*	0.12
191	*smell taste*	0.11
201	*bark howl*	0.10
211	*black white*	0.07

Выявление значений слов из текста – кластеризация посредством комитетов

Д. Ю. Янкевич

В статье [47] представлен алгоритм автоматического обнаружения значений слов в тексте, названный *кластеризация посредством комитетов* (Clustering By Committee, далее CBC). Также авторы предлагают методологию оценки для автоматического измерения точности и полноты найденных значений.

Алгоритм первоначально находит множество компактных кластеров, называемых комитетами, каждый из которых представляет собой одно из значений определяемого слова. Центр тяжести членов комитета (мера связности с определяемым словом) используется в качестве вектора признаков кластера.

Алгоритм CBC включает три этапа.

На этапе I для каждого элемента (слова) вычисляется k наиболее похожих слов, строится база данных сходства S. Сначала весь список относящихся к слову значений сортируется по убыванию значений связи согласно значению PMI (точечная взаимная информация, pointwise mutual information [39], с. 66–68), а затем с помощью иерархического кластерного анализа по *методу средней связи* [3] вычисляется сходство между всеми элементами кластера попарно. Значение функции PMI между предполагаемым значением слова (контекстом) и элементом (словом) вычисляется следующим образом: пусть x – это рассматриваемый элемент, а y – контекст. *Точечная взаимная информация* между x и y определена как

$$pmi(x;y) \equiv log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} =$$

$$= log\frac{p(x|y)}{p(x)} = log\frac{p(y|x)}{p(y)}.$$

При кластеризации посредством метода средних связей *(average-link clustering)* вычисляется среднее сходство между данным объектом и всеми объектами в кластере, а затем,

Data: $(E, S, \theta_1, \theta_2)$, где E – это список элементов, которые будут сгруппированы, база данных сходства S (построена в ходе этапа I), пороги θ_1 и θ_2 (с помощью порога θ_1 сохраняются только те кластеры, которые имеют значения, отличные от ранее обнаруженных, порог θ_2 позволяет обнаружить элементы, не принадлежащие ни одному из кластеров)
Result: C – список комитетов
Step 1:
foreach $e \in E$ **do**

1. Кластер k наиболее «близких» (похожих) элементов e из S с помощью метода средней связи.
2. Для каждого обнаруженного кластера c вычислить следующую оценку: $val = |C| \times avgsim(c)$, где $|C|$ – количество элементов c и $avgsim(c)$ – усредненное сходство между всеми парами элементов кластера c.
3. Записать кластер с наивысшей оценкой в список L.

end
Step 2:
SortByDecreasingOrder($c(val) \in L$) // Сортировка кластеров в списке L в порядке убывания их оценок val.
Step 3:
$C = \varnothing$ // Пусть перечень комитетов C будет изначально пустым.
foreach $c \in L$ **do**

// в отсортированном по убыванию порядке:

1. Вычислить центр тяжести, усредняя поэлементно значение векторов, и вычислить вектор PMI центроида (так же, как и для отдельных элементов на шаге 1).
2. Если схожесть c и центроида каждого комитета, ранее добавленного к C, ниже порогового θ_1, то следует добавить c в C.

end
Step 4:
if $C = \varnothing$ **then**
 return C
end
Step 5:
$R = \varnothing$ // R – это множество остатков, т. е. элементов, не охваченных ни одним из кластеров
foreach $e \in E$ **do**
 if $sim(e,$ *foreach* $c \in C) < \theta_2$ // *сходство по всем комитетам из* C *меньше* θ_2 // **then**
 $R+ = e$ // то следует добавить e в список остатков R.
 end
end
Step 6:
if $R = \varnothing$ **then**
 return C **else**
 return $C \cup Algorithm1(R, S, \theta_1, \theta_2)$
 end
end

Algorithm 1: Этап II. Поиск комитетов

Result: Итоговые кластеры с максимальным значением связи val между словами (см. вычисление val на шаге 1 и 3 Алгоритма 1)
Пусть C – это список кластеров (изначально пустых).
Пусть S – это первые 200 кластеров, наиболее похожих на e (база данных сходства S построена в ходе этапа I).
while $S \neq \varnothing$ **do**
  пусть $c \in S$ наиболее близкий кластер к e
  if *сходство* $(e, c) < \sigma$ **then**
    конец цикла
  end
  if *с не схож ни с одним кластером в* C **then**
    присвоить e к c;
    удалить из e его характеристики, которые перекрываются с характеристиками c;
  end
  удалить c из S
end

Algorithm 2: Этап III. Присвоение элементов кластерам: для каждого из элементов e находится наиболее близкий кластер, в который включается e

если найденное *среднее значение сходства* достигает или превосходит некоторый заданный пороговый уровень сходства, объект присоединяется к этому кластеру [3]. Сложность этого алгоритма $O(n^2 \times log(n))$, где n – число кластеризуемых элементов [31].

На II этапе Алгоритм 1 рекурсивно строит набор компактных кластеров, удаленных друг от друга, где элементы каждого кластера образуют комитет. В ходе работы Алгоритма 1 формируется как можно больше комитетов при условии, что каждый вновь созданный комитет не слишком похож на любой из уже существующих комитетов. Если условие нарушается, комитет просто отбрасывается.

На каждом рекурсивном уровне Алгоритм 1 находит компактный набор кластеров (их и называем комитетами) и определяет оставшиеся элементы, не вошедшие ни в один из комитетов. Будем говорить, что комитет «покрывает» элемент (или элемент «входит» в комитет), если значение сходства между элементом и центроидом комитета выше некоторой пороговой величины. При следующем рекурсивном вызове алгоритм снова ищет комитеты среди оставшихся элементов. На выходе Алгоритм 1 дает список всех найденных комитетов.

На шаге 1 Алгоритма 1 поиска комитетов предпочтение отдается большим и компактным кластерам. На шаге 2 кластеры сортируются по значению сходства для последующего выбора лучшего кластера. На шаге 3 кластер сохраняется только в том случае, если его сходство со всеми ранее полученными кластерами ниже установленного порогового значения (в экспериментах было получено значение $\theta_1 = 0.35$). На шаге 4, если не было найдено комитетов на предыдущем шаге, рекурсия останавливается. Оставшиеся и никуда не вошедшие элементы (остатки) определяются на шаге 5. Если таких остатков нет, то алгоритм завершается, иначе – алгоритм вызывается рекурсивно для остатков.

В результате второго этапа построения CBC строятся плотные компактные кластеры (имеющие бóльшее значение val, см. шаги 1 и 3 Алгоритма 1), хорошо отличающиеся друг от друга. На третьем этапе все элементы распределяются по этим кластерам, а именно: каждый элемент e присваивается наиболее близкому кластеру, при этом центроид членов комитета используется в качестве вектора характеристик кластера (Алгоритм 2). Центроиды не изменяются, т. е. при добавлении элемента в кластер элемент не добавляется в комитет кластера.

Алгоритм CBC полагается на дистрибутивную гипотезу. Алгоритм CBC разрешает лексическую многозначность, группируя слова согласно сходству их контекстов. Каждому полученному кластеру соответствует одно из значений слова.

Сравнение с алгоритмом UNICON. CBC является разновидностью алгоритма UNICON [37], который также строит центроид кластера, используя небольшой набор похожих элементов.

Одним из основных различий между UNICON и CBC является то, что UNICON гарантирует, что различные комитеты не имеют одинаковых элементов, тем не менее центры тяжести двух комитетов по-прежнему могут быть очень близкими (похожими). В UNICON'е эта проблема решается объединением таких кластеров. В отличие от этого на II этапе CBC создаются только те

комитеты, центры тяжести которых отличны от всех ранее созданных комитетов.

Есть разница и на III этапе CBC. Алгоритм UNICON плохо работает со словами, которые имеют несколько широко используемых (доминирующих) значений. CBC удаляет «пересекающиеся» (общие для двух кластеров) характеристики (слова) после того, как присвоит значение кластеру. Это приводит к тому, что кластеры точнее соответствуют искомым значениям.

Эксперименты

Сравнительные эксперименты в WSD: роль предпочтений в машинном обучении

Н. И. Коржицкий

В работе Рэймонда Муни [42] представлено одно из первых сравнений разных по природе методов WSD на одних и тех же данных. В статье [42] проведена серия экспериментов, в которых сравнивалась способность различных обучающихся алгоритмов определять значение слова в зависимости от контекста.

В машинном обучении под термином *bias* (пристрастие, тенденция, предпочтение) понимается любое основание для предпочтения одного обобщения другому [42]. В деревьях принятия решений предпочтение (*bias*) отдается простым деревьям решений, в нейронных сетях – линейным пороговым функциям, а в байесовском классификаторе – функциям, учитывающим условную независимость свойств. Чем лучше «предпочтение» обучающегося алгоритма соответствует характеристикам конкретной задачи, тем лучше будет результат. Большинство обучающихся алгоритмов обладают «предпочтением» наподобие Бритвы Оккама. В таких алгоритмах выбираются гипотезы, которые могут быть представлены меньшим количеством информации на каком-нибудь языке представлений. Однако компактность, с которой (деревья решений, дизъюнктивная нормальная форма, сети с линейным пороговым значением) представляют конкретные функции, – может существенно различаться. Поэтому различные «предпочтительные» оценки могут работать лучше или хуже в конкретных задачах. Одной из основных целей в машинном обучении является поиск «предпочтений» с целью решения прикладных практических задач.

Выбор правильного «предпочтения» и обучающегося алгоритма является сложной задачей. Простым подходом является автоматизация выбора метода на основе результатов внутренней перекрестной валидации. Другой подход, который называется мета-обучением (meta-learning), заключается в том, чтобы сформировать набор правил (или аналогичный классификатор), который на основании предметных признаков, описывающих задачу, предсказывал бы, когда обучающийся алгоритм будет срабатывать наилучшим образом.

Описанный в [42] эксперимент заключается в определении значения английского слова *line* среди 6 возможных вариантов (*строка, ряд, дивизия, телефон, веревка, продуктовая линия*). Данные для проведения экспериментов взяты из работы [32].

Для получения обучающей выборки брались предложения со словом *line*, и им в соответствие ставилось одно из 6 значений. Распределение значений неравномерно: включение в список источников журнала The Wall Street Journal привело к тому, что одно из значений встречалось в 5 раз чаще всех остальных [32].

В работе [38] было установлено, что наиболее эффективными при решении задачи WSD являются алгоритмы на основе дерева решений (decision tree). Данный класс методов обходил по точности и скорости работы класс нейронных сетей. Другие исследования [43] показали, что класс методов индуктивного логического программирования (inductive logic programming) справляется с задачей разрешения лексической многозначности слова лучше алгоритмов на основе дерева решений.

В серии экспериментов в [42] сравнивались следующие методы: байесовский классификатор, перцептрон, C4.5, метод k-ближайших соседей и модификации алгоритма FOIL: PFOIL-DLIST, PFOIL-DNF, PFOIL-CNF.

После проведения сравнительных экспериментов, заключавшихся в обучении и определении значения слова *line,* было выяснено, что байесовский классификатор и перцептрон работают точнее других рассмотренных методов.

Эксперименты проводились с разными размерами обучающей выборки для того, чтобы выяснить, какого рода зависимость имеет место между точностью определения значения и размером выборки. На рис. 5c отображена зависимость точности работы алгоритмов

Таблица 6. Шесть значений слова *line* из Английского Викисловаря и Русского Викисловаря

Ключевое слово	**Перевод**	**Толкование на английском** (Английский Викисловарь)	**Толкование на русском** (Русский Викисловарь)
Text	Строка	A small amount of text	Ряд слов, букв или иных знаков, написанных или напечатанных в одну линию
Formation	Ряд	A more-or-less straight sequence of people, objects, etc.	Несколько объектов, расположенных в линию или следующих один за другим
Division	Дивизия	A formation, usually made up of two or three brigades	Тактическое воинское соединение
Phone	Телефон	The wire connecting one telegraphic station with another, a telephone or internet cable	То же, что телефонный номер
Cord	Веревка	A rope, cord, string, or thread, of any thickness	Гибкое и длинное изделие, – чаще всего сплетенное или свитое из льняных (или пеньковых, полимерных и т. п.) волокон или прядей
Product	Продуктовая линия	The products or services sold by a business, or by extension, the business itself	Совокупность однородной продукции единого назначения

от размера выборки. При увеличении размера обучающей выборки сначала происходит резкий рост точности, последующий прирост точности становится незначительным.

Эксперименты учитывали не только точность определения значения, но и требовательность алгоритма к ресурсам в процессе обучения и работы. На рис. 5a можно увидеть зависимость времени обучения от размера выборки. Самыми быстрообучаемыми оказались байесовский классификатор и перцептрон, а самыми медленными – нормальные формы (рис. 5a).

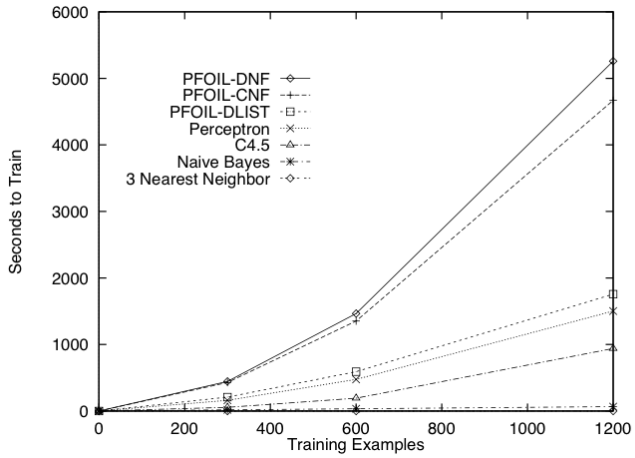
На рис. 5b представлена зависимость времени работы алгоритмов от размера обучающей выборки. Время работы алгоритмов дает другую картину: байесовский классификатор и перцептрон работают долго при максимальном размере обучающей выборки, в то время как остальные методы решают WSD задачу за постоянное время (рис. 5b).

Заключение

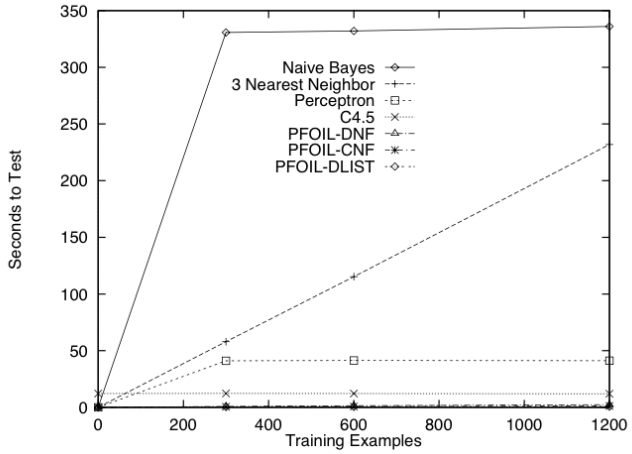
Разрешение лексической многозначности – это задача выбора между разными значениями слов и словосочетаний в словаре в зависимости от контекста. Задача разрешения лексической многозначности является открытой проблемой, т. е. крайне интересной и привлекательной с научной точки зрения.

В статье представлен краткий обзор методов и алгоритмов, применяемых для разрешения лексической многозначности. Эти методы используют различный математический и алгоритмический аппарат для решения WSD-задачи: нейронные сети, адаптивный алгоритм улучшения точности обучения AdaBoost, построение лексических цепочек, методы на основе применения теоремы Байеса и методы кластеризации контекстных векторов и семантически близких слов. Работу завершает исследование, в котором сравниваются время обучения, время работы и результаты работы разных алгоритмов решения WSD-задачи.

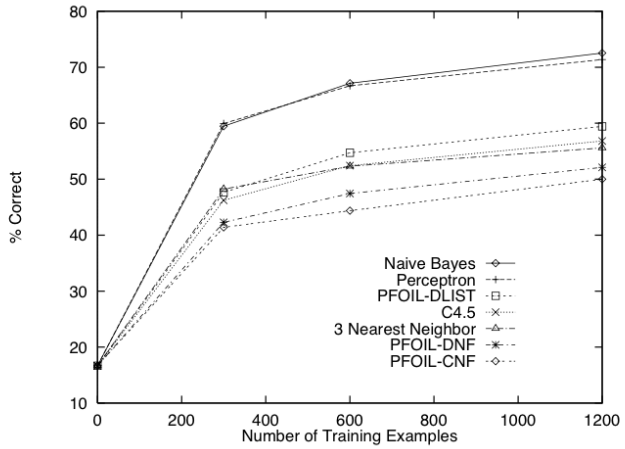
Работа В. Г. Старковой поддержана грантом РГНФ (проект № 15-04-12029), работа А. Н. Кириллова и Ю. В. Чирковой поддержана грантом РГНФ (проект № 15-04-12006). Работа А. А. Крижановского выполнена при частичной финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Секции литературы и языка ОИФН РАН «Язык и информационные технологии» 2015–2017 (проект «Корпус вепсского языка: разработка и формирование морфологической базы электронного ресурса»).



(a) Зависимость времени, затраченного на обучение алгоритмов, от размера обучающей выборки



(b) Зависимость времени работы алгоритмов от размера обучающей выборки



(c) Рост точности решения WSD-задачи для разных алгоритмов при увеличении размера обучающей выборки

Рис. 5. Сравнение времени обучения, времени работы и результатов работы алгоритмов PFOIL-DLIST, PFOIL-DNF, PFOIL-CNF, C4.5, Naive Bayes – наивный баейсовский классификатор; Perceptron – персептрон; 3 Nearest Neighbor – метод 3-х ближайших соседей при определении значения слова *line* [42]

Литература

1. *Аверин А. Н.* Разработка сервиса поиска биграмм // Труды международной конференции «Корпусная лингвистика 2006». СПб.: С.-Петерб. ун-т, 2006. С. 5–15.

2. *Епрев А. С.* Применение контекстных векторов в классификации текстовых документов // Журнал радиоэлектроники. 2010. № 10. URL: http://jre.cplire.ru/iso/oct10/1/text.html (дата обращения: 21.08.2015)

3. *Ким Дж. О., Мьюллер Ч. У., Клекка У. Р.* Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1989. С. 172.

4. *Лукашевич Н. В.* Тезаурусы в задачах информационного поиска. М.: МГУ, 2011. 495 с.

5. *Марманис Х., Бабенко Д.* Алгоритмы интеллектуального Интернета. Передовые методики сбора, анализа и обработки данных / Пер. с англ. СПб.: Символ-Плюс, 2011. 480 с.

6. *Паклин Н. Б., Орешков В. И.* Бизнес-аналитика: от данных к знаниям: Учебное пособие. 2-е изд., испр. СПб.: Питер, 2013. 704 с.

7. *Турдаков Д. Ю.* Методы и программные средства разрешения лексической многозначности терминов на основе сетей документов: дис. ... к. ф.-м. н. М., 2010. 138 с.

8. *Abney S., Light M.* Hiding a semantic hierarchy in a markov model // In Proceedings of the Workshop on Unsupervised Learning in Natural Language Processing, ACL. 1999.

9. *Azzini A., da Costa Pereira C., Dragoni M., Tettamanzi A. G. B.* Evolving Neural Networks for Word Sense Disambiguation // 8th International Conference on hybrid intelligent systems. Spain. Barcelona, 2008. P. 332–337. doi: 10.1109/HIS.2008.88

10. *Barzilay R., Elhadad M.* Using lexical chains for text summarization // In Proceedings of the ACL Workshop on Intelligent Scalable Text Summarization (Madrid, Spain). 1997. P. 10–17.

11. *Berry M., Do T., O'Brien G., Krishna V., Varadhan S.* SVDPACK (version 1.0) user's guide. Technical Report CS-93-194, University of Tennessee at Knoxville, Computer Science Department, April 1993.

12. *Breiman L.* Arcing classifiers. The Annals of Statistics. 1998. Vol. 26, N 3. P. 801–849.

13. *Bruce R., Wiebe J.* Word-sense disambiguation using decomposable models // In Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, 1994. P. 139–146. doi: 10.3115/981732.981752

14. *Carpuat M., Wu D.* Evaluating the word sense disambiguation performance of statistical machine translation // In Proceedings of the 2nd International Joint Conference on natural language processing (IJCNLP), 2005. P. 122–127. URL: http://www.aclweb.org/anthology/I05-2021 (дата обращения: 20.08.2015)

15. *Ciaramita M., Johnson M.* Explaining away ambiguity: Learning verb selectional preference with Bayesian networks // In Proceedings of the 18th Conference on Computational linguistics, 2000. Vol. 1. P. 187–193.

16. *Cottrell G. W., Small S. L.* A connectionist scheme for modelling word sense disambiguation // Cognition and brain theory. 1983. N 6. P. 89–120.

17. *Duong D. T.* Automated text summarization. Graduation Thesis. Hanoi University. 2011. 117 p.

18. *Hindle D.* Noun classification from predicate-argument structures // In Proceedings of ACL-90, Pittsburg, Pennsylvania, June, 1990. P. 268–275.

19. *Escudero G., Màrquez L., Rigau G.* Using LazyBoosting for word sense disambiguation // In Proceedings of the Second International Workshop on evaluating Word Sense Disambiguation Systems. Toulouse, France, 2001. P. 71–74.

20. *Escudero G., Màrquez L., Rigau G.* Boosting Applied to Word Sense Disambiguation // In Proceedings of the 12th European Conference on Machine Learning, ECML. Barcelona, Catalonia. 2000. P. 129–141.

21. *Freund Y., Schapire R. E.* A Short Introduction to Boosting // Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence, 1999. Vol. 14, N 5. P. 771–780.

22. *Freund Y., Schapire R. E.* Game theory, on-line prediction and boosting // In Proceedings of the 9th Annual Conference on Computational Learning Theory, 1996. P. 325–332.

23. *Freund Y., Schapire R. E.* A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting // Journal of Computer and System Sciences. 1997. P. 119–139. doi: 10.1006/jcss.1997.1504

24. *Halliday M., Hasan R.* Cohesion in English. London: Longman, 1976. 374 p.

25. *Harris Z.* Distributional structure // In: J. J. Katz (ed.) The Philosophy of Linguistics. New York: Oxford University Press, 1985. P. 26–47.

26. *Hearst M.* Multi-paragraph segmentation of expository text // In Proceedings of the 32th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, 9–16. Las Cruces, New Mexico: Association for Computational Linguistics. 1994. doi: 10.3115/981732.981734

27. *Hinton G. E., McClelland J. L., Rumelhart D. E.* Distributed representations // In Parallel Processing: explorations in the microstructure of cognition. MIT Press, Cambridge, MA, 1986. P. 5–44.

28. *Hirst G., St-Onge D.* Lexical chains as representations of context for the detection and correction of malapropisms. WordNet: An electronic lexical database, 1998. P. 305–332.

29. *Hoey M.* Patterns of Lexis in Text. Oxford: Oxford University Press, 1991. 190 p.

30. *Jain A., Dubes R.* Algorithms for Clustering Data. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1988.

31. *Jain A., Murthy M., Flynn P.* Data clustering: a review // ACM Computing Surveys, 1999. Vol. 31, N 3. P. 264–323. doi: 10.1145/331499.331504

32. *Leacock C., Towell G., Voorhees E.* Corpus-based statistical sense resolution // In Proceedings of the ARPA Workshop on Human Language Technology, 1993. P. 260–265.

33. *Lesk M.* Automatic sense disambiguation using machine readable dictionaries: How to tell a pine cone from an ice cream cone // In Proceedings of the 5th SIGDOC. New York. 1986. P. 24–26. doi: 10.1145/318723.318728

34. *Lin D.* Automatic Retrieval and Clustering of Similar Words // In Proceedings of the 17th International Conference on Computational linguistics. University of Manitoba, Manitoba, Canada, 1998. Vol. 2. P. 768–774. doi: 10.3115/980432.980696

35. *Lin D.* Principle-based parsing without overgeneration // In Proceedings of ACL-93, Columbus, Ohio, 1993. P. 112–120. doi: 10.3115/981574.981590

36. *Lin D.* Using syntactic dependency as local context to resolve word sense ambiguity // In Proceedings of ACL/EACL-97, Madrid, Spain, 1997. P. 64–71. doi: 10.3115/979617.979626

37. *Lin D., Pantel P.* Induction of semantic classes from natural language text // In Proceedings of SIGKDD-01. San Francisco, CA. 2001. P. 317–322. doi: 10.1145/502512.502558

38. *Ling Charles X., Marinov M.* Answering the connectionist challenge: A symbolic model of learning the past tenses of English verbs. Cognition, Elsevier, 1993.

39. *Manning C. D., Schütze H.* Foundations of Statistical Natural Language Processing. MIT Press, 1999.

40. *Merz C. J., Murphy P. M.* UCI repository of machine learning databases, 1998. URL: www.ics.uci.edu/ mlearn/MLRepository.html (дата обращения: 24.04.2015)

41. *Miller G.* Wordnet: An on-line lexical database. International Journal of Lexicography, 1990. Vol. 3, N 4.

42. *Mooney R. J.* Comparative Experiments on Disambiguating Word Senses: An Illustration of the Role of Bias in Machine Learning. Department of Computer Sciences. University of Texas, Austin, TX 78712-1188, 1996.

43. *Mooney R. J., Califf M. E.* Induction of First-Order Decision Lists: Results on Learning the Past Tense of English Verbs. Department of Computer Sciences. University of Texas, Austin, TX 78712-1188, 1995.

44. *Morris J., Hirst G.* Lexical cohesion computed by thesaural relations as an indicator of the structure of text. Computational Linguistics, 1991. Vol. 17, N 1. P. 21–43.

45. *Navigli R.* Word sense disambiguation: A survey. ACM Computing Surveys (CSUR), 2009. Vol. 41, N 2. doi: 10.1145/1459352.1459355

46. *Nida Eugene A.* Componential Analysis of Meaning. The Hague, Mouton, 1975.

47. *Pantel P., Lin D.* Discovering Word Senses from Text. University of Alberta. Department of Computing Science. Edmonton, Alberta, T6H 2E1 Canada, 2002. doi: 10.1145/775047.775138

48. *Pedersen T.* A Simple Approach to Building Ensembles of Naive Bayesian Classifers for Word Sense Disambiguation. Department of Computer Science, University of Minnesota Duluth, 2000.

49. *Pedersen T., Bruce R.* Distinguishing word senses in untagged text // In Proceedings of the 2nd Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, 1997.

50. *Purandare A., Pedersen T.* Improving word sense discrimination with gloss augmented feature vectors // Workshop on Lexical Resources for the Web and Word Sense Disambiguation, 2004. P. 123–130.

51. *Quinlan J. R.* C4.5: Programs for Machine Learning. Morgan Kaufmann, 1993.

52. *Resnik P.* Selectional preference and sense disambiguation // In Proceedings of the ANLP-97 Workshop: Tagging Text with Lexical Semantics: Why, What, and How? 1997.

53. *Savova G., Pedersen T., Purandare A., Kulkarni A.* Resolving ambiguities in biomedical text with unsupervised clustering approaches. University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report, 2005.

54. *Schapire R. E., Singer Y.* Improved Boosting Algorithms Using Confidence-rated Predictions. Machine Learning, 1999. Vol. 37, N 3. P. 297–336.

55. *Schapire R. E., Singer Y.* Improved boosting a predictions // In Proceedings of the 11th Annual Conference Theory, 1998. P. 80–91.

56. *Schapire R. E.* Using output codes to boost multiclass learning problems. In Machine Learning // In Proceedings of the 14th International Conference, 1997. P. 313–321.

57. *Schütze H.* Automatic Word Sense Discrimination // Computational Linguistics, 1998. Vol. 24, N 1. P. 97–123.

58. *SenseClusters.*
URL: http://senseclusters.sourceforge.net (дата обращения: 24.04.2015)

59. *UMLS* Terminology Services (UTS). URL: http://umlsks.nlm.nih.gov/kss/servlet/Turbine/template (дата обращения: 22.04.2015)

60. *Veronis J., Ide N.* Word sense disambiguation with very large neural networks extracted from machine readable dictionaries // In Proceedings of the 13th International Conference on Computational Linguistics. Helsinki, 1990. P. 389–394. doi: 10.3115/997939.998006

61. *Waltz D. L., Pollack J. B.* Massively parallel parsing: a strongly interactive model of natural language interpretation // Cognitive science, 1985. N 9. P. 51–74. doi: 10.1207/s15516709cog0901_4

62. *Weeber M., Mork J. G., Aronson A. R.* Developing a test collection for biomedical word sense disambiguation // In Proceedings of the AMIA Symposium, Chicago, 2001. P. 746–750.

63. *Zhao Y., Karypis G.* Evaluation of hierarchical clustering algorithms for document datasets // In Proceedings of the 11th International Conference on Information and Knowledge Management, McLean, VA, 2002. P. 515–524. doi: 10.1145/584792.584877

64. *Zuppann A.* Connectionist Approach to Word Sense Disambiguation // In Proceedings Class of 2003 Senior Conference on Natural Language Processing. Swarthmore College, USA. 2003. P. 78–83.

Поступила в редакцию 02.04.2015

References

1. *Averin A. N.* Razrabotka servisa poiska bigramm [Developing a search engine for bigrams]. Trudy mezhdunarodnoj konferencii «Korpusnaja lingvistika 2006» [Proceedings of the International Conference «Corpus linguistics 2006»]. St. Petersburg: St. Peterb. un-t, 2006. P. 5–15.

2. *Eprev A. S.* Primenenie kontekstnyh vektorov v klassifikacii tekstovyh dokumentov [Applications of context vectors in classification of text documents]. Zhurnal radiojelektroniki [Journal of radio electronics]. 2010. N 10. URL: http://jre.cplire.ru/iso/oct10/1/text.html (accessed: 21.08.2015)

3. *Kim G. O., M'juller Ch. U., Klekka U. R.* Faktornyj, diskriminantnyj i klasternyj analiz [Factorial, discriminant and cluster analysis]. Moscow: Finansy i statistika, 1989. P. 172.

4. *Loukachevitch N. V.* Tezaurusy v zadachah informacionnogo poiska [Thesauri in information retrieval tasks]. Moscow: MSU, 2011. 495 p.

5. *Marmanis H., Babenko D.* Algoritmy intellektual'nogo Interneta. Peredovye metodiki sbora, analiza i obrabotki dannyh [Algorithms of the intelligent Web. Advanced methods of data collection, analysis and processing]. St. Petersburg: Simvol-Plyus, 2011. 480 p.

6. *Paklin N. B., Oreshkov V. I.* Biznes-analitika: ot dannyh k znanijam: Uchebnoe posobie. 2-e izd., ispr. [Business analytics: from data to knowledge. Tutorial]. St. Petersburg: Piter, 2013. 704 p.

7. *Turdakov D. Yu.* Metody i programmnye sredstva razreshenija leksicheskoj mnogoznachnosti terminov na osnove setej dokumentov [Methods and software tools for resolving lexical ambiguity of terms based on the network of documents]: dis. ... k. f.-m. n. [Ph. D. thesis, phys.-math.]. Moscow, 2010. 138 c.

8. *Abney S., Light M.* Hiding a semantic hierarchy in a markov model. In Proceedings of the Workshop on Unsupervised Learning in Natural Language Processing, ACL. 1999.

9. *Azzini A., da Costa Pereira C., Dragoni M., Tettamanzi A. G. B.* Evolving Neural Networks for Word Sense Disambiguation. 8th International Conference on hybrid intelligent systems. Spain. Barcelona, 2008. P. 332–337. doi: 10.1109/HIS.2008.88

10. *Barzilay R., Elhadad M.* Using lexical chains for text summarization. In Proceedings of the ACL Workshop on Intelligent Scalable Text Summarization (Madrid, Spain). 1997. P. 10–17.

11. *Berry M., Do T., O'Brien G., Krishna V., Varadhan S.* SVDPACK (version 1.0) user's guide. Technical Report CS-93-194, University of Tennessee at Knoxville, Computer Science Department, April 1993.

12. *Breiman L.* Arcing classifiers. The Annals of Statistics. 1998. Vol. 26, N 3. P. 801–849.

13. *Bruce R., Wiebe J.* Word-sense disambiguation using decomposable models. In Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, 1994. P. 139–146. doi: 10.3115/981732.981752

14. *Carpuat M., Wu D.* Evaluating the word sense disambiguation performance of statistical machine translation. In Proceedings of the 2nd International Joint Conference on natural language processing (IJCNLP), 2005. P. 122–127. URL:

http://www.aclweb.org/anthology/I05-2021 (дата обращения: 20.08.2015)

15. *Ciaramita M., Johnson M.* Explaining away ambiguity: Learning verb selectional preference with Bayesian networks. In Proceedings of the 18th Conference on Computational linguistics, 2000. Vol. 1. P. 187–193.

16. *Cottrell G. W., Small S. L.* A connectionist scheme for modelling word sense disambiguation. Cognition and brain theory. 1983. N 6. P. 89–120.

17. *Duong D. T.* Automated text summarization. Graduation Thesis. Hanoi University. 2011. 117 p.

18. *Hindle D.* Noun classification from predicate-argument structures. In Proceedings of ACL-90, Pittsburg, Pennsylvania, June, 1990. P. 268–275.

19. *Escudero G., Màrquez L., Rigau G.* Using LazyBoosting for word sense disambiguation. In Proceedings of the Second International Workshop on evaluating Word Sense Disambiguation Systems. Toulouse, France, 2001. P. 71–74.

20. *Escudero G., Màrquez L., Rigau G.* Boosting Applied to Word Sense Disambiguation. In Proceedings of the 12th European Conference on Machine Learning, ECML. Barcelona, Catalonia. 2000. P. 129–141.

21. *Freund Y., Schapire R. E.* A Short Introduction to Boosting. Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence, 1999. Vol. 14, N 5. P. 771–780.

22. *Freund Y., Schapire R. E.* Game theory, on-line prediction and boosting. In Proceedings of the 9th Annual Conference on Computational Learning Theory, 1996. P. 325–332.

23. *Freund Y., Schapire R. E.* A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. Journal of Computer and System Sciences. 1997. P. 119–139. doi: 10.1006/jcss.1997.1504

24. *Halliday M., Hasan R.* Cohesion in English. London: Longman, 1976. 374 p.

25. *Harris Z.* Distributional structure. In: J. J. Katz (ed.) The Philosophy of Linguistics. New York: Oxford University Press, 1985. P. 26–47.

26. *Hearst M.* Multi-paragraph segmentation of expository text. In Proceedings of the 32th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, 9–16. Las Cruces, New Mexico: Association for Computational Linguistics. 1994. doi: 10.3115/981732.981734

27. *Hinton G. E., McClelland J. L., Rumelhart D. E.* Distributed representations. In Parallel Processing: explorations in the microstructure of cognition. MIT Press, Cambridge, MA, 1986. P. 5–44.

28. *Hirst G., St-Onge D.* Lexical chains as representations of context for the detection and correction of malapropisms. WordNet: An electronic lexical database, 1998. P. 305–332.

29. *Hoey M.* Patterns of Lexis in Text. Oxford: Oxford University Press, 1991. 190 p.

30. *Jain A., Dubes R.* Algorithms for Clustering Data. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1988.

31. *Jain A., Murthy M., Flynn P.* Data clustering: a review. ACM Computing Surveys, 1999. Vol. 31, N 3. P. 264–323. doi: 10.1145/331499.331504

32. *Leacock C., Towell G., Voorhees E.* Corpus-based statistical sense resolution. In Proceedings of the ARPA Workshop on Human Language Technology, 1993. P. 260–265.

33. *Lesk M.* Automatic sense disambiguation using machine readable dictionaries: How to tell a pine cone from an ice cream cone. In Proceedings of the 5th SIGDOC. New York. 1986. P. 24–26. doi: 10.1145/318723.318728

34. *Lin D.* Automatic Retrieval and Clustering of Similar Words. In Proceedings of the 17th International Conference on Computational linguistics. University of Manitoba, Manitoba, Canada, 1998. Vol. 2. P. 768–774. doi: 10.3115/980432.980696

35. *Lin D.* Principle-based parsing without overgeneration. In Proceedings of ACL-93, Columbus, Ohio, 1993. P. 112–120. doi: 10.3115/981574.981590

36. *Lin D.* Using syntactic dependency as local context to resolve word sense ambiguity. In Proceedings of ACL/EACL-97, Madrid, Spain, 1997. P. 64–71. doi: 10.3115/979617.979626

37. *Lin D., Pantel P.* Induction of semantic classes from natural language text. In Proceedings of SIGKDD-01. San Francisco, CA. 2001. P. 317–322. doi: 10.1145/502512.502558

38. *Ling Charles X., Marinov M.* Answering the connectionist challenge: A symbolic model of learning the past tenses of English verbs. Cognition, Elsevier, 1993.

39. *Manning C. D., Schütze H.* Foundations of Statistical Natural Language Processing. MIT Press, 1999.

40. *Merz C. J., Murphy P. M.* UCI repository of machine learning databases, 1998. URL: www.ics.uci.edu/ mlearn/MLRepository.html (дата обращения: 24.04.2015)

41. *Miller G.* Wordnet: An on-line lexical database. International Journal of Lexicography, 1990. Vol. 3, N 4.

42. *Mooney R. J.* Comparative Experiments on Disambiguating Word Senses: An Illustration of the Role of Bias in Machine Learning. Department of Computer Sciences. University of Texas, Austin, TX 78712-1188, 1996.

43. *Mooney R. J., Califf M. E.* Induction of First-Order Decision Lists: Results on Learning the Past Tense of English Verbs. Department of Computer Sciences. University of Texas, Austin, TX 78712-1188, 1995.

44. *Morris J., Hirst G.* Lexical cohesion computed by thesaural relations as an indicator of the structure of text. Computational Linguistics, 1991. Vol. 17, N 1. P. 21–43.

45. *Navigli R.* Word sense disambiguation: A survey. ACM Computing Surveys (CSUR), 2009. Vol. 41, N 2. doi: 10.1145/1459352.1459355

46. *Nida Eugene A.* Componential Analysis of Meaning. The Hague, Mouton, 1975.

47. *Pantel P., Lin D.* Discovering Word Senses from Text. University of Alberta. Department of Computing Science. Edmonton, Alberta, T6H 2E1 Canada, 2002. doi: 10.1145/775047.775138

48. *Pedersen T.* A Simple Approach to Building Ensembles of Naive Bayesian Classifers for Word Sense Disambiguation. Department of Computer Science, University of Minnesota Duluth, 2000.

49. *Pedersen T., Bruce R.* Distinguishing word senses in untagged text. In Proceedings of the 2nd Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing, 1997.

50. *Purandare A., Pedersen T.* Improving word sense discrimination with gloss augmented feature vectors. Workshop on Lexical Resources for the Web and Word Sense Disambiguation, 2004. P. 123–130.

51. *Quinlan J. R.* C4.5: Programs for Machine Learning. Morgan Kaufmann, 1993.

52. *Resnik P.* Selectional preference and sense disambiguation. In Proceedings of the ANLP-97 Workshop: Tagging Text with Lexical Semantics: Why, What, and How? 1997.

53. *Savova G., Pedersen T., Purandare A., Kulkarni A.* Resolving ambiguities in biomedical text with unsupervised clustering approaches. University of Minnesota Supercomputing Institute Research Report, 2005.

54. *Schapire R. E., Singer Y.* Improved Boosting Algorithms Using Confidence-rated Predictions. Machine Learning, 1999. Vol. 37, N 3. P. 297–336.

55. *Schapire R. E., Singer Y.* Improved boosting a predictions. In Proceedings of the 11th Annual Conference Theory, 1998. P. 80–91.

56. *Schapire R. E.* Using output codes to boost multiclass learning problems. In Machine Learning. In Proceedings of the 14th International Conference, 1997. P. 313–321.

57. *Schütze H.* Automatic Word Sense Discrimination. Computational Linguistics, 1998. Vol. 24, N 1. P. 97–123.

58. *SenseClusters.*
URL: http://senseclusters.sourceforge.net (дата обращения: 24.04.2015)

59. *UMLS* Terminology Services (UTS). URL: http://umlsks.nlm.nih.gov/kss/servlet/Turbine/template (дата обращения: 22.04.2015)

60. *Veronis J., Ide N.* Word sense disambiguation with very large neural networks extracted from machine readable dictionaries. In Proceedings of the 13th International Conference on Computational Linguistics. Helsinki, 1990. P. 389–394. doi: 10.3115/997939.998006

61. *Waltz D. L., Pollack J. B.* Massively parallel parsing: a strongly interactive model of natural language interpretation. Cognitive science, 1985. N 9. P. 51–74. doi: 10.1207/s15516709cog0901_4

62. *Weeber M., Mork J. G., Aronson A. R.* Developing a test collection for biomedical word sense disambiguation. In Proceedings of the AMIA Symposium, Chicago, 2001. P. 746–750.

63. *Zhao Y., Karypis G.* Evaluation of hierarchical clustering algorithms for document datasets. In Proceedings of the 11th International Conference on Information and Knowledge Management, McLean, VA, 2002. P. 515–524. doi: 10.1145/584792.584877

64. *Zuppann A.* Connectionist Approach to Word Sense Disambiguation. In Proceedings Class of 2003 Senior Conference on Natural Language Processing. Swarthmore College, USA. 2003. P. 78–83.

Received April 02, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Каушинис Татьяна Викторовна
студентка
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: merilstreet@mail.ru
тел.: (8142) 711078

CONTRIBUTORS:

Kaushinis, Tatiana
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: merilstreet@mail.ru
tel.: (8142) 711078

Кириллов Александр Николаевич
доцент, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11, Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Коржицкий Никита Иванович
студент
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: nikita@nikita.tv
тел.: (8142) 711078

Korzhitsky, Nikita
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: nikita@nikita.tv
tel.: (8142) 711078

Крижановский Андрей Анатольевич
к. т. н.
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: andew.krizhanovsky@gmail.com
тел.: (8142) 766312

Krizhanovsky, Andrew
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11, Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: andew.krizhanovsky@gmail.com
tel.: (8142) 766312

Пилинович Александр Владимирович
студент
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alexander.pilinovich@yandex.ru
тел.: (8142) 711078

Pilinovich, Aleksander
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: alexander.pilinovich@yandex.ru
tel.: (8142) 711078

Сихонина Ирина Александровна
студентка
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: syawenka@mail.ru
тел.: (8142) 711078

Sikhonina, Irina
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: syawenka@mail.ru
tel.: (8142) 711078

Спиркова Анна Михайловна
студентка
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: annspirkova@gmail.com
тел.: (8142) 711078

Spirkova, Anna
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: annspirkova@gmail.com
tel.: (8142) 711078

Старкова Валентина Геннадьевна
старший инженер-программист
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: stark_val@mail.ru
тел.: (8142) 766312

Starkova, Valentina
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11, Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: stark_val@mail.ru
tel.: (8142) 766312

Степкина Татьяна Владимировна
студентка
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: hogdp@mail.ru
тел.: (8142) 711078

Stepkina, Tatiana
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: hogdp@mail.ru
tel.: (8142) 711078

Ткач Станислав Сергеевич
студент
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: tkachkras@gmail.com
тел.: (8142) 711078

Tkach, Stanislav
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: tkachkras@gmail.com
tel.: (8142) 711078

Чиркова Юлия Васильевна
к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: julia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Chirkova, Julia
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: julia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Чухарев Алексей Леонидович
старший инженер-программист
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chuharev@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Chuharev, Alexey
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11, Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: chuharev@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Шорец Дарья Сергеевна
студентка
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: da_sha1078@mail.ru
тел.: (8142) 711078

Shorets, Daria
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: da_sha1078@mail.ru
tel.: (8142) 711078

Ярышкина Екатерина Александровна
студентка
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kate.rysh@gmail.com
тел.: (8142) 711078

Yaryshkina, Ekaterina
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: kate.rysh@gmail.com
tel.: (8142) 711078

Янкевич Дарья Юрьевна
студентка
Математический факультет
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: dyankevic@gmail.com
тел.: (8142) 711078

Yankevich, Daria
Petrozavodsk State University
33, Lenina St., 185910, Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: dyankevic@gmail.com
tel.: (8142) 711078

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 99–106
DOI: 10.17076/mat148

УДК 519.977

ПЕРИОДИЧЕСКИЙ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ ВИДОВОГО СОСТАВА БИОСООБЩЕСТВА

А. Н. Кириллов[1], **А. С. Иванова**[1]

[1] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Предлагается динамическая модель, описывающая различные стадии взаимодействия в ареале популяций хищника и жертвы. Переход от одной к другой стадии определяется значениями функции, имеющей смысл пищевой привлекательности ареала. При условии, что пищевая привлекательность ареала не ниже некоторого порогового значения, взаимодействие популяций описывается системой Лотки-Вольтерры. В противном случае популяция хищника переходит в стадию миграции. В модели также предусмотрена возможность колонизации ареала популяцией хищника. Решается задача сохранения видового состава ареала за счет отбора особей. Интенсивность отбора полагается кусочно-постоянной управляющей функцией. Строится управление, позволяющее согласовывать антропогенное воздействие на ареал с естественным развитием биосообщества. В результате процесс управления приобретает периодический или квазипериодический характер, в зависимости от начальных значений численностей популяций. Предложенная модель представляет собой трехмерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной структурой. Проведен качественный анализ системы.

Ключевые слова: управление, видовой состав, переменная структура, периодический процесс.

A. N. Kirillov, A. S. Ivanova. PERIODIC AND QUASIPERIODIC CONTROL PROCESSES IN THE BIOCOMMUNITY SPECIES COMPOSITION PRESERVING PROBLEM

The dynamical model describing several stages of interaction between populations of predators and preys in some area is proposed. The transition from one stage to another is determined by the values of the function which has the sense of trophical attractiveness of a species area. Under condition that the trophical attractiveness not less than threshold value the interaction of populations is desribed by the Lotka-Volterra system. Oterwise, the predator population transfers to a migration stage. The model also describes the process of colonization of the area by predators. The problem of species composition preserving by selection is solved. The selection intensity is considered as a control function. The control which permits to coordinate the anthropogenic impact with natural development of a biocommunity is constructed. As a result, the control process acquires the periodic or quasiperiodic nature which depends on the initial values of populations size.
The proposed model is described by the three dimensional system of ordinary differential equations with variable structure. The qualitative analysis of the system is carried out.

Key words:
control, species composition, variable structure, periodic process.

Введение

Одним из разделов математической экологии является теория фуражирования. Многочисленные работы посвящены этому разделу [3, 5, 6, 8, 9]. Согласно теории фуражирования, пищевой ресурс, потребляемый популяцией, распределен по ареалам и популяция мигрирует между ними. Перед популяцией возникают две задачи: выбора ареала и определения момента времени ухода из него в случае недостатка пищевого ресурса. В известной работе Э. Чарнова (E. Charnov) [5] была предложена статическая модель, дающая условия ухода популяции из ареала.

В настоящей работе представлена динамическая модель, описывающая как уход популяции из ареала, так и возврат популяции в ареал.

В качестве популяции и пищевого ресурса рассматриваются популяции хищника и жертвы, соответственно. Исследуемая модель представляет собой систему с переменной структурой. Помимо дифференциальных уравнений относительно численностей популяций, она содержит дифференциальное уравнение относительно пищевой привлекательности ареала. Рассматриваемая модель описывает следующие стадии взаимодействия популяций: уход и возврат популяции хищника, взаимодействие популяций, поведение жертвы в отсутствие хищника в ареале. Каждая стадия задается отдельной системой. Взаимодействие популяций описывается системой Лотки-Вольтерры.

Изменение пищевой привлекательности обеспечивает переход от одной стадии взаимодействия к другой. В настоящей работе решается задача сохранения видового состава ареала за счет изъятия особей. В отличие от работы [2], в которой состав ареала сохранялся путем постоянного изъятия особей, в этой работе предлагается согласовать внешнее вмешательство в биосообщество с естественной периодичностью процессов в нем, что позволит уменьшить антропогенную нагрузку на ареал. Предложен метод кусочно-постоянного управления интенсивностями изъятия особей, позволяющий сделать процесс управления периодическим или квазипериодическим в некотором смысле, что зависит от начальных значений численностей популяций.

Описание модели

В работе [1] построена модель динамики популяций хищника и жертвы в ареале, согласно которой популяция жертвы не покидает ареал, а популяция хищника может как покидать ареал, так и возвращаться обратно в зависимости от его пищевой привлекательности. Для описания пищевой привлекательности ареала предложено использовать функцию $\tilde{n} = \tilde{n}(t)$ вида

$$\tilde{n}(t) = \tilde{n}(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_2(\tau)\left(\frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda\right) d\tau, \quad (1)$$

где t_0 – момент времени появления популяции хищника в ареале, $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ – численности популяций жертвы и хищника, соответственно, $0 < \lambda$ – заданная пороговая постоянная. $\tilde{n}$ зависит от количества особей жертвы, приходящегося на одного хищника, т. е. от величины отношения $\frac{x_1}{x_2}$. Отметим, что на значимость отношения жертва/хищник для описания динамики популяций обратил внимание Р. Ардити (R. Arditi) в [4].

Пусть $0 < \Lambda$ – пороговое значение пищевой привлекательности ареала. Если $\tilde{n} < \Lambda$, то ареал непривлекательный и популяция хищника покидает его, если $\tilde{n} > \Lambda$, то ареал привлекательный и популяция хищника взаимодействует с жертвой, динамика взаимодействующих популяций описывается системой Лотки-Вольтерры.

Из (1) следует, что важное решение о миграции носит инерционный характер. Действительно, оно не должно зависеть от мгновенных значений фазовых переменных.

Продифференцировав (1) по t, получим

$$\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \quad (2)$$

В настоящей работе будет решаться задача сохранения видового состава биосообщества за счет изъятия особей жертвы и (или) хищника с интенсивностями $u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0$, соответственно. Далее u_1, u_2 будем называть управляющими параметрами.

Рассмотрим модель «хищник – жертва» с миграцией популяции хищника [1], представляющую собой систему с переменной структурой, которая описывает пять режимов:

если $\tilde{n} \geqslant \Lambda$, то

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2 - u_1), \qquad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u_2), \qquad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{3}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 > \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = ax_1, \qquad \dot{x}_2 = x_2(-m - m_1), \qquad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{4}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, 0 < x_2 \leqslant \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \dot{x}_2 = -d, \qquad \dot{\tilde{n}} = 0, \tag{5}$$

если $\tilde{n} < \Lambda, x_2 = 0$, то

$$\dot{x}_1 = ax_1, \qquad \dot{x}_2 = 0, \qquad \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2, \tag{6}$$

если $\tilde{n} = \Lambda, x_2 < \varepsilon^*(x_1)$, то

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \dot{x}_2 = d, \qquad \dot{\tilde{n}} = 0, \tag{7}$$

где a – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников, bx_1 – количество жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, m – коэффициент смертности хищников в отсутствие жертв, m_1 – коэффициент интенсивности миграции, причем a, b, k, m, m_1, d считаются положительными постоянными ($k < 1$), $\varepsilon^*(x_1)$, имеет вид [1]

$$\varepsilon^*(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1}{\lambda}, & 0 \leqslant x_1 < \varepsilon\lambda, \\ \varepsilon, & x_1 \geqslant \varepsilon\lambda, \end{cases}$$

где ε – положительная постоянная.

Система (3) описывает взаимодействие между хищником и жертвой (режим P_2), (4) – миграцию хищника (режим P_{21}), (5) – исчезновение хищника из сообщества, (6) – динамику жертвы в отсутствие хищника, (7) – появление хищника в сообществе.

Рассмотрим модель «хищник – жертва» Лотки-Вольтерры, в которой учтено изъятие особей

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2 - u_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(kbx_1 - m - u_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Положение равновесия R системы (8) имеет координаты

$$x_1 = \frac{m + u_2}{bk}, \quad x_2 = \frac{a - u_1}{b}.$$

Уравнение фазовой траектории системы (8), проходящей через точку $M_0(x_{10}, x_{20})$, имеет вид (при $u_1 = u_2 = 0$ см, например, [7])

$$\begin{gathered} (a - u_1)\ln x_2 - bx_2 + \\ +(m + u_2)\ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} c = c(x_{10}, x_{20}, u_1, u_2) = (a - u_1)\ln x_{20} - bx_{20} + \\ +(m + u_2)\ln x_{10} - kbx_{10}. \end{gathered}$$

Пусть $f = f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u_1, u_2)$ – левая часть уравнения (9). Несложно доказать, что $f = 0$ – выпуклая замкнутая кривая.

Поскольку в правые части первых двух уравнений системы (3) не входит $\tilde{n}$, то в пространстве $(x_1, x_2, \tilde{n})$ траектории этой системы располагаются на цилиндрах, образующие которых параллельны оси $O\tilde{n}$, направляющие – траектории системы (8). Из условия, предшествующего системе (3), следует, что цилиндры располагаются в полупространстве $\tilde{n} > \Lambda$.

Нетрудно показать, что для системы (3)-(7) множество

$$\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 > 0, x_2 \geqslant 0\}$$

инвариантно, в связи с этим далее $x_1 > 0, x_2 \geqslant 0$.

Следуя работе [1], плоскость

$$\pi = \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda\}$$

будем называть *дискриминантной*. Для точек (x_1, x_2, Λ) дискриминантной плоскости будем использовать обозначение (x_1, x_2).

Рассмотрим луч

$$l = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 = 0, x_1 > 0, x_2 \geqslant 0\}$$

и два конуса:

$$\pi^+ = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 > 0, x_2 \geqslant 0\},$$

$\pi^- = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 < 0, x_1 > 0, x_2 \geqslant 0\}$.

Пусть $E = \{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_2 < \varepsilon^*(x_1)\}$. Из (3), (4) следует, что $M \in \pi^+ \backslash E$ – начальная точка режима P_2, $M \in \pi^-$ – начальная точка режима P_{21}.

Определение 1. [2] Кусочно-постоянные управляющие параметры u_1, u_2 называются *допустимыми*, если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_1 < a, \\ u_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\Pi = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geqslant \frac{m}{bk}, \varepsilon \leqslant x_2 \leqslant \frac{a}{b}\}, \\ \text{если } 0 < \varepsilon \leqslant \frac{a}{b}, \\ \varnothing, \\ \text{если } \varepsilon > \frac{a}{b}, \end{cases}$$

$$K_1 = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geqslant \frac{m}{bk}, x_2 > \frac{a}{b}\}, \\ \text{если } 0 < \varepsilon \leqslant \frac{a}{b}, \\ \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 \geqslant \frac{m}{bk}, x_2 \geqslant \varepsilon\}, \\ \text{если } \varepsilon > \frac{a}{b}, \end{cases}$$

$$K_2 = \begin{cases} \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0, x_1 < \frac{m}{bk}, \varepsilon \leqslant x_2 \leqslant \frac{a}{b}\}, \\ \text{если или } 0 < \varepsilon \leqslant \frac{a}{b} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}, \text{ или } 0 < \varepsilon < \frac{a}{b} \text{ при } \lambda = \frac{m}{ak}, \\ \text{или } 0 < \varepsilon < \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda > \frac{m}{ak}, \\ \varnothing, \\ \text{если или } \varepsilon > \frac{a}{b} \text{ при } \lambda < \frac{m}{ak}, \text{ или } \varepsilon \geqslant \frac{a}{b} \text{ при } \lambda = \frac{m}{ak}, \\ \text{или } \varepsilon \geqslant \frac{m}{bk\lambda} \text{ при } \lambda > \frac{m}{ak}, \end{cases}$$

Для этих множеств в работе [2] были найдены допустимые u_1, u_2, сохраняющие состав биосообщества, а именно, были доказаны следующие результаты.

Теорема 1. [2] *Пусть* $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \Pi$. *Тогда если*

$$\begin{aligned} u_1 &= a - bx_{20}, \\ u_2 &= bkx_{10} - m, \end{aligned} \tag{10}$$

то M_0 *является точкой сохранения состава биосообщества.*

Теорема 2. [2] *Пусть* $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_1$. *Тогда если*

$$\begin{aligned} u_1 = a - bx_{20} - \lambda\tfrac{x_{20}}{x_{10}}(kbx_{10} - m - u_2), \\ kbx_{10} - m + \tfrac{1}{\lambda}\tfrac{x_{10}}{x_{20}}(bx_{20} - a) \leqslant u_2 < \\ < kbx_{10} - m + \tfrac{bx_{10}}{\lambda}, \end{aligned} \tag{11}$$

то M_0 *является точкой сохранения состава биосообщества.*

Теорема 3. [2] *Пусть* $M_0(x_{10}, x_{20}) \in K_2$. *Тогда если*

$$\varepsilon > \frac{m}{b(1 + k\lambda)} \qquad u$$

Определение 2. [2] Если траектория системы (3)-(7), начавшаяся в $M(x_1, x_2)$ содержится в полупространстве $\tilde{n} \geqslant \Lambda$, то точка M называется *точкой сохранения состава биосообщества.*

Рассмотрим следующие множества плоскости π:

$$\begin{aligned} u_1 = a - bx_{20} - \lambda\tfrac{x_{20}}{x_{10}}(kbx_{10} - m - u_2), \\ 0 \leqslant u_2 < kbx_{10} - m + \tfrac{bx_{10}}{\lambda}, \end{aligned} \tag{12}$$

то M_0 *является точкой сохранения состава биосообщества.*

Связь между временем изъятия особей и поведением популяции хищника после прекращения изъятия

Предположим, что в течение промежутка времени длины τ производится изъятие особей, где $0 < \tau$ – некоторая постоянная. По истечении времени τ изъятие прекращается. Изучим дальнейшее поведение популяции хищника.

Пусть $M_0(x_{10}, x_{20}) \in \pi$. Пусть $\tilde{T}(M_0)$ – период решения $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ системы Лотки-Вольтерры (8), соответствующего процессу изъятия, т. е. при $(u_1, u_2) \neq (0, 0), (\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0)) = (x_{10}, x_{20})$. Пусть $T(M_0)$ – период решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы Лотки-Вольтерры при $(u_1, u_2) = (0, 0)$ (нет изъятия), $(x_1(\tau), x_2(\tau)) = (x_{10}, x_{20})$.

Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}, M_0 \in \pi^+$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{F} = \{t : t \in [\tau, \tau + T(M_0)) : x_1(t) - \lambda x_2(t) = 0\}.$$

Так как фазовые траектории являются выпуклыми, вложенными друг в друга и решение имеет период $T(M_0)$, то множество $\mathcal{F}$ содержит два элемента. Введем обозначения:

$$t_1 = min\,\mathcal{F} - \tau, \quad t_2 = max\,\mathcal{F} - \tau. \qquad (13)$$

Поскольку траектории системы (3) располагаются на цилиндрических поверхностях, то естественно ввести следующее определение.

Определение 3. *Полным оборотом точки траектории системы (3)* будем называть отрезок траектории, соответствующий промежутку времени, равному периоду.

Найдем величину изменения $\tilde{n}(t)$ на временном промежутке длины T, где T – период решения системы Лотки-Вольтерры.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt = \frac{aT}{b}\left(\frac{m}{ak} - \lambda\right).$$

Доказательство. Известно [7], что

$$\int_0^T x_1(t)dt = \frac{mT}{kb}, \quad \int_0^T x_2(t)dt = \frac{aT}{b}.$$

Тогда

$$\Delta := \int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt =$$

$$= \int_0^T x_1(t)dt - \lambda \int_0^T x_2(t)dt = \frac{aT}{b}\left(\frac{m}{ak} - \lambda\right).$$

□

Теорема 4. *Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}, M_0$ – начальная точка траектории системы (3). Тогда если $M_0 \in K_1$,*

$$u_1 = 0, \quad t \geqslant 0,$$

$$u_2 = \begin{cases} kbx_{10} - m + \frac{1}{\lambda}\frac{x_{10}}{x_{20}}(bx_{20} - a), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

или $M_0 \in K_2, \varepsilon > \frac{m}{b(1+k\lambda)}$,

$$u_1 = \begin{cases} a - bx_{20} - \lambda\frac{x_{20}}{x_{10}}(kbx_{10} - m), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

$$u_2 = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где $\tau = N_0\tilde{T}(M_0), N_0 \in \mathbb{N}$, то количество полных оборотов, которые совершит точка траектории системы (3), начиная с момента времени τ до попадания на плоскость π, равно

$$N + 1,$$

где

$$N = \left[\frac{H + \int\limits_{\tau}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt}{|\Delta|}\right], \qquad (14)$$

$$H = N_0\tilde{\Delta},$$

t_2 определено в (13), $\tilde{\Delta} = \frac{(a-u_1)\tilde{T}}{b}\left(\frac{(m+u_2)}{(a-u_1)k} - \lambda\right)$.

Доказательство. Докажем теорему для первого случая, т. е. пусть $M_0 \in K_1$,

$$u_1 = 0, \quad t \geqslant 0,$$

$$u_2 = \begin{cases} kbx_{10} - m + \frac{1}{\lambda}\frac{x_{10}}{x_{20}}(bx_{20} - a), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

u_1, u_2 при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ удовлетворяют (11). В доказательстве теоремы 2 [2] было получено, что при таких управляющих параметрах точка траектории системы (3), начинающейся в M_0, поднимается (т. е. $\tilde{n}$ увеличивается) по цилиндрической поверхности $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u_1, u_2) = 0\}$. Из $\tilde{T}(M_0)$ – периодичности решения $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ и леммы 1 следует, что за время $\tau = N_0\tilde{T}(M_0)$ точка траектории поднимется на высоту

$$H = \tilde{n}(\tau) - \tilde{n}(0) = \int_0^{\tau} (\tilde{x}_1(t) - \lambda\tilde{x}_2(t))dt = N_0\tilde{\Delta},$$

где $\tilde{\Delta} = \frac{(a-u_1)\tilde{T}}{b}\left(\frac{(m+u_2)}{(a-u_1)k} - \lambda\right)$. Причем очевидно, что $\tilde{x}_1(\tau) = x_{10}, \tilde{x}_2(\tau) = x_{20}$.

Далее, начиная с момента времени τ, траектория располагается на цилиндрической поверхности $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, 0, 0) = 0\}$. При $\tau \leqslant t \leqslant \tau + t_1$ точка траектории поднимается на величину

$$\int_{\tau}^{\tau+t_1} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt,$$

где t_1 определено в (13), при $\tau + t_1 \leqslant t \leqslant \tau + t_2$ – спускается (т. е. $\tilde{n}$ уменьшается) на величину

$$\left|\int_{\tau+t_1}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt\right|.$$

Таким образом, расстояние от траектории до плоскости π, в момент времени $\tau + t_2$, равно

$$H + \int\limits_{\tau}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt.$$

Пусть в моменты времени $t \geqslant \tau$ и $t + T(M_0)$ точка траектории принадлежит цилиндрической поверхности $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, 0, 0) = 0\}$. Тогда из $T(M_0)$ – периодичности решения системы Вольтерры следует

$$\tilde{n}(t+T(M_0)) - \tilde{n}(t) = \int\limits_{t}^{t+T(M_0)} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{T(M_0)} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt.$$

Отсюда, применяя лемму 1, получаем, что с каждым полным оборотом точка траектории системы (3) спускается на величину $|\Delta|$.

Значит, точка траектории, начиная с момента времени $\tau + t_2$ до попадания на плоскость π, совершит следующее количество полных оборотов

$$N = \left[\frac{H + \int\limits_{\tau}^{\tau+t_2} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt}{|\Delta|} \right],$$

где $[\,\cdot\,]$ – символ целой части числа.

При $\tau + t_2 + NT(M_0) \leqslant t \leqslant \tau + t_1 + (N + 1)T(M_0)$ точка траектории поднимается, после чего спускается при $\tau + t_1 + (N + 1)T(M_0) \leqslant t \leqslant \tau + t_1 + (N + 1)T(M_0) + t_3$, где $0 < t_3 < t_2 - t_1$, $t = \tau + t_1 + (N+1)T(M_0) + t_3$ – момент попадания траектории на плоскость π.

Отметим, что, спускаясь на промежутке времени $\tau + t_1 \leqslant t \leqslant \tau + t_2$ длиной $t_2 - t_1$ и поднимаясь на промежутке времени $\tau + t_2 + NT(M_0) \leqslant t \leqslant \tau + t_1 + (N + 1)T(M_0)$ длиной $T(M_0) - (t_2 - t_1)$, точка траектории образует один оборот. Таким образом, начиная с момента времени τ, точка траектории, до попадания на плоскость π, совершит $N + 1$ полных оборотов.

Отличие доказательства теоремы для второго случая состоит в том, что в начале доказательства используется теорема 3 [2]. □

Теорема 5. *Пусть $\lambda > \frac{m}{ak}, \Pi \ni M_0$ – начальная точка траектории системы (3)–(7),*

$$u_1 = \begin{cases} a - bx_{20}, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} bkx_{10} - m, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

где $0 < \tau$ – некоторая постоянная. Тогда количество полных оборотов, которые совершит точка траектории системы (3), начиная с момента времени τ, до попадания на плоскость π, равно

$$N + 1,$$

где N определено в (14), причем $H = (x_{10} - \lambda x_{20})\tau, t_2$ определено в (13).

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4. Отличие состоит в том, что в начале ее доказательства используется теорема 1 [2].

Замечание 1. Теоремы 4, 5 имеют место, когда τ удовлетворяет неравенству

$$H > h, \tag{15}$$

где $h = \Delta + \int\limits_{0}^{t_4} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt, \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda + \Delta\} \ni M$ – начальная точка такой траектории, что $\tilde{n}(T(M_0)) = \Lambda$, $t_4 \in (0, T(M_0))$, причем $x_1(t_4) = x_{10}, x_2(t_4) = x_{20}$. Если для τ (15) не выполнено, то точка траектории системы (3), начиная с момента времени τ, не совершив ни одного полного оборота, попадет на плоскость π.

Замечание 2. Пусть $\lambda < \frac{m}{ak}$, $M_0 \in K_1 \cup K_2 \cup \Pi$ – начальная точка траектории системы (3) и на промежутке времени $[0, \tau]$ производится изъятие особей с интенсивностями u_1, u_2, где τ, u_1, u_2 из теорем 4, 5. Тогда M_0 – точка сохранения состава биосообщества, если τ удовлетворяет (15), где $h = \int\limits_{0}^{t_5} (x_1(t) - \lambda x_2(t))dt, \pi^+ \ni M$ – начальная точка траектории, для которой существуют $t_1, t_2 \in (0, T(M_0))$ – время первого и второго попадания этой траектории на плоскость $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$, причем $\tilde{n}(t_2) = \Lambda$, $(0, t_1) \ni t_5$ такое, что $x_1(t_5) = x_{10}, x_2(t_5) = x_{20}$. Если τ не удовлетворяет (15), то траектория, начинающаяся в M_0, достигнет π^-, после чего начнется режим P_{21}.

Замечание 3. Пусть $\lambda = \frac{m}{ak}$, $M_0 \in K_1 \cup K_2 \cup \Pi$ – начальная точка траектории системы (3) и на промежутке времени $[0, \tau]$ производится изъятие особей с интенсивностями u_1, u_2, где

τ, u_1, u_2 из теорем 4, 5. Тогда M_0 – точка сохранения состава биосообщества, если для τ выполнено (15), где $h = \int\limits_0^{t_6}(x_1(t) - \lambda x_2(t))dt, l \ni M$ – начальная точка такой траектории, что $\tilde{n}(T(M_0)) = \Lambda$, $(0, T(M_0)) \ni t_6$ такое, что $x_1(t_6) = x_{10}, x_2(t_6) = x_{20}$. Если (15) не выполнено, то начнется миграция хищника.

Справедливость замечаний 1–3 следует из леммы 1.

Итак, в случае $\lambda \leqslant \frac{m}{ak}$, т. е. когда хищнику для удовлетворения его биологических потребностей требуется небольшое количество жертвы, изъятие особей, в течение определенного времени τ, обеспечит сохранение видового состава ареала. В случае $\lambda > \frac{m}{ak}$ из теорем 4, 5 и замечания 1 получаем, что при любом $\tau > 0$ траектория системы (3) попадает на π, а именно на π^-, после чего начинается режим P_{21}. В этом случае предлагаются процессы управления, обеспечивающие сохранение состава биосообщества при меньшем внешнем воздействии на ареал.

Периодический и квазипериодический процессы управления

Пусть сначала $M_0 \in \Pi$. Используя теорему 5, опишем процесс управления. Пусть $D = \frac{(N+1)\Delta}{x_{10} - \lambda x_{20}}$. Будем полагать

при $0 \leqslant t \leqslant \tau$

$$u_1 = a - bx_{20}, \quad u_2 = bkx_{10} - m,$$

при $\tau + (k-1)(N+1)T(M_0) + (k-1)D \leqslant t \leqslant \tau + k(N+1)T(M_0) + (k-1)D$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0,$$

при $\tau + k(N+1)T(M_0) + (k-1)D \leqslant t \leqslant \tau + k(N+1)T(M_0) + kD$

$$u_1 = a - bx_{20}, \quad u_2 = bkx_{10} - m,$$

где $k = 1, 2, 3, ...$

Таким образом, процесс управления периодичен и его период $\mathcal{T}$ равен

$$\mathcal{T} = (N+1)T(M_0) + \frac{(N+1)\Delta}{x_{10} - \lambda x_{20}}.$$

Далее, используя теорему 4, опишем процесс управления для $M_0 \in K_1$.

При $(k-1)\tau + \sum\limits_{i=1}^{k-1}(N_i + 1)T(M_0) \leqslant t \leqslant k\tau + \sum\limits_{i=1}^{k-1}(N_i + 1)T(M_0)$

$$u_1 = 0, u_2 = kbx_{10} - m + \frac{1}{\lambda}\frac{x_{10}}{x_{20}}(bx_{20} - a),$$

при $k\tau + \sum\limits_{i=1}^{k-1}(N_i + 1)T(M_0) \leqslant t \leqslant k\tau + \sum\limits_{i=1}^{k}(N_i + 1)T(M_0)$

$$u_1 = 0, u_2 = 0,$$

где k – номер этапа процесса управления ($k = 1, 2, 3, ...$), причем будем полагать $\sum\limits_{i=1}^{k-1}(N_i + 1)T(M_0) = 0$, если $k = 1$, $N_i + 1$ – количество полных оборотов, которые совершит точка траектории на i-ом этапе процесса управления.

Введем обозначение

$$\tilde{n}_k = \tilde{n}(k\tau + \sum_{i=1}^{k}(N_i + 1)T(M_0)).$$

Отметим, что последовательности $\{N_k\}, \{\tilde{n}_k\}$ являются ограниченными. Действительно, из доказательства теоремы 4 следует

$\Lambda \leqslant \tilde{n}(k\tau + \sum\limits_{i=1}^{k-1}(N_i+1)T(M_0) + t_2 + N_kT(M_0)) \leqslant \Lambda + \Delta.$

Значит,

$\Lambda + \int\limits_0^{T(M_0)-t_2}(x_1(t) - \lambda x_2(t))dt \leqslant \tilde{n}(k\tau + \sum\limits_{i=1}^{k-1}(N_i + 1)T(M_0) + t_2 + N_kT(M_0) + T(M_0) - t_2) \leqslant \Lambda + \Delta + \int\limits_0^{T(M_0)-t_2}(x_1(t) - \lambda x_2(t))dt,$

где $(x_1(0), x_2(0))$ – точка пересечения луча l с траекторией $f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, 0, 0) = 0$, имеющая меньшие координаты. Обозначив левую и правую части последнего двойного неравенства через $\tilde{n}_{min}$, $\tilde{n}_{max}$, соответственно, получим

$$\tilde{n}_{min} < \tilde{n}_k \leqslant \tilde{n}_{max}.$$

Заметим, что $\tilde{n}_{min}$ соответствует наименьшее количество оборотов, до попадания на плоскость π, обозначим его через $N_{min} + 1$, а $\tilde{n}_{max}$ соответствует наибольшее количество оборотов, до попадания на плоскость π, обозначим его через $N_{max} + 1$. Отсюда получаем

$$N_{min} < N_k \leqslant N_{max}.$$

Предложенный процесс управления будем называть квазипериодическим.

Аналогичным образом, используя теорему 4, можно описать квазипериодический процесс управления для $M_0 \in K_2$.

Квазипериодичность процесса управления для $M_0 \in K_1 \cup K_2$ мотивируется тем, что отрезок $[\Lambda, \Lambda + |\Delta|]$ отображается в себя вдоль траекторий процесса управления. При этом при $\Delta = 0$ процесс становится периодическим.

Заключение

Для модели, рассмотренной в настоящей работе, в зависимости от начальных численностей популяций, предложен периодический или квазипериодический процесс управления, позволяющий сохранить состав ареала, уменьшив антропогенную нагрузку на него. Таким образом, согласовано внешнее вмешательство в ареал с естественными процессами в нем.

Литература

1. *Кириллов А. Н.* Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6, № 2. С. 318–336.

2. *Кириллов А. Н., Иванова А. С.* Равновесие и управление в задаче сохранения видового состава биосообщества // Управление большими системами. 2015. Вып. 55. С. 239–258.

3. *Aehortua A. M., Ladino L. M., Valverde J. C.* Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2014. Vol. 16. P. 27–39.

4. *Arditi R., Ginzburg L. R.* Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // Journal of Theoretical Biology. 1989. Vol. 139. P. 311–326.

5. *Charnov E. L.* Optimal foraging, the marginal value theorem // Theoretical population biology. 1976. Vol. 9, N 2. P. 129–136.

6. *Charnov E. L.* Life history invariants // Oxford University Press. 1993. 167 p.

7. *Leonov G. A.* Mathematical problems of control theory: an introduction // World Scientific. 2001. 172 p.

8. *Nonacs P.* State dependent behavior and the marginal value theorem // Behavioral Ecology. 2013. Vol. 12, N 1. P. 71–83.

9. *Stephens D. W., Krebs J. R.* Foraging theory // Princeton University Press. Princeton. 1986. 247 p.

Поступила в редакцию 07.04.2015

References

1. *Kirillov A. N.* Ekologicheskie sistemy s peremennoi razmernost'yu [Ecological systems with variable dimensions]. Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki [Surveys in applied and industrial mathematics]. 1999. Vol. 6, N 2. P. 318–336.

2. *Kirillov A. N., Ivanova A. S.* Ravnovesie i upravlenie v zadache sokhraneniya vidovogo sostava biosoobshchestva [Equilibrium and control in the problem of species composition protection in biocommunity]. Upravlenie bol'shimi sistemami [Large-scale systems control]. 2015. Vol. 55. P. 239–258.

3. *Aehortua A. M., Ladino L. M., Valverde J. C.* Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2014. Vol. 16. P. 27–39.

4. *Arditi R., Ginzburg L. R.* Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. Journal of Theoretical Biology. 1989. Vol. 139. P. 311–326.

5. *Charnov E. L.* Optimal foraging, the marginal value theorem. Theoretical population biology. 1976. Vol. 9, N 2. P. 129–136.

6. *Charnov E. L.* Life history invariants. Oxford University Press. 1993. 167 p.

7. *Leonov G. A.* Mathematical problems of control theory: an introduction. World Scientific. 2001. 172 p.

8. *Nonacs P.* State dependent behavior and the marginal value theorem. Behavioral Ecology. 2013. Vol. 12, N 1. P. 71–83.

9. *Stephens D. W., Krebs J. R.* Foraging theory. Princeton University Press. Princeton. 1986. 247 p.

Received April 07, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, доцент, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

Иванова Александра Сергеевна
аспирант
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: a_s_ivanova@bk.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Ivanova, Alexandra
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: a_s_ivanova@bk.ru
tel.: (8142) 766312

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 107–113
DOI: 10.17076/mat156

УДК 519.6

О РОБАСТНОМ УПРАВЛЕНИИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ, ХАРАКТЕРИЗУЕМОЙ НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДОХОДОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ

А. Н. Лазутченко

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

Рассмотрена задача об оптимальном управлении в случайной среде (задача о двуруком бандите). Получены уравнения для вычисления байесовских рисков и потерь для доходов с различными дисперсиями. Представлены результаты вычислений. Результаты проверены с помощью моделирования методом Монте-Карло.

Ключевые слова: робастное управление, случайная среда, задача о двуруком бандите.

A. N. Lazutchenko. ROBUST CONTROL IN A RANDOM ENVIRONMENT CHARACTERIZED BY A NORMAL DISTRIBUTION OF INCOMES WITH DIFFERENT VARIANCES

The problem of optimal control in a random environment (also known as the two-armed bandit problem) is considered. The equations for calculating Bayes risks and losses are obtained for incomes with different variances. The results of the calculations are given. The results were verified by Monte-Carlo simulation.

Key words: robust control, random environment, two-armed bandit problem.

Введение

Рассматривается задача об оптимальном управлении в случайной среде с нормально распределенными доходами, также известная как задача о двуруком бандите [5]. Такие среды возникают при использовании групповой обработки данных, если для обработки можно использовать два альтернативных метода. В этом случае одинаковый метод применяется к группам данных, а реакцией среды является количество успешно обработанных данных. В силу центральной предельной теоремы оно имеет приблизительно нормальное распределение.

Итак, случайная среда – это управляемый случайный процесс $\xi_t, (t = \overline{1,T}$, T – горизонт управления), значения которого интерпретируются как доходы, зависящие только от выбираемых в текущие моменты времени действий и имеющие нормальные распределения с плотностями

$$f_D(x|m_\ell) = (2\pi D)^{-1/2} \exp\{-(x - m_\ell)^2/(2D)\},$$

где ℓ – номер выбранного действия ($\ell = 1, 2$), m_ℓ – его математическое ожидание, D – дисперсия одношагового дохода. При такой постановке задачи случайная среда описывается вектором математических ожиданий $\theta =$

(m_1, m_2), а также дисперсией D. В нашем случае параметр θ фиксирован, но неизвестен лицу, осуществляющему управление. Ограничение на множество рассматриваемых дисперсий имеет вид $D_0 \leqslant D \leqslant 1$, $D_0 > 0$.

Введем функцию потерь $L_T(\sigma, \theta)$, значениями которой являются потери за время управления, вызванные неполнотой информации о системе, где σ – используемая стратегия. Если бы θ был известен, то наилучшей стратегией являлась бы та, которая применяла бы то действие, которому соответствовала большая из величин m_1 и m_2, и ожидаемый полный доход в этом случае был бы равен $\max(m_1, m_2) \cdot T$. Но в нашей постановке θ неизвестен, поэтому возникают потери вследствие неполноты информации о среде, равные

$$L_T(\sigma, \theta) = \max(m_1, m_2) \cdot T - \mathbb{E}_{\sigma,\theta} \left(\sum_{t=1}^{T} \xi_t \right),$$

где $\mathbb{E}_{\sigma,\theta}$ – математическое ожидание потерь полного дохода. Предполагается, что ограничения на множество допустимых значений параметра θ имеют вид $\Theta = \{(m_1, m_2) : |m_1 - m_2| \leqslant 2c\}$, где c – некоторая константа ($0 < c < \infty$).

При использовании минимаксного подхода, предложенного, например, в [6], цель управления состоит в минимизации максимальных ожидаемых потерь полного дохода на множестве параметров Θ по множеству стратегий Σ. При этом минимаксный риск $R_T^M(\Theta)$ выглядит следующим образом:

$$R_T^M(\Theta) = \inf_{\Sigma} \sup_{\Theta} L_T(\sigma, \theta).$$

Для реализации этой цели в работе немецкого математика В. Фогеля [7] была предложена пороговая стратегия, где была получена неулучшаемая оценка минимаксного риска $0{,}530 \leqslant (DT)^{-1/2} R_T(\Theta) \leqslant 0{,}752$, где T – горизонт управления, D – максимальная дисперсия дохода.

Хотя в [7] рассматриваются бинарные случайные среды, оценки легко переносятся на случай сред с нормально распределенными доходами. Такие среды используются, в частности, в [4], где рассматривается двухпороговая стратегия, которая позволяет улучшить качество управления за счет уменьшения средних потерь дохода. Ниже рассматривается минимаксное (а следовательно, робастное) управление, определяемое с использованием основной теоремы теории игр. Робастность минимаксного подхода означает выполнение некоторого нужного нам свойства при всех допустимых значениях параметров. В нашем случае использование минимаксной стратегии σ обеспечивает ограниченность потерь $L_T(\sigma, \theta) \leqslant R_T(\Theta)$ при всех допустимых значениях параметра θ. Минимаксные стратегии и риск ищутся как байесовские, соответствующие наихудшему априорному распределению. Эта задача в случае равных единичных дисперсий доходов рассмотрена в [2], [3]. В данной работе этот подход обобщается на случай, когда дисперсии доходов D на действиях попарно одинаковы и могут принимать различные значения из множества $D_0 \leqslant D \leqslant 1$, $D_0 > 0$. Для этого случая выведены формулы для вычисления байесовских рисков и потерь, а также вычислены соответствующие значения. Показано, что в этом случае управление остается робастным, т. е. гарантируется ограниченность потерь на всем множестве Θ.

Вывод уравнений для доходов с дисперсиями, отличными от единицы

В [2] установлена связь между минимаксным и байесовским подходом к решению рассматриваемой задачи. А именно, предлагается воспользоваться основной теоремой теории игр, согласно которой минимаксные стратегию и риск можно искать как байесовские, соответствующие наихудшему априорному распределению. Там же указано, что такое распределение может быть выбрано симметрическим и асимптотически однородным.

Итак, пусть $f_D(x|M) = (2\pi D)^{-1/2} \exp\{-(x-M)^2/(2D)\}$, – плотность нормального распределения с математическим ожиданием M и дисперсией D, $\lambda(m_1, m_2)$ – плотность априорного распределения на множестве параметров Θ, t_1, t_2 – количества применений обоих действий $\ell = 1$ и $\ell = 2$ соответственно $(t_1 + t_2 = t)$, X_1, X_2 – доходы на действиях, $R_{T-t}^B(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2)$ – байесовский риск, рассчитываемый для дисперсии $D = 1$ относительно апостериорного распределения с плотностью λ:

$$\lambda(m_1, m_2 | X_1, t_1, X_2, t_2) = \frac{f_{t_1}(X_1|t_1 m_1) f_{t_2}(X_2|t_2 m_2) \lambda(m_1, m_2)}{\iint\limits_{\Theta} f_{t_1}(X_1|t_1 m_1) f_{t_2}(X_2|t_2 m_2) \lambda(m_1, m_2) dm_1 dm_2}. \quad (1)$$

Пусть $x^+ = \max(x, 0)$. Тогда

$$R_{T-t}^B(\cdot) = \min(R_{T-t}^{(1)}(\cdot), R_{T-t}^{(2)}(\cdot)), \quad (2)$$

где $R_0^{(1)}(\cdot) = R_0^{(1)}(\cdot) = 0$,

$$R_{T-t}^{(1)}(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2) = \iint\limits_{\Theta} \lambda(m_1, m_2|X_1, t_1, X_2, t_2)\Big[(m_2 - m_1)^+ + \mathbb{E}_x^{(1)} R_{T-t-1}^{(1)}(\lambda; X_1 + 1, t_1 + 1, X_2, t_2)\Big] dm_1 dm_2, \quad (3)$$

$$R_{T-t}^{(2)}(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2) = \iint\limits_{\Theta} \lambda(m_1, m_2|X_1, t_1, X_2, t_2)\Big[(m_1 - m_2)^+ + \mathbb{E}_x^{(1)} R_{T-t-1}^{(2)}(\lambda; X_1, t_1, X_2 + 1, t_2 + 1)\Big] dm_1 dm_2, \quad (4)$$

$$\mathbb{E}_x^{(\ell)} R(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x) f(x|m_\ell) dx, \quad \ell = 1, 2. \quad (5)$$

Байесовская стратегия предписывает выбирать то действие, которому соответствует меньшее из значений $R_{T-t}^{(\ell)}(\cdot)$ и любое при их равенстве. На первых двух шагах действия следует применить по очереди.

По аналогии с (2)–(5) обозначим через $\widetilde{R}_{T-t}^B(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2)$ байесовский риск, рассчитанный для доходов с дисперсиями, отличными от единицы, относительно апостериорного распределения с плотностью $\widetilde{\lambda}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Байесовский риск $\widetilde{R}_{T-t}^B$, рассчитанный для доходов с дисперсиями $D_0 \leqslant D \leqslant 1$, $D_0 > 0$, связан с байесовским риском R_{T-t}^B, рассчитанным для доходов с $D = 1$ следующим соотношением:

$$\widetilde{R}_{T-t}^B(\lambda) = \sqrt{D} R_{T-t}^B(\widetilde{\lambda}). \quad (6)$$

Доказательство. Плотность f_D в нашем случае перепишется как:

$$f_{Dt_\ell}(X_\ell|t_\ell m_\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D t_\ell}} \exp\left(-\frac{(X_\ell - t_\ell m_\ell)^2}{2Dt_\ell}\right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t_\ell}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{X_\ell}{\sqrt{D}} - t_\ell \frac{m_\ell}{\sqrt{D}}\right)^2}{2t_\ell}\right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t_\ell}} \exp\left(-\frac{(\widetilde{X}_\ell - t_\ell \widetilde{m}_\ell)^2}{2t_\ell}\right) = \frac{1}{\sqrt{D}} f_{t_\ell}(\widetilde{X}_\ell|t_\ell \widetilde{m}_\ell),$$

где $\widetilde{X}_\ell = \dfrac{X_\ell}{\sqrt{D}}, \tilde{m}_\ell = \dfrac{m_\ell}{\sqrt{D}}, \quad \ell = 1, 2.$

С учетом этого плотность апостериорного распределения λ (1) перепишется так:

$$\widetilde{\lambda}(m_1, m_2|X_1, t_1, X_2, t_2) = \frac{1}{D}\lambda(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2|\widetilde{X}_1, t_1, \widetilde{X}_2, t_2).$$

При этом байесовский риск $\widetilde{R}_{T-t}^B$ равен:

$$\widetilde{R}_{T-t}^B(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2) = \min(\widetilde{R}_{T-t}^{(1)}(\cdot), \widetilde{R}_{T-t}^{(2)}(\cdot)),$$

$$\widetilde{R}_0^{(1)}(\cdot) = \widetilde{R}_0^{(2)}(\cdot) = 0,$$

$$\widetilde{R}_{T-t}^{(1)}(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2) = \iint\limits_{\Theta} \widetilde{\lambda}(m_1, m_2|X_1, t_1, X_2, t_2)\Big[(m_2 - m_1)^+ + \widetilde{\mathbb{E}}_x^{(1)} \widetilde{R}_{T-t-1}^{(1)}(\lambda; X_1 + 1, t_1 + 1, X_2, t_2)\Big] dm_1 dm_2,$$

$$\widetilde{R}_{T-t}^{(2)}(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2) = \iint\limits_{\Theta} \widetilde{\lambda}(m_1, m_2|X_1, t_1, X_2, t_2)\Big[(m_1 - m_2)^+ + \widetilde{\mathbb{E}}_x^{(2)} \widetilde{R}_{T-t-1}^{(2)}(\lambda; X_1, t_1, X_2 + 1, t_2 + 1)\Big] dm_1 dm_2,$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}_x^{(\ell)} \widetilde{R}(x) = \sqrt{D} \mathbb{E}_{\widetilde{x}}^{(\ell)} R(\widetilde{x}), \quad \ell = 1, 2.$$

Преобразуем формулы:

$$\widetilde{R}_{T-t}^{(1)}(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2) = \iint\limits_{\Theta} \frac{1}{D}\lambda(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2|\widetilde{X}_1, t_1, \widetilde{X}_2, t_2) \times \left[\sqrt{D}\left(\frac{m_2 - m_1}{\sqrt{D}}\right)^+ + \sqrt{D}\mathbb{E}_{\widetilde{x}}^{(1)} R_{T-t-1}^{(1)}(\widetilde{\lambda}; \widetilde{X_1 + 1}, t_1 + 1, \widetilde{X}_2, t_2)\right] \times \sqrt{D}\sqrt{D} d\widetilde{m}_1 d\widetilde{m}_2$$

$$= \sqrt{D} \iint\limits_{\Theta} \lambda(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2|\widetilde{X}_1, t_1, \widetilde{X}_2, t_2) \times \Big[(\widetilde{m}_2 - \widetilde{m}_1)^+ + \mathbb{E}_{\widetilde{x}}^{(1)} R_{T-t-1}^{(1)}(\widetilde{\lambda}; \widetilde{X_1 + 1}, t_1 + 1, \widetilde{X}_2, t_2)\Big] d\widetilde{m}_1 d\widetilde{m}_2 = \sqrt{D} R_{T-t}^{(1)}(\widetilde{\lambda}; \widetilde{X}_1, t_1, \widetilde{X}_2, t_2).$$

Аналогично для $\widetilde{R}^{(2)}_{T-t}$:

$$\widetilde{R}^{(2)}_{T-t}(\lambda; X_1, t_1, X_2, t_2) = \sqrt{D} R^{(2)}_{T-t}(\widetilde{\lambda}; \widetilde{X}_1, t_1, \widetilde{X}_2, t_2).$$

В итоге приходим к следующему соотношению:

$$\widetilde{R}^{B}_{T-t}(\lambda) = \sqrt{D} R^{B}_{T-t}(\widetilde{\lambda}).$$

□

Формула (6) позволяет нам вычислять байесовские риски при дисперсиях, отличных от единицы, используя формулы, выведенные в [2].

Численная оптимизация

Приведем окончательные формулы для вычисления рисков и потерь, учитывая (6). При этом, как и в [2], предполагается, что асимптотически наихудшая плотность $\rho(\widetilde{v})$ вырождена и сосредоточена в двух точках $\widetilde{v} = \pm \widetilde{d} T^{-1/2}$ с вероятностями $1/2$, где $\widetilde{d} = d/\sqrt{D}$, $d = |m_1 - m_2|$, m_1, m_2 – математические ожидания доходов на действиях $\ell = 1, 2$:

$$R_{t_1,t_2}(Z) = \min(R^{(1)}_{t_1,t_2}(Z), R^{(2)}_{t_1,t_2}(Z)), \qquad (7)$$

где $R^{(1)}_{t_1,t_2}(Z) = R^{(2)}_{t_1,t_2}(Z)$ при $t_1 + t_2 = T$, $Z = X_1 t_2 - X_2 t_1$.

$$R^{(1)}_{t_1,t_2}(Z) = v g_{t_1,t_2}(Z, v) + \frac{1}{t_2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{t_1+1,t_2}(Z + z) h_{t_1}\left(\frac{Z - t_1 z}{t_2}\right) dz, \quad (8)$$

$$R^{(2)}_{t_1,t_2}(Z) = v g_{t_1,t_2}(Z, -v) + \frac{1}{t_1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{t_1,t_2+1}(Z + z) h_{t_2}\left(\frac{Z - t_2 z}{t_1}\right) dz \quad (9)$$

при $t_1 + t_2 < T, t_1 \geqslant 1, t_2 \geqslant 1$. Здесь

$$g_{t_1,t_2} = \frac{1}{(2\pi t_1 t_2 (t_1 + t_2))^{1/2}} \times \exp\left(-\frac{(Z + 2v t_1 t_2)^2}{2 t_1 t_2 (t_1 + t_2)}\right), \qquad (10)$$

$$h_t(z) = \left(\frac{t+1}{2\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{z^2}{2t(t+1)}\right). \quad (11)$$

Наихудшее априорное распределение определяется как $\nu_a(u, v) = k_a(u)\rho(v)$, где $k_a(u)$ – постоянная плотность на отрезке $|u| \leqslant a$, $\rho(v)$ – симметрическая плотность ($\rho(v) = \rho(-v)$) и $a \to \infty$. При этом байесовский риск относительно него вычисляется по формуле

$$\lim_{a\to\infty} R^B_T(\nu_a(u, v)) = \sqrt{D}\left(2v + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{1,1}(z) dz\right). \qquad (12)$$

Оптимальная стратегия на первых двух шагах применяет оба действия по очереди. Далее, для каждой текущей группы чисел (Z, t_1, t_2) выбирается действие, которому соответствует меньшее значение из значений $R^{(\ell)}_{t_1,t_2}(Z), \ell = 1, 2$.

Далее рассматриваем класс стратегий вида $\{\sigma_\ell(Z, t_1, t_2)\}$, которые осуществляют выбор действий на основе текущей статистики (Z, t_1, t_2). При этом $\sigma_\ell(Z, t_1, t_2) = 1$, если для статистики (Z, t_1, t_2) байесовская стратегия предписывает выбирать ℓ-е действие, и $\sigma_\ell(Z, t_1, t_2) = 0$ в противном случае. При этом для распределения $\nu_a(u, v)$ потери находятся по формуле

$$L_{t_1,t_2}(Z) = \sigma_1(Z, t_1, t_2) L^{(1)}_{t_1,t_2}(Z) + \sigma_2(Z, t_1, t_2) L^{(2)}_{t_1,t_2}(Z), \qquad (13)$$

где $L^{(1)}_{t_1,t_2}(Z) = L^{(1)}_{t_1,t_2}(Z) = 0$ при $t_1 + t_2 = T$,

$$L^{(1)}_{t_1,t_2}(Z) = v g_{t_1,t_2}(Z, v) + \frac{1}{t_2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{t_1+1,t_2}(Z + z) h_{t_1}\left(\frac{Z - t_1 z}{t_2}\right) dz, \quad (14)$$

$$L^{(2)}_{t_1,t_2}(Z) = v g_{t_1,t_2}(Z, -v) + \frac{1}{t_1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{t_1,t_2+1}(Z + z) h_{t_2}\left(\frac{Z - t_2 z}{t_1}\right) dz \quad (15)$$

при $t_1 + t_2 < T, t_1 \geqslant 1, t_2 \geqslant 1$. Потери при этом равны

$$\lim_{a\to\infty} L_T(\nu_a(u, v)) = \sqrt{D}\left(2v + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{1,1}(z) dz\right). \qquad (16)$$

Для нахождения результатов используются выведенные выше формулы рисков (7)–(12)

и потерь (13)–(16). Наихудшее распределение соответствует максимуму приведенного байесовского риска $r_T(\widetilde{d}) = T^{1/2}\widetilde{R}_T^B(\cdot)$. Затем для найденной в результате вычисления этого риска стратегии для различных дисперсий вычисляются приведенные потери $l_T(\widetilde{d}) = T^{1/2}\widetilde{L}_T(\cdot)$. На рис. 1 приведены графики значений функции рисков $r_T(\widetilde{d})$ и потерь $l_T(\widetilde{d})$, вычисленные при $T = 50$, для $0 \leqslant \widetilde{d} \leqslant 20$ с шагом 0,1 для дисперсий $0,2 \leqslant D \leqslant 1$ с шагом 0,2. Введены следующие обозначения: r, l – риски и потери, D – дисперсии. Видно, что максимумы $r_{50}(\widetilde{d})$ равны приблизительно $0{,}29, 0{,}41, 0{,}5, 0{,}58, 0{,}65$ при $d = 0{,}7, 1, 1{,}3, 1{,}5, 1{,}7$, а максимумы $l_{50}(\widetilde{d})$ равны приблизительно $0{,}5, 0{,}43, 0{,}51, 0{,}58, 0{,}65$ при $d = 7{,}4, 1{,}2, 1{,}3, 1{,}5, 1{,}7$ при $D = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$ соответственно.

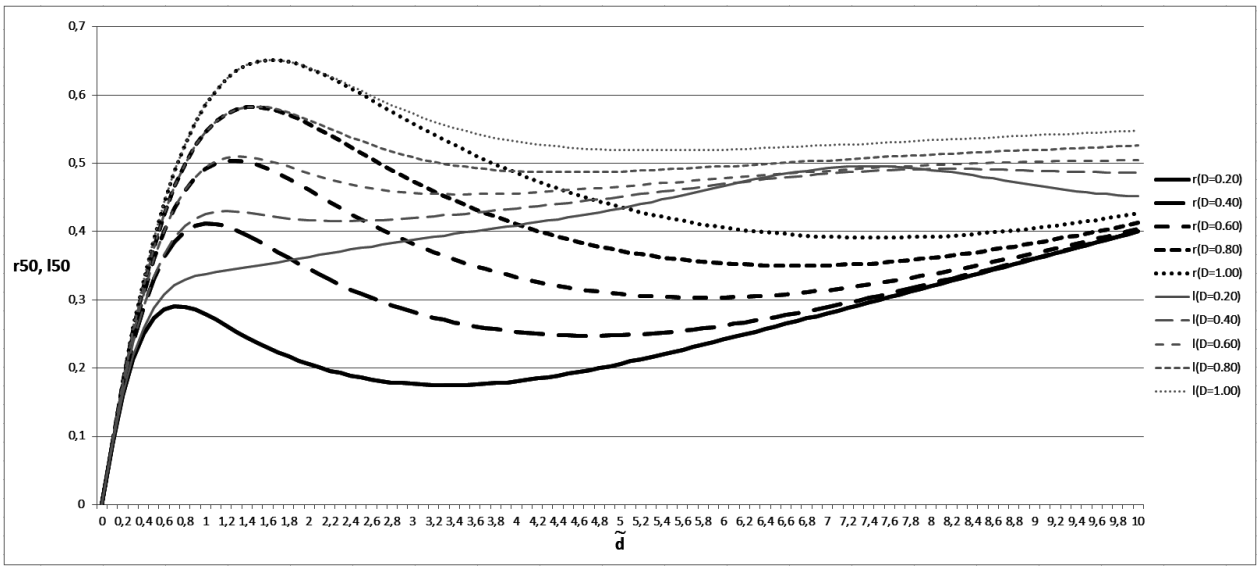


Рис. 1. Риски и потери при $0{,}2 \leqslant D \leqslant 1$

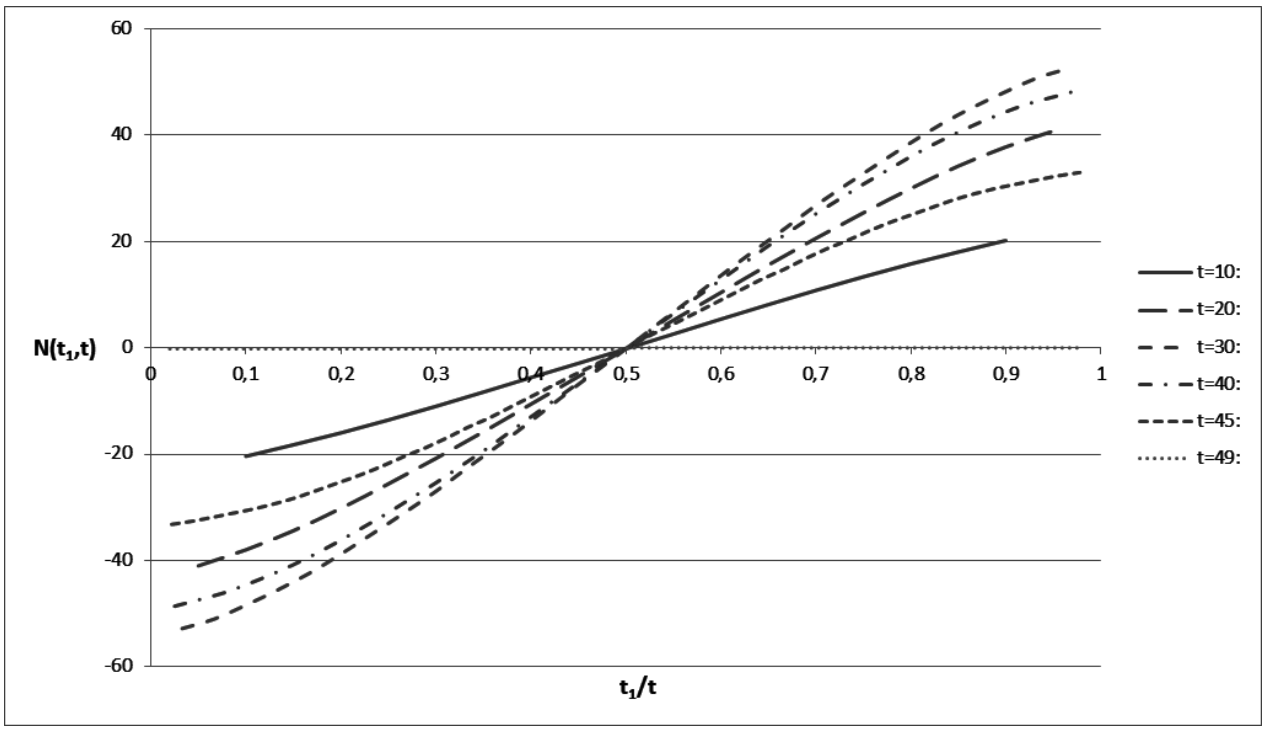


Рис. 2. Стратегия при $D = 0{,}4$

Далее, в результате вычислений были найдены стратегии для $D = 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8, 1$, предписывающие выбирать действие $\ell = 1$, если $Z > \dfrac{N(t_1, t_2)}{\sqrt{D}}$, и $\ell = 2$, если $Z \leqslant \dfrac{N(t_1, t_2)}{\sqrt{D}}$, где $N(t_1, t_2)$ – функции, определяющие выбор действий на конкретном шаге, $t = t_1 + t_2$. При $D = 0{,}4$ такие функции изображены на рис. 2.

Для этого случая найденная стратегия оказывается робастной для $0 \leqslant \widetilde{d} < 2{,}5$. При $\widetilde{d} > 2{,}5$ на величину потерь начинает оказывать сильное влияние применение неоптимального действия на начальном этапе хотя бы раз. Для увеличения области действия оптимальной стратегии следует увеличить горизонт управления T.

Моделирование методом Монте-Карло

Можно отметить, что все результаты вычислений, полученные выше при $D = 1$, полностью совпадают с [2]. Однако поскольку полученные в данной работе результаты являются новыми, их можно проверить с помощью моделирования методом Монте-Карло [1]. Как показано, например, в [3], управление в рассматриваемых случайных средах тесно связано с возможностью параллельной обработки данных. В нашем случае моделируемые данные можно обрабатывать параллельно практически без увеличения потерь.

Теперь сделаем замечание. Точность методов численного моделирования, в частности метода Монте-Карло, зависит от количества проведенных испытаний. Под точностью метода в данном случае подразумевается численная разница между величинами потерь, полученных по формулам и при использовании метода Монте-Карло. Эта разница тем меньше, чем больше количество испытаний. Разумеется, при численном моделировании мы вынуждены ограничиться какой-то величиной количества испытаний. В данном случае количество моделирований бралось равным 1 000 000, что позволяет говорить о точности по крайней мере двух значащих цифр после запятой.

Итак, рассчитаем значения функции потерь $l_T(\widetilde{d})$ при $T = 50$ для $0 \leqslant \widetilde{d} \leqslant 10$ с шагом 0,1 и для дисперсий $0{,}2 \leqslant D \leqslant 1$ с шагом 0,4. На рис. 3 на одном графике объединены результаты вычислений методом Монте-Карло, а также по формулам (13)–(16). Видно, что для каждой дисперсии линия функции потерь, рассчитанная методом Монте-Карло, повторяет поведение линии функции потерь, вычисленной по формулам. Отметим, что при увеличении горизонта управления результаты становятся точнее.

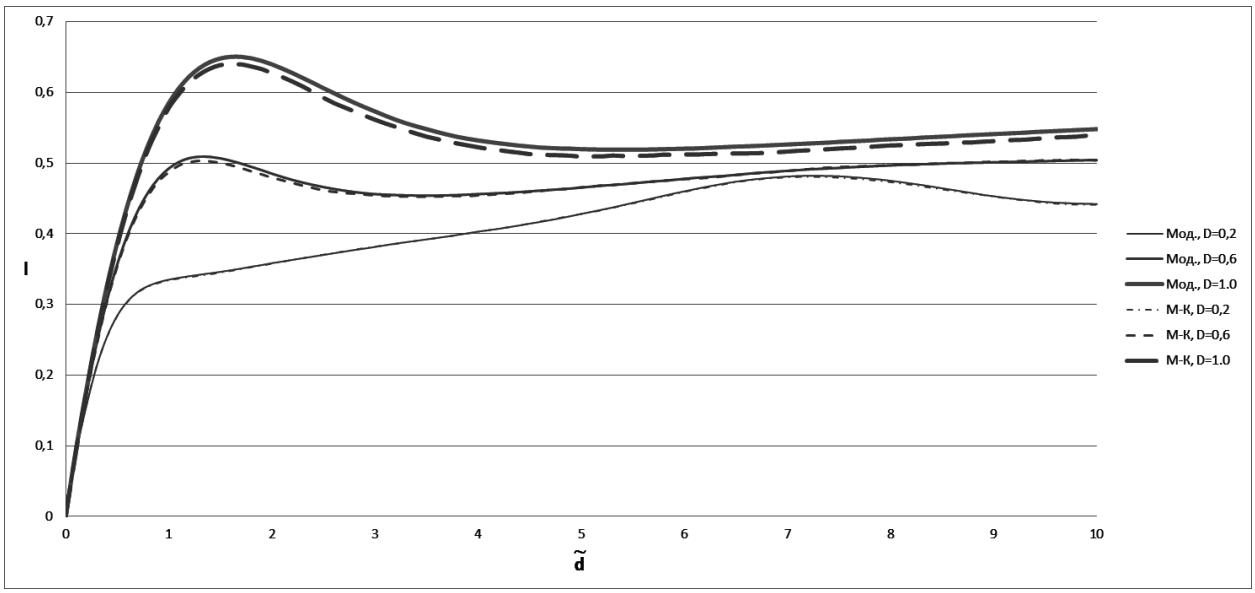


Рис. 3. Сравнение значений функции потерь, вычисленных по формулам и методом Монте-Карло

Заключение

В работе рассмотрена задача о робастном управлении в случайной среде с нормально распределенными доходами. Выведены формулы вычисления рисков и потерь асимптотически наихудшего априорного распределения для случая, когда дисперсии на действи-

ях среды попарно равны и принимают различные значения. Используя эти формулы, вычислены значения байесовских рисков и потерь, установлена связь между ними и значениями, полученными ранее. Также результаты проверены моделированием методом Монте-Карло.

В дальнейшем задачу можно обобщить на случай, когда дисперсии доходов на действиях не равны и могут принимать попарно различные значения из некоторого диапазона.

Автор выражает благодарность профессору А. В. Колногорову за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *Бусленко Н. П.* [и др.] Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло) М.: Физматгиз, 1962. 331 с.

2. *Колногоров А. В.* Нахождение минимаксных стратегии и риска в случайной среде (задача о двуруком бандите) // АиТ. 2011. № 5. С. 127–138.

3. *Колногоров А. В.* Робастное параллельное управление в случайной среде (задача о двуруком бандите) // АиТ. 2012. № 4. С. 114–130.

4. *Лазутченко А. Н.* Использование двухпороговой стратегии управления в случайной среде с нормально распределенными доходами // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. URL: www.science-education.ru/116-12590 (дата обращения: 05.12.2014)

5. *Berry D. A., Fristedt B.* Bandit problems. London; New York: Chapman and Hall, 1985. P. 275.

6. *Robbins H.* Some aspects of the sequential design of experiments // Bulletin AMS. 1952. Vol. 58, N 5. P. 527–535.

7. *Vogel W.* An asymptotic minimax theorem for the two-armed bandit problem // Ann. Math. Statist. 1960. Vol. 31. P. 444–451.

Поступила в редакцию 17.04.2015

References

1. *Buslenko N. P. [i dr.]* Metod statisticheskikh ispytanii (Metod Monte-Karlo) [The method of statistical tests (Monte Carlo method)]. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 331 p.

2. *Kolnogorov A. V.* Nakhozhdenie minimaksnykh strategii i riska v sluchainoi srede (zadacha o dvurukom bandite) [Finding minimax strategies and minimax risk in a random environment (the two-armed bandit problem)]. AiT. 2011. N 5. P. 127–138.

3. *Kolnogorov A. V.* Robastnoe parallel'noe upravlenie v sluchainoi srede (zadacha o dvurukom bandite) [Robust parallel control in a random environment (the two-armed bandit problem)]. AiT. 2012. N 4. P. 114–130.

4. *Lazutchenko A. N.* Ispol'zovanie dvukhporogovoi strategii upravleniya v sluchainoi srede s normal'no raspredelennymi dokhodami [Using the two threshold management strategy in a stochastic environment with normally distributed incomes]. Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya [Modern problems of science and education]. 2014. N 2. URL: www.science-education.ru/116-12590 (accessed: 05.12.2014)

5. *Berry D. A., Fristedt B.* Bandit problems. London; New York: Chapman and Hall, 1985. P. 275.

6. *Robbins H.* Some aspects of the sequential design of experiments. Bulletin AMS. 1952. Vol. 58, N 5. P. 527–535.

7. *Vogel W.* An asymptotic minimax theorem for the two-armed bandit problem. Ann. Math. Statist. 1960. Vol. 31. P. 444–451.

Received April 17, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Лазутченко Алексей Николаевич
аспирант
Новгородский государственный университет
им. Ярослава Мудрого
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Великий Новгород, Новгородская область, Россия, 173000
эл. почта: aleskey@hotbox.ru
тел.: (8921) 198 52 31

CONTRIBUTOR:

Lazutchenko, Aleksey
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University
41 Most St. Petersburg St., 173000
Velikiy Novgorod, Russia
e-mail: aleskey@hotbox.ru
tel.: (8921) 198 52 31

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 114–122
DOI: 10.17076/mat144

УДК 519.175.4

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЧИСЛА РЕБЕР СЛУЧАЙНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Ю. Л. Павлов[1], **Е. В. Феклистова**[1]

[1] *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

Рассматривается случайный конфигурационный граф с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по степенному закону с параметром $\tau = \tau(N)$. Свойства этого графа зависят от значения параметра τ. Эти значения можно разбить на три области: $\tau > 2$, $\tau \in (1, 2)$, $\tau < 1$, в каждой из которых структура графа сходна при всех значениях τ, но резко отличается от структуры в двух других областях. Это значит, что значения $\tau = 2$ и $\tau = 1$ являются критическими точками. Важнейшей характеристикой графа является число ребер. Его предельные распределения при $N \to \infty$ и фиксированных τ также различны в указанных трех областях. Поэтому актуальным является исследование поведения числа ребер в переходных ситуациях при τ, изменяющихся в окрестностях критических точек. В статье найдены локальные предельные распределения числа ребер графа при $\tau \to 2, \tau \to 1$, а также при $\tau \to \infty$.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф, число ребер, локальные предельные теоремы, критические точки.

Yu. L. Pavlov, E. V. Feklistova. LIMIT BEHAVIOUR OF THE NUMBER OF EDGES IN A CONFIGURATION RANDOM GRAPH NEAR CRITICAL POINTS

We consider a configuration random graph with N vertices, whose degrees are independent and identically distributed according to power-law distribution with the parameter $\tau = \tau(N)$. The properties of this graph depend on the value of the parameter τ. These values can be grouped into three zones: $\tau > 2$, $\tau \in (1, 2)$, $\tau < 1$, in each of which the structure of the graph is similar for all values of τ, but differs greatly from the structure in the other two zones. This means that the values $\tau = 2$ and $\tau = 1$ are critical points. The most important characteristic of a graph is the number of edges. Limit distributions of this characteristic also differ between these three zones as $N \to \infty$ and τ is fixed. It is therefore important to study the behavior of the number of edges in transitional situations when τ changes in the neighborhood of the critical points. In this paper the local limit distributions of the number of edges of a graph as $\tau \to 2, \tau \to 1$, and also as $\tau \to \infty$ were obtained.

Key words: configuration random graph, number of edges, local limit theorems, critical points.

Введение

Конфигурационные графы со случайными степенями вершин в последние десятилетия широко используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких, как Интернет, системы мобильной связи и т. д. (см., например, [5, 8]). Кроме того, недавно предложено использовать такие графы для описания динамики развития лесных пожаров и банковских кризисов [1, 3]. Конфигурационные графы конструируются в два этапа. На первом этапе определяются степени всех вершин, которые рассматриваются как независимые одинаково распределенные случайные величины. Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее «полуребер», т. е. ребер, инцидентных данной вершине, но для которых смежные вершины еще не определены. В рассматриваемых моделях считается, что все полуребра графа, как и вершины, различны (занумерованы). На втором этапе построения графа полуребра случайным образом попарно соединяются для образования ребер, при этом для большинства сетей достаточно предположить, что такие соединения происходят равновероятно.

Пусть N означает общее число вершин в графе, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ – случайные величины, равные степеням вершин $1, \ldots, N$ соответственно. Обозначим

$$p_k = \mathsf{P}\{\xi_i = k\}, k = 1, 2, \ldots, i = 1, \ldots, N. \quad (1)$$

Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали, что для больших значений k число узлов, имеющих k связей, пропорционально $k^{-(\tau+1)}$, где τ – положительный параметр, в большинстве случаев принадлежащий интервалу $(1, 2)$ [6, 8, 10]. Это значит, что при $k \to \infty$ мы можем считать, что

$$p_k \sim h(k)/k^{\tau+1}, \quad (2)$$

где $h(k)$ – медленно меняющаяся функция. Проведенные исследования показали, что при больших N структура и динамика развития случайного графа практически полностью определяется свойством (2) и не зависит от вероятностей p_k для небольших значений k и от вида функции $h(k)$. Это дает возможность выбора распределения степеней вершин (1) наиболее удобным для изучения графов способом.

Мы будем рассматривать модель случайного конфигурационного графа, предложенную в [10] и удовлетворяющую перечисленным выше условиям. В этой модели предполагается, что

$$\mathsf{P}\{\xi_i \geqslant k\} = \frac{1}{k^\tau}, i = 1, \ldots, \ N \quad (3)$$

или, что эквивалентно,

$$p_k = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, k = 1, 2, \ldots, \quad (4)$$

Легко проверить, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \tau k^{-(\tau+1)} \quad (5)$$

и, следовательно, условие (2) выполнено. Заметим еще, что при $\tau \geqslant 1$

$$\mathsf{E}\xi_i = \zeta(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau}, \quad (6)$$

где $\zeta(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ,

$$\mathsf{D}\xi_i = \sigma^2 = 2\zeta(\tau - 1) - \zeta(\tau) - \zeta^2(\tau), \quad (7)$$

а при $\tau \leqslant 1$ сумма ряда (6) равна бесконечности.

Обозначим ζ_N сумму степеней всех вершин графа. Поскольку такая сумма должна быть четным числом, в противном случае в граф вводится вспомогательная дополнительная вершина единичной степени. Ясно, что введение такой вершины не влияет на асимптотическое поведение графа. Таким образом, $\zeta_N = \xi_1 + \cdots + \xi_N$ в случае четной суммы степеней и $\zeta_N = \xi_1 + \cdots + \xi_N + 1$ иначе. Далее полуребра равновероятно соединяются, формируя ребра. Ниже рассматривается предельное поведение ζ_N при $N \to \infty$, которое очевидным образом определяет асимптотику числа ребер графа, которое равно $\zeta_N/2$.

В статье [11] получены локальные предельные теоремы для ζ_N при $N \to \infty$ и всех возможных фиксированных значений τ. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $N \to \infty$, $\tau > 2$. Тогда*

$$\sup_n \left| \sigma\sqrt{N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n - N\zeta(\tau))^2}{2\sigma^2 N}} \right| \to 0.$$

Теорема 2. *Пусть $N \to \infty, \tau = 2$. Тогда*

$$\sup_n \left| \sqrt{2\pi N \ln N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - e^{-\frac{(n - N\zeta(\tau))^2}{2N \ln N}} \right| \to 0.$$

Теорема 3. *Пусть $N \to \infty$, $\tau \in (1, 2)$. Тогда*

$$\sup_n \left| N^{1/\tau}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g\left(\frac{n - N\zeta(\tau)}{N^{1/\tau}}\right) \right| \to 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с параметром τ и характеристической функцией

$$f(t) = exp\Big\{-\Gamma(1-\tau)|t|^\tau \left(1 - i\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right) \times \cos\frac{\pi\tau}{2}\Big\}, \quad (8)$$

$\Gamma(x)$ – *значение гамма-функции в точке x.*

Теорема 4. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 1$. Тогда*

$$\sup_n |N\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g((n - N\ln N)/N)| \to 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с характеристической функцией

$$f(t) = exp\Big\{-\frac{\pi|t|}{2}\left(1 + \frac{2it\ln|t|}{\pi|t|}\right)\Big\}. \qquad (9)$$

Теорема 5. *Пусть $N \to \infty$, $\tau \in (0,1)$. Тогда*

$$\sup_n \left|N^{1/\tau}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g(n/N^{1/\tau})\right| \to 0,$$

где $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с параметром τ и характеристической функцией (8).

Приведенные теоремы подтверждают известный факт (см. [10]), что свойства графа существенно зависят от значения параметра τ распределения (4). В частности, эти значения можно разбить на три области: $\tau > 2$, $\tau \in (1,2)$, $\tau < 1$, в каждой из которых структура графа сходна при всех значениях τ, однако резко отличается от структуры в двух других областях. Таким образом, значения параметра $\tau = 2$ и $\tau = 1$ можно назвать критическими точками или точками фазового перехода. В связи с этим актуальной является задача исследования предельного поведения ζ_N в случаях, когда параметр τ не фиксирован, а зависит от N и при $N \to \infty$ сближается с критическими точками.

Основные результаты

Ниже доказаны локальные предельные теоремы для сумм ζ_N при $\tau \to 1$ и при $\tau \to 2$. Справедливы следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 2 + y_N$, $y_N \to 0$, $0 < \gamma < \infty$, а последовательность B_N выбрана так, что*

$$B_N = \begin{cases} \sigma\sqrt{N}, & y_N \ln N \to \infty; \\ \sigma\sqrt{N(1 - e^{-\gamma/2})}, & y_N \ln N \to \gamma; \\ \sqrt{N\ln N}, & y_N \ln N \to 0; \\ \sqrt{\frac{2N}{y_N}(1 - e^{\gamma/2})}, & y_N \ln N \to -\gamma; \\ \left(-\frac{2N}{y_N}\right)^{1/\tau}, & y_N \ln N \to -\infty. \end{cases} \qquad (10)$$

Тогда

$$\sup_n \left|B_N\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(n - N\zeta(\tau))^2}{2B_N^2}}\right| \to 0.$$

Теорема 7. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 1 + y_N$, $y_N \to 0$. Тогда*

$$\sup_n \left|N^{1/\tau}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g\left(\frac{n - NS(N)}{N^{1/\tau}}\right)\right| \to 0,$$

где

$$S(N) = N^{y_N/\tau}\left(\zeta(\tau) + \Gamma(-y_N) + y_N^{-1} + c\right) - y_N^2 - c, \qquad (11)$$

c – постоянная Эйлера ($c = 0,57721\ldots$), $g(x)$ – плотность устойчивого распределения с характеристической функцией (9).

Представляет интерес также предельное поведение распределения суммы ζ_N при $\tau \to \infty$.

Теорема 8. *Пусть $N, \tau \to \infty$ так, что $N/8^\tau \to \infty$. Тогда*

$$\sup_n \left|\sigma\sqrt{N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(n - N\zeta(\tau))^2}{2\sigma^2 N}}\right| \to 0.$$

Вспомогательные утверждения

Ниже будут получены леммы 1–3 о слабой сходимости распределений суммы ζ_N к соответствующим предельным законам, а затем с помощью этих лемм доказываются теоремы 6–8. Заметим еще, что в теореме 7 при выполнении условия $y_N \ln N \to \gamma$, $-\infty < \gamma < \infty$, выражение $S(N)$ имеет более простой вид:

$$S(N) = N^{y_N/\tau}/y_N + y_N^{-2} + c(e^\gamma - 1).$$

Это следует из (11), разложения $\Gamma(-y_N)$ в окрестности нуля [2, 7]:

$$\Gamma(-y_N) = -y_N^{-1} - c + E(y_N), \qquad (12)$$

где $E(y_N)$ – степенной ряд такой, что $E(y_N) = O(y_N)$, а также из того, что дзета-функция Римана при достаточно близких к единице значениях аргумента s имеет вид [2]:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + c + \mathcal{D}(s), \qquad (13)$$

где

$$\mathcal{D}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\gamma_k(s-1)^k, \qquad (14)$$

γ_k – постоянные Стирлинга.

Лемма 1. *Пусть $N \to \infty$, $\tau = 2 + y_N$, $y_N \to 0$, а последовательности B_N определены в (10). Тогда*

$$\mathsf{P}\{(\zeta_N - N\zeta(\tau))/B_N < x\} \to \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Доказательство. Пусть $\psi(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - N\zeta(\tau))/B_N$. Тогда по теореме непрерывности нам достаточно показать, что

$$\psi(t) = \varphi^N(t/B_N)e^{-\frac{itN\zeta(\tau)}{B_N}} \to e^{-t^2/2}, \qquad (15)$$

где $\varphi(t)$ – характеристическая функция ξ_1.
Из (4) нетрудно получить, что

$$\varphi(t) = 1 - \Phi(e^{it}, \tau, 1)(1 - e^{it}), \qquad (16)$$

где $\Phi(z, \tau, a) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^\tau}$ – трансцендентная функция Лерча [9]. Известно [2], что при достаточно малых t справедливо представление:

$$\begin{aligned}\Phi(e^{it}, \tau, 1) =& e^{-it}(\zeta(\tau) + \Gamma(1-\tau)(-it)^{\tau-1} \\ &+ \zeta(\tau-1)it + H(t)),\end{aligned} \qquad (17)$$

где

$$H(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(\tau-k)}{k!}(it)^k, \qquad (18)$$

здесь значения дзета-функции от аргумента, меньшего единицы, понимаются в смысле аналитического продолжения.
Отсюда и из (16) следует, что при $t \to 0$

$$\begin{aligned}\varphi(t) =& 1 + it\zeta(\tau) - t^2\zeta(\tau-1) + t^2\zeta(\tau)/2 \\ &- \Gamma(1-\tau)(-it)^\tau + O(t^3).\end{aligned}$$

Поэтому при $N \to \infty$ и любом фиксированном t

$$\begin{aligned}\psi(t) = &\left[1 + \frac{it\zeta(\tau)}{B_N} - \frac{t^2\zeta(\tau-1)}{B_N^2} + \frac{t^2\zeta(\tau)}{2B_N^2}\right. \\ &\left. -\Gamma(1-\tau)\left(-\frac{it}{B_N}\right)^\tau + O\left(\frac{t^3}{B_N^3}\right)\right]^N \\ &\times exp\{-itN\zeta(\tau))/B_N\}.\end{aligned} \qquad (19)$$

Используя (13) и известное [4] соотношение $\Gamma(-1-y_N) = \Gamma(1-y_N)/(y_N(1+y_N))$, из (19) находим, что

$$\begin{aligned}\ln\psi(t) = &\frac{Nt^2\zeta^2(\tau)}{2B_N^2} - \frac{Nt^2}{B_N^2 y_N} + \frac{Nt^2\zeta(\tau)}{2B_N^2} \\ &+ \frac{N\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{B_N^2}\left(-\frac{it}{B_N}\right)^{y_N} \\ &+ O\left(\frac{Nt^3}{B_N^3}\right).\end{aligned} \qquad (20)$$

Теперь мы можем рассмотреть отдельно предельное поведение выражения (20) во всех случаях, указанных в (10). Учитывая, что в рассматриваемых условиях $\Gamma(1-y_N) \to 1$, а также (7) и (13), получаем, что $\ln\psi(t) \to -t^2/2$, откуда и вытекает (15).
Лемма 1 доказана.

Обозначим $\psi_1(t)$ характеристическую функцию суммы $(\zeta_N - NS(N))/N^{1/\tau}$, где величина $S(N)$ определена в (11).

Лемма 2. *Пусть* $N \to \infty$, $\tau = 1+y_N$, $y_N \to 0$. *Тогда* $\psi_1(t) \to exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|\left(1 + i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\right\}$.

Доказательство. Используя (12) и (13), получаем, что

$$\begin{aligned}\zeta(\tau)+\Gamma(1-\tau)(-it)^{y_N} =& y_N^{-1} + c + \mathcal{D}(\tau) \\ &+ (-y_N^{-1} - c + E(y_N))|t|^{y_N} \\ &\times exp\{-iy_N(sgn\ t)\pi/2\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (17) следует, что при достаточно малых t

$$\begin{aligned}&\Phi(e^{it}, \tau, 1) = (1 - it + G(t))\,[(1 - |t|^{y_N}) \\ &\times(y_N^{-1} + c) + \mathcal{D}(\tau) + E(y_N) \\ &+(-y_N^{-1} - c + E(y_N))|t|^{y_N} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty}(-iy_N(sgn\ t)\pi/2)^k/k! + \zeta(\tau-1)it \\ &+H(t)]\,,\end{aligned} \qquad (21)$$

где

$$G(t) = \sum_{k=2}^{\infty}(-it)^k/k! \qquad (22)$$

Раскрывая скобки в (21) из (16), нетрудно найти, что при $t \to 0$

$$\begin{aligned}&\varphi(t) = 1 + it(1 - |t|^{y_N})(y_N^{-1} + c) + it\mathcal{D}(\tau) \\ &+ itE(y_N) + it(-y_N^{-1} - c + E(y_N)) \\ &\times |t|^{y_N}\sum_{k=1}^{\infty}(-iy_N(sgn\ t)\pi/2)^k/k! + R(t),\end{aligned} \qquad (23)$$

где для остаточного члена $R(t)$ справедливо соотношение:

$$R(t/N^{1/\tau}) = o(1/N). \qquad (24)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}(-iy_N(sgn\ t)\pi/2)^k/k! = -(sgn\ t)i \\ &\times\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}(\pi y_N/2)^{2s-1}/(2s-1)! \\ &-\sum_{s=1}^{\infty}(\pi y_N/2)^{2s}/(2s)!\end{aligned} \qquad (25)$$

Заметим, что при фиксированных t

$$N|t/N^{1/\tau}|^{1+y_N}(-y_N^{-1}-c+E(y_N)) \times \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}(\pi y_N/2)^{2s-1}/(2s-1)! = \pi|t|/2+o(1), \quad (26)$$

но

$$-it|t|^{y_N}(-y_N^{-1}-c+E(y_N)) \times \sum_{s=1}^{\infty}(\pi y_N/2)^{2s}/(2s)! = o(1). \quad (27)$$

Легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$itN^{1-1/\tau}(1-|t/N^{1/\tau}|^{y_N}) = it(N^{y_N/\tau}-1)+o(1), \quad (28)$$

$$itN^{1-1/\tau}(1-|t|^{y_N}/N^{1/\tau})/y_N = it(N^{y_N/\tau}/y_N - y_N^{-2}+\ln|t|+o(1)). \quad (29)$$

Собирая вместе (23)–(29) и учитывая (12), (13), (14), находим, что

$$\ln\varphi^N(t/N^{1/\tau}) = -\frac{\pi}{2}|t|\left(1+i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right) + it\Big[N^{y_N/\tau}\left(\zeta(\tau)+\Gamma(-y_N)+y_N^{-1}+c\right) - y_N^{-2}-c\Big]+o(1).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi^N\left(\frac{t}{N^{1/\tau}}\right)exp\Big\{-\frac{itNS(N)}{t^{1/\tau}}\Big\} \to exp\left\{-\frac{\pi}{2}|t|\left(1+i\frac{t}{|t|}\frac{2}{\pi}\ln|t|\right)\right\}, \quad (30)$$

откуда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $N,\tau\to\infty$,так, что $N/8^\tau\to\infty$. Тогда $\mathsf{P}\{(\zeta_N-N\zeta(\tau))/(\sigma\sqrt{N})<x\}\to\Phi(x)$.*

Доказательство. Для характеристической функции $\varphi(t)$ случайной величины ξ_1 при $t\to 0$ справедливо разложение:

$$\varphi(t) = 1+it\mathsf{E}\xi_1 - t^2(\sigma^2+\mathsf{E}^2\xi_1)/2 + O(t^3\mathsf{E}\xi_1^3). \quad (31)$$

Из (4) нетрудно получить, что

$$\mathsf{E}\xi_1^3 = 3\zeta(\tau-2)-3\zeta(\tau-1)+\zeta(\tau),$$

поэтому, учитывая (6) и (7), из (31) находим, что для определенной в (15) характеристической функции $\psi(t)$ случайной величины $(\zeta_N-N\zeta(\tau))/(\sigma\sqrt{N})$ справедливо равенство:

$$\psi(t) = \left[1+\frac{i\zeta(\tau)t}{\sigma\sqrt{N}}-(\sigma^2+\zeta^2(\tau))\frac{t^2}{2\sigma^2N} + O\left(\frac{1}{\sigma^3N\sqrt{N}}\right)\right]^N e^{-\frac{itN\zeta(\tau)}{\sigma\sqrt{N}}}.$$

Логарифмируя это выражение, легко получить соотношение (15), что и доказывает лемму 3.

Доказательства теорем

Доказательство теоремы 6. По формуле обращения

$$(2\pi)^{-1/2}e^{-z_N^2/2} = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp\{-itz_N-t^2/2\}\,dt, \quad (32)$$

$$B_N\mathsf{P}\{\zeta_N=n\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi B_N}^{\pi B_N} e^{-itz_N}\left(\varphi^*\left(\frac{t}{B_N}\right)\right)^N dt, \quad (33)$$

где $z_N=(n-N\zeta_N(\tau))/B_N$ и $\varphi^*(t)=\varphi(t)exp\{-it\zeta(\tau)\}$.

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi\left(B_N\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}-(2\pi)^{-1/2}e^{-z_N^2/2}\right).$$

Из (32) и (33) следует, что эту разность можно представить в виде суммы

$$R_N = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4,$$

где

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-itz_N}\left(\left(\varphi^*\left(t/B_N\right)\right)^N - e^{-t^2/2}\right)dt,$$

$$\mathrm{I}_2 = -\int\limits_{|t|>A} exp\{-itz_N-t^2/2\}\,dt,$$

$$\mathrm{I}_3 = \int\limits_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon B_N} e^{-itz_N}\left(\varphi^*\left(t/B_N\right)\right)^N dt,$$

$$\mathrm{I}_4 = \int\limits_{\varepsilon B_N\leqslant|t|\leqslant\pi B_N} e^{-itz_N}\left(\varphi^*\left(t/B_N\right)\right)^N dt,$$

а положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Легко видеть, что для доказательства теоремы достаточно убедиться, что R_N стремится к нулю при $N \to \infty$.

Из леммы 1 видно, что $\mathrm{I}_1 \to 0$. Для интеграла I_2 справедлива оценка:

$$|\mathrm{I}_2| \leqslant \int\limits_{|t|>A} e^{-t^2/2}\,dt,$$

поэтому I_2 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A. Ясно, что

$$|\mathrm{I}_4| \leqslant B_N \int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi} |\varphi(t)|^N\,dt.$$

Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ существует такое число $C > 0$, что $|\varphi(t)| \leqslant e^{-C}$, поэтому

$$|\mathrm{I}_4| \leqslant B_N \int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi} |\varphi(t)|^N\,dt \leqslant B_N e^{-CN}(\pi-\varepsilon).$$

Отсюда и из (7), (10), (13) нетрудно получить, что $\mathrm{I}_4 \to 0$.

Нам осталось рассмотреть интеграл I_3. Оценим этот интеграл отдельно для пяти случаев выбора B_N, указанных в условиях теоремы. Представим I_3 в виде суммы $\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3' + \mathrm{I}_3''$, где области интегрирования слагаемых соответственно равны:

$$S' = \{t : A < |t| \leqslant D_N\},$$
$$S'' = \{t : D_N < |t| \leqslant \varepsilon B_N\},$$

а границы D_N в каждом случае задаются свои.

В первом случае $B_N = \sigma\sqrt{N}, y_N \ln N \to \infty$, а $D_N = e^{-C_1/y_N}\sigma\sqrt{N}$, здесь и далее символы $C_1, C_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные.

Пусть $t \in S'$. Используя (7) и (13), нетрудно показать, что

$$\sigma^2 = 2y_N^{-1} + 2c - \zeta(2) - \zeta^2(2), \tag{34}$$

поэтому

$$-t^2/(\sigma^2 y_N) \sim -t^2/2. \tag{35}$$

Известно [2,7], что при $y_N \to 0$

$$\Gamma(1-y_N) = 1 + cy_N + o(y_N). \tag{36}$$

Кроме того, в области S' справедливо неравенство: $|-it/(\sigma\sqrt{N})|^{y_N} < e^{-C_1} < 1$, поэтому из (36) выводим, что

$$\left|exp\Big\{-\frac{\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{\sigma^2}\left(-\frac{it}{\sigma\sqrt{N}}\right)^{y_N}\Big\}\right| \leqslant e^{dt^2/2}, \tag{37}$$

где $d < 1$. Нетрудно показать, что первое, третье и последнее слагаемые в сумме (20) при $B_N = \sigma\sqrt{N}$ являются бесконечно малыми по сравнению с t^2, поэтому из (35) и (37) следует, что для некоторого $C_2 > 0$

$$|\psi(t)| < e^{-C_2 t^2}$$

и интеграл I_3' можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Для оценки I_3'' аналогичным образом можно найти асимптотику всех слагаемых в сумме (20) и получить, что

$$\ln\psi(t) = (2 - 2c + \zeta(2) + \zeta^2(2) + 2\ln u)t^2 y_N/4,$$

где $0 < u \leqslant \varepsilon$, а в силу выбора ε для некоторого $C_3 > 0$

$$|\psi(t)| < e^{-C_3 t^2/y_N}.$$

Учитывая (34) и условие $y_N \ln N \to \infty$, отсюда находим, что

$$|\mathrm{I}_3''| \leqslant 2\varepsilon\sigma\sqrt{N}e^{-2C_3\sqrt{N}} \to 0.$$

Рассмотрим второй случай, в котором $y_N \ln N \to \gamma, 0 < \gamma < \infty, B_N = B\sqrt{N}$, где $B = \sigma\sqrt{1-e^{-\gamma/2}}$, а $D_N = y_N^{-1}$. Как раньше, из (20) следует равенство:

$$\begin{aligned}\ln\psi(t) &= \frac{t^2\zeta^2(\tau)}{2B^2} - \frac{t^2\zeta(\tau-1)}{B^2} + \frac{t^2\zeta(\tau)}{2B^2}\\ &+ \frac{\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{B^2}\left(-\frac{it}{B}\right)^{y_N}\\ &+ O\left(\frac{t^3}{B^3\sqrt{N}}\right).\end{aligned} \tag{38}$$

Используя (13) и (36), нетрудно получить, что при $t \in S'$

$$\begin{aligned}\frac{t^2\zeta(\tau-1)}{B^2} + \frac{\Gamma(1-y_N)}{y_N(1+y_N)}\frac{t^2}{B^2}\left(-\frac{it}{B}\right)^{y_N}\\ \sim -\frac{t^2}{B^2 y_N}(1-e^{-\gamma/2}),\end{aligned} \tag{39}$$

а остальные слагаемые в (38) бесконечно малы по сравнению с (39). Отсюда и из (34), (38) следует, что

$$\ln\psi(t) \sim -e^{-t^2/2},$$

поэтому

$$|\mathrm{I}_3'| \leqslant 2\int\limits_A^\infty e^{-t^2/4}\,dt$$

и, как обычно, этот интеграл оценивается выбором достаточно большого A.

Проводя рассуждения аналогично тому, как это было сделано в первом случае, находим, что при $t \in S''$

$$|\psi(t)| \leqslant e^{-C_4 t^2 y_N}$$

и, поскольку $|t| \geqslant y_N^{-1}$,

$$|\mathrm{I}_3''| \leqslant 2 \int\limits_{y_N^{-1}}^{\infty} e^{-C_4 t}\, dt \to 0.$$

В третьем случае $B_N = \sqrt{N \ln N}$, $y_N \ln N \to 0$, $D_N = \ln N$ и из (20) следует, что

$$\ln \psi(t) = \frac{t^2 \zeta^2(\tau)}{2 \ln N} - \frac{t^2 \zeta(\tau - 1)}{\ln N} + \frac{t^2 \zeta(\tau)}{2 \ln N} + \frac{\Gamma(1 - y_N)}{y_N (1 + y_N)} \frac{t^2}{\ln N} \left(- \frac{it}{\sqrt{N \ln N}} \right)^{y_N} + O\left(\frac{t^3}{\sqrt{N} \ln^{3/2} N} \right). \tag{40}$$

Опять, используя (13) и (36) и оценивая каждое слагаемое в (40), приходим к неравенству:

$$|\mathrm{I}_3'| \leqslant 2 \int\limits_{A}^{\infty} e^{-t^2/4}\, dt.$$

Оценка I_3'' проводится аналогично предыдущим случаям и при этом учитывается условие $|t| > \ln N$ и выбор ε. Тогда

$$|\psi(t)| \leqslant e^{-C_5 t^2 / \ln N}$$

и

$$|\mathrm{I}_3''| < 2 \int\limits_{\ln N}^{\infty} e^{-C_5 t}\, dt \to 0.$$

В четвертом случае $D_N = y_N^{-1}$, а в пятом $D_N = e^{-C_6/y_N}(-2N/y_N)^{1/\tau}$. Оценивание интеграла I_3 в этих двух случаях проводится по той же схеме, как и в случаях 2 и 1 соответственно. Доказательство теоремы 6 завершено.

Доказательство теоремы 7. Обозначим $v_N = (n - NS(N))/N^{1/\tau}$ и $\varphi^{**}(t) = \varphi(t) exp\{-itS(N)\}$. Как и при доказательстве теоремы 6, представим разность

$$R_N^* = 2\pi(N^{1/\tau} \mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - g(v_N))$$

в виде суммы

$$R_N^* = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4,$$

где $\mathrm{I}_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-itv_N} \left(\left(\varphi^{**}\left(t/N^{1/\tau} \right) \right)^N - exp\Big\{ -\frac{\pi}{2}|t| \left(1 + i \frac{2t}{|t|\pi} \ln |t| \right) \Big\} \right) dt,$

$$\mathrm{I}_2 = - \int\limits_{|t|>A} exp\Big\{ -itv_N - \frac{\pi}{2}|t| \times \left(1 + i \frac{2t}{|t|\pi} \ln |t| \right) \Big\}\, dt,$$

а интегралы I_3 и I_4 аналогичны одноименным интегралам в доказательстве теоремы 6.

Из леммы 2 видно, что $\mathrm{I}_1 \to 0$. Для I_2 справедлива оценка

$$|\mathrm{I}_2| \leqslant 2 \int\limits_{t>A} e^{-\pi t/2}\, dt,$$

поэтому I_2 можно сделать сколь угодно малым выбором A. Ясно, что I_4 оценивается так же, как и подобный интеграл в теореме 6.

Используя (20) и проводя рассуждения, подобные выводу соотношения (30), нетрудно получить, что в области интегрирования I_3

$$|\psi(t)| \leqslant e^{-C_6|t|},$$

поэтому

$$|\mathrm{I}_3| < 2 \int\limits_{A}^{\infty} e^{-C_6|t|}\, dt, \tag{41}$$

а последнее выражение можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Используя (32) и (33) при $B_N = \sigma\sqrt{N}$, находим, что

$$2\pi(\sigma\sqrt{2\pi N}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-z_N^2/2}) = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4,$$

где интегралы $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_4$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве теоремы 6. Из леммы 3 следует, что $\mathrm{I}_1 \to 0$, а I_2 можно оценить так же, как и в теореме 6.

Рассмотрим I_4. Поскольку $e^{it} - 1 = \cos t + i \sin t - 1$ из явного вида $\Phi(e^{it}, \tau, 1)$ и (16) находим, что при $\tau \to \infty$ и $\varepsilon\sigma\sqrt{N} \leqslant |t| \leqslant \pi\sigma\sqrt{N}$

$$\varphi^N \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right) = \left[1 + \left(\cos \frac{t}{\sigma\sqrt{N}} + i \sin \frac{t}{\sigma\sqrt{N}} - 1 \right) \times (1 + o(1)) \right]^N,$$

поэтому для некоторого положительного $q < 1$

$$|\varphi(t/\sigma\sqrt{N})|^N < q^N.$$

Тогда

$$|\mathrm{I}_4| < \pi\sigma\sqrt{N}q^N \to 0.$$

Для оценки I_3 воспользуемся опять (16), явным видом функции Лерча и разложением e^{it} по формуле Тэйлора в окрестности нуля. Тогда получаем, что

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right|^N < e^{-C_7 t^2},$$

следовательно,

$$|\mathrm{I}_3| < 2\int\limits_A^\infty e^{-C_7 t^2}\,dt,$$

что равносильно (41). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13-01-00009.

Литература

1. *Аннаков Б. Б.* Банковский кризис и пожары в лесу – Что общего? // [Электронный ресурс]. URL: http://www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire. 2008 (дата обращения: 01.06.2014)

2. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

3. *Лери М. М., Павлов Ю. Л.* Лесной пожар на случайном графе со сгораемыми ребрами // Учен. зап. Петрозаводского государственного университета. 2013. № 2 (131). С. 96–99.

4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб.: Лань, 2009. 800 с.

5. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

6. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology // Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

7. *Flajolet P., Sedgewick R.* Analytic combinatorics // Cambridge University Press. 2009. doi: 10.1017/CBO9780511801655

8. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Eindhoven university of technology. 2011. 363 p.

9. *Laurinskas A., Garunksis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

10. *Norros I., Reittu H.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 4. P. 3–23.

11. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* Limit distributions of the edge number in random configuration graph // European researcher. 2013. Vol. 48, N 5–1. P. 1097–1100.

Поступила в редакцию 03.04.2015

References

1. *Annakov B. B.* Bankovskii krizis i pozhary v lesu – Chto obshchego? [Bank crisis and forest fire: What's in common?] [Elektronnyi resurs]. URL: http://www.empatika.com/blog/agent_modeling_forest_fire. 2008 (data obrashcheniya: 01.06.2014)

2. *Beitman G., Erdeii A.* Vysshie transtsendentnye funktsii. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsii Lezhandra [Higher transcendental functions]. Moscow: Nauka, 1965. 296 p.

3. *Leri M. M., Pavlov Yu. L.* Lesnoi pozhar na sluchainom grafe so sgoraemymi rebrami [Forest fire on random graph with inflammable edges] Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013. N 2 (131). P. 96–99.

4. *Fikhtengol'ts G. M.* Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. [Differential and integral calculus] T. 2. Sankt-Peterburg: Lan', 1997. 800 p.

5. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

6. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology. Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

7. *Flajolet P., Sedgewick R.* Analytic combinatorics. Cambridge University Press. 2009. doi: 10.1017/CBO9780511801655

8. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Eindhoven university of technology. 2011. 363 p.

9. *Laurinskas A., Garunksis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

10. *Norros I., Reittu H.* On the power-law random graph model of massive data networks. Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, N 4. P. 3–23.

11. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* Limit distributions of the edge number in random configuration graph. European researcher. 2013. Vol. 48, N 5–1. P. 1097–1100.

Received April 03, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Павлов Юрий Леонидович
зав. лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

Феклистова Елена Валерьевна
аспирант лаб. теории вероятностей и компьютерной статистики
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: f_len@mail.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTORS:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218

Feklistova, Elena
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: f_len@mail.ru
tel.: (8142) 781218

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 123–130
DOI: 10.17076/mat138

УДК 519.175.4

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

И. А. Чеплюкова

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Для моделирования сложных сетей телекоммуникаций, в частности Интернета, часто используется конфигурационный граф, степени вершин которого являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. В настоящей статье рассматривается случайный граф, содержащий $N + 1$ вершину. Случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ являются независимыми одинаково распределенными, равными степеням вершин с номерами от 1 до N, у которых вероятность $\mathbf{P}\{\eta_i = k\}$, $i = 1, \ldots, N$, эквивалентна $h(k)/k^\tau$ при $k \to \infty$, где $h(k)$ интегрируемая на любом конечном интервале медленно меняющаяся функция и $\tau > 1$. Вершина с номером 0 является фиктивной, ее степень равна 1, если сумма степеней всех остальных вершин является нечетной, в противном случае степень равна 0. Рассматривается множество таких графов при условии, что сумма степеней всех основных вершин равна n. Получены предельные распределения максимальной степени и числа вершин с заданной степенью в случае, когда $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \mathbf{E}\eta_1$ при $N, n \to \infty$.

Ключевые слова: случайный граф, конфигурационный граф, степень вершины, предельное распределение.

I. A. Cheplyukova. ON LIMIT DISTRIBUTIONS OF VERTEX DEGREES IN A CONFIGURATION GRAPH

The configuration graph where vertex degrees are independent identically distributed random variables is often used for models of complex networks such as the Internet. We consider a random graph consisting of $N+1$ vertices. The random variables $\eta_1, \ldots, \eta_N$ are equal to the degrees of vertices with the numbers $1, \ldots, N$. The probability $\mathbf{P}\{\eta_i = k\}$, $i = 1, \ldots, N$, is equivalent to $h(k)/k^\tau$ as $k \to \infty$ where $h(x)$ is a slowly varying function integrable in any finite interval, $\tau > 1$. The vertex 0 has degree 0 if the sum of degrees of all other vertices is even, else the degree is 1. We obtain the limit distribution of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree under the condition that the sum of degrees is equal to n and $N, n \to \infty, 1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \mathbf{E}\eta_1$.

Key words: random graph, configuration graph, vertex degree, limit distribution.

В последнее время уделяется большое внимание изучению структуры и свойств случайных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций (см., например, [8, 11, 12]). Одна из наиболее известных моделей – конфигурационная модель

с независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Построение этой модели состоит из двух этапов. На первом этапе построения конфигурационного графа, состоящего из N основных и одной фиктивной вершины, для каждой из N основных вершин определяется ее степень в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Для удобства изложения процесса построения такой модели часто используется понятие полуребра, введенное в [12]. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуребер, число которых равно степени данной вершины. Предполагается, что все вершины и полуребра различны. На втором этапе построения происходит последовательное образование ребер: на каждом шаге два полуребра выбираются равновероятно и, соединившись, образуют ребро. Дополнительная вершина носит вспомогательный характер, ее степень равна 0, если сумма всех полуребер является четным числом, в противном случае степень равна 1. Очевидно, что такая конструкция допускает образование петель и кратных ребер.

Одним из основных свойств большого числа реальных сетей является то, что число вершин со степенью k пропорционально $k^{-\tau}$ при $k \to \infty$, где $\tau > 0$ (см., например, [9]). Существует множество работ (см., например, [7, 10, 12]), направленных на исследование асимптотических свойств различных числовых характеристик таких случайных графов при $N \to \infty$. В частности, в [12] рассматривается случайный граф, степени вершин η которого имеют распределение $\mathbf{P}\{\eta \geqslant k\} = h(k)k^{-\tau+1}$, где $h(k)$ медленно меняющаяся функция, авторы этой работы полагают, что вид функции $h(k)$ не влияет на результаты исследования и при изучении случайного графа можно заменить $h(k)$ на 1. В [3] доказана локальная предельная теорема для суммы степеней вершин такого графа. В [7] рассматривается множество случайных графов, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами со степенным распределением с положительным параметром τ при условии, что сумма степеней вершин равна n. В этой статье показано, что для исследования асимптотического поведения таких графов можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам [2]. В работах [3–7] получены предельные распределения максимальной степени и числа вершин заданной степени в таких графах в различных зонах изменения параметров n и N при $n, N \to \infty$.

В данной работе рассматривается конфигурационная модель, состоящая из $N+1$ занумерованной вершины, в которой степени вершин с номерами от 1 до N являются независимыми одинаково распределеными случайными величинами $\eta_1, \ldots, \eta_N$ с распределением

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{h(k)}{k^\tau \Sigma(1,\tau)},$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $h(x)$ интегрируемая на любом конечном интервале медленно меняющаяся функция, $\tau > 1$ и

$$\Sigma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{h(k)}{k^y}. \tag{2}$$

Далее мы будем рассматривать множество конфигурационных графов при условии, что сумма степеней вершин $\eta_1 + \cdots + \eta_N = n$. Нетрудно заметить, что появление в распределении (1) медленно меняющейся функции $h(x)$ позволяет рассматривать данную модель в качестве обобщения случайных графов, исследуемых в работах [3–7].

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, распределение которых имеет вид

$$p_r(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{\lambda^k p_k \Sigma(1,\tau)}{\Sigma(\lambda,\tau)},$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где λ, $0 < \lambda < 1$ – параметр распределения. Из (1)–(3) несложно получить, что

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{\Sigma(\lambda, \tau-1)}{\Sigma(\lambda,\tau)},$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 = \frac{\Sigma(\lambda, \tau-2)}{\Sigma(\lambda,\tau)} - m^2. \tag{4}$$

Пусть параметр распределения (3) выбран так, что выполнено равенство

$$\frac{\Sigma(\lambda, \tau-1)}{\Sigma(\lambda,\tau)} = n/N. \tag{5}$$

Обозначим через $\eta_{(N)}$ максимальную степень вершины и μ_r – число вершин степени r. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $n, N \to \infty$, $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau-1)/\Sigma(1,\tau)$, r *выбран так, что*

$$\frac{N\lambda^{r+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda,\tau)(r+1)^\tau} \to \gamma,$$

где γ некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r + k\} = \exp\left\{-\frac{\gamma\lambda^k}{1-\lambda}\right\}(1 + o(1)).$$

(Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные.)

Теорема 2. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, r фиксированное натуральное число. Тогда равномерно относительно k таких, что $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{u_r^2}{2}\right\}(1 + o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)\left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2}p_r(\lambda)\right).$$

Теорема 3. *Пусть $n, N, r \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$. Тогда равномерно относительно целых k таких, что $(k - Np_r(\lambda))/(\sqrt{Np_r(\lambda)})$ лежит в любом конечном фиксированном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(1 + o(1))}{k!}(Np_r(\lambda))^k \times$$

$$\times \exp\{-Np_r(\lambda)\}.$$

Ниже мы докажем несколько вспомогательных утверждений (леммы 1–4), с помощью которых будут доказаны теоремы 1–3. В основе доказательства лежит обобщенная схема размещений, введенная В. Ф. Колчиным (см., например, [2]). Из (1)–(3) нетрудно видеть, что для рассматриваемого множества случайных графов справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}.$$

Следовательно, выполнены условия обобщенной схемы размещения.

Введем два множества вспомогательных независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ и $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ таких, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leqslant r\},$$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \neq r\}, k = 1, 2, \ldots \quad (6)$$

Пусть

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_N^{(r)},$$
$$\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \ldots + \tilde{\xi}_N^{(r)}, \quad P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}.$$

В [2] показано, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times$$

$$\times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \quad (8)$$

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы 1 справедливо*

$$NP_{r+k} = \gamma\lambda^k(1 - \lambda)^{-1}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$NP_{r+k} = N\sum_{i \geqslant 0} p_{r+k+i+1}(\lambda) =$$

$$= N\left(\sum_{i=0}^{M} p_{r+k+i+1}(\lambda) + \sum_{i \geqslant M+1} p_{r+k+i+1}(\lambda)\right), \quad (9)$$

где выбор положительной постоянной M будет ясен из дальнейшего.

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=0}^{M} p_{r+k+i+1}(\lambda)$. Из (1)–(3) получаем, что

$$\sum_{i=0}^{M} p_{r+k+i+1}(\lambda) = p_{r+1}(\lambda) \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{M} \frac{\lambda^{k+i} h(r + k + i)}{h(r + 1)} \left(1 - \frac{k + i}{r + k + i + 1}\right)^{\tau}. \quad (10)$$

Согласно условию леммы $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$, тогда из (5) следует, что

$$0 < C_3 \leqslant \lambda \leqslant C_4 < 1. \quad (11)$$

Известно (см., например, [1]), что интегрируемые на любом конечном интервале медленно меняющиеся функции обладают следующими свойствами:

1. При больших x функция $h(x) > 1/\sqrt{x}$;
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{h(x+t)}{h(x)} = 1, \quad t \geqslant 0$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x^{\varepsilon}}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)x^{\varepsilon}=\infty$, при всех значениях $\varepsilon>0$;

4. Допускается следующее каноническое представление

$$h(x)=c(x)\exp\left\{\int\limits_{\alpha}^{x}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right\},$$

где при $x\to\infty$

$$c(x)\to c\neq 0,\qquad \varepsilon\to 0,$$

а число $\alpha>0$.

Используя третье свойство медленно меняющейся функции, из условий теоремы 1 и (11), несложно показать, что r пропорционально $\ln N$. Тогда из равенства (10) и второго свойства медленно меняющейся функции находим, что

$$\sum_{i=0}^{M}p_{r+k+i+1}(\lambda)=p_{r+1}(\lambda)\sum_{i=0}^{M}\lambda^{k+i}(1+o(1)).$$

Следовательно, при выборе достаточно большого M сумма $\sum\limits_{i=0}^{M}p_{r+k+i+1}(\lambda)$ сколь угодно мало отличается от

$$\frac{\lambda^{r+k+1}h(r+1)}{\Sigma(\lambda,\tau)(r+1)^{\tau}(1-\lambda)}(1+o(1)). \qquad (12)$$

Осталось показать, что

$$\sum_{i\geqslant M+1}p_{r+k+i+1}(\lambda)=o\left(\sum_{i=0}^{M}p_{r+k+i+1}(\lambda)\right). \qquad (13)$$

Из (1)–(3) несложно получить, что

$$\sum_{i\geqslant M+1}p_{r+k+i+1}(\lambda)=\frac{\lambda^{r+k+1}}{\Sigma(\lambda,\tau)(r+1)^{\tau}}\times$$

$$\times\sum_{i\geqslant M+1}\lambda^{i}\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^{\tau}\times$$

$$\times h(r+k+i+1). \qquad (14)$$

Для справедливости равенства (13) достаточно показать, что выполнено следующее соотношение

$$\sum_{i\geqslant M+1}\lambda^{i}\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^{\tau}\times$$

$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\to 0. \qquad (15)$$

Разделим область суммирования $\{i: i\geqslant M+1\}$ на три части:

$$K_1=\{i: M+1\leqslant i<C_5r\};$$

$$K_2=\{i: i\geqslant C_5r, i=o(N^{\varepsilon})\};$$

$$K_3=\{i: i\geqslant C_6N^{\varepsilon}\},$$

где ε – некоторая положительная постоянная.

Из первого и третьего свойств медленно меняющейся функции $h(x)$ нетрудно получить, что

$$\sum_{K_3}\lambda^{i}\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^{\tau}\times$$

$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\leqslant C_7\sqrt{r+1}\sum_{K_3}\lambda^{i}i^{\varepsilon}\leqslant$$

$$\leqslant C_7\frac{\lambda^{C_8N^{\varepsilon}}}{1-\lambda^{C_9}}\to 0. \qquad (16)$$

Используя канонический вид медленно меняющейся функции $h(x)$, можно показать, что

$$\sum_{K_1}\lambda^{i}\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^{\tau}\times$$

$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\leqslant C_{10}\sum_{K_1}\lambda^{i}\times$$

$$\times\exp\left\{\int\limits_{r+1}^{r+k+i+1}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right\}\leqslant C_{11}\frac{\lambda^{M+1}}{1-\lambda}, \qquad (17)$$

следовательно, выбором достаточно большого M последняя сумма может быть сделана сколь угодно малой.

Применяя первое и третье свойства медленно меняющейся функции, несложно получить, что

$$\sum_{K_2}\lambda^{i}\left(1-\frac{k+i}{r+k+i+1}\right)^{\tau}\times$$

$$\times\frac{h(r+k+i+1)}{h(r+1)}\to 0. \qquad (18)$$

Из (14)–(18) следует справедливость (13). Тогда утверждение леммы 1 вытекает из соотношений (9), (12) и (13).

Лемма 2. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau-1)/\Sigma(1,\tau)$. Тогда равномерно относительно целых k таких, что $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1+o(1))}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

Доказательство. Докажем слабую сходимость к нормальному закону. Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{\Sigma(e^{it}\lambda, \tau)}{\Sigma(\lambda,\tau)}.$$

В дальнейшем нам потребуется явный вид третьей производной от $\ln\varphi(t)$. Из (3) несложно получить, что

$$(\ln\varphi(t))''' = i\left(-\frac{\Sigma(e^{it}\lambda,\tau-3)}{\Sigma(e^{it}\lambda,\tau)} + \right.$$
$$+3\frac{\Sigma(e^{it}\lambda,\tau-2)\Sigma(e^{it}\lambda,\tau-1)}{\Sigma^2(e^{it}\lambda,\tau)} -$$
$$\left. -2\frac{\Sigma^3(e^{it}\lambda,\tau-1)}{\Sigma^3(e^{it}\lambda,\tau)}\right).$$

Отсюда, из (2) и (11), легко видеть, что

$$|(\ln\varphi(t))'''| \leqslant C_{12}\Sigma(\lambda,\tau-3) + \tag{19}$$
$$+C_{13}\Sigma(\lambda,\tau-2)\Sigma(\lambda,\tau-1) + C_{14}\Sigma^3(\lambda,\tau-1).$$

Рассмотрим $\Sigma(\lambda,\tau-j), j = 0,1,2,3$. Используя каноническое представление медленно меняющейся функции, из (2) находим, что

$$\Sigma(\lambda,\tau-j) =$$
$$= \sum_{k=1}^{M}\frac{\lambda^k}{k^{\tau-j}}c(k)\exp\left\{\int_\alpha^k\frac{\varepsilon t}{t}\right\} + \sum_{k>M}\frac{\lambda^k h(k)}{k^{\tau-j}} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant M} c(k)\sum_{k=1}^{M}\lambda^{C_{15}k} + \sum_{k>M}\lambda^{C_{16}k},$$

значит, при достаточно большом M справедлива следующая оценка:

$$\Sigma(\lambda,\tau-j) \leqslant C_{17}, j = 0,1,2,3. \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем, что

$$|(\ln\varphi(t))'''| \leqslant C_{18}. \tag{21}$$

При достаточно малых t справедливо равенство

$$\ln\varphi(t) = t\,(\ln\varphi(t))'|_{t=o} + \frac{t^2}{2}(\ln\varphi(t))''|_{t=o} +$$
$$+\frac{t^3}{3!}Q(t),$$

где

$$|Q(t)| \leqslant 2\max_{|u|\leqslant|t|}|(\ln\varphi(u))'''|.$$

Тогда

$$\ln\varphi(t) = itm + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + \frac{t^3}{3!}Q(t). \tag{22}$$

Пусть $\varphi_N(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - k)/(\sigma\sqrt{N})$. Тогда

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right).$$

Учитывая, что в рассматриваемой зоне изменения параметров n и N дисперсия $\sigma^2 > C_{19}$, из (21) и (22) находим, что

$$\ln\varphi_N(t) = \frac{t^2}{2} + o(1). \tag{23}$$

Согласно формуле обращения, представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ в виде следующего интеграла

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$

где $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$. Учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt-t^2/2}dt, \tag{24}$$

разность

$$R = 2\pi[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}]$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов: $R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izt}[\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}]dt,$$
$$I_2 = \int_{A<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt, \tag{25}$$
$$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}\leqslant|t|\leqslant\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$
$$I_4 = -\int_{A<|t|} e^{-izt-t^2/2}dt,$$

выбор положительных постоянных A и ε будет ясен из дальнейшего.

Для доказательства леммы 2 достаточно показать, что разность R стремится к нулю.

Из (23) следует, что $I_1 \to 0$. Кроме того,

$$|I_4| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-t^2/2}dt, \tag{26}$$

и выбором достаточно большого A интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым.

Оценим интеграл I_2. Из соотношений (21) и (22), учитывая, что $\sigma^2 \geqslant C_{19}$, получаем, что

$$|\varphi_N(t)| \leqslant e^{-C_{20}t^2},$$

следовательно, для I_2 справедлива следующая оценка:

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-C_{20}t^2}dt,$$

и выбором достаточно большого A интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым.

Рассмотрим I_3. Для $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ справедливо неравенство

$$|\varphi(t)| \leqslant e^{-C_{21}},$$

тогда несложно видеть, что при $N \to \infty$ интеграл $I_3 \to 0$, это и завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда равномерно относительно целых k таких, что $(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}.$$

Доказательство. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\}$ в виде следующего интеграла

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(r)} = k\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}} \int\limits_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_r(t)dt,$$

где $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$, а $\varphi_r(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Используя равенство (24), разность

$$R = 2\pi[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} - (2\pi)^{-1/2}e^{-t^2/2}]$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов: $R = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4$, где I_4 определен в (25), а интегралы $I_1^{(r)}$–$I_3^{(r)}$ строятся аналогично I_1–I_3, заданных при доказательстве леммы 2 с заменой $\varphi_N(t)$ на $\varphi_r(t)$.

Рассмотрим $I_1^{(r)}$. Легко видеть, что

$$\varphi_r(t) = \exp\left\{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}\right\}(1-P_r)^{-N}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \times$$

$$\times \left(1 - (1+o(1))\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda)\exp\left\{\frac{itk}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\right)^N. \tag{27}$$

Несложно заметить, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda)\exp\left\{\frac{tk}{\sigma\sqrt{N}}\right\} = P_r + R(t), \tag{28}$$

где

$$R(t) \leqslant \left|\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right| \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k(\lambda)k.$$

Учитывая, что при выполнении условий теоремы 1 r пропорционально $\ln N$, из (1)–(3), первого и третьего свойств медленно меняющейся функции можно получить, что

$$\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{k>r} p_k(\lambda)k \leqslant \frac{t(r+1)^2 p_{r+1}}{\sigma\sqrt{N}(1-\lambda)} = o\left(\frac{1}{N}\right). \tag{29}$$

Тогда из (23), (27) и (28) следует, что $\varphi_r(t) \to e^{-t^2/2}$, значит $I_1^{(r)} \to 0$.

Из соотношений (19), (21), (22) и (27) находим, что

$$|\varphi_r(t)| \leqslant (1-P_r)^{-N}\left(\exp\left\{-\frac{C_{22}t^2}{N}\right\} + \frac{C_{23}}{N}\right)^N.$$

Тогда при выполнении условий леммы справедливо

$$|I_2^{(r)}| \leqslant C_{24}\int\limits_A^{\infty} e^{-C_{25}t^2}dt.$$

Следовательно, интеграл $I_2^{(r)}$ может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Используя (27) и (29), легко оценить интеграл $I_3^{(r)}$ аналогично оценке I_3 в доказательстве леммы 2, а для I_4 справедлива оценка (26), что и завершает доказательство леммы 3.

Из (3) и (6) несложно найти, что

$$m_r = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)} = (m - rp_r(\lambda))/(1 - p_r(\lambda)),$$

$$\sigma_r^2 = \mathbf{D}\tilde{\xi}_1^{(r)} = \frac{\sigma^2}{(1 - p_r(\lambda))^2} \times$$

$$\times \left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r(\lambda)\right). \qquad (30)$$

Аналогично леммам 2 и 3 нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть $n, N \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \Sigma(1, \tau - 1)/\Sigma(1, \tau)$. Тогда для $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ равномерно относительно целых k таких, что $z = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\right\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}} e^{-z^2/2}(1 + o(1)).$$

Теперь мы можем доказать теоремы 1–3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда из леммы 1 легко получить, что при целых фиксированных k

$$(1 - P_{r+k})^N =$$

$$= \exp\{-\gamma\lambda^k(1 - \lambda)^{-1}\}(1 + o(1)). \qquad (31)$$

Из лемм 2 и 3 находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1.$$

Отсюда и из (7), (31) следует утверждение теоремы 1.

Получить теорему 2 нетрудно, воспользовавшись нормальным приближением биномиального рапределения при $Np_r(\lambda)(1-p_r(\lambda)) \to \infty$, справедливом для всех k таких, что

$$(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}$$

лежит в любом конечном интервале:

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} =$$

$$= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(k - Np_r(\lambda))^2}{2Np_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda))}\right\}.$$

Тогда из лемм 2 и 4, равенств (8) и (30) следует утверждение теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 заметим, что в силу (3) и (11) верно соотношение $p_r(\lambda) \to 0$ и, согласно пуассоновскому приближению биномиального распределения, справедливому равномерно относительно целых k, для которых $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ лежит в любом конечном интервале,

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} =$$

$$= \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(\lambda)}(1 + o(1)). \qquad (32)$$

Используя леммы 2, 4 и соотношение (30), получаем, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1,$$

поэтому теорема 3 следует из (8) и (32).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00009.

Литература

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 209 с.

3. *Павлов Ю. Л.* Предельное распределение объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22–34. doi:10.4213/dm963

4. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, вып. 3. С. 14–23. doi:10.4213/dm1057

5. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi:10.4213/dm1104

6. *Павлов Ю. Л., Дертишникова Е. Н.* О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе Интернет-типа // Труды КарНЦ РАН. 2010. № 3, вып. 1. С. 59–65.

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi:10.4213/dm1008

8. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. 2011. 386 p.

10. *Hofstad R., Hooghiemstra G., Znamenski D.* Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees. http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0502581, 2006. doi: 10.1214/EJP.v12-420

11. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. Y.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Physical Review E. 2001. 64. 026118. doi:10.1103/PhysRevE.64.026118

12. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23. doi:10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 02.04.2015

References

1. *Ibragimov I. A., Linnik Ju. V.* Nezavisimye i stacionarno svjazannye velichiny [Independent and stationary sequences of random variables]. Moscow: Nauka, 1965. 524 p.

2. *Kolchin V. F.* Sluchajnye otobrazhenija [Random Mappings]. Moscow: Nauka, 1984. 209 p.

3. *Pavlov Ju. L.* Predel'noe raspredelenie objema gigantskoj komponenty v sluchajnom grafe Internet-tipa [The limit distribution of the size of a giant component in an Internet-type random graph]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2007. Vol. 19, iss.3. P. 22–34. doi:10.4213/dm963

4. *Pavlov Ju. L.* O predel'nyh raspredelenijah stepenej vershin v uslovnyh Internet-grafah [On the limit distributions of the vertex degrees of conditional Internet graphs]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2009. Vol. 21, iss. 3. P. 14–23. doi:10.4213/dm1057

5. *Pavlov Ju. L.* Ob uslovnyh Internet-grafah, stepeni vershin kotoryh ne imejut matematicheskogo ozhidanija [On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2010. Vol. 22, iss. 3. P. 20–33. doi:10.4213/dm1104

6. *Pavlov Ju. L., Dertishnikova E. N.* O predel'nom raspredelenii maksimal'noj stepeni vershiny v sluchajnom grafe Internet-tipa [On limit distribution of maximum vertex degree in a random graph of Internet type]. Trudy KarNC RAN [Proceedings of KarRC RAS]. 2010. N 3, iss. 1. P. 59–65.

7. *Pavlov Ju. L., Chepljukova I. A.* Sluchajnye grafy Internet-tipa i obobshhennaja shema razmeshhenija [Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme]. Diskretnaja matematika [Discrete Mathematics and Applications]. 2008. Vol. 20, iss. 3. P. 3–18. doi:10.4213/dm1008

8. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology. Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.

9. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. 2011. 386 p.

10. *Hofstad R., Hooghiemstra G., Znamenski D.* Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees. http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0502581, 2006. doi:10.1214/EJP.v12-420

11. *Newman M. E. Y., Strogatz S. H., Watts D. Y.* Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications. Physical Review E. 2001. 64. 026118. doi:10.1103/PhysRevE.64.026118

12. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. Performance Evaluation. 2004. Vol. 55. P. 3–23. doi:10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received April 02, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 763370

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 131–136
DOI: 10.17076/mat247

УДК 519.115:519.2

АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПОДСТАНОВОК С S-ЗАПРЕТОМ

Н. Ю. Энатская

Национальный исследовательский университет. Высшая школа экономики

Рассматриваются перестановки нижних строк случайных подстановок размера n с запрещенной подпоследовательностью размера $s < n$. Находится число таких перестановок, производится их перечисление, решается задача нумерации исходов схемы и обсуждается их моделирование.

Ключевые слова: схема перестановок, s-запрет, случайная подстановка, моделирование.

N. Yu. Enatskaya. THE ANALYSIS OF RANDOM PERMUTATIONS WITH S-PROHIBITION

Transpositions of lower lines of random permutanions of size n with forbiden subsequences of size $s < n$ are considered. The number of such transpositions are finded, their enumerations are realized, the numeration problem of outcomes of the scheme is decided and their modelling is considered.

Key words: permutation scheme, s-prohibition, random permutation, modelling.

Введение

Вводится понятие подстановок размера n с s-запретами, когда в их нижних строках запрещена фиксированная подпоследовательность $\bar{P}_s$ длины $s < n$. Такие перестановки тоже будем называть с s-запретами.

Не нарушая общности, будем считать, что запрещенный участок (подпоследовательность) состоит из s подряд идущих старших номеров элементов перестановки: $(n-s+1, n-s+2, \ldots, n)$, иначе этого можно достигнуть при соответствующей перенумерации элементов перестановки и полученных в этом предположении результатах по определенным в аннотации направлениям, если произвести обратную перенумерацию элементов.

Число исходов схемы

$$M = n! - (n-s+1)! \qquad (1)$$

где $(n-s+1)!$ – число перестановок $\bar{P}_s$ со всеми остальными $(n-s)$ элементами.

Все исследования схемы существенно опираются на логику перебора всех исходов схемы перестановок размера n из [1] методом графов (см. [2]), которую для удобства приведем здесь.

Строим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до n номерами, ставя каждый из них последовательно и случайно относительно каждой имеющейся перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого и нумеруя слева направо получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние задан-

ного случайного процесса от шага к шагу, т. е. при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ i-ое состояние процесса (т. е. i-ую перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_j$) на j-ом шаге. Тогда граф переходов будет иметь вид:

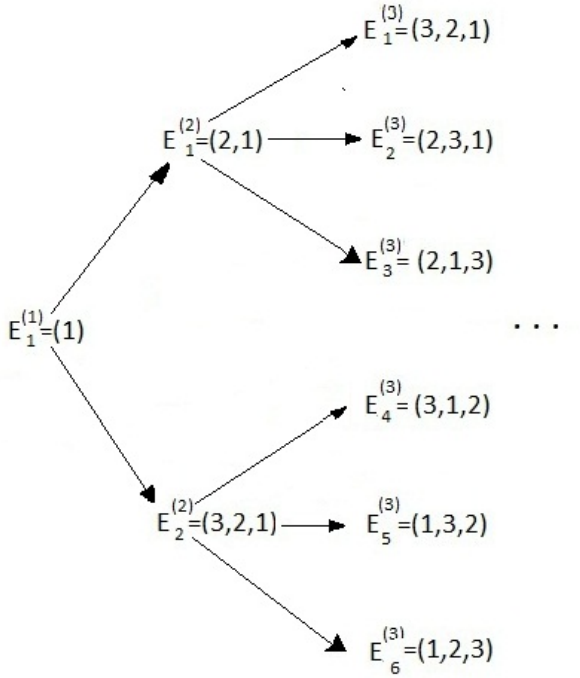


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы перестановок

1. Перечисление исходов схемы и их число

Первый способ (для больших значений s). Перечислим по [1] все исходы схем перестановок $n!$ ее элементов и элементов с номерами $1, 2, \ldots, n-s+1$, где первые $n-s$ элементов у них совпадает, а последний элемент второй перестановки представляет собой $\bar{P}_s$. Далее исключим из первого перебора второй.

Второй способ (для небольших значений s). Произведем прямое перечисление исходов нашей схемы – схемы перестановок с s-запретами. Для этого исключим последний n-ый элемент (заключительный в запретной подпоследовательности). Тогда $(n-1)!$ исходов перестановок из остальных элементов не будут содержать $\bar{P}_s$ и будут допустимы как предсостояния требуемых перестановок. В [1] решены задачи их перечисления и нумерации. Теперь будем добавлять по процедуре перечисления [1] методом графов номер последнего элемента так, чтобы не получать в перестановках запретную подпоследовательность $\bar{P}_s$. Для перечисления допустимых добавлений последнего элемента нужно разделить предсостояния на два типа: 1-ого типа, содержащие подпоследовательность номеров элементов $\bar{P}_{s-1} = (n-s+1, n_s+2, \ldots, n-1)$ в перечисленном здесь порядке – их число $N_{n-1} = (n-s+1)!$, и – второго типа, не содержащие $\bar{P}_{s-1}$ – их число $\bar{N}_{n-1} = (n-1)! - (n-s+1)!$ Для предсостояний этих двух типов числа допустимых расстановок последнего элемента разные и, очевидно, равны соответственно n и $n-1$. Отсюда общее число требуемых перестановок получается как сумма

$$M = M_1 + M_2, \tag{2}$$

где M_i, $i = 1, 2$ – число требуемых перестановок с i-ым предсостоянием, т. е. $M_1 = N_{n-1}(n-1)$; $M_2 = \bar{N}_{n-1}n$, откуда $M = (n-s+1)!(n-1) + (n! - (n-s+1)!(n-1) = (n-s+1)!$, что совпадает с (1).

Приведем числовой пример прямого перечисления требуемых перестановок.

Пример 1. Пусть $n = 5$, $s = 3$, $\bar{P} = (345)$. Перечислим все требуемые перестановки вторым способом.

По (1) их число должно быть $M = 5! - 3! = 114$. К моменту добавления последнего элемента с номером 5 имеем $4! = 24$ перестановки номеров 1, 2, 3, 4. По (1) имеем следущие перестановки: (4321), (3421), (3241), (3214), (4231), (2431), (2341), (2314), (4213), (2413), (2143), (2134), (4312), (3412), (3142), (3124), (4132), (1432), (1342), (1324), (4123), (1423), (1243), (1234). Из них к предсостояниям первого типа относятся следующие перестановки: (3421),(2431),(2134),(3412),(1342),(1234) – их $s! = 6$. Остальные перестановки представляют предсостояния второго типа – их число по (1) есть $4! - 2! = 18$. Теперь добавляем элемент с номером 5 к предсостояниям первого типа на все 4 места, кроме последнего, а к предсостояниям второго типа – на все возможные 5 мест. По (2) получаем общее число требуемых перестановок $M = 6 \cdot 4 + 18 \cdot 5 = 114$, что совпадает с результатом по (1).

В силу большого размера графа перечисления всех исходов нашей схемы (114 исходов) приведем фрагмент графа их перечисления из первых 4-х предсостояний, среди которых второе (3412) – первого типа:

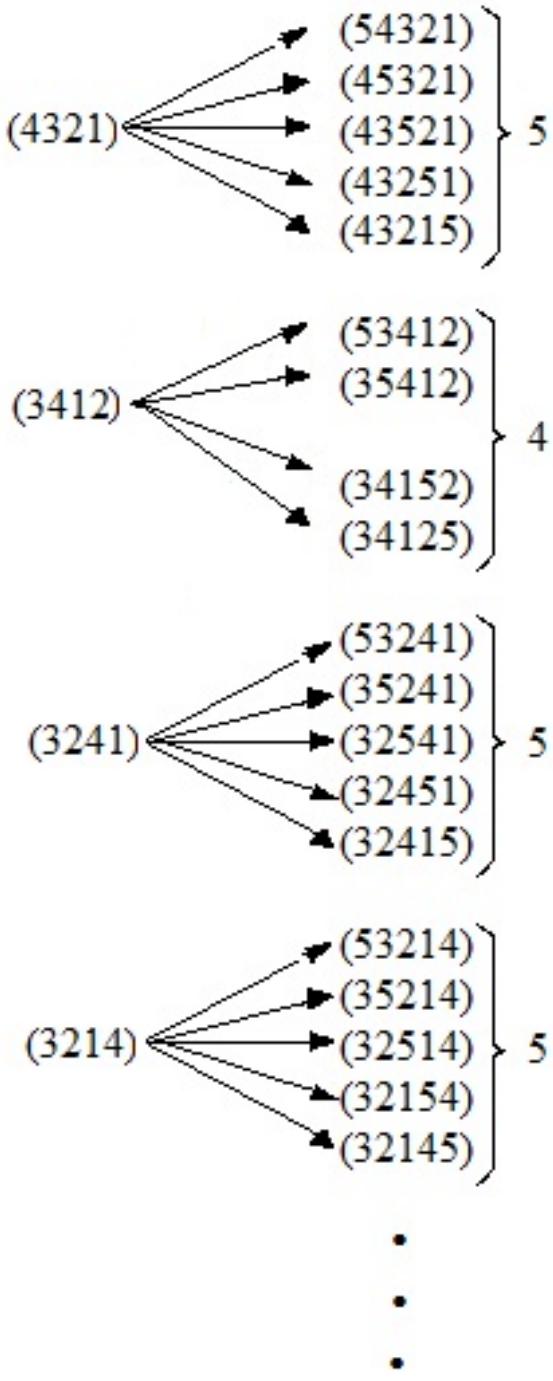


Рис. 2. Фрагмент графа перечисления исходов схемы перестановок на 5-ом шаге

2. Задача нумерации

Будем называть порождающим состоянием (ПС) при перечислении исходов схемы перестановок по мере их поединичного роста такой исход, который может привести или уже привел на n-ом шаге к запретному n-ому состоянию, т. е. исход ПС содержит все элементы с номерами $> n - s$ в том же порядке, что и в $\bar{P}_n$. (Выше эти состояния на $(n-1)$-ом шаге перечисления мы называли предсостояниями 1-ого типа.) Очевидно, что до $(n-s+1)$-ого шага включительно все исходы перечисления схемы перестановок являются ПС. Их число – на $(n-s+1)$-ом шаге равно $(n-s+1)!$ Оказывается, что это число ПС наибольшее и остается тем же по мере роста числа шагов, т. е. равно M_n, что совпадает с ранее полученным из других соображений по (1). Это следует из того, что из каждого ПС через любое число шагов, (значит и на n-ом шаге) по дисциплине перечисления исходов схемы перестановки (см. Введение) получается только одно ПС, т. к. запрещенные исходы отличаются друг от друга только взаимным расположением элементов с номерами $< (n-s+1)$, а их места определяются до $(n-s+1)$-ого шага, и местом $\bar{P}_n$, которое определяется данным ПС на $(n-s+1)$-ом шаге.

Будем находить номера исходов ПС на n-ом шаге рекуррентно пошагово за s шагов из их номеров на предшествующих шагах, начиная со всех, идущих подряд исходов схемы перестановок на $(n-s+1)$-ом шаге до n-ого, для чего выразим номера исходов ПС через номера содержащих их пучков и их номера в пучке с учетом логики их пошагового перечисления сверху вниз в схеме перестановок и структуры графа на рис. 1, обозначив на i-ом шаге $d_i = i$ – размеры пучков, N_i^* – номер ПС на i-ом шаге, а l_i – номер ПС в пучке, $i = \overline{1,n}$. Рекуррента для пошаговых номеров ПС:

$$N_{i+1}^* = (N_i^* - 1)i + l_i. \qquad (3)$$

Будем находить номера l_i, $i = \overline{n-s+1,n}$ ПС в своих пучках:

1) на $i = (n-s+1)$-ом шаге ПС идут подряд с номерами от 1 до $(n-s+1)!$;

2) на $(n-s+2)$-ом шаге первое ПС определяется первым ПС на $(n-s+1)$-ом шаге, т. е. стоит в первом пучке на втором месте (из логики перечисления исходов схемы перестановок), т. к. номер $(n-s+2)$ должен в ПС стоять после номера $(n-s+1)$, который в ПС занимает второе место, а добавление номера $(n-s+2)$ начинается с первого места;

второе ПС на $(n-s+2)$-ом шаге определяется вторым ПС на $(n-s+1)$-ом шаге и произойдет во втором пучке на 3-ем месте по причине, аналогичной приведенной для первого пучка, т. е. через число номеров $1+d_{n-s+1} = n-s+3$; тенденция, описанная выше на $(n-s+2)$-ом шаге, сохраняется до тех пор, пока ПС не оказывается последним в пучке, т. е. $(n-s+2)-1$ раз, т. к. началось со второго места в первом пучке, после чего места ПС для следующих

пучков повторяют описанные выше до последнего пучка;

3) на $(n-s+3)$-ем шаге все повторяется с заменой номера шага и размера пучков на единицу большими и т. д. до n-ого шага, где, очевидно, последний исход схемы перестановок вида $(1,2,\ldots,n)$ является ПС.

При $d_i = i$ по (3) для каждого ПС из $(n-s+1)!$ значений последовательно определяем их номера по шагам перечисления от $(n-s+1)$-ого до n-ого, т. е. окончательно имеем номера ПС на последнем n-ом шаге $\bar{N}^* = (N_n^{(1)},\ldots,N_n^{((n-s+1)!)})$.

Теперь, исключив из $n!$ номеров всех исходов схемы перестановок размера n номера исходов ПС на n-ом шаге, получим все возможные номера исходов нашей схемы с s-запретами, а т. к. задача нумерации для схемы перестановок решена в [1], то между этими номерами и их видом установлено требуемое взаимно-однозначное соответствие, в чем и состоит задача нумерации для нашей схемы.

Таким образом, получено рекуррентно-алгоритмическое решение задачи нумерации исходов схемы с s запретами.

Кратко повторим шаги АЛГОРИТМА пошагового вычисления номеров ПС:

а) на $(n-s+1)$-ом шаге выписываем все подряд идущие номера исходов ПС;

б) последовательно с $(n-s+2)$-ого до n-ого шага, предварительно определив номера ПС в пучках, по (3) находим их номера.

Приведем числовой пример нахождения номеров ПС на последнем шаге перечисления всех исходов схемы перестановок размера n.

Пример 2. Пусть $n=5$, $s=3$, откуда считаем $\bar{P}_s = 345$. Найти номера ПС на 5-ом (последнем) шаге перечисления исходов схемы перестановок, размера 5.

Вычисления по АЛГОРИТМУ:

$n-s+1=3$, $3!=6$, из них исходы ПС имеют номера: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

$n-s+2=4$, $4!=24$, из них исходы ПС имеют по (3) номера: $(1-1)4+2=2$; $(2-1)4+3=7$; $(3-1)4+4=12$; $(4-1)4+2=14$; $(5-1)4+3=19$; $(6-1)4+4=24$;

$n-s+3=5$, $5!=120$, из них исходы ПС имеют по (3) номера: $(2-1)5+3=8$; $(7-1)5+4=34$; $(12-1)5+5=60$; $(14-1)5+3=68$; $(19-1)5+4=94$; $(24-1)5+5=120$.

Для наглядности и контроля результата вычисления ниже приведем полные перечни пронумерованных исходов схем перестановок по шагам их перечисления, начиная с шага $n-s+1=3$, где $*$ отмечены исходы ПС:

$n=3$: (321), (231), (213), (312), (132), (123) – все $(n-s=1)!=6$ исходов есть ПС;

$n=4$, всего $4!=24$ исхода, среди которых $*$ отметим исходы ПС в табл. 1:

Таблица 1

Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС
1	4321		13	4312	
2	3421	$*$	14	3412	$*$
3	3241		15	3142	
4	3214		16	3124	
5	4231		17	4132	
6	2431		18	1432	
7	2341	$*$	19	1342	$*$
8	2314		20	1324	
9	4213		21	4123	
10	2413		22	1423	
11	2143		23	1243	
12	2134	$*$	24	1234	$*$

$n=5$, всего $5!=120$ исходов, среди которых $*$ отметим исходы ПС в табл. 2:

Таблица 2

Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС
1	54321		41	54213		81	54132	
2	45321		42	45213		82	45132	
3	43521		43	42513		83	41532	
4	43251		44	42153		84	41352	
5	43215		45	42135		85	41325	
6	53421		46	52413		86	51432	
7	35421		47	25413		87	15432	
8	34521	$*$	48	24513		88	14532	
9	34251		49	24153		89	14352	
10	34215		50	24135		90	14325	
11	53241		51	52143		91	51342	
12	35241		52	25143		92	15342	
13	32541		53	21543		93	13542	

Продолжение таблицы 2

Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС
14	32451		54	21453		94	13452	*
15	32415		55	21435		95	13425	
18	32514		58	21534		98	13524	
19	32154		59	21354		99	13254	
16	53214		56	52134		96	51324	
17	35214		57	25134		97	15324	
20	32145		60	21345	*	100	13245	
21	54231		61	5412		101	54123	
22	45231		62	45312		102	45123	
23	42531		63	43512		103	41523	
24	42351		64	43152		104	412353	
25	42315		65	43125		105	41235	
26	52431		66	53412		106	51423	
27	25431		67	35412		107	15423	
28	24531		68	34512	*	108	14523	
29	24351		69	34152		109	14253	
30	24315		70	34125		110	14235	
31	52341		71	53142		111	51243	
32	25341		72	35142		112	15243	
33	23541		73	31542		113	12543	
34	23451	*	74	31452		114	12453	
35	23415		75	31425		115	12435	
36	52314		76	53124		116	51234	
37	25314		77	35124		117	15234	
38	23514		78	31524		118	12534	
39	23154		79	31254		119	12354	
40	23145		80	31245		120	12345	*

Номера ПС по АЛГОРИТМУ и таблицам совпали.

3. Моделирование исходов схемы с s-запретами

Первый способ состоит в использовании табличного соответствия во втором способе прямого перечисления исходов нашей схемы. Тогда, разыгрывая номер исхода схемы по одному случайному числу, получаем по таблице вид исхода.

Второй способ использует АЛГОРИТМ п. 2 вычисления номеров ПС среди исходов схемы перестановок. В п. 2 получен набор последовательных $n!-(n-s+1)!$ номеров исходов нашей схемы из номеров всех исходов схемы перестановок. В этом случае в памяти не требуется хранить таблицу соответствия номеров исходов с их видами.

Разыгрывая одним случайным числом номер исхода нашей схемы, номера исходов которой представляют собой часть номеров всех исходов схемы перестановок, для которой в [1] решена задача нумерации, по номеру находим вид исхода.

Литература

1. *Колчин А. В., Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2014. № 4. С. 80–86.

2. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики. Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. М., 2014. № 8. С. 15–21.

Поступила в редакцию 07.07.2015

References

1. *Kolchin A. V., Enatskaya N. Yu.* Combinatorial analysis of a permutation scheme. Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Matematical modeling and information technologies series. 2014. N 4. P. 80–86.

2. *Enatskaya N. Y., Khakimullin E. R.* Graphs method for solving enumerative Combinatorics. Devices and systems. Direction. Control, diagnostics. Moscow, 2014. N 8. P. 15–21.

Received July 07, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики,
к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет,
Высшая школа экономики, МИЭМ
Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: (8903) 741 13 45

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
National Research University,
Higher School of Economics
(Moscow Institute of Electronics and Mathematics)
Tallinskaya, 34, Moscow, Russia, 123458
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: (8903) 741 13 45

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 137–144
DOI: 10.17076/mat246

УДК 519.115:519.2

О ЧИСЛЕ ИНВЕРСИЙ В ИСХОДАХ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК И ИХ АНАЛИЗ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ИНВЕРСИЙ

Н. Ю. Энатская

Национальный исследовательский университет. Высшая школа экономики

Численный подсчет инверсий в перестановках основан на использовании методов теории графов. В результате выписаны рекурренты пересчета чисел инверсий по пучкам графа и нахождения вероятностного распределения числа инверсий по мере поединичного роста размера перестановки.
Определенная в названии схема исследуется отбраковкой некоторых исходов аналогичной схемы без ограничений. Получено число исходов схемы, проведено прямое их перечисление, найдено их вероятностное распределение, решена задача нумерации и предложены алгоритмы моделирования исходов схемы.

Ключевые слова: перечисление исходов, схема перестановок, рекуррента, число инверсий, моделирование.

N. Yu. Enatskaya. ON THE NUMBER OF INVERSION OUTCOMES OF THE PERMUTATION SCHEME AND ITS ANALYSIS WITH FIXED NUMBER OF INVERSIONS

The numerical method of calculation of inversions in permutations uses the method of graph theory. As the result we colculate the recurrence for colculation of the numbers of inversions with the use of the bunchs of graphs and finding the probability distribution of the number of inversions with the increes of the size of the permutanion.
The scheme definded in its name is investigated by asiding some outcomes of the similar scheme without restriction. The number of outcomes of the scheme is obtained, the direct enumeration is fulfiled, thier probability distribution is finded the problem of their numeration is solved and the scheme suggested.

Key words: enumeration of outcomes, permutation scheme, recurrence, number of inversions, modelling.

Введение

Перестановку размера n будем записывать в круглых скобках набором номеров входящих в нее элементов через запятую в данном порядке.

Под инверсией в перестановке будем понимать нарушение порядка монотонности возрастания (по умолчанию или убыванию) номеров ее элементов.

Числом инверсий (неинверсий – ни) для данного элемента перестановки будем называть число номеров, меньших данного, стоящих правее (левее) него. Числом инверсий (ни) $I = I_n = I_v = I_{v_n}$, $(I_u = I_{u_n})$ для переста-

новки будем считать суммарное число инверсий (ни) всех ее элементов.

Очевидно, что для перестановки размера n

$$I_v + I_u = I^* = I_n^*, \qquad (1)$$

где I_n^* – максимальное число инверсий, которое содержит перестановка $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$, и равно

$$I_n^* = (n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = n(n-1)/2, \quad (2)$$

а минимальное число инверсий содержит перестановка $(1, 2, \ldots, n-1, n)$, и есть

$$I_{n*} = 0. \qquad (3)$$

В связи с выбранным подходом к организации перечня исходов нашей схемы указанной отбраковкой исходов общей схемы перестановок напомним из [1] процедуру их перечисления и нумерации методом графов (см. [2]).

Строим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до n номерами, ставя каждый из них последовательно и случайно относительно каждой имеющейся перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого и нумеруя слева направо получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, т. е. при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ i-ое состояние процесса (т. е. i-ую перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_j$) на j-ом шаге. Тогда граф переходов будет иметь вид:

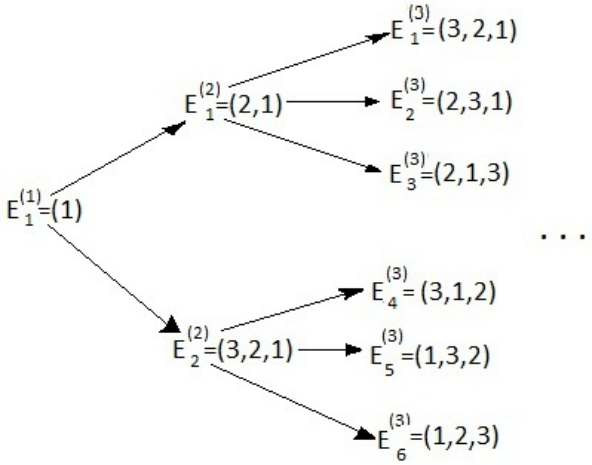


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы перестановок

1. Численный подсчет чисел инверсий всех исходов схемы перестановок

С учетом логики и порядка нумерации всех исходов схемы перестановок, приведенных во введении, оказывается, что соответствующие им числа инверсий на k-ом шаге процесса их перебора $(k = 1, \ldots, n)$ находятся в промежутке, определяемом по (2), (3) от $I_k^* = k(k-1)/2$ до $I_* = 0$, причем с ростом номеров исходов в каждом из $(k-1)!$ пучков исходов, размером k, исходящих из одного предшествующего исхода, они убывают на единицу. Для наглядности рассмотрим числовой пример.

Пример 1. Пусть $k = n = 5$. Приведем в виде табл. 1 все занумерованные N в методе графов исходы R схемы перестановок размера 5 с их числами инверсий I (табл. 1).

Таблица 1

N	R	I	N	R	I	N	R	I
1	54321	10	41	54213	8	81	54132	8
2	45321	9	42	45213	7	82	45132	7
3	43521	8	43	42513	6	83	41532	6
4	43251	7	44	42153	5	84	41352	5
5	43215	6	45	42135	4	85	41325	4
6	53421	9	46	52413	7	86	51432	7
7	35421	8	47	25413	6	87	15432	6
8	34521	7	48	24513	5	88	14532	5
9	34251	6	49	24153	4	89	14352	4
10	34215	5	50	24135	3	90	14352	3
11	53241	8	51	52143	6	91	51342	6
12	35241	7	52	25143	5	92	15342	5

Продолжение таблицы 1

N	R	I	N	R	I	N	R	I
13	32541	6	53	21543	4	93	13542	4
14	32451	5	54	21453	3	94	13452	3
15	32415	4	55	21435	2	95	13425	2
16	53214	5	56	52134	5	96	51324	5
17	35214	6	57	25134	4	97	15324	4
18	32514	5	58	21534	3	98	13524	3
19	32154	4	59	21354	2	99	13254	2
20	32145	3	60	21345	1	100	13245	1
21	54231	9	61	54312	9	101	54123	7
22	45231	8	62	45312	8	102	45123	6
23	42531	7	63	43512	8	103	41523	5
24	42351	6	64	43152	6	104	41253	4
25	42315	5	65	43125	5	105	41235	3
26	52431	8	66	53412	8	106	51423	6
27	25431	7	67	35412	7	107	15423	5
28	24531	6	68	34512	6	108	14523	4
29	24351	5	69	34152	5	109	14253	3
30	24315	4	70	34125	4	110	14352	2
31	52341	7	71	53142	7	111	51243	5
32	25341	6	72	35142	6	112	15243	4
33	23541	5	73	31542	5	113	12543	3
34	23451	4	74	31452	4	114	12453	2
35	23415	3	75	31425	3	115	12435	1
36	52314	6	76	53124	6	116	51234	4
37	25314	5	77	35124	5	117	15234	3
38	23514	4	78	31524	4	118	12534	2
39	23154	3	79	31254	3	119	12354	1
40	23145	2	80	31245	2	120	12345	0

Опять же из логики нумерации исходов схемы перестановок с иллюстрацией на последнем примере, очевидно, следует ПРАВИЛО:

при переходе от k-ого шага перебора исходов перестановки для нахождения чисел инверсий в исходах $(k+1)$-ого шага нужно ко всем числам инверсий k исходов каждого пучка k-ого шага прибавить соответственно числа $\bar{b}_k = k, k-1, \ldots, 1, 0$.

Таким образом, для подсчета чисел инверсий всех исходов схемы перестановок размера k в графе перечисления его исходов по шагам можно, не приводя видов исходов, вычислять по тому же графу числа инверсий всех исходов схемы перестановок на всех шагах, руководствуясь приведенным выше ПРАВИЛОМ, указывая в графе в качестве исходов процесса числа инверсий в них. Приведем пример такого вычисления чисел инверсий, указывая на ребрах графа значения компонент вектора $\bar{b}_k$, суммируемые с числом инверсий исходов предыдущего k-ого шага для получения чисел инверсий исхода $(k+1)$-ого шага в порядке перечисления исходов.

Пример 2. В условиях примера 1 для вычисления чисел инверсий всех исходов схемы перестановок получаем следующий граф (см. рис. 2).

В результате мы получаем картину соответствия всех нумерованных исходов схемы перестановок с числами их инверсий.

Приведенный алгоритм вычисления чисел инверсий всех исходов всех перестановок размерами $k \leqslant n$ можно, предварительно обозначив через $\bar{I}^{(k+1)} = (I^{(k+1)}, I^{(k)}, \ldots, I^{(1)})$ – числа инверсий исходов перестановки из данного состояния на k-ом шаге с числом инверсий $I^{(k)}$ по пучкам графа, размерами $k+1$, представить рекуррентным соотношением

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} + j, \qquad (4)$$

где j принимает последовательно значения компонент вектора $\bar{b}_k = k, k-1, \ldots, 0$.

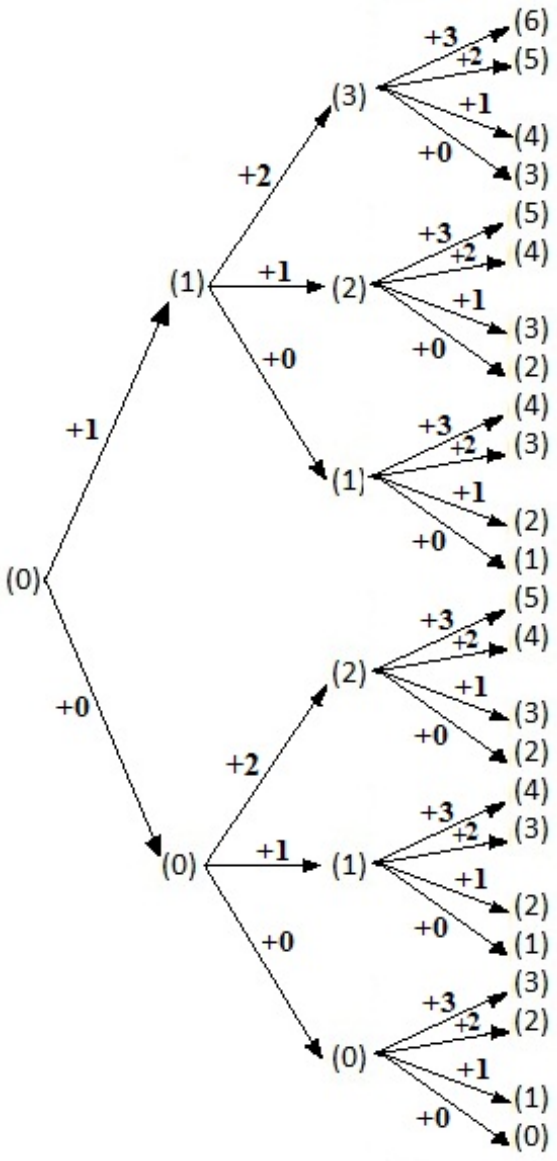


Рис. 2. Граф вычисления инверсий схемы перестановок

2. Вычисление вероятностного распределения чисел инверсий в исходах схемы перестановок

Нахождение вероятностного распределения числа инверсий в исходах схемы перестановок размера n можно производить по результату п. 1 путем маркировки всех ее исходов по числу инверсий в них с делением их на общее число исходов схемы перестановок размера n на $n!$ В связи с тем, что в данной задаче не используется соответствие чисел инверсий с конкретными исходами схемы перестановок, а числа инверсий для разных перестановок могут совпадать, как это видно из примера 2, то можно предложить более компактную форму алгоритма расчета количеств инверсий исходов схемы перестановок. Смысл рационализации состоит в том, что на k-ом шаге графа рис. 2 ($k = 1, \ldots, n$) мы будем указывать частоты убывающих на 1 чисел инверсий от своего максимального значения на этом шаге I_k^* до $I_k^* = 0$ и пересчитывать их по ПРАВИЛУ в аналогичную информацию на $(k+1)$-ом шаге: снова в порядке убывания все числа инверсий исходов от своего максимального I_{k+1}^* до 0, получаемых сложением с компонентами вектора $\bar{b}_k$, будем ставить в соответствие с их частотами, вычисляемыми путем сложения частот предшествующих чисел инверсий. Имея полную подобную исходную информацию для первого шага, т. е. $I_1^* = I_1^* = 0$, $\bar{b}_1 = (1, 0)$, мы получаем рекуррентный метод расчета частот чисел инверсий для всех исходов всех перестановок до данного размера n. Для пояснения вычислений приведем их на числовом примере, введя обозначения для величин, участвующих в расчете соответствия чисел инверсий со своими частотами на k-ом шаге ($k = 1, 2, \ldots, n$) перечисления исходов схемы перестановок размера n: числа инверсий – $I_k = (I_{k_1}, \ldots, I_{k_s})$, где $s = I_k^* + 1$, $I_{k_s} = 0$; частоты инверсий – $\omega_k = (\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_s})$, где $s = I_k^* + 1$; вектор роста чисел инверсий при пересчете с $(k-1)$-ого шага – $\bar{b}_k = (k-1, k-2, \ldots, 1, 0) = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_k})$.

Пример 3. Пусть $n = 5$. Представим расчеты в виде табл. 2 (в порядке ее столбцов) значений на k-ом шаге частот чисел инверсий ω_k, поединично убывающих чисел инверсий I_k и (в круглых скобках) компонент вектора $\bar{b}_k$. Т. к. длины столбцов по шагам разные, будем при отсутствии информации оставлять их пустыми. Для проверки будем сверять суммы по столбцам ω_k на каждом k-ом шаге ($k = 1, 2, 3, 4$) с первого по 4-ый с числом всех его исходов (на k-ом шаге оно равно $k!$), представленные последней строкой табл. 2 в столбцах ω_k.

В табл. 2 введенные обозначения для компонент ω_k, I_k соответствуют их перечислению сверху вниз.

Таблица 2

ω_1	I_1	$\bar{b}_2$	ω_2	I_2	$\bar{b}_3$	ω_3	I_3	$\bar{b}_4$	ω_4	I_4	$\bar{b}_4$
1	0	(1, 0)	1	1	(2, 1, 0)	1	3	(3, 2, 1, 0)	1	6	(4, 3, 2, 1, 0)
			1	0		2	2		3	5	
						2	1		5	4	
						1	0		6	3	
									5	2	
									3	1	
									1	0	
1			2			6			24		

Рекуррентное заполнение табл. 2 значений чисел инверсий исходов схемы перестановок I_k с их частотами ω_k на k-ом шаге ($k = 1, 2, \ldots, n$) производится из следующих соображений:

1) каждое из значений чисел инверсий I_k на k-ом шаге получается путем перебора разных сумм чисел инверсий I_{k-1} на $(k-1)$-ом шаге с компонентами вектора $\bar{b}_k$ (в соответствии с рис. 2);

2) компоненты вектора $\bar{b}_k$ принимают значения от $(k-1)$ до 0 (в соответствии с рис. 2), откуда следует, что значения I_k в п. 1) принимают значения от I_k^* до 0 (по всем целым значениям);

3) значения частот каждого из чисел инверсий исходов схемы перестановок на k-ом шаге получаются путем сложений частот ω_k значений чисел инверсий I_{k-1} на $(k-1)$-ом шаге с компонентами вектора $\bar{b}_k$, приводящие к данному числу инверсий I_k.

Все полученные числа в нижней строке таблицы совпадают с числами исходов, соответствующих шагам перестановок.

Поясним на примере заполнение табл. 2. Например, при $k = 4$ значение $I_{4_2} = 5$ может быть получено сложением $I_{3_1} + b_{4_2} = 3 + 2 = 5$ с частотой $\omega_{3_1} = 1$ или – сложением $I_{3_2} + b_{4_1} = 2 + 3 = 5$ с частотой $\omega_{3_2} = 2$, откуда получаем, что число инверсий I_{4_2} имеет частоту $\omega_{4_2} = \omega_{3_1} + \omega_{3_2} = 3$.

Теперь рассуждением, аналогичным проведенному в примере 3, можно получить рекуррентное соотношение для вычисления частоты заданного числа инверсий t на k-ом шаге.

Числа инверсий на k-ом шаге известны $I_k = (I_{k_1}^* = k(k-1)/2, I_{k_2} = I_{k_1}^* - 1, \ldots, 1, 0)$, заданное число инверсий t имеет компонента I_{k_m}, где $m = I_{k_1}^* - t + 1$. Найдем значения i такие, что $I_{(k-1)_i} + j = t$ для $j \in \bar{b}_k$. Тогда искомая частота числа инверсий t на k-ом шаге есть

$$\omega_{k_m} = \sum_i \omega_{(k-1)_i} \qquad (5)$$

– это рекуррента для получения частоты заданного числа инверсий на k-ом шаге через частоты чисел инверсий с индексами $(k-1)_i$ на k-ом шаге.

Проверим теперь один из результатов табл. 2 по полученной формуле (5).

Пример 4. Пусть $k = 4$, $t = 5$ и на $k = 3$-ем шаге известны $\omega_3 = (\omega_{3_1} = 1, \omega_{3_2} = 2, \omega_{3_3} = 2, \omega_{3_4} = 1)$ и $I_3 = (I_{3_1} = 3, I_{3_2} = 2, I_{3_3} = 1, I_{3_4} = 1)$, а $\bar{b}_4 = (3, 2, 1, 0)$. Найдем значения i такие, что $I_{3_i} + j = t = 5$ для $j \in \bar{b}_4$. Это из значений i_3 может быть $i = 1$, т. к. для $j = 2$ $I_{3_1} + 2 = 3 + 2 = 5$, или – $i = 2$, т. к. для $j = 1$ $I_{3_2} + 3 = 2 + 3 = 5$. Отсюда при $I_4^* = 4 \cdot 3/2 = 6$ и $m = 6 - 5 + 1 = 2$ получаем $\omega_{4_2} = \omega_{3_1} + \omega_{3_2} = 1 + 2 = 3$, что совпадает с соответствующим результатом из табл. 2.

3. Решение задачи нумерации

Если для нахождения вероятностного распределения чисел инверсий исходов схемы перестановок были важны лишь частоты их разных значений, то для решения задачи нумерации исходов с фиксированным числом инверсий важна последовательность чисел инверсий в порядке перечисления всех исходов схемы перестановок, т. к. исходы этой схемы получаются путем отбраковки несоответствующих из всех общей схемы перестановок. Поэтому будем изучать структуру последовательности чисел инверсий исходов общей схемы перестановок в соответствии с их номерами, определенными при перечислении всех ее исходов методом графов на n-ом шаге, для чего потребуется аналогичная информация и на всех предшествующих шагах.

Порядок перечисления чисел инверсий состояний в соответствии с принятой выше нумерацией исходов схемы перестановок следует из графа на рис. 2 и опирается на следующие закономерности пучковой структуры графа и изменения чисел инверсий состояний внутри каждого пучка и между пучками:

1) число пучков состояний (по k, $(k \leqslant n)$ исходов в каждом) на k-ом шаге равно $(k-1)!$;

2) размеры пучков от шага к шагу процесса увеличиваются на единицу и на k-ом шаге имеют размер k;

3) числа инверсий исходов внутри каждого пучка уменьшаются поединично в порядке их нумерации;

4) при пересчете чисел инверсий на k-ом шаге из чисел инверсий на $(k-1)$-ом шаге они возрастают в порядке нумерации исходов перестановок (сверху вниз) на числа $(k-1, k-2, \ldots, 1, 0)$.

Перечислять числа инверсий всех исходов схемы перестановок будем последовательно через запятую по пучкам, заключая их в круглые скобки.

Таким образом, АЛГОРИТМ 1 перечисления на k-ом шаге чисел инверсий исходов схемы перестановок в порядке их нумерации состоит в выполнении последовательности действий:

1) выписываем максимальное число инверсий по формуле (2) $I_k^* = k(k-1)/2$;

2) результат 1) повторяем k раз, начиная с него и поединично уменьшая все последующие значения как числа инверсий первого пучка исходов;

3) результат 2) повторяем $(k-1)$ раз, начиная с него и уменьшая все последующие значения из 2) в каждой следующей круглой скобке на 1;

4) результат 3) повторяем $(k-2)$ раза, начиная с него и уменьшая все последующие значения из 3) в каждой следующей круглой скобке на 1;

5) и т. д. аналогично до тех пор, пока число требуемых повторов не станет равным 1, т. е. $(k-1)$ раз. Тогда результат предыдущего пункта будет итоговым.

Пример 5. Выпишем последовательность чисел инверсий для $k = 4$ по приведенному алгоритму и сверим результат с полученным по графу на рис. 2.

Получаем по 1) $I_4^* = 4 \cdot 3/2 = 6$; по 2) при $k = 4$ – (6, 5, 4, 3); по 3) при $k-1 = 3$ – (6, 5, 4, 3),(5, 4, 3, 2),(4, 3, 2, 1); по 4) при $k-2 = 2$ – $(6,5,4,3),(5,4,3,2),(4,3,2,1),(5,4,3,2),(4,3,2,1),(3,2,1,0)$ – (6) это окончательный результат (т. к. $k-3 = 1$), который совпадает с результатом по графу на рис. 2.

Замечание 1. Результат применения АЛГОРИТМА 1 перечисления чисел инверсий для всех исходов схемы перестановок, занумерованных подряд, дает основу получения как численного, так и теоретического решения задачи нумерации для любого заданного числа инверсий путем установления соответствующих ему исходов схемы. Тогда при новой перенумерации разных чисел инверсий получаем для любого заданного числом размера перестановки программно-табличный результат решения задачи нумерации для чисел инверсий ее исходов с расширением взаимнооднозначного соответствия номеров чисел инверсий с исходами схемы перестановок на их соответствие с некоторыми непересекающимися множествами исходов схемы. Покажем это на примере.

Пример 6. Представим результат примера 5 в форме численного результата решения задачи нумерации для чисел инверсий исходов схемы перестановок при $k = 4$ в виде табл. 3.

Таблица 3

№	I_k	исходы схемы перестановок
1	6	(4, 3, 2, 1)
2	5	(3, 4, 2, 1), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2)
3	4	(3, 2, 4, 1), (2, 4, 3, 1), (4, 2, 1, 3), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 3, 2)
4	3	(3, 2, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (1, 4, 3, 2), (4, 1, 2, 3)
5	2	(2, 3, 1, 4), (2, 1, 4, 3), (3, 1, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3)
6	1	(2, 1, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (1, 2, 4, 3)
7	0	(1, 2, 3, 4)

Прямая задача нумерации

Пусть даны номера исходов схемы перестановок с фиксированным числом инверсий t. Требуется найти виды соответствующих исходов. Эта задача решена, т. к. она эквивалентна прямой задаче нумерации в схеме перестановок, а она теоретически решена в [1].

Обратная задача нумерации

Пусть дано число инверсий исхода схемы перестановок. Требуется найти номера соответствующих ее исходов. Численно-программное решение следует из примера 6, т. к. соответствие чисел инверсий исходов с их видами получается как в примере 6, а из теоре-

тически решенной в [1] прямой задачи нумерации для схемы перестановок из видов исходов находятся их номера.

Замечание 2. Теоретическое решение обратной задачи нумерации (в силу ее решения в [1] для схемы перестановок) может быть получено или в форме номеров исходов схемы перестановок, или в форме видов конкретных ее исходов, соответствующих заданному числу числа инверсий в них.

Представим теоретическое решение обратной задачи нумерации в форме некоторого алгоритма в продолжение к АЛГОРИТМУ 1, приведя необходимые пояснения и обозначения.

АЛГОРИТМ 1 дает перечень чисел инверсий всех исходов схемы перестановок по их объединенным в круглые скобки пучкам в порядке их перечисления. На k-ом шаге ($k = 1, 2, \ldots, n$) имеем $(k-1)!$ таких круглых скобок, в которых находятся убывающие на единицу целые числа из множества (по (2) и (3)) $k(k-1)/2, k(k-1)/2-1, \ldots, 1, 0$.

Для заданного числа инверсий t будем находить соответствующие ему номера исходов схемы перестановок через порядковые номера при перечислении по АЛГОРИТМУ 1 круглых скобок, их содержащих, и их номера в круглых скобках, считая элементы в каждой круглой скобке, с единицы. Назовем эти действия АЛГОРИТМОМ 2, состоящим из следующих шагов:

1) пронумеруем круглые скобки в результате применения АЛГОРИТМА 1 с 1 в порядке их получения, обозначая их номера через $C_1, C_2, \ldots, C_{(k-1)!}$, а номера элементов r-ой из них ($r = 1, 2, \ldots, (k-1)!$) через $j_{r_1}, \ldots, j_{r_k}$;

2) обозначим наименьшие значения чисел в круглых скобках соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_{(k-1)!}$, а наибольшие – $b_1, b_2, \ldots, b_{(k-1)!}$ и для заданного числа инверсий t найдем номера круглых скобок, содержащих элемент t из условий для j-ой скобки $a_j \leqslant t \leqslant b_j,\ j = 1, 2, \ldots, (k-1)!$;

3) для каждого из найденных в п. 2) значений номеров круглых скобок $j \in J$, содержащих значение t, найдем его номер $x_j = b_j - t + 1$;

4) искомые номера исходов схемы перестановок с заданным числом инверсий t получаются для каждого j по формуле

$$N_{(C_j)} = (C_j - 1)k + x_j. \qquad (7)$$

По решенной в [1] задаче нумерации для схемы перестановок при найденных по (7) номерах ее исходов будем считать известными их виды.

Покажем работу АЛГОРИТМА 2 на примере.

Пример 7. Пусть $k = 4$, $t = 2$. Тогда в условиях примера 5 имеем по (6) перечень чисел инверсий, состоящий из $4! = 24$ исходам схемы перестановок в порядке их нумерации с номерами от 1 до 24, объединенных в круглые скобки по пучкам исходов схемы размера 4: (6, 5, 4, 3),(5, 4, 3, 2), (4, 3, 2, 1),(5, 4, 3, 2),(4, 3, 2, 1),(3, 2, 1, 0). Совершаем действия по АЛГОРИТМУ 2:

1) нумеруем круглые скобки чисел инверсий от 1 до 6 в порядке их представления в (6), а их элементы – номерами в каждой скобке от 1 до 4;

2) для каждой круглой скобки проверяем условия наличия в ней числа 2: $a_j \leqslant 2 \leqslant b_j$ при $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1,\ a_6 = 0$ и $b_1 = 6,\ b_2 = 5,\ b_3 = 4,\ b_4 = 5,\ b_5 = 4,\ b_6 = 3$; получаем значения $j : C_2 = 2,\ C_3 = 3, C_4 = 4, C_5 = 5,\ C_6 = 6$;

3) находим для найденных в п. 2) номеров круглых скобок $j = 2, 3, 4, 5, 6$, содержащих элемент $t = 2$, его номера в круглых скобках $x_j = 4, 3, 4, 3, 2$;

4) по результатам п. п. 2) и 3) вычисляем по (7) номера исходов схемы перестановок с заданным числом инверсий $t = 2$ – это номера: $N_{(2)} = (2-1)4+4 = 8,\ N_{(3)} = (3-1)4+3 = 11,\ N_{(4)} = (4-1)4+4 = 16,\ N_{(5)} = (5-1)4+3 = 19, N_{(6)} = (6-1)4+2 = 22$, что совпадает с прямым вычислением чисел инверсий по перечислению всех состояний схемы перестановок для $k = 4$.

Тогда по решенной в [2] задаче нумерации для исходов схемы перестановок приведем вид всех исходов с числом инверсий 2 по найденным в п. 4) их номерам: (2, 3, 1, 4), (2, 1, 4, 3), (3, 1, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), что совпадает с результатом прямого подсчета чисел инверсий исходов при $k = 4$ по графу на рис. 2.

4. Моделирование перестановок с заданным числом инверсий

Пусть в перестановке размера n требуется смоделировать исход с заданным числом инверсий t.

Шаги моделирования:

1) перенумеруем подряд с 1 все виды исходов с данным числом инверсий, полученные в 3 по АЛГОРИТМУ 2, записав их в таблицу (число таких исходов ω определяется в п. 2);

2) разыгрывая его номер от 1 до ω по п. 1), находим вид смоделированного исхода.

Литература

1. *Колчин А. В., Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2014. № 4. С. 80–86.

2. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

Поступила в редакцию 07.07.2015

References

1. *Kolchin A. V., Enatskaya N. Yu.* Combinatorial analysis of a permutation scheme. Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Matematical modeling and information technologies series. 2014. N 4. P. 80–86.

2. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stochastic modelling. M.: MIEM, 2012. 185 p.

Received July 07, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики,
к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет,
Высшая школа экономики, МИЭМ
Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: (8903) 741 13 45

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
National Research University,
Higher School of Economics
(Moscow Institute of Electronics and Mathematics)
Tallinskaya, 34, Moscow, Russia, 123458
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: (8903) 741 13 45

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 145–146

ТРЕТИЙ РОССИЙСКО-ФИНСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ (RuFiDiM-2014)

(Петрозаводск, 15–18 сентября 2014 г.)

В сентябре 2014 г. в г. Петрозаводске был проведен Третий Российско-Финский симпозиум по дискретной математике. Симпозиум был организован Санкт-Петербургским отделением Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Институтом прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН и Университетом г. Турку (Финляндия) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РАН.

Данное научное мероприятие является традиционным и проводится в рамках международного сотрудничества российских и финских ученых по дискретной математике и смежным областям. Первый Российско-Финский симпозиум по дискретной математике был проведен в России в г. Санкт-Петербурге в 2011 г., а второй – в Финляндии, в г. Турку в 2012 г. В 2014 г. программным комитетом было принято решение провести третью встречу в г. Петрозаводске.

В работе симпозиума приняли участие 52 человека, из них 11 представителей Финляндии, Франции и Японии. Среди российских участников были представители из различных городов России: Санкт-Петербурга, Екатеринбурга, Петрозаводска, Москвы, Новосибирска, Великого Новгорода. В состав программного комитета вошли ведущие российские и зарубежные ученые. Сопредседатели программного комитета: Ю. В. Матиясевич (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург), В. В. Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск) и Ю. Кархумяки (Университет г. Турку, Финляндия). Члены программного комитета: В. Халава (Университет г. Турку, Финляндия), Л. Замбони (Университет г. Турку, Финляндия, Университет Лион I Клода Бернара, г. Лион, Франция), С. Пузынина (Университет г. Турку, Финляндия), Т. Лайхонен (Университет г. Турку, Финляндия), М. Волков (Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург), И. Пономаренко (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург), Д. Карпов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург), И. Лысенок (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва), Ю. Павлов (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск).

Тематика данного симпозиума была посвящена обсуждению новых результатов в различных областях дискретной математики и включала теоретические вопросы дискретной математики, связанные с проблемой разрешимости, оценкой сложности алгоритмов, теорией автоматов, теорией графов, а также приложения в криптографии, информационных сетях и других областях информатики.

Все представленные на симпозиуме доклады вызвали большой интерес у участников. На симпозиуме было представлено 4 пленарных и 32 секционных доклада. Пленарный доклад А. Звонкина «On polynomials of Birch-Chowla-Hall-Schinzel-Davenport-Stothers-Zannier-Beukers-Stewart and weighted plane trees» был посвящен проблеме Birch-Chowla-Hall-Schinzel в теории чисел о минимальной степени разности полиномов третьей и второй степени и ее связи с классификацией двухцветных плоских деревьев. В пленарном докладе А. Райгородского «Combinatorial geometry and coding theory» был сделан обзор результатов по проблемам Nelson-Hadwiger и Borsuk, а также обсуждены вопросы применения методов комбинаторной геометрии в теории кодирования. В пленарном докладе Я. Кари «Piecewise affine functions, Sturmian sequences and aperiodic tilings» было продемонстрировано, как на основе представления действительных чисел в виде последовательностей Штурма можно доказать неразрешимость проблемы домино. Пленарный доклад Ж. Касаигне «Decomposition of a language of factors into sets of bounded complexity» был

посвящен проблемам сложности языков, была предложена новая иерархия классов языков и бесконечных слов и их связь с классами сложности. В представленных на симпозиуме секционных докладах обсуждались различные аспекты теории автоматов, теории сложности, анализа языков, проблем теории графов и кодирования, и приложений в различных областях. Среди важных направлений – задачи комбинаторики слов, вычисление сложности алгоритмов решения тропических линейных систем, нахождение оптимальных потоков в сетях, цены координации в задачах расписания, нахождение предельных распределений основных характеристик случайных графов. Доклады студентов и аспирантов были посвящены важным вопросам теории алгоритмов, диофантовым уравнениям, оптимальной организации компьютерной памяти.

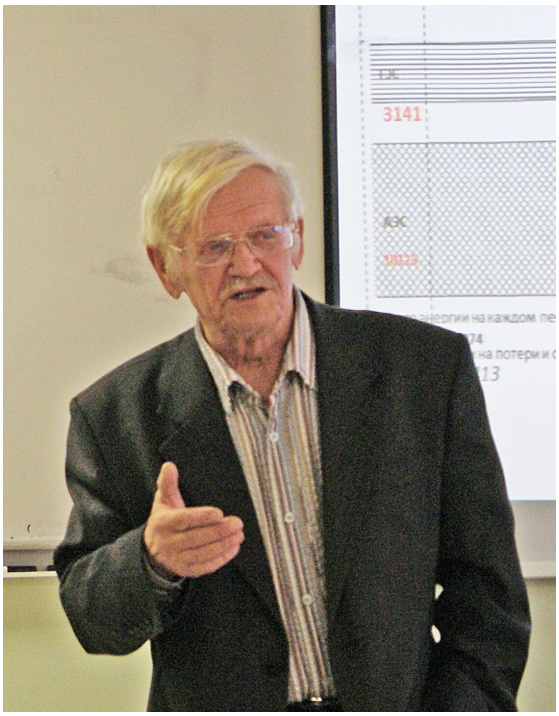
К началу симпозиума был издан сборник расширенных тезисов докладов, с электронной версией которого можно ознакомиться на сайте симпозиума http://mathem.krc.karelia.ru/event.php?id=218&plang=r. Также на нем выставлены презентации докладов участников. По результатам работы симпозиума приняты следующие решения: продолжить серию Российско-Финских симпозиумов по дискретной математике, опубликовать избранные результаты, представленные на симпозиуме, в будущих выпусках научных журналов «Fundamenta Informaticae» (http://fi.mimuw.edu.pl) и «Математическая теория игр и ее приложения» (http://mgta.krc.karelia.ru).

В. В. Мазалов, А. А. Ивашко

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 147–150

ГЕОРГИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ БОРИСОВ

(к 80-летию со дня рождения)



Борисов Георгий Александрович родился 9 апреля 1935 г. в г. Петрозаводске. Военное детство прошло в Пудожском районе Карелии. После окончания железнодорожной средней школы № 9 г. Петрозаводска он поступил в Ленинградский политехнический институт им. Н. И. Калинина, который окончил в 1958 г. по специальности «Электрические станции, сети и системы». В студенческие годы был заядлым путешественником, объехав с друзьями на мотоциклах и автостопом полстраны. Настоящий инженер. Его общий трудовой стаж и стаж работы по специальности составляет более полувека, а стаж работы в системе академии наук – почти 45 лет.

После окончания института Г. А. Борисов, молодой специалист, работал на инженерных должностях в Карелэнерго. С 1960 по 1963 гг. учился в аспирантуре Карельского филиала АН СССР. Прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего Отделом автоматики, начальника вычислительного центра Карельского НИИ лесной промышленности. С 1968 по 1971 гг. работал в должности заведующего отделением систем управления КАРНИИЛПа. Начав работу в КФ АН СССР в должности заведующего лабораторией математических методов и вычислительной техники, он в 1975 г. создал самостоятельный Отдел математических методов автоматизации научных исследований и проектирования, которым руководил 16 лет. Затем работал в должностях заведующего лабораторией и ведущего научного сотрудника.

Имеет ученую степень кандидата технических наук (1966), ученое звание старшего научного сотрудника (1976). Общее количество научных трудов в области автоматизации проектирования линейных сооружений и энергетики – свыше 160, в том числе 3 монографии, более 100 статей.

Г. А. Борисову принадлежит ведущая роль в постановке научно-технических проблем по применению математических методов и ЭВМ в области лесотранспортного и лесомелиоративного проектирования в Карелии и далеко за ее пределами. Коллективом математиков-программистов (настоящих энтузиастов своего дела, а иначе и быть не могло в комсомольские 60–70-е), костяк которого составили выпускники математического факультета Петрозаводского университета, под его руководством были созданы основы теории оптимального проектирования сетей и дорог лесотранспорта и объектов лесомелиорации, разработаны оригинальные методы и технологии автоматизированного проектирования с помощью ЭВМ. Разработанные системы автоматизированного проектирования (СЕТИ, САПАД, КАНАЛ) были отмечены медалями ВДНХ и рекомендованы Минлеспромом СССР для внедрения в проектных организациях страны и использовались на стадии

технико-экономического обоснования проектов сетей и автомобильных дорог лесозаготовительных предприятий. Есть чем гордиться.

В последние десятилетия Г. А. Борисов активно занимается изучением проблем топливно-энергетического комплекса, исследованием ресурсов местных источников энергии. Принимал участие в разработке энергетической программы Республики Карелия, в различных разделах ТАСИС-проекта ERUS 9701, в проекте центра стратегических разработок «Северо-Запад», в разработке Концепции социально-экономического развития Республики Карелия, проекта республиканской целевой программы «Энергосбережение», проводит экологические экспертизы проектов реконструкции крупных котельных республиканского подчинения. Г. А. Борисов – член Наблюдательного Совета при Госкомитете РК по ценам и тарифам.

Юбиляр активно занимается педагогической деятельностью в Петрозаводском госуниверситете и Институте управления, экономики и права при Правительстве Республики Карелия. Им разработаны и читаются курсы лекций по проблемам энергетики, ежегодно под его руководством защищаются десятки курсовых и дипломных работ.

За успехи в научной и научно-организационной деятельности Г. А. Борисов награжден Почетными грамотами Президиума Верховного Совета КАССР и Совета Министров КАССР, медалью «Ветеран труда», Почетными грамотами Президиума РАН и Совета профсоюзов РАН, Благодарственным письмом Главы Республики Карелия, ему присвоено звание «Заслуженный работник народного хозяйства РК». Всего не перечислишь, но главное – наш юбиляр полон сил и энергии. Заядлый рыбак и автомобилист, прекрасный рассказчик реальных историй и небылиц (включая собственные байки), Георгий Александрович – увлеченный, жизнерадостный человек.

Коллектив Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН поздравляет юбиляра, желает здоровья и дальнейших творческих успехов.

Зав. лаб. моделирования природно-технических систем, д. ф.-м. н., профессор

Ю. В. Заика

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Г. А. БОРИСОВА

1979. *Об оценке* адекватности моделей объектов в задачах управления // Труды Военно-инженерного Краснознаменного института им. А. Ф. Можайского. Вып. 592. С. 18–21 (Соавт. Р. М. Юсупов).

1993. *Borisov G. A.* On the Role of Renewable Energy Sources in Fuel-Energy Balance of Karelia // Proceedings of the I International Seminar «Perspectives of Renewable Energy Resources Utilization in Karelian Fuel-Energy Balance». Joensuu, Finland.

1994. *Борисов Г. А.* Энергетическая стратегия Северного экономического района // Энергетика Мурманской области в переходный период. Кольский НЦ РАН, ИФТПЭС, Апатиты.

1995. The Energy Strategy of Karelia // Biofuels for sustainable development. Proceedings of the II International Seminar / Eds.: P. Pelkonen, G. Sidorenko, A. Villa, University of Joensuu, Research Notes N 33. P. 79–88 (Совместно с G. Sidorenko).

Comparative Characterization of Bioenergy Resources in Karelia and the Vladimir Region (as a typical region of Russia) and Possible Ways of their Utilization // Biofuels for sustainable development. Proceedings of the II International Seminar / Eds.: P. Pelkonen, G. Sidorenko, A. Villa, University of Joensuu, Research Notes N 33. P. 62–79 (Совместно с G. Sidorenko).

Оценки возобновляемых энергетических ресурсов Карелии // Гидротехническое строительство. № 5 (Совместно с Г. И. Сидоренко, Ю. Т. Лазаревой).

1997. *Strategy* for the Development of Karelia Energetics and perspectives in Utilization of Renewable Power Sources // Proceedings of the III International Seminar «Perspectives of Renrwable Energy Resources Utilization (Regional Aspects)» / Eds.: P. Pelkonen, G. Sidorenko, A. Villa, University of Joensuu, Research Notes N 36. P. 48–60 (Совместно с G. Sidorenko).

1999. *Энергетика* Карелии. Современное состояние, ресурсы и перспективы развития. СПб.: Наука, 303 с. (Совместно с Г. И. Сидоренко).

Методика оценки валового и технического энергетических потенциалов лесной биомассы в Карелии // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. Вып. 1. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 139–152 (Совместно с Г. И. Сидоренко, Т. П. Тихомировой).

2000. *Karelia's* energy policy and rational fuel-energy balance // Proceedings of the IV International Seminar «Green energetics: from the modern technologies to the new

philosophy» / Eds.: P. Pelkonen, G. Sidorenko, T. Tahvanainen, University of Joensuu, Research Notes N 103. P. 29–42 (Совместно с G. Sidorenko).

Green energetics: From the modern technology to a new philosophy // Proceedings of the IV International Seminar «Green energetics: from the modern technologies to the new philosophy» / Eds.: P. Pelkonen, G. Sidorenko, T. Tahvanainen, University of Joensuu, Research Notes N 103. P. 1–15 (Совместно с A. Titov, P. Pelkonen, T. Tahvanainen, G. Sidorenko, A. Asikainen).

Borisov G., Bykov E., Andreeva S., Tihomirova T. Wood Fuel: resources and utilization in Karelia // Proceedings of the IV International Seminar «Green energetics: from the modern technologies to the new philosophy» / Eds.: P. Pelkonen, G. Sidorenko, T. Tahvanainen, University of Joensuu, Research Notes N 103. P. 75–88 (Совместно с E. Bykov, S. Andreeva, T. Tihomirova).

Анализ методов моделирования топливно-энергетического хозяйства региона // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. Вып. 2. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 104–115 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2001. *О концепции* развития нетрадиционной энергетики в Республике Карелия // Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. СПб.: СПбГТУ. С. 18–19 (Совместно с Г. И. Сидоренко, Т. П. Тихомировой).

Методы поиска наивыгоднейшего варианта сети лесовозных дорог // Лесной журнал. Известия высших учебных заведений. № 3. С. 63–70 (Совместно с В. Д. Кукиным, В. И. Кузиной).

Оптимальное трассирование лесных дорог // Лесной журнал. Известия высших учебных заведений. 2001. № 2. С. 40–45 (Совместно с Г. И. Сидоренко, В. Н. Земляченко).

2002. *Ресурсы* и эффективность использования возобновляемых источников энергии в России. СПб.: Наука, 314 с. (Совместно с Ю. Д. Арбузовым, П. П. Безруких, В. И. Висарионовым, В. М. Евдокимовым, Н. К. Малининым, Н. В. Огородовым, В. Н. Пузаковым, А. А. Шпаком, Г. И. Сидоренко).

Сборник по статистике пространственного развития. Т. II. Проблемы энергетики Северо-Запада России / Под рук. Ю. А. Перелыгина. СПб.: Издательский Дом «Corvus», 112 с. (Совместно с Ю. А. Перелыгиным, В. А. Алейником, В. В. Арабкиным, О. З. Рохинсоном, С. А. Плетневым, Ю. В. Савельевым).

Использование и оценка ресурсов древесного топлива в России // Известия РАН, Энергетика. № 6. С. 24–35 (Совместно с П. П. Безруких, Г. И. Сидоренко).

Оценка антропогенных выбросов CO_2 в Карелии // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. Вып. 3. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 229–236 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2003. *Математическая* модель для оптимизации заготовки и транспортировки торфа // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ КарНЦ РАН. Вып. 4. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 13–20 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2004. *Use* of Peat Resources in Russia for Energy Needs // Bioenergy Development In Finland, Russia and Sweden. October 2004. Forest Sector Task Force. Barents Euro-Arctic Council / Working Group on Economic Cooperation. Publisher – University of Joensuu, Faculty of Forestry. Edited by Oy FEG – Forest and Enviroment Group Ltd. Cover Design – Kuvaste Oy. Editors: P. Pelkonen, T. Hartikainen, G. Sidorenko. P. 57–67 (Совместно с Pavel P. Bezrukikh, Juri S. Vasilev, Viktor V. Elistratov, Gennadi I. Sidorenko).

Анализ эффективности энергетического хозяйства (на примере Карелии) // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. Вып. 5. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 161–172.

Информационная поддержка исследования проблем топливно-энергетического хозяйства Республики Карелия // Материалы VI Международной конференции «Новые информационные технологии в целлюлозно-бумажной промышленности и энергетике». Петрозаводск. С. 68–70 (Совместно с С. С. Марченко, Т. П. Тихомировой).

2005. *Исследование* и прогноз энергообеспечения Костомукшского промышленного района // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ. Вып. 6. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 35–50 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2006. *Анализ* эффективности энергетического хозяйства (на примере Карелии) // Труды КарНЦ РАН. Вып. 9. С. 3–8.

О применении потоковой задачи Штейнера к оптимизации электросетей // Материалы VII Международной научно-технической конференции «Новые информационные технологии в целлюлозно-бумажной промышленно-

сти и энергетике». Петрозаводск. С. 45–46 (Совместно с В. Д. Кукиным).

Применение микропроцессорной техники в тепловом хозяйстве Республики Карелия // Материалы VII Международной научно-технической конференции «Новые информационные технологии в целлюлозно-бумажной промышленности и энергетике». Петрозаводск. С. 47–48 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2007. *Об оптимизации* электрических сетей с использованием эволюционного композитного алгоритма // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ КарНЦ РАН. Вып. 8. Петрозаводск: КарНЦ РАН. С. 71–75 (Совместно с В. Д. Кукиным).

2009. *Об оптимизации* параметров лесотранспортных сетей в современных условиях // Лесной журнал. № 1. С. 60–65 (Совместно с В. Д. Кукиным).

Структурный анализ потерь энергии в электрическом хозяйстве Карелии // Учен. зап. ПетрГУ. Сер. Естественные и технические науки. № 9 (103). С. 93–97 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2010. *Характеристики* и свойства потерь энергии и мощности на переделах энергетического хозяйства региона // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. № 3. Вып. 1. С. 4–10 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2011. *Анализ* математической модели технологической линии топливно-энергетического хозяйства региона // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. № 5. Вып. 2. С. 10–17 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2012. *Эволюционный* алгоритм оптимизации распределительной электрической сети // Учен. зап. ПетрГУ. 2012. № 2 (123). С. 67–70 (Совместно с В. Д. Кукиным).

Оптимизация конфигурации распределительных сетей // Электричество. 2012. № 4. С. 14–18 (Совместно с В. Д. Кукиным).

Энергосберегающие методы управления мощностью в энергетическом хозяйстве региона // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2012. Т. 19. Вып. 2. С. 280–281 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

Увеличение ресурсов изоляции и подшипников электрических двигателей путем наивыгоднейшего распределения нагрузок // Учен. зап. ПетрГУ. Сер. Естественные и технические науки. 2012. № 8 (129). С. 83–85 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2013. *Методы* минимизации потерь энергии и мощности в топливно-энергетическом хозяйстве региона // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. № 1. Вып. 4. С. 12–16 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

2014. *Оценка* динамической составляющей нагрузочных потерь энергии в элементах электрических сетей // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. № 4. С. 25–28 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

Обобщенная и частная задачи минимизации расхода первичной энергии в системе // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2014. Вып. 1. С. 39–41 (Совместно с Т. П. Тихомировой).

Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 151–152

УТРАТЫ

ВЛАДИМИР ТРОФИМОВИЧ ВДОВИЦЫН
(1952–2014)

9 декабря 2014 г. скоропостижно скончался высококвалифицированный специалист в области информационных компьютерных технологий и вычислительных систем (создание электронных научных информационных ресурсов), многолетний руководитель лаборатории информационных компьютерных технологий, кандидат физико-математических наук Владимир Трофимович Вдовицын.

В. Т. Вдовицын родился 13 мая 1952 г. в г. Петрозаводске, окончил в 1969 г. среднюю школу № 9 и поступил в Петрозаводский государственный университет (ПетрГУ) на физико-математический факультет, а в 1972 г. был переведен на 4-й курс факультета прикладной математики – процессов управления Ленинградского государственного университета (ЛГУ). После окончания учебы, в 1974 г. проходил стажировку в ЛГУ, затем там же поступил в аспирантуру. После окончания аспирантуры, в 1978 г. вернулся в ПетрГУ, где трудился с 1978 по 1981 гг. в должности преподавателя на кафедре математического анализа.

В 1981 г. В. Т. Вдовицын по конкурсу был принят в Отдел математических методов автоматизации научных исследований и проектирования (ОММАНИП) на должность младшего научного сотрудника. В 1986 г. был избран на должность заведующего лабораторией программных средств автоматизации (с 1998 г. переименована в лабораторию информационных компьютерных технологий), которой он руководил вплоть до 2014 г. В 1987 г. защитил кандидатскую диссертацию по теме «Разработка и оптимизация обобщенной реляционной системы», в 1998 г. ему присвоено звание доцента по кафедре информатики и математического обеспечения, а в 2005 г. – звание доцента по специальности «Дискретная математика и математическая кибернетика». В 2007 г. В. Т. Вдовицын перешел на работу в аппарат Президиума КарНЦ РАН, сначала на должность и. о. главного ученого секретаря, а с марта 2009 г. по декабрь 2013 г. работал в должности заместителя председателя КарНЦ РАН по научной работе.

Начиная с середины 90-х годов XX столетия научные интересы В. Т. Вдовицына были связаны с исследованием и разработкой распределенных информационных систем для поддержки научных исследований, а также с методами систематизации и поиска электронной научной информации. Им подготовлено и опубликовано более 100 научных работ. Под его руководством было создано несколько информационных систем и тематических вебсайтов, в том числе банк данных (БД) «Наследие» (совместно с Государственным музеем-заповедником «Кижи»), web-сервер КарНЦ РАН (в дальнейшем портал), БД по топонимии Европейского Севера России (совместно с ИЯЛИ КарНЦ РАН), БД по водно-экологическим ресурсам Республики Карелия (совместно с ИВПС КарНЦ РАН), электронная библиотека КарНЦ РАН (совместно с ИБ КарНЦ РАН, ИЛ КарНЦ РАН), тема-

тический вебсайт «Фонограммархив института ИЯЛИ КарНЦ РАН» (совместно с ИЯЛИ КарНЦ РАН), информационно-аналитическая система поддержки и сопровождения научных исследований «Природные ресурсы Карелии» (совместно с ИБ, ИГ, ИВПС и ИЛ КарНЦ РАН) и др.

В период с 2001 по 2013 гг., помимо бюджетных тем, являлся руководителем и исполнителем ряда проектов, поддержанных грантами РФФИ, РГНФ и Отделения математических наук РАН и др., руководил и принимал участие (совместно с сотрудниками институтов и подразделений аппарата Президиума КарНЦ РАН) в разработке (кроме упомянутых выше) ряда информационных систем архива фольклорной фонетики ИЯЛИ КарНЦ РАН, электронной библиотеки рукописных документов XVII–XIX вв. на основе фондов Научного архива КарНЦ РАН. Практические результаты работ В. Т. Вдовицына использовались для информационной поддержки фундаментальных исследований ряда институтов КарНЦ РАН, а также Министерства экономического развития Республики Карелия (создание БД по минеральным ресурсам РК совместно с ИГ КарНЦ РАН).

В. Т. Вдовицын усиленно проводил большую научно-организационную работу. Как заместитель председателя КарНЦ РАН по научной работе он курировал работу ряда отделов и служб аппарата Президиума и подразделений при Президиуме КарНЦ РАН (научный архив и библиотека, патентная служба, отдел по специальным вопросам и др.), руководил работой научно-технического совета по телекоммуникациям, являлся членом комиссии по Уставу КарНЦ РАН. Помимо этого, он являлся членом комиссии по развитию информационного общества и формированию электронного правительства в РК, членом Президиума КарНЦ РАН и Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН, входил в состав Редакционного совета «Трудов КарНЦ РАН» и редколлегии серии «Математическое моделирование и информационные технологии», являлся экспертом РФФИ и РНФ по направлению «инфокоммуникационные технологии и вычислительные системы», много лет входил в состав Программного комитета ежегодно проводимой Всероссийской конференции «Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции», был одним из основных организаторов проведения этих двух конференций в Петрозаводске.

В. Т. Вдовицын уделял внимание подготовке кадров, с 1981 г. в течение двух десятков лет работал по совместительству на математическом факультете ПетрГУ в должности доцента. В 2005 г. организовал филиал кафедры информатики и математического обеспечения математического факультета ПетрГУ в ИПМИ КарНЦ РАН, в разные годы читал ряд общих и специальных курсов в области программирования, создания информационных систем с базами данных и знаний студентам математического факультета ПетрГУ, осуществлял руководство курсовыми и дипломными работами, магистерскими диссертациями.

За плодотворную научную и научно-организационную деятельность В. Т. Вдовицын был награжден Почетной грамотой Республики Карелия, Почетной грамотой Президиума РАН и Профсоюза работников РАН, несколькими грамотами Председателя КарНЦ РАН. Владимир Трофимович Вдовицын пользовался уважением со стороны сотрудников нашего и других институтов КарНЦ РАН, работников аппарата Президиума КарНЦ РАН и его подразделений. Его отличали большая трудоспособность, высокая ответственность, бескорыстие и дружелюбие, готовность оказать посильную помощь коллегам по работе. Память о нем сохранится в наших сердцах.

Коллектив ИПМИ КарНЦ РАН

ПРИЛОЖЕНИЕ
http://transactions.krc.karelia.ru

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершенных оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учетом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редколлегии серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляют за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкеты» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия «Анкеты» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Журнал имеет полноценную электронную версию на базе Open Journal System (OJS), позволяющую перевести предоставление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегиями серий и рецензентами в электронный формат и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (http://journals.krc.karelia.ru/).

Редакционный совет журнала «Труды Карельского научного центра РАН» (Труды КарНЦ РАН) определил для себя в качестве одного из приоритетов полную открытость издания. Это означает, что пользователям на условиях свободного доступа разрешается: читать, скачивать, копировать, распространять, печатать, искать или находить полные тексты статей журнала по ссылке без предварительного разрешения от издателя и автора. Учредители журнала берут на себя все расходы по редакционно-издательской подготовке статей и их опубликованию.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – http://transactions.krc.karelia.ru; http://journals.krc.karelia.ru

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объем рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объем рисунков не должен превышать 1/4 объема статьи. Рукописи большего объема (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в двух экземплярах, напечатанных на одной стороне листа формата А4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: *УДК* курсивом на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; инициалы, фамилии всех авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если ав-

торов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: ВВЕДЕНИЕ. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ. ВЫВОДЫ. ЛИТЕРАТУРА); благодарности; литература (с новой страницы).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на вклейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. Ссылки на литературу в тексте даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Диаграммы и графики не должны дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5-2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления (http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.-2008). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

ТРАНСЛИТЕРИРОВАННЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (References). Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Описания русскоязычных работ указываются в латинской транслитерации, рядом в квадратных скобках помещается их перевод на английский язык. Выходные данные приводятся на английском языке (допускается транслитерация названия издательства). При наличии переводной версии источника можно указать его библиографическое описание вместо

транслитерированного. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала. Для составления списка рекомендуется использование бесплатной программы транслитерации на сайте http://translit.ru/, вариант BCI.

Внимание! С 2015 года каждой статье, публикуемой в «Трудах Карельского научного центра РАН», редакцией присваивается уникальный идентификационный номер цифрового объекта (DOI) и статья включается в базу данных CrossRef. **Обязательным условием является указание в списках литературы DOI для тех работ, у которых он есть.**

Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате .tex (LaTex 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу: http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755.

TABLE OF CONTENTS

Yu. L. Pavlov, T. P. Tikhomirova. HISTORY OF THE INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICAL RESEARCH 3

Yu. G. Abakumov, V. G. Banin. POINTS OF RETRACTION INTO CONE AND VORONOVSKAYA TYPE THEOREMS 8

B. Z. Belashev, K. A. Dolgy. APPLICATION OF GLOBAL OPTIMIZATION IN DATA CLUSTERING ANALISYS 15

G. A. Borisov, T. P. Tikhomirova. TASKS AND METHODS FOR MAXIMIZING THE INSULATION RESOURCE OF POWER TRANSFORMERS 24

V. V. Gusev. AN EQUILIBRIUM SITUATION IN A PATROLLING GAME WITH A TRACKING CAMERA . 28

A. B. Zhizhchenko, V. V. Mazalov, B. T. Tsynguev. RANKING OF NODES IN THE MATHEMATICAL PORTAL MATH-NET.RU PUBLICATIONS GRAPH 34

Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. APPROXIMATION OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION BY ODE SYSTEM 42

Yu. V. Zaika, N. I. Rodchenkova. BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF HYDROGEN PERMEABILITY OF GAS SEPARATION MEMBRANES 54

T. V. Kaushinis, A. N. Kirillov, N. I. Korzhitsky, A. A. Krizhanovsky, A. V. Pilinovich, I. A. Sikhonina, A. M. Spirkova, V. G. Starkova, T. V. Stepkina, S. S. Tkach, Yu. V. Chirkova, A. L. Chuharev, D. S. Shorets, D. Yu. Yankevich, E. A. Yaryshkina. A REVIEW OF WORD-SENSE DISAMBIGUATION METHODS AND ALGORITHMS: INTRODUCTION 69

A. N. Kirillov, A. S. Ivanova. PERIODIC AND QUASIPERIODIC CONTROL PROCESSES IN THE BIOCOMMUNITY SPECIES COMPOSITION PRESERVING PROBLEM 99

A. N. Lazutchenko. ROBUST CONTROL IN A RANDOM ENVIRONMENT CHARACTERIZED BY A NORMAL DISTRIBUTION OF INCOMES WITH DIFFERENT VARIANCES 107

Yu. L. Pavlov, E. V. Feklistova. LIMIT BEHAVIOUR OF THE NUMBER OF EDGES IN A CONFIGURATION RANDOM GRAPH NEAR CRITICAL POINTS 114

I. A. Cheplyukova. ON LIMIT DISTRIBUTIONS OF VERTEX DEGREES IN A CONFIGURATION GRAPH 123

N. Yu. Enatskaya. THE ANALYSIS OF RANDOM PERMUTATIONS WITH *S*-PROHIBITION 131

N. Yu. Enatskaya. ON THE NUMBER OF INVERSION OUTCOMES OF THE PERMUTATION SCHEME AND ITS ANALYSIS WITH FIXED NUMBER OF INVERSIONS 137

CHRONICLE

V. V. Mazalov, A. A. Ivashko. Third Russian-Finnish Symposium on Discrete Mathematics (RuFiDiM-2014) (Petrozavodsk, Russia, 15–18 September, 2014) 145

DATES AND ANNIVERSARIES

Yu. V. Zaika. Georgy Borisov (on the 80th anniversary) 147

BEREAVEMENTS

IAMR team. Vladimir Vdovitsyn (1952–2014) 151

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS 153

Научное издание

**Труды Карельского научного центра
Российской академии наук**

№ 10, 2015

Серия МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению
Президиума Карельского научного центра РАН*

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-48848 от 02.03.2012 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций

Редактор Е. В. Азоркина
Оригинал-макет Е. Н. Спектор
Стилевой файл А. С. Румянцев

Подписано в печать 23.09.2015. Формат 60x84$^{1}/_{8}$.
Гарнитура CMR. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 19,7. Усл. печ. л. 18,3.
Тираж 500 экз. Заказ 311

Карельский научный центр РАН
Редакционно-издательский отдел
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50