

Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр Российской академии наук»



# **ТРУДЫ**

## **КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

№ 4, 2024

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Петрозаводск  
2024

Главный редактор

А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; О. Н. БАХМЕТ (зам. главного редактора), член-корр. РАН, д. б. н.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; И. В. ДРОБЫШЕВ, доктор биологии (Швеция – Канада); Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; Х. ЙООСТЕН, доктор биологии, проф. (Германия); А. М. КРЫШЕНЬ, д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; О. Л. КУЗНЕЦОВ, д. б. н.; Н. В. ЛУКИНА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, академик РАН, д. б. н., проф.; О. ОВАСКАЙНЕН, доктор математики, проф. (Финляндия); О. Н. ПУГАЧЕВ, академик РАН, д. б. н.; С. А. СУББОТИН, доктор биологии (США); Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; Т. Э. ХАНГ, доктор географии (Эстония); П. ХЁЛЬТТЯ, доктор геологии, проф. (Финляндия); К. ШАЕВСКИЙ, доктор математики, проф. (Польша); В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Редакционная коллегия серии «Математическое моделирование и информационные технологии»

В. А. ВАТУТИН, д. ф.-м. н., проф.; Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; О. В. ЛУКАШЕНКО (ответственный секретарь), к. ф.-м. н.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.

*Издается с января 2009 г.*

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Тел. (8142)762018; факс (8142)769600

E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

© ФИЦ «Карельский научный центр РАН», 2024

© Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, 2024

Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences



# **TRANSACTIONS**

**of the KARELIAN RESEARCH CENTRE  
of the RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES**

No. 4, 2024

**MATHEMATICAL MODELING  
AND INFORMATION TECHNOLOGIES**

Petrozavodsk  
2024

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; O. N. BAKHMET (Deputy Editor-in-Chief), RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); I. V. DROBYSHEV, PhD (Biol.) (Sweden – Canada); N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; T. E. HANG, PhD (Geog.) (Estonia); P. HÖLTTÄ, PhD (Geol.), Prof. (Finland); E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; H. JOOSTEN, Dr. (Biol.), Prof. (Germany); A. M. KRYSHEN', DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; O. L. KUZNETSOV, DSc (Biol.); N. V. LUKINA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; O. OVASKAINEN, PhD (Math.), Prof. (Finland); O. N. PUGACHYOV, RAS Academician, DSc (Biol.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; S. A. SUBBOTIN, PhD (Biol.) (USA); D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); K. SZAJEWSKI, PhD (Math.), Prof. (Poland); A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Editorial Board of the Mathematical Modeling and Information Technologies Series

A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; O. V. LUKASHENKO (Executive Secretary), PhD (Phys.-Math.); V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. A. VATUTIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.

*Published since January 2009*

*8 issues a year*

Editorial Office address: 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia

Tel. (8142)762018; fax (8142)769600

E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Full-text electronic version: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

© Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences, 2024

© Institute of Applied Mathematical Research, Karelian

Research Centre, Russian Academy of Sciences, 2024

УДК 634.026, 615.47(075.8), 581.1.03, 631.531.173, 551.51, 550.371, 551.5, 539.104(078)

## ОПЫТ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГИСТРАЦИИ БИОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ СОСНЫ

Б. З. Белашев

*Институт геологии КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН»  
(ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Предмет исследования составляют временные ряды разности электрических потенциалов вдоль ствола сосны и согласованные временные ряды метеорологических и геомагнитных параметров, измеренные аппаратно-программными комплексами геофизической обсерватории «Петрозаводск» и Ботанического сада Петрозаводского государственного университета в 2017–2022 годах, а также временные ряды базы данных Кр-индекса глобальной геомагнитной активности. Продемонстрировано существование характерных режимов разности электрических потенциалов сосны, определяемых факторами среды и физиологическими процессами в дереве. Проанализированы реакции разности электрических потенциалов сосны на атмосферные процессы, грозу, феномены космической погоды: магнитные бури и солнечное затмение. Данные наблюдений интерпретированы с учетом особенностей электрического поля Земли.

**Ключевые слова:** разность электрических потенциалов; сосна; транспирация; температура; давление; влажность; осадки; гроза; магнитные бури; солнечное затмение

Для цитирования: Белашев Б. З. Опыт автоматической регистрации биоэлектрической активности сосны // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1895

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт геологии КарНЦ РАН, тема FMEN-2023-0008).

### **B. Z. Belashev. EXPERIENCE OF AUTOMATICALLY RECORDING PINE BIOELECTRICAL ACTIVITY**

*Institute of Geology, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences  
(11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The subject of the study is the time series of the difference in electrical potentials along the trunk of a pine tree and the aligned time series of meteorological and geomagnetic parameters measured by hardware and software complexes of the Petrozavodsk geophysical observatory and the Petrozavodsk State University Botanical Garden in 2017–2022, as well as the time series of the global geomagnetic activity Kp index database. It is demonstrated that there exist characteristic patterns in the electric potential difference in pine trees depending on season, temperature, precipitation, humidity, underpinned by

physical environmental factors and physiological processes in the tree. The response of the electric potential difference of pine trees to atmospheric processes, thunderstorms, and space weather phenomena (magnetic storms and solar eclipse) are studied. The results of these observations are qualitatively interpreted using features of the Earth's electric field.

**Keywords:** electric potential difference; pine; transpiration; temperature; pressure; humidity; precipitation; thunderstorm; magnetic storms; solar eclipse

**For citation:** Belashev B. Z. Experience of automatically recording pine bioelectrical activity. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2024;4:5–14. doi: 10.17076/mat1895

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Geology KarRC RAS, FMEN-2023-0008).

---

## ВВЕДЕНИЕ

В отличие от животных, поведением демонстрирующих чувствительность к изменениям окружающей среды, большинство растений внешне не реагируют на раздражители. Их реакции проявляются в электрических сигналах.

Форму сигналов определяют процессы деполяризации и реполяризации клеточных мембран [13]. Одиночный электрический импульс по аналогии с возбуждением нервного волокна называют потенциалом действия, сигнал, реагирующий на сильные раздражители: механическое повреждение, ожог, – переменным потенциалом. Переменный потенциал имеет расширенную фазу реполяризации и содержит повторяющиеся импульсы небольшой амплитуды. Электрическая активность растений может также проявляться в виде микро-ритмов.

На клеточном уровне распространение электрических сигналов исследовано подробно [9]. В дереве электрические сигналы распространяются через мелкие клетки флоэмы, протоксилемы, сосудистые пучки, транспортирующие воду и питательные вещества.

Менее изучены интегративные биоэлектрические показатели растений в естественной среде [15]. Электрическую реакцию растений на изменения окружающей среды пытаются использовать для определения оптимальных условий выращивания, повышения продуктивности растений и изучения реакций на внешние раздражители. По сравнению с трудоемкими методами оценки состояния растений по морфологическим признакам, дающими погрешность 50 процентов, мониторинг электрической активности растений представляется более точным, быстрым и информативным [3]. Реализованный в автоматизированных системах, такой мониторинг упрощает решение за-

дач оперативной диагностики, оповещения и прогнозирования [5]. В условиях глобального изменения климата и усиления антропогенного воздействия на лесные экосистемы такой мониторинг особенно важен.

Цель статьи – описание опыта продолжительной автоматической регистрации разности электрических потенциалов вдоль ствола сосны, изучение влияния на них метеорологических и геофизических факторов окружающей среды. Проанализировано влияние метеорологических параметров, грозы, магнитных бурь и солнечного затмения на разность электрических потенциалов сосны. Исследование выполнено в Геофизической обсерватории «Петрозаводск» на основе согласованных временных рядов данных, полученных в 2017–2022 гг. с помощью специальных аппаратно-программных комплексов [12].

Выбор сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) в качестве фитоиндикатора в системах экологического мониторинга определен широким ареалом ее распространения, неспецифической реакцией на уровень загрязнения атмосферного воздуха и почвы, сохранением фотосинтетической активности при низких температурах. Разветвленная, пластичная корневая система дерева охватывает значительную часть толщи почвы и грунта. Сосна энергично поглощает питательные вещества, экономно их расходует, сохраняет способность роста при ограниченном запасе азота в почве. Ее древесина прочна, устойчива к гниению. Высота дерева, достигающая нескольких десятков метров, позволяет регистрировать разницу электрических потенциалов на большом расстоянии между электродами.

## МАТЕРИАЛЫ, МЕТОДЫ, АППАРАТУРА

Геофизическая обсерватория «Петрозаводск» находится в Ботаническом саду Пет-

розаводского государственного университета (ПетрГУ) в лесу на окраине города. Располагающаяся на противоположном берегу Петрозаводской губы Онежского озера территория испытывает слабое антропогенное влияние. Объектом исследования являлась сосна высотой около 25 м, растущая на каменистом грунте. Латунные электроды были вбиты в ствол сосны с южной стороны на глубину 2 см; нижний – в 10 см от земли, верхний – в 10 м от нижнего электрода.

Система регистрации разности электрических потенциалов сосны и геомагнитных параметров аналогична системе, используемой в геофизической обсерватории «Воеково». Для измерения разности электрических потенциалов между электродами задействован один канал геофизического комплекса GI-MTS-1 [10], расположенного в непосредственной близости от объекта исследования. Другие каналы синхронно регистрировали вариации H-, D-, Z-компонент геомагнитного поля, электрических составляющих магнитотеллурических токов. Шаг дискретизации регистрируемых данных составлял 1 с. Данные Kp-индекса геомагнитной активности с трехчасовым интервалом дискретизации взяты с сайта [4].

Метеостанция Davis Vantage Pro2 Plus находилась на расстоянии около 100 м от исследуемой сосны [14]. Метеостанция с интервалом 30 минут автоматически измеряла температуру, влажность, атмосферное давление, осадки, направление, силу ветра и интенсивность солнечной радиации в видимом и УФ-диапазоне.

Результаты измерений в режиме реального времени поступали на компьютер Ботанического сада и через мобильный Интернет передавались на серверы ПетрГУ и Института геологии Карельского научного центра РАН.

Из-за высокой чувствительности комплекса GI-MTS-1 в данных его измерений присутствовали импульсные помехи. В ходе обработки помехи отфильтровывали и заменяли интерполированными значениями, определенными по оставшимся данным. Шаг выборки обработанных, осредненных геофизических данных составлял 10 минут.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В сезонных записях изменения разности электрических потенциалов сосны на рис. 1 присутствует суточный пик (б, в), выражающий связь электрофизиологических процессов с транспортом веществ в дереве. Поздней осенью и зимой суточный пик в вариациях разности потенциалов отсутствует. Он появляется ранней весной, увеличивается по амплитуде,

достигает максимума в мае-июне, затем снижается и осенью исчезает. Иногда пик имеет двугорбую форму. Его появление и исчезновение связаны со временем пробуждения и завершения активного годового периода в жизни дерева. С повышением температуры воздуха амплитуда пика увеличивается, а с увеличением относительной влажности – уменьшается.

В отсутствие суточного пика (а, г) отчетливо проявляется влияние осадков на ход измеряемой разности потенциалов. Осадки в виде дождя понижают тренд записи, а осадки в виде снега – увеличивают его. Подобно снегу на изменение разности потенциалов сосны действует туман.

На рис. 2 показан ход изменения разности потенциалов сосны (а) и метеорологических параметров (б–г) в течение недели 17–23.09.2017 г. Гроза ночью 19.09 сопровождалась обильными осадками. На рисунке (а) сохранены импульсные помехи, часть которых вызвана грозовыми разрядами. На записях разностей потенциалов сосны заметно колебание, возникшее за 6–7 часов до грозы, имеющее нарастающую амплитуду и период около 1,8 часа. Суточный пик после грозы исчезает. Его восстановление начинается через два дня. Количество осадков (б) и влажность (в) во время грозы увеличились, температура (г) и давление (д) снизились.

Синхронные записи компонент геомагнитного поля (рис. 3, а–в) и Kp-индекса глобальной геомагнитной активности (рис. 3, г) свидетельствуют о спокойной динамике геомагнитного поля и снижении уровня шума в послегрозовом периоде.

На рис. 4 представлена временная зависимость разности потенциалов сосны на двухмесячном интервале 21.03–22.05.2021 г. Этот период характеризуется увеличением амплитуды суточного пика зарегистрированной разности потенциалов и высокой геомагнитной активностью. Магнитные бури (Kp-индекс 5–7) с началом, отмеченным стрелками, соответствуют бухтообразным понижениям тренда записей регистрируемой разности потенциалов.

Показания Kp-индекса и метеопараметров в этом временном интервале показаны на рис. 5. С частью магнитных бурь связано повышение температуры, атмосферного давления, осадков, относительной влажности. Значительные понижения тренда графика разности потенциалов (рис. 4) имеют место при больших значениях Kp-индекса и интенсивных дождях.

На рис. 6 показан ход разности потенциалов сосны (а) и метеопараметров (б–г) в пери-

од 16–29.10.2022 г. Из рисунка видно, что частичное солнечное затмение 25 октября 2022 г. вызвало резкие рост и падение разности электрических потенциалов (а), понижение температуры (б), давления (в) и увеличение влажности (г).

## ОБСУЖДЕНИЕ

Регистрация электрической активности позволяет изучать растение как целостный организм с действующей регуляторной системой, оценить его функциональное состояние, интенсивность обменных процессов. Информативными считаются как спонтанная (фоновая) активность, так и сигналы реакции на раздражение.

Для контроля состояния тканей растений используют методы электрического импеданса и биопотенциалов. По частотной зависимости электрического импеданса тканей судят о значениях межклеточного (симпластического) и внутриклеточного (апопластического) сопротивления и емкости мембран. На частотах 10 кГц–10 МГц ток течет преимущественно через клетку, на низких частотах 100 Гц–10 кГц – через межклеточное пространство. В первом случае ячейку считают конденсатором, во втором – активным сопротивлением. На частотах выше 100 Гц материал электродов не влияет на значения импеданса. Высокочастотная составляющая импеданса характеризует диэлектрическую проницаемость мембран и поляризацию жидкого диэлектрика клетки.

Уменьшение низкочастотной составляющей импеданса связано с повреждением мембраны, например, в результате действия низких температур. Низкочастотные импедансные измерения, в частности, используют для изучения сезонной динамики прекамбиально-го комплекса тканей стволов сосен [2].

По сравнению с импедансометрией метод биопотенциалов технически более прост. В нем фиксируют разность электрических потенциалов между участками тканей высших растений, возникающую при переносе ионов калия и хлора через клеточные мембраны. Эту величину используют для характеристики физиологического состояния растений. С ее помощью диагностируют посадочный материал, выявляют опасные деревья. Биопотенциалы применяют при изучении реакций растений на термические раздражители, ритмический, импульсный звук, световое раздражение, контактное прикосновение [1].

Разность потенциалов вдоль ствола сосны формируется физическими и биологически-

ми процессами. Физиологическим процессом, определяющим суточные пики (рис. 1, б, в), является транспирация – движение жидкости от корней вверх по растению и испарение ее через устьица в окружающую среду [19]. Перекачивая и испаряя жидкость, растение регулирует температуру и поступление продуктов в зону фотосинтеза. Солнечная радиация открывает устьица. Температура, атмосферное давление, скорость ветра и влажность регулируют скорость диффузии молекул воды. Оптимальное сочетание внешних и внутренних факторов для транспирации на этом участке приходится на конец мая – июнь.

Разность потенциалов зависит от геоэлектрического поля и электропроводности воздушного зазора между электродами. Геоэлектрическое поле принимает непосредственное участие в формировании разности потенциалов вдоль ствола сосны. Электрическое сопротивление межэлектродного воздушного зазора шунтирует сопротивление тканей растения. На суточный ход геоэлектрического поля в условиях «хорошей погоды» влияют утренний конвективный генератор, распределение аэрозолей по высоте атмосферы и унитарный ход, отражающий изменение мощности генераторов глобальной атмосферной электрической цепи [11].

Заметное влияние на геоэлектрическое поле и электропроводность воздуха оказывают осадки. Во время и после дождя малоподвижные тяжелые отрицательные ионы, накапливающиеся у поверхности Земли, увеличивают отрицательный заряд поверхности, уменьшают проводимость приземного слоя атмосферы и в конечном итоге увеличивают напряженность геоэлектрического поля (рис. 1, а). При нормальных условиях напряженность электрического поля Земли у поверхности составляет около 130 В/м; во время осадков и гроз достигает значений порядка 16 000 В/м. Во время снега и тумана наличие в атмосфере легких подвижных положительных ионов увеличивает ее электропроводность, а их комбинация с отрицательными ионами снижает напряженность геоэлектрического поля. В некоторых случаях полярность разности электрических потенциалов меняется (рис. 1, г).

Радиоактивные излучения горных пород часто предшествуют землетрясениям. Их действие на электрическое поле Земли аналогично дождю. Они ионизируют воздух, вызывают конденсацию паров воды на ионах, концентрацию тяжелых отрицательных ионов вблизи земной поверхности [8].



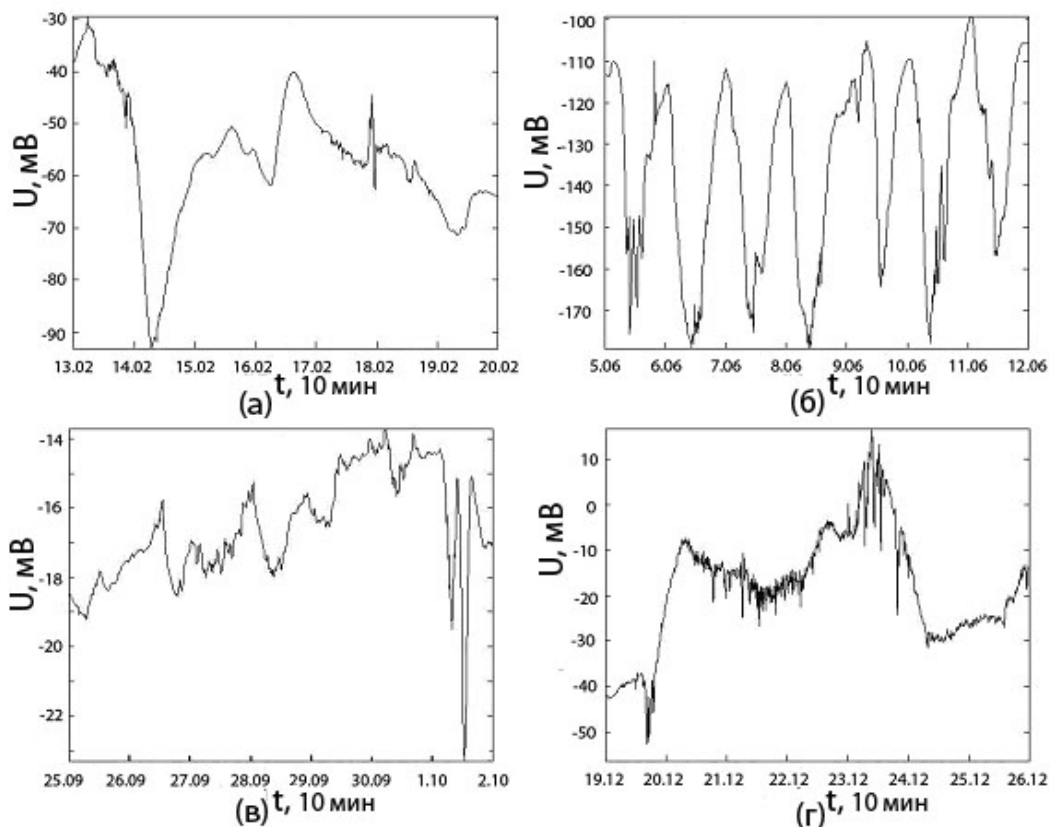


Рис. 1. Временные зависимости разности электрических потенциалов сосны в разные месяцы года: 13–19.02.2022 (а), 05–11.06.2022 (б), 25.09–01.10.2022 (в), 19–25.12.2021 (г)  
 Fig. 1. Time dependences of the difference in electrical potentials of a pine tree in different months of a year: 13–19.02.2022 (а), 05–11.06.2022 (б), 25.09–01.10.2022 (в), 19–25.12.2021 (г)

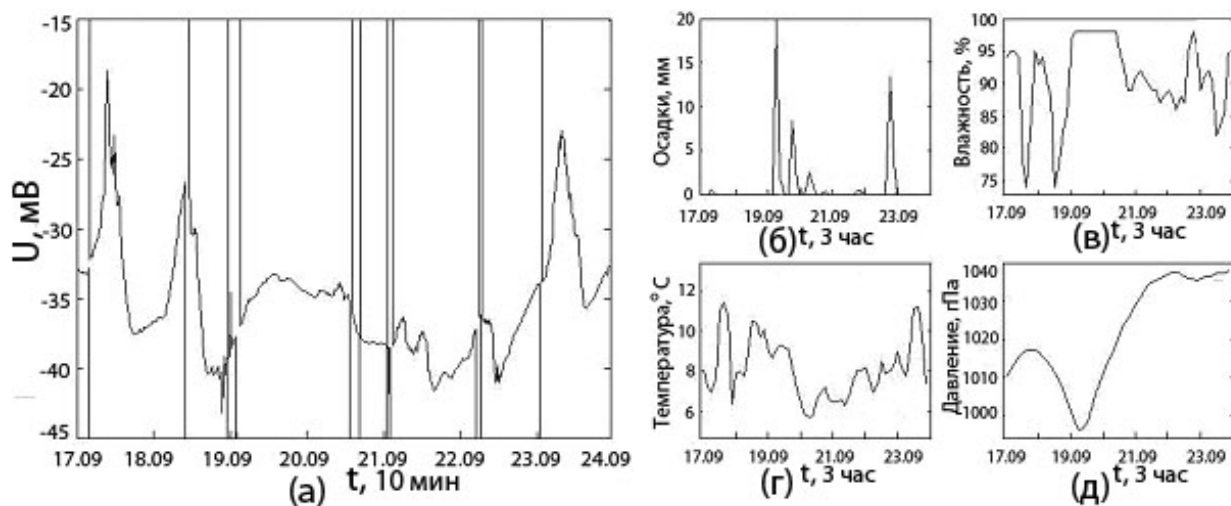


Рис. 2. Ход разности электрических потенциалов сосны (а) и метеопараметров (б–д) в интервале 17–23.09.2017  
 Fig. 2. Variations in the potential difference of a pine (а) and meteorological parameters (б–д) in interval 17–23.09.2017

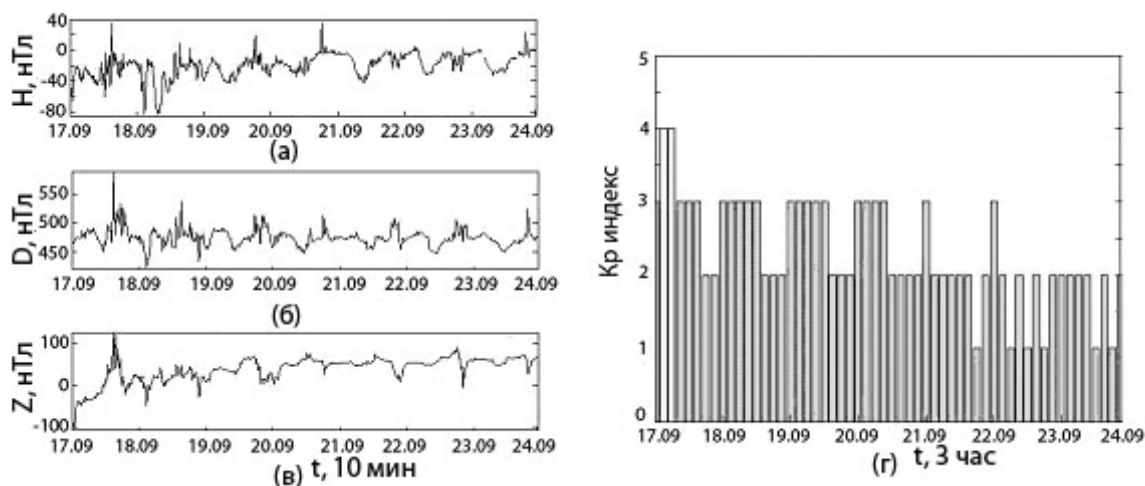


Рис. 3. Изменение компонент геомагнитного поля (а–в) и Кр-индекса (г) в течение недели 17–23.09.2017  
 Fig. 3. Variations of geomagnetic field components (а–в) and Kp index (г) during a week 17–23.09.2017

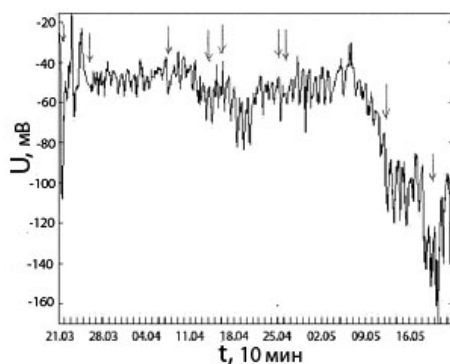


Рис. 4. Ход разности электрических потенциалов сосны за период с 21.03 по 22.05.2021 г.  
 Fig. 4. Variations in the potential difference of a pine for the period from 21.03 to 22.05.2021

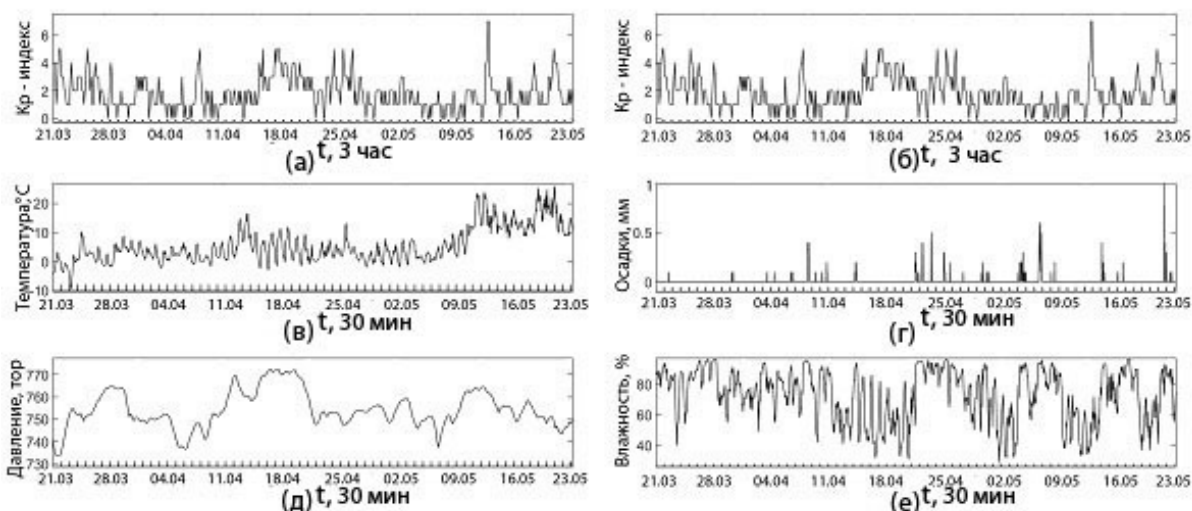


Рис. 5. Показания Кр-индекса (а, б), температуры воздуха (в), осадков (г), атмосферного давления (д), влажности (е)  
 Fig. 5. Readings of Kp-index (а, б), air temperature (в), precipitation (г), atmospheric pressure (д) and humidity (е)

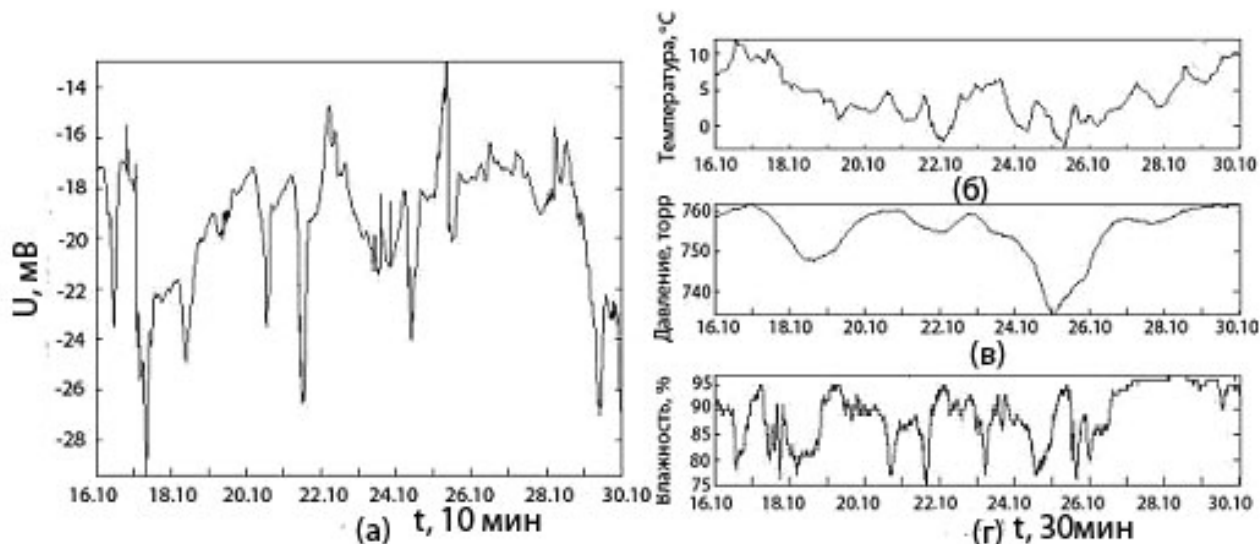


Рис. 6. Изменение разности потенциалов сосны (а) и метеопараметров (б–г) 16–29.10.2022  
 Fig. 6. Progress in the potential difference of a pine (а) and meteorological parameters (б–г) 16–29.10.2022

Несмотря на многолетние исследования, изучение реакции растений на грозу остается актуальным [7]. В ответе разности электрических потенциалов на рис. 2 (а) на грозу 19 сентября 2017 г. помимо зашкаливающих электрических импульсов наблюдалось предшествовавшее грозе колебание и последующее исчезновение суточного пика транспирации. Колебание можно объяснить кружением грозового очага, исчезновение транспирации – интенсивными осадками (б) и относительной влажностью, близкой к 100 процентам (в). Понижение температуры (г), атмосферного давления (д) во время грозы вызвано экранированием солнечной радиации и осадками. Снижение геомагнитной активности (рис. 3, а–в) в послегрозовую период можно рассматривать как результат релаксирующего воздействия спрайтов молний на ионосферу и магнитосферу Земли [16], так и общей слабо возмущенной картины изменения глобального Кр-индекса (г).

Высокая сосна с большим межэлектродным расстоянием оказалась удобным объектом для изучения влияния на ее биоэлектрическую активность феноменов космической погоды. Соответствие отрицательных бухт маркерам магнитных бурь в ходе разности электрических потенциалов сосны (рис. 4) аналогично существованию бухт магнитных бурь во временной зависимости геоэлектрического поля [11]. Увеличение геомагнитной активности во время магнитной бури происходит в результате цепочки процессов, вызванных ростом магнитного поля Солнца, вспышками, эруптивными

выбросами солнечных космических лучей. Достигнув Земли, эти потоки заряженных частиц взаимодействуют с ионосферой, возмущают геомагнитное поле и практически не влияют на электропроводность нижних слоев атмосферы. Напротив, энергичные галактические космические лучи проникают в нижние слои атмосферы и создают аэрозоли по всей ее толще, увеличивая ее электропроводность. Во время магнитных бурь галактические космические лучи сильнее отклоняются магнитным полем Солнца (Форбуш-понижение [11]). Соотношение вклада этих двух компонентов в атмосферу Земли меняется в пользу солнечных космических лучей, усиливающих электрическое поле Земли, что подтверждают отрицательные бухты разности электрических потенциалов (рис. 4).

Близость временных нарушений регулярности метеорологических параметров атмосферы и больших значений индекса Кр (рис. 5) интерпретируется следующим образом. Интенсивные солнечные вспышки во время магнитных бурь, сопровождающиеся усилением радиации в ближней ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной частях спектра, считаются источниками дополнительного тепла, поступающего в нижние слои атмосферы. Это тепло вызывает аномальное повышение температуры (особенно ночью), влажности, способствует образованию облаков, осадков и гроз. Графики на рис. 5 в целом подтверждают наблюдения за метеорологическими параметрами во время магнитных бурь, выполненные в геофизической обсерватории Паратунка, за

исключением отрицательного суточного перепада атмосферного давления на вторые сутки после геомагнитной бури [11].

Кратковременная аномалия космической погоды создается солнечным затмением. Частичное солнечное затмение 25 октября 2022 года наблюдалось на большой территории Земли, в том числе на северо-западе России. В разности электрических потенциалов сосны эффект затмения представлен сигналом, состоящим из двух коротких импульсов положительной и отрицательной полярности соответственно (рис. 6, а). Загораживая часть солнечного диска, Луна экранирует поток солнечных космических лучей, не затрагивая галактические космические лучи. Связанное с этим ослабление электрического поля Земли в разности электрических потенциалов сосны на рисунке 6 (а) фиксируется положительным импульсом. С выходом Земли из лунной тени соотношение глобальных ионизаторов восстанавливается. Однако усиление геоэлектрического поля происходит при новых значениях метеорологических параметров, поскольку затмение сопровождалось недостатком тепла в оптическом диапазоне, что вызвало падение температуры примерно на 6 °С (б) и атмосферного давления (в), повышение влажности (в). В разности электрических потенциалов сосны эта фаза процесса выражена отрицательным импульсом.

В заключение раздела перечислим известные механизмы действия электрических полей на растения [7]. По одному из них, электрическое поле облегчает проникновение ионов кальция через мембраны в клетки, тем самым увеличивая скорость метаболизма, ферментации, роста клеток. Растения, по-видимому, используют сильные электростатические поля дождя и грозы как сигнал к быстрой утилизации дождя. Уже через несколько часов после грозы рост растений ускоряется. По мнению А. Л. Чижевского, электрическое поле способствует поглощению деревом положительных ионов воздуха, например положительного иона  $CO_2$ , необходимого для фотосинтеза. Токи, протекающие через почву, ионизируют ее, вызывая активацию микроорганизмов и разложение веществ. В результате ускоряются химические и биохимические реакции, перенос влаги и превращение веществ в легкоусвояемые растениями формы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По данным измерений аппаратно-программных комплексов геофизической обсерватории «Петрозаводск» и Ботанического

сада ПетрГУ с привлечением базы данных Кр-индекса глобальной геомагнитной активности построены и проанализированы временные ряды разности электрических потенциалов вдоль ствола сосны, геомагнитных и метеорологических параметров за период 01.01.2017–31.12.2022 гг. Интерпретация данных биоэлектрической активности сосны проведена в предположении определяющей роли вертикальной компоненты геоэлектрического поля в формировании разности электрических потенциалов вдоль ствола.

Временной ход разности потенциалов зависит от сезона и типа осадков. Весенне-осенний режим, имеющий суточный цикл, связан с транспирацией – перемещением воды и соков от корней к верхним частям дерева с последующим испарением. Дожди понижают тренд временного хода разности потенциалов, осадки в виде снега и тумана увеличивают его. Влияние грозы на разность потенциалов сосны проявилось в предшествующих колебаниях, подавлении суточного пика транспирации, характерном изменении метеопараметров и послегрозовом снижении геомагнитной активности. Феномены космической погоды – магнитные бури и солнечное затмение – действуют на временной ход разности электрических потенциалов сосен аналогично их влиянию на электрическое поле Земли.

Неполнота используемого подхода в биологическом плане связана с выделением одной физической величины разности электрических потенциалов вдоль ствола сосны и анализом ее связей. Направлением его совершенствования, учитывая разнообразие физиологических процессов в деревьях, могло бы стать использование технологий IoT на базе Интернета вещей [17] и беспроводных устройств Tree Talker [18], позволяющих сканировать разнообразные процессы жизнедеятельности дерева, потоки вещества, фотосинтез, рост диаметра ствола, обеспечивающих оперативную обработку и передачу данных. В настоящее время эти технологии активно внедряются в научные и практические исследования [6].

*Автор выражает благодарность сотрудникам Петрозаводского государственного университета Алексею Прохорову и Алексею Кабонену за возможность использовать метеорологические данные.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бурьнин Д. А., Смирнов А. А., Прошкин Ю. А., Качан С. А., Долгалев А. П. Диагностика на фабриках растений: обзор неинвазивных методов мониторинга состояния расте-

ний для закрытых регулируемых агроэкосистем // *Агроинженерия*. 2022. Т. 24, № 6. С. 70–75. doi: 10.26897/2687-1149-2022-6-70-75

2. *Голиков Д. Ю., Монтиле А. А., Шавнин С. А.* Сезонные динамики электрического импеданса и электроемкости прикамбиального комплекса тканей ствола деревьев сосны обыкновенной, произрастающих в древостое естественного происхождения // *Вестник Поволжского государственного технологического университета*. Серия: Лес. Экология. Природопользование. 2022. № 4(56). С. 19–31. doi: 10.25686/2306-2827.2022.4.19

3. *Карасев В. Н., Карасева М. А., Мухортов Д. И.* Диагностика физиологического состояния хвойных деревьев по биоэлектрическим и температурным показателям // *Лесоведение*. 2020. Т. 2. С. 162–174. doi: 10.31857/S0024114820010088

4. *Лаборатория «Рентгеновская астрономия Солнца» ФИАН* [Электронный ресурс]. URL: [https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id\\_level=786](https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id_level=786) (дата обращения: 11.04.2024).

5. *Морозов В. А.* Комплекс для регистрации биопотенциалов растений: Дис. ... канд. техн. наук. Ижевск, 2005. 165 с.

6. *ПетрГУ* внедряет инновационные устройства IoT мониторинга состояния деревьев // *Инновации и предпринимательство*. Петрозаводский государственный университет [Электронный ресурс]. URL: <https://ie.petrSU.ru/news/el/4580/> (дата обращения: 11.04.2024).

7. *Понятов А.* Сложная судьба электрокультуры // *Наука и жизнь*. 2020. № 8. URL: <https://www.nkj.ru/archive/articles/39234/> (дата обращения: 11.04.2024).

8. *Пулинец С. А., Узунов Д. П., Давиденко Д. В., Дудкин С. А., Цадиковский Е. И.* Прогноз землетрясений возможен?! М.: Тривант, 2014. 144 с.

9. *Пятыгин С. С.* Распространяющиеся электрические сигналы в растениях // *Цитология*. 2008. Т. 50, № 2. С. 154–159.

10. *Сергушин П. А.* Магнитовариометр как средство измерения магнитных полей // *Вестник ИТМО*. 2006. Т. 6, № 5. С. 173–175.

11. *Смирнов С. Э.* Вариации электрического поля Земли в сейсмоактивном регионе как индикаторы сильных землетрясений и эруптивных явлений на Солнце: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Петропавловск-Камчатский, 2018. 259 с.

12. *Шаров Н. В.* Геофизическая обсерватория «Петрозаводск» // *Труды Карельского научного центра РАН*. 2014. № 1. С. 169–171.

13. *Communication in plants: Neuronal aspects of plant life* / Eds. F. Baluška, S. Mancuso, D. Volkmann. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 438 p.

14. *Davis Vantage Pro2 Plus weather station* // *Метеостанция.ру* [Электронный ресурс]. URL: <http://www.meteo-station.ru/goods/davis-vantage-pro-2-plus-6162eu.html> (дата обращения: 11.04.2024).

15. *Fromm J., Lautner S.* Electrical signals and their physiological significance in plants // *Plant Cell Environ.* 2007. Vol. 30. P. 249–257. doi: 10.1111/j.1365-3040.2006.01614.x

16. *Surkov V. V., Hayakawa M.* Progress in the study of transient luminous and atmospheric events: a review // *Surv. Geophys.* 2020. Vol. 41. P. 1101–1142. doi: 10.1007/s10712-020-09597-2

17. *Upadrista V.* IoT standards with blockchain. CA: Apress. Berkeley, 2021. P. 25–41.

18. *Valentini R., Marchesini L. B., Gianelle D., Sala G., Yaroslavtsev A., Vasenev V. I., Castaldi S.* New tree monitoring systems: from Industry 4.0 to Nature 4.0 // *Ann. Silvicult. Res.* 2019. Vol. 43, no. 2. P. 84–88. doi: 10.12899/asr-1847

19. *Wieser G., Gruber A., Oberhuber W.* Growing season water balance of an inner alpine Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) forest // *IForest*. 2018. Vol. 11. P. 469–475. doi: 10.3832/ifer2626-011

## REFERENCES

1. *Burynin D. A., Smirnov A. A., Proshkin Yu. A., Kachan S. A., Dolgalev A. P.* Screening in plant factories: a review of non-invasive plant monitoring techniques for closed regulated agroecosystems. *Agroinzheneriya = Agricultural Engineering (Moscow)*. 2022;24(6):70–75. doi: 10.26897/2687-1149-2022-6-70-75 (In Russ.)

2. *Golikov D. Yu., Montile A. A., Shavnin S. A.* Seasonal dynamics of electrical impedance and electrical capacitance of the pre-cambial complex of tissues in the trunks of Scots pine trees growing in a natural forest stand. *Vestnik PGTU. Ser. Les. Ekologiya. Prirodopol'zovanie = Vestnik of Volga Tech. Ser. Forest. Ecology. Nature Management*. 2022;4(56):19–31. doi: 10.25686/2306-2827.2022.4.19 (In Russ.)

3. *Karasev V. N., Karaseva M. A., Mukhortov D. I.* Coniferous trees bioelectric and temperature diagnostics. *Lesovedenie = Forest Science*. 2020;2:162–174. doi: 10.31857/S00241148 20010088 (In Russ.)

4. *Laboratory of X-ray astronomy of the sun, LPI RAS*. URL: [https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id\\_level=786](https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id_level=786) (accessed: 11.04.2024). (In Russ.)

5. *Morozov V. A.* A complex for recording plant biopotentials: PhD (Cand. of Tech.) thesis. Izhevsk; 2005. 165 p. (In Russ.)

6. *PetrSU* is introducing innovative IoT devices for monitoring the condition of trees. *Innovation and Entrepreneurship. Petrozavodsk State University*.

URL: <https://ie.petrus.ru/news/el/4580/> (accessed: 11.04.2024). (In Russ.)

7. *Ponyatov A.* The complex fate of electroculture. *Nauka i zhizn' = Science and Life.* 2020;8. URL: <https://www.nkj.ru/archive/articles/39234/> (accessed: 11.04.2024). (In Russ.)

8. *Pulinets S. A., Uzunov D. P., Davidenko D. V., Dudkin S. A., Tsadikovskiy E. I.* Is earthquake forecast possible?! Moscow: Trovant; 2014. 144 p. (In Russ.)

9. *Pyatygin S. S.* Propagated electrical signals in plants. *Citologiya = Cytology.* 2008;50(2):154–159. (In Russ.)

10. *Sergushin P. A.* Magnetovariometer as a means of measuring magnetic fields. *Vestnik ITMO = Proceedings of ITMO.* 2006;6(5):173–175. (In Russ.)

11. *Smirnov S. E.* Variations of the Earth's electric field in a seismically active region as indicators of strong earthquakes and eruptive phenomena on the Sun: DSc (Dr. of Phys.-Math.) thesis. Petropavlovsk-Kamchatskii; 2018. (In Russ.)

12. *Sharov N. V.* Petrozavodsk Geophysical Observatory. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2014;1:169–171. (In Russ.)

13. *Baluška F., Mancuso S., Volkmann D. (eds.)*. Communication in plants: Neuronal aspects of plant life. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag; 2006. 438 p.

14. *Davis Vantage Pro2 Plus* weather station. *Meteo-station.ru.* URL: <http://www.meteo-station.ru/goods/davis-vantage-pro-2-plus-6162eu.html> (accessed: 11.04.2024).

15. *Fromm J., Lautner S.* Electrical signals and their physiological significance in plants. *Plant, Cell and Environ.* 2007;30:249–257. doi: 10.1111/j.1365-3040.2006.01614.x

16. *Surkov V. V., Hayakawa M.* Progress in the study of transient luminous and atmospheric events: a review. *Surv. Geophys.* 2020;41:1101–1142. doi: 10.1007/s10712-020-09597-2

17. *Upadrista V.* IoT standards with blockchain. CA: Apress. Berkeley; 2021. P. 25–41.

18. *Valentini R., Marchesini L. B., Gianelle D., Sala G., Yaroslavtsev A., Vasenev V. I., Castaldi S.* New tree monitoring systems: from Industry 4.0 to Nature 4.0. *Ann. Silvicult. Res.* 2019;43(2):84–88. doi: 10.12899/asr-1847

19. *Wieser G., Gruber A., Oberhuber W.* Growing season water balance of an inner alpine Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) forest. *IForest.* 2018;11:469–475. doi: 10.3832/ifer2626-011

Поступила в редакцию / received: 11.04.2024; принята к публикации / accepted: 27.04.2024.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Белашев Борис Залманович**

д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник

*e-mail: belashev@krc.karelia.ru*

## CONTRIBUTOR:

**Belashev, Boris**

Dr. Sci. (Tech.), Leading Researcher

УДК 004.01:006.72 (470.22)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СУТОЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЛН В ЛЕСНЫХ ПЕСЧАНЫХ ПОЧВАХ

К. В. Грудова

*Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

В контексте проблемы анализа антропогенного воздействия углекислого газа на окружающую среду возникает потребность в исследовании динамики почвенного углерода. Тепловые параметры (теплоемкость, теплопроводность и температуропроводность) оказывают существенное влияние на почвообразование и важны для расчета переноса и продуцирования  $CO_2$ . Учитывая зависимость этих процессов от текстуры почвы и других различных факторов, актуальной является задача математического описания теплового режима почв для конкретной местности. В данной работе предлагается модель суточного колебания температурной волны для лесных песчаных почв Восточной Финноскандии в предположении неоднородности среды. Для проверки ее применения реальные температурные измерения сравниваются с результатами моделирования предложенной модели и модели Чудновского – Нерпина.

**Ключевые слова:** тепловой режим почвы; температуропроводность; невязка; метод наименьших квадратов

Для цитирования: Грудова К. В. Моделирование суточных колебаний температурных волн в лесных песчаных почвах // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 15–22. doi: 10.17076/mat1913

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН).

### **K. V. Grudova. MODELING DAILY FLUCTUATIONS OF TEMPERATURE WAVES IN FOREST SANDY SOILS**

*Department of Multidisciplinary Scientific Research of Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia,  
Russia)*

The problem of analyzing anthropogenic carbon dioxide impact on the environment necessitates research on the dynamics of soil carbon. Thermal parameters (heat capacity, thermal conductivity and thermal diffusivity) have a significant effect on soil formation and are essential in estimating  $CO_2$  transfer and production. While these processes depend on soil texture and a number of other factors, a relevant task is to mathematically describe the thermal regime of soils in a specific area. In this paper, we propose a model of daily temperature wave fluctuation for the

forest sandy soils of Eastern Fennoscandia, assuming the medium is heterogeneous. It is tested by comparing real temperature measurements with the simulation results produced by the model proposed here and the Chudnovsky – Nerpin model.

**Key words:** soil thermal regime; thermal diffusivity; residual; least squares method

**For citation:** Grudova K. V. Modeling daily fluctuations of temperature waves in forest sandy soils. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2024;4:15–22. doi: 10.17076/mat1913

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Department for Multidisciplinary Research KarRC RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Тепловые параметры грунта являются существенным фактором почвообразования и важны для расчета переноса и продуцирования  $CO_2$ , что, в свою очередь, вызывает интерес в контексте анализа влияния антропогенных факторов на изменения глобальных биосферных процессов. Существует большой объем экспериментальных данных, описывающих влияние температуры на динамику газовой фазы почв [1, с. 10] (температура влияет на гидрофизические характеристики, определяет скорости протекания внутрпочвенных реакций, активность почвенной биоты и др.).

Под «тепловым режимом» понимаются процессы поступления, перераспределения и расхода тепла в почве и на ее границах. А под «температурным режимом» почвы – порождаемая этими процессами динамика температуры на поверхности и в почвенном профиле (в различных слоях почвы) [7, с. 330].

Одной из главных проблем в науке о теплообмене почв является умение находить, анализировать, строить прогноз и даже регулировать все элементы теплового режима почв [5, с. 7]. Отсюда возникает комплекс различных задач математической физики, таких как теоретическое описание теплового режима почв; выявление причин его изменения в различных условиях; оценка факторов, влияющих на динамику теплового режима, и др. Математическое моделирование и прогноз распределения температуры по профилю почвы нужны как для практической агрофизики [8, 11–14], так и при проведении фундаментальных исследований в области почвоведения, в частности, в условиях глобального изменения климата [10, с. 70]. При стандартных исследованиях почв в первую очередь определяются их основные (базовые) свойства (плотность, пористость, содержание органического вещества, влажность и др.), поэтому они известны для большин-

ства случаев. Однако экспериментальные данные по тепловым параметрам почв (теплоемкость, теплопроводность и температуропроводность) имеют весьма разрозненный характер [1, с. 14–15]. Зависимость параметров от базовых свойств затрудняет их оценку. Отметим, что эти параметры играют существенную роль в процессе моделирования температурных волн. Поэтому большое количество работ посвящены разработке различных методов оценки тепловых параметров почв с использованием полевых данных о температуре почвы [2, 9].

Задача моделирования распределения температуры по профилю почвы сводится к нахождению решения уравнения теплопроводности с учетом изменчивости тепловых параметров почв. Кроме того, в связи с многообразием почв и условий их жизненного цикла возникает необходимость более пристального внимания к математическому описанию теплового режима почв для конкретно взятой местности. В данной работе автор использует следующие предположения: исследуется песчаная почва, покрытая лесной подстилкой, рассматривается погожий летний день в конце июля в основном лесу Восточной Фенноскандии. Колебания температуры затрагивают, по существу, лишь примерно полуметровый корнеобитаемый подповерхностный слой почвы, где из-за физико-химических процессов разложения органических веществ и жизнедеятельности микроорганизмов происходит в основном активное дыхание и продуцирование  $CO_2$ .

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания распространения температурных волн в почвенном профиле используется уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial(c_v(t, z)T(t, z))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(t, z) \cdot \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right), \quad (1)$$



где  $T(t, z)$  ( $[T] = \text{K}$ ) – температура почвы в момент времени  $t$  ( $[t] = \text{с}$ ) на глубине  $z$  ( $[z] = \text{м}$ ),  $c_v(t, z)$  – объемная теплоемкость ( $[c_v] = \text{Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$ ),  $\lambda(t, z)$  – теплопроводность ( $[\lambda] = \text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ ).

В [10, с. 78–80] рассматриваются различные зависимости  $c_v(t, z)$ ,  $\lambda(t, z)$  от времени и глубины и их влияние на вид уравнения теплопроводности. В упрощенном варианте предполагается, что почва является однородной средой, для которой характерно постоянство величин  $c_v$ ,  $\lambda$  [3, с. 166]. Кратко рассмотрим решение уравнения теплопроводности в случае однородности среды. Вводится коэффициент температуропроводности  $\chi$  ( $[\chi] = \text{м}^2 \cdot \text{с}$ ), связанный с  $\lambda$  и  $c_v$  соотношением  $\chi = \lambda/c_v$ . Уравнение (1) записывается в виде:

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2}, \quad (2)$$

где  $\chi$  является постоянной величиной. Рассмотрим суточный ход температуры. Температура почвы обладает периодичным характером. Она колеблется вокруг некоторого среднего значения, которое можно принять равным нулю, если условиться отсчитывать от него температуру. Рассмотрим комплексную функцию

$$T = T_0 e^{i(\omega t - \alpha z)}, \quad (3)$$

где  $T_0$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  – постоянные. Подставим это выражение в уравнение (2) и после преобразований получим:

$$i\omega = -\alpha^2 \chi, \\ \alpha = \sqrt{-i\omega/\chi} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Таким образом, уравнение (2) имеет два решения вида (3):

$$T = T_0 e^{i(\omega t \mp \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z)} \cdot e^{\mp \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z},$$

которые отличаются знаком при  $\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$ . Колебания температуры начинают возбуждаться на поверхности почвы и передаются внутрь ее. По мере удаления от поверхности среды они должны затухать. Учитывая эти условия, оставляем  $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z}$ . Далее от комплексного решения переходим к двум вещественным, воспользовавшись формулой Эйлера и выделяя вещественную и мнимую часть. Полученные решения будут однотипны, мы остановимся на следующем:

$$T(t, z) = T_0 \exp\{-\alpha z\} \\ \times \cos\{\omega t - \alpha z\}, \quad \alpha \equiv \sqrt{\omega[2\chi]^{-1}}, \quad (4)$$

где  $T_0$  – амплитуда колебаний (будет невелика, так как лесная подстилка оказывает демпфирующее влияние);  $\omega$  – соответствующая частота;  $\alpha$  – коэффициент затухания температурных волн ( $[\alpha] = \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ );  $\chi$  – коэффициент температуропроводности;  $T(t, z)$  – аппроксимация температуры в дневном диапазоне.

Таким образом, мы получили «классическое решение» уравнения теплопроводности. Однако в реальности почва представляет собой более сложную слоистую структуру. Исследования показывают, что в течение суток и даже месяца коэффициент теплопроводности колеблется незначительно, но всегда следует учитывать глубинную изменчивость теплофизических характеристик почв, поэтому в суточном диапазоне достаточно рассматривать зависимости  $c_v(z)$  и  $\lambda(z)$  от глубины  $z$  [6, с. 262–263]. Предположим, что  $c_v$  постоянна, а  $\lambda$  имеет линейную зависимость  $\lambda(z) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot z$ . В этом случае можно ввести коэффициент температуропроводности  $\chi(z) = \chi_0 + \chi_1 \cdot z$  ( $[\chi] = \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ), связанный с  $c_v$  и  $\lambda$  соотношением  $\chi(z) = \lambda(z)/c_v$ , и уравнение (1) переписывается в виде:

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \cdot \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right), \quad (5) \\ z \in (0, H), \quad t \in [0, t_d], \\ T(t, 0) = \varphi^*(t), \quad T(t, H) = T_H,$$

где  $\varphi^*(t)$  – температурный ход на поверхности;  $t_d$  – количество секунд в сутках, равное  $86,4 \times 10^3$  сек;  $H$  – глубина, на которой суточные колебания отсутствуют и температура является постоянной величиной  $T_H$  ( $\approx 70 - 100$  см).  $T_H$  и  $\varphi^*(t)$  определяются путем полевых измерений.

### Модель Чудновского – Нерпина

Кратко рассмотрим решение уравнения (5), предложенное в работе [6, с. 263–273]. Температура представляется в виде суммы среднесуточной температуры почвы  $\bar{T}(z)$  и отклонения от среднесуточного значения  $\theta(t, z)$ :

$$T_{Ch}(t, z) = \bar{T}(z) + \theta(t, z).$$

Граничные условия задаются аналогично уравнению (5):  $T_{Ch}(t, 0) = \varphi^*(t)$  и  $T_{Ch}(t, H) = \bar{T}(H) = T_H$ .

По смыслу задачи среднесуточная температура не зависит от времени в течение суток и  $\bar{T}(z)$  описывается уравнением стационарного режима:

$$\frac{d}{dz} \left( \chi(z) \cdot \frac{d\bar{T}(z)}{dz} \right) = 0.$$

При условии линейности коэффициента  $\chi(z) = \chi_0 + \chi_1 \cdot z$  решение уравнения получим в аналитическом виде:

$$\bar{T}(z) = \frac{C_1}{\chi_1} \cdot \ln(\chi(z)) + C_2, \quad C_1, C_2 - \text{const.}$$

Используя граничные условия, найдем среднесуточное значение температуры на поверхности  $\bar{T}(0) = T_0$  как среднее значение  $\varphi^*(t)$ . Зная  $T_0$  и  $T_H$ , определим значение  $C_1, C_2$ :

$$C_1 = \frac{\chi_1(T_H - T_0)}{\ln(\chi_H) - \ln(\chi_0)},$$

$$C_2 = \frac{T_0 \ln(\chi_H) - T_H \ln(\chi_0)}{\ln(\chi_H) - \ln(\chi_0)},$$

где  $\chi_H = \chi_0 + \chi_1 \cdot H$ .

Задача остается нестационарной для среднесуточного отклонения температуры:

$$\frac{\partial \theta(t, z)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \cdot \frac{\partial \theta(t, z)}{\partial z} \right),$$

с граничными условиями:

$$\theta(t, 0) = \varphi(t) = \varphi^*(t) - T_0, \quad \theta(t, H) = 0.$$

Предполагается, что  $\chi(z)$  меняется линейно до некоторой глубины  $h_z$  (приблизительно 20–30 см), а ниже  $h_z$  становится постоянным.

Колебание суточной температуры (т. е. отклонение от среднесуточных значений) имеет периодический характер. Таким образом, полагаем на поверхности:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n \cos(n\omega t) + \bar{\varphi}_n \sin(n\omega t)),$$

и решение ищется в виде:

$$\theta(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_n(z) \cos(n\omega t) + \bar{\theta}_n(z) \sin(n\omega t)),$$

где  $\omega$  – круговая частота вращения Земли вокруг оси, равная  $7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ;  $\varphi_n, \bar{\varphi}_n, \theta_n(z), \bar{\theta}_n(z)$  – амплитудные значения  $\varphi$  и  $\theta$  соответственно на поверхности и в глубине почвы. Вводятся комплексные функции  $\varphi_n^* = \varphi_n + i\bar{\varphi}_n$ ,  $\theta_{n1}^*(z) = \theta_{n1}(z) + i\bar{\theta}_{n1}(z)$  (для верхнего слоя  $0 \leq z \leq h_z$ ) и  $\theta_{n2}^*(z) = \theta_{n2}(z) + i\bar{\theta}_{n2}(z)$  (для нижнего слоя  $h_z \leq z \leq H$ ). Таким образом получается система из двух уравнений:

$$\frac{d}{dz} \left[ \chi(z) \frac{d\theta_{n1}^*(z)}{dz} \right] = -in\omega\theta_{n1}^*(z),$$

$$\chi_H \frac{d^2\theta_{n2}^*(z)}{dz^2} = -in\omega\theta_{n2}^*(z).$$

Граничные условия в таком случае запишутся в виде:

$$\theta_{n1}^*(0) = \varphi_n^*, \quad \theta_{n1}^*(h_z) = \theta_{n2}^*(h_z),$$

$$\left. \frac{d\theta_{n1}^*(z)}{dz} \right|_{z=h_z} = \left. \frac{d\theta_{n2}^*(z)}{dz} \right|_{z=h_z}, \quad \theta_{n2}^*(H) = 0.$$

Решение системы можно представить в виде:

$$\theta_{n1}^*(z) = C_n^{(1)} I_0(Z(z)) + C_n^{(2)} K_0(Z(z)),$$

$$\theta_{n2}^*(z) = D_n \frac{e^{-(z-h_z)\alpha_n^*} - e^{-(2H-h_z-z)\alpha_n^*}}{1 - e^{-2(H-h_z)\alpha_n^*}},$$

$$Z(z) = 2\sqrt{-in\omega\chi(z)}/\chi_1, \quad \alpha_n^* = \sqrt{-in\omega/\chi_H}.$$

$C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n$  – постоянные, определяющиеся из граничных условий. Полагая  $1 - e^{-2(H-h_z)\alpha_n^*} \approx 1$  (т. е.  $e^{-2(H-h_z)\alpha_n^*} \approx 0$ ), с учетом основных свойств функций Бесселя и Макдональда и граничных условий получим:

$$C_n^{(1)} = \frac{\varphi_n^*}{d^*} [K_1(Z_H) - K_0(Z_H)],$$

$$C_n^{(2)} = \frac{\varphi_n^*}{d^*} [I_1(Z_H) + I_0(Z_H)],$$

$$D_n = \frac{\varphi_n^*}{d^*} [I_0(Z_H) K_1(Z_H) + I_1(Z_H) K_0(Z_H)],$$

$$d^* = K_0(Z_0) [I_1(Z_H) + I_0(Z_H)] + I_0(Z_0) \times [K_1(Z_H) - K_0(Z_H)],$$

где  $Z_0 = Z(0)$ ,  $Z_H = Z(H)$ , а  $I_0, K_0, I_1, K_1$  – функции Бесселя и Макдональда нулевого и первого порядка. Используя их свойства, упростим  $D_n$ :

$$I_0(Z_H) K_1(Z_H) + I_1(Z_H) K_0(Z_H)$$

$$= -I_0(Z_H) K_0'(Z_H) + I_0'(Z_H) K_0(Z_H)$$

$$= -W [I_0(Z_H), K_0(Z_H)].$$

Мы получили Вронскиан, значение которого известно:  $W [I_0(Z_H), K_0(Z_H)] = -Z_H^{-1}$ . В итоге для коэффициентов  $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n$  получим:

$$C_n^{(1)} = D_n Z_H [K_1(Z_H) - K_0(Z_H)],$$

$$C_n^{(2)} = D_n Z_H [I_1(Z_H) + I_0(Z_H)],$$

$$D_n = \frac{\varphi_n^*}{Z_H} \cdot [I_0(Z_0) [K_1(Z_H) - K_0(Z_H)] + K_0(Z_0) [I_1(Z_H) + I_0(Z_H)]]^{-1}.$$

### Упрощенный метод решения

В классических исследованиях решения находятся с помощью функций Бесселя и Макдональда нулевого и первого порядков [6, с. 264–268]. Предложим другой метод нахождения приближенного решения уравнения на основе решения в случае однородности среды. Как

было отмечено выше, при постоянном значении  $\chi$  решением уравнения теплопроводности (2) является функция:

$$T(t, z) = T_0 e^{i(\omega t - \alpha z)} \cdot e^{-\alpha z}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Подставим  $\chi(z) = \chi_0 + \chi_1 \cdot z$  вместо  $\chi = \text{const}$ . Получим функцию  $\hat{T}(t, z)$ , которая не является решением исходного уравнения:

$$\hat{T}(t, z) = T_0 e^{i(\omega t - \alpha(z)z)} \cdot e^{-\alpha(z)z}, \quad (6)$$

$$\alpha(z) = \sqrt{\frac{\omega}{2(\chi_0 + \chi_1 \cdot z)}}.$$

Функцию (6) подставим в уравнение (5) и подсчитаем невязку. Начнем с левой части:

$$\frac{\partial \hat{T}(t, z)}{\partial t} = T_0 e^{-\alpha(z)z} i \omega e^{i(\omega t - \alpha(z)z)}.$$

Для краткости записи выкладок в дальнейшем будут использоваться обозначения:  $\hat{\alpha} \equiv \alpha(z)$ ,  $e_1 \equiv e^{i(\omega t - \alpha(z)z)}$  и  $e_2 \equiv e^{-\alpha(z)z}$ . Перейдем к правой части уравнения (5). Посчитаем первую производную:

$$\frac{\partial \hat{T}(t, z)}{\partial z} = -T_0 e_1 e_2 (\hat{\alpha}' \cdot z + \hat{\alpha}) (i + 1),$$

$$\hat{\alpha}' = -\chi_1 \cdot \sqrt{\omega / (2\chi(z))}^3.$$

В результате для правой части уравнения (5) получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \frac{\partial \hat{T}(t, z)}{\partial z} \right) = -T_0 (i + 1) e_1 e_2$$

$$\times (\chi_1 A - \chi(z) A^2 (i + 1) + \chi(z) A'),$$

$$A = \hat{\alpha}' z + \hat{\alpha}, \quad A' = \hat{\alpha}'' z + 2\hat{\alpha}',$$

$$\hat{\alpha}'' = 3\chi_1^2 \sqrt{\frac{\omega}{(2\chi(z))}^5}.$$

Упростим слагаемые:

$$(i + 1)\chi(z)A^2 = (i + 1)\frac{\omega}{8} \left( 2 - \frac{z\chi_1}{\chi(z)} \right)^2,$$

$$\chi(z)A' = -\chi_1 \left( \frac{3}{2} z \hat{\alpha}' + \hat{\alpha} \right),$$

для правой части уравнения (5) окончательно получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \cdot \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right) = T_0 (i + 1) e_1 e_2$$

$$\times \left( \frac{1}{2} \chi_1 \hat{\alpha}' z + (i + 1) \frac{\omega}{8} \left( 2 - \frac{z\chi_1}{\chi(z)} \right)^2 \right).$$

Определим невязку  $\zeta(t, z)$ :

$$\zeta(t, z) \equiv \frac{\partial \hat{T}(t, z)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(z) \cdot \frac{\partial \hat{T}(t, z)}{\partial z} \right)$$

$$= T_0 e_1 e_2 z \chi_1 \left( \frac{i\omega(4\chi(z) - z\chi_1)}{4\chi^2(z)} - \frac{(i + 1)}{2} \hat{\alpha}' \right).$$

Нетрудно убедиться, что при  $\chi_1 = 0$  (случай однородности среды) невязка обратится в ноль.

Перейдем от комплексного значения к вещественному. Для функции (4) с подстановкой  $\chi(z)$  вместо  $\chi = \text{const}$  получим невязку:

$$\zeta(t, z) = T_0 e^{-\hat{\alpha}z} z \chi_1 \left( -\frac{\hat{\alpha}'}{2} \cos(\omega t - \hat{\alpha}z) \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\hat{\alpha}'}{2} - \frac{\omega(4\chi(z) - z\chi_1)}{4\chi^2(z)} \right) \sin(\omega t - \hat{\alpha}z) \right).$$

Оценим величину невязки. Для этого построим и сравним график  $\zeta(t, z)$  с графиком  $\partial_t \hat{T}(t, z)$ . На рис. 1 наглядно показано, что величина невязки  $\zeta(t, z)$  достаточно мала в сравнении со значением  $\partial_t \hat{T}(t, z)$  для различных глубин. Отношение  $\zeta(t, z) / \partial_t \hat{T}(t, z) < 0, 14$ .

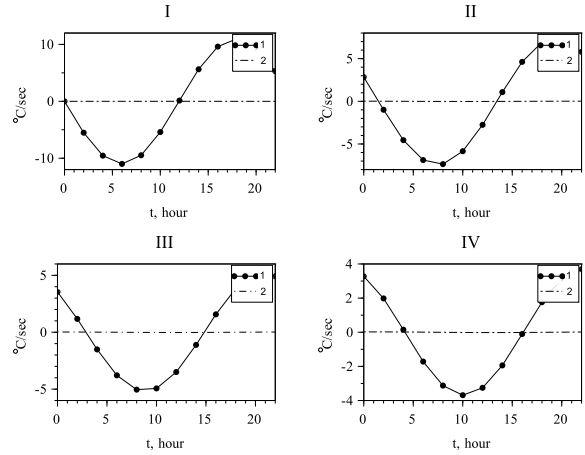


Рис. 1. Сравнение графиков  $\partial_t \hat{T}(t, z)$  (1) и  $\zeta(t, z)$  (2) для глубин: 0 (I), 5 (II), 10 (III), 15 (IV) см  
Fig. 1. Comparison of graphs  $\partial_t \hat{T}(t, z)$  (1) and  $\zeta(t, z)$  (2) for depths: 0 (I), 5 (II), 10 (III), 15 (IV) cm

## СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Оценим рассогласование двух моделей. С помощью модели Чудновского–Нерпина сгенерируем суточные колебания температурных волн на глубине 0, 5, 10 и 15 см со значениями  $\chi_0 = 54 \times 10^{-4}$ ,  $\chi_1 = 94 \times 10^{-6}$ . Получили «экспериментальные» температурные показатели  $T_{ch}(t, z)$ . Условно «забудем» значения

коэффициентов  $\chi_0$ ,  $\chi_1$  и найдем их методом наименьших квадратов (МНК):

$$S \equiv \sum_{i,j} [(\hat{T}(t_i, z_j) - T_{Ch}(t_i, z_j))^2 + \beta \zeta^2(t_i, z_j)] \rightarrow \min_{\chi_0, \chi_1}, \quad \beta \geq 0.$$

В результате работы МНК (см. рис. 2) минимальное значение  $S = 0,6814$  было получено при  $\chi_0 = 51 \times 10^{-4}$ ,  $\chi_0 = 93 \times 10^{-6}$ , что практически совпадает с исходными значениями.

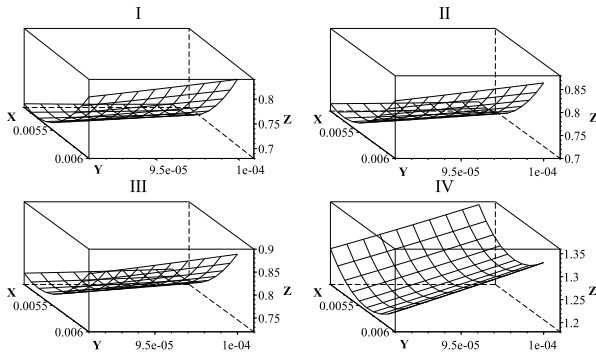


Рис. 2. Зависимость  $S$  (ось  $Z$ ) от значения  $\chi_0$  (ось  $X$ ) и  $\chi_1$  (ось  $Y$ ) для различных  $\beta$ : 0 (I), 50 (II),  $10^2$  (III),  $10^3$  (IV)

Fig. 2. Dependence of  $S$  ( $Z$  axis) on the value of  $\chi_0$  ( $X$  axis) and  $\chi_1$  ( $Y$  axis) for various  $\beta$ : 0 (I), 50 (II),  $10^2$  (III),  $10^3$  (IV)

Стоит отметить, что вариация  $\beta$  не сильно повлияла на результат работы МНК. Так, например, при  $\beta = 0$  и  $\beta = 50$  разница в значении  $S$  составила  $26 \times 10^{-3}$ . Данный результат подтверждает, что значение невязки достаточно мало и предложенную модель с подстановкой  $\chi(z)$  вместо  $\chi = \text{const}$  можно использовать для моделирования температурных кривых.

Моделью Чудновского–Нерпина и моделью с подстановкой  $\chi(z)$  вместо  $\chi = \text{const}$  аппроксимируем измеренные температурные показатели почв (см. табл. 1) и сопоставим результаты аппроксимации. Данные были взяты из двух различных источников: на поверхности [6, с. 272] и на глубине 5 см [4]. При расчетах предположим, что температура на поверхности меняется в течение суток по периодическому закону с одной гармоникой. Температура на нижней границе условно принята за ноль. Методом наименьших квадратов подберем значения параметров  $\chi_0$  и  $\chi_1$  коэффициента температуропроводности для каждой из моделей.

Сопоставим результаты моделирования и измеренные полевые показатели температуры на различных глубинах (см. рис. 3). Из графиков видно, что обе модели дают приблизительно одинаковые значения температурных показателей. А для глубины 5 см модель с подстановкой  $\chi(z)$  вместо  $\chi = \text{const}$  дает лучший результат.

Таблица 1. Суточные колебания температуры ( $T$ ) на различной глубине ( $z$ ). Опытные данные  
Table 1. Daily temperature fluctuations ( $T$ ) at different depths ( $z$ ). Experimental data

| Время $t$ , час<br>Time $t$ , hour | 0   | 2    | 4   | 6    | 8    | 10   | 12   | 14   | 16   | 18   | 20   | 22   |
|------------------------------------|-----|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $T, C^\circ$ ( $z=0$ см)           |     |      |     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| $T, C^\circ$ ( $z=0$ см)           | 2,9 | 1,6  | 2,3 | 9,7  | 15,3 | 18,9 | 22,2 | 24,2 | 22,8 | 19,1 | 11,7 | 8,4  |
| $T, C^\circ$ ( $z=5$ см)           |     |      |     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| $T, C^\circ$ ( $z=5$ см)           | 15  | 13,3 | 10  | 10,8 | 11,2 | 12   | 13,3 | 13,7 | 15,1 | 15,8 | 13,7 | 14,5 |

Вычислим среднеквадратичную ошибку  $S$  для каждой из кривых:

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\sum_i^n \left( \frac{T(t_i, z) - T_e(t_i, z)}{T_e(t_i, z)} \right)^2}{n}},$$

где  $T_e(t, z)$  – измеренные полевые показатели температуры, а вместо  $T(t_i, z)$  подставляем  $T_{Ch}(t_i, z)$  или  $\hat{T}(t_i, z)$ . Рис. 3 и результаты вычислений (табл. 2) подтверждают применимость модели с подстановкой  $\chi(z)$  вместо  $\chi = \text{const}$  в суточном диапазоне.

Таблица 2. Среднеквадратичная ошибка для двух моделей: модель Чудновского–Нерпина (1) и модель с подстановкой  $\chi(z)$  вместо  $\chi = \text{const}$  (2)

Table 2. The standard error for two models: the Chudnovsky–Nerpin model (1) and the model with substitution  $\chi(z)$  instead of  $\chi = \text{const}$  (2)

| Модель<br>Model | $\bar{S}, z = 0$ см<br>$\bar{S}, z = 0$ cm | $\bar{S}, z = 5$ см<br>$\bar{S}, z = 5$ cm |
|-----------------|--|--|
| (1)             | 1,0387                                     | 1,2053                                     |
| (2)             | 1,1936                                     | 1,028                                      |

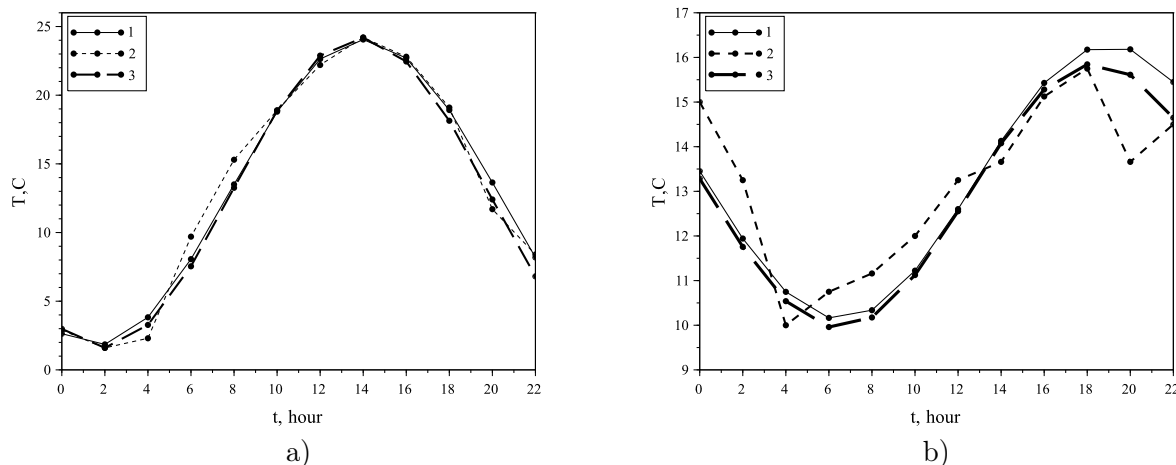


Рис. 3. Аппроксимация показателей температуры (2) моделью Чудновского–Нерпина (1) и моделью с подстановкой  $\chi(z)$  вместо  $\chi = \text{const}$  (3): а) на поверхности, б) на глубине 5 см

Fig. 3. Approximation of temperature indicators (2) by the Chudnovsky–Nerpin model (1) and the model with substitution  $\chi(z)$  instead of  $\chi = \text{const}$  (3): a) on the surface, b) at a depth of 5 cm

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тепловые параметры грунта являются существенным фактором почвообразования и важны для расчета переноса и продуцирования  $CO_2$ . Поэтому их оценке уделяется большое внимание в современных исследованиях.

Лесные песчаные почвы представляют собой слоистую структуру, и следует учитывать глубинную изменчивость теплофизических характеристик почв. Однако в течение суток и даже месяца коэффициент теплопроводности колеблется незначительно. В данной работе рассматривается случай линейной зависимости коэффициента температуропроводности от глубины.

Предложена модель суточного колебания температурной волны для неоднородной среды. Для подтверждения ее применения тепловые волны, оцененные МНК, сравнивались с реальными температурными измерениями и моделью Чудновского–Нерпина.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельская Т. А. Температурный режим комплексного почвенного покрова. М.: ГЕОС, 2012. 282 с.
2. Лапина Л. Э. Метод вычисления коэффициента эффективной температуропроводности по данным измерений температуры почвы // Известия Коми НЦ УрО РАН. 2017. № 2. С. 12–15.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. 5-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005. 544 с.
4. Тарасов П. А., Бакшеева Е. О., Иванов В. А. Исследование влияния мульчирования сплошной вырубке на температуру почвы // Вестник КрасГАУ. 2015. № 8. С. 75–80.
5. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
6. Чудновский А. Ф., Нерпин С. В. Физика почвы. М.: Наука, 1967. 584 с.
7. Шейн Е. В. Курс физики почв. М.: МГУ, 2005. 432 с.
8. Шейн Е. В., Болотов А. Г., Мазиров М. А., Мартынов А. И. Определение профильного распределения температуры почвы на основании температуры ее поверхности // Земледелие. 2018. № 7. С. 26–29. doi: 10.24411/0044-3913-2018-10707
9. Шейн Е. В., Мазиров М. А., Михайлов Ф. Д., Мартынов А. И. Теплофизические характеристики почв – основа расчета и управления тепловым режимом почв // Земледелие. 2016. № 6. С. 20–23.
10. Glagolev M. V., Sabrekov A. F. On a problems related to a concept of soil thermal diffusivity and estimation of its dependence on soil moisture // Environmental Dynamics and Global Climate Change. 2019. Vol. 10, iss. 2. P. 68–85. doi: 10.17816/edgcc21202
11. Onwuka B. M. Effects of soil temperature on some soil properties and plant growth // Sch. J. Agr. Sci. 2016. Vol. 6, iss. 3. P. 89–93.
12. Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Kleptsova I. E., Machida T., Maksyutov S. S. Methane emission from mires of the West Siberian taiga // Eurasian Soil Sci. 2013. Vol. 46. P. 1182–1193. doi: 10.1134/S1064229314010098

13. Sierra C. A., Trumbore S. E., Davidson E. A., Vicca S., Janssens I. Sensitivity of decomposition rates of soil organic matter with respect to simultaneous changes in temperature and moisture // *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2015. Vol. 7. P. 335–356. doi: 10.1002/2014MS000358

14. Zhu X., Zhuang Q., Qin Z., Glagolev M., Song L. Estimating wetland methane emissions from thenorthern high latitudes from 1990 to 2009 using artificial neural networks // *Global Biogeochem. Cycles.* 2013. Vol. 27. P. 592–604. doi: 10.1002/gbc.20052

## REFERENCES

1. Arkhangel'skaya T. A. Temperature regime of a complex soil cover. Moscow: GEOC; 2012. 282 p. (In Russ.)

2. Lapina L. E. Method for calculating the coefficient of effective thermal conductivity based on soil temperature measurements. *Izvestiya Komi NC UrO RAN = Proceedings Komi SC UrB RAS.* 2017;2:12–15. (In Russ.)

3. Sivukhin D. V. A general course of physics. Vol. II. Thermodynamics and molecular physics. Moscow: Fizmatlit; 2005. 544 p. (In Russ.)

4. Tarasov P. A., Baksheeva E. O., Ivanov V. A. Research on the impact of clear cut mulching on soil temperature. *Vestnik KrasGAU = The Bulletin of KrasGAU.* 2015;8:75–80. (In Russ.)

5. Chudnovskiy A. F. Soil thermophysics. Moscow: Nauka; 1976. 352 p. (In Russ.)

6. Chudnovskiy A. F., Nerpin S. V. Soil physics. Moscow: Nauka; 1967. 584 p. (In Russ.)

7. Shein E. V. A course of soilphysics. Moscow: MGU; 2005. 432 p. (In Russ.)

8. Shein E. V., Bolotov A. G., Mazirov M. A., Martinov A. I. Determination of the profile distribution of soil temperature based on its surface temperature. *Zemledelie = Agriculture.* 2018;7:26–29. doi: 10.24411/0044-3913-2018-10707 (In Russ.)

9. Shein E. V., Mazirov M. A., Mikayilov F. D., Martinov A. I. Thermophysical characteristics of soils – basis of calculation and management of the thermal regime of soils. *Zemledelie = Agriculture.* 2016;6:20–23. (In Russ.)

10. Glagolev M. V., Sabrekov A. F. On a problems related to a concept of soil thermal diffusivity and estimation of its dependence on soil moisture. *Environmental Dynamics and Global Climate Change.* 2019;10(2):68–85. doi: 10.17816/edgcc21202

11. Onwuka B. M. Effects of soil temperature on some soil properties and plant growth. *Sch. J. Agr. Sci.* 2016;6(3):89–93.

12. Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Kleptsova I. E., Machida T., Maksyutov S. S. Methane emission from mires of the West Siberian taiga. *Eurasian Soil Sci.* 2013;46:1182–1193. doi: 10.1134/S1064229314010098

13. Sierra C. A., Trumbore S. E., Davidson E. A., Vicca S., Janssens I. Sensitivity of decomposition rates of soil organic matter with respect to simultaneous changes in temperature and moisture. *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2015;7:335–356. doi: 10.1002/2014MS000358

14. Zhu X., Zhuang Q., Qin Z., Glagolev M., Song L. Estimating wetland methane emissions from thenorthern high latitudes from 1990 to 2009 using artificial neural networks. *Global Biogeochem. Cycles.* 2013;27:592–604. doi: 10.1002/gbc.20052

Поступила в редакцию / received: 12.05.2024; принята к публикации / accepted: 13.06.2024.  
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Грудова Ксения Васильевна**  
младший научный сотрудник

e-mail: grudova@krc.karelia.ru

## CONTRIBUTOR:

**Grudova, Kseniya**  
Junior Researcher

УДК 515.12

## БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ КОМПАКТ БЕЗ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НИЖНЕЙ ЕМКОСТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. В. Иванов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Термин «(би)компакт без промежуточных размерностей» был введен В. В. Федорчуком в 1973 году для обозначения компактных пространств топологической (лебеговой) размерности  $n$ , все непустые замкнутые подмножества которых либо нульмерны, либо также имеют размерность  $n$ . Емкостные размерности (верхняя  $\overline{\dim}_B$  и нижняя  $\underline{\dim}_B$ ) метрических компактов могут принимать любое неотрицательное значение (включая бесконечность), и для них вопрос о промежуточных значениях размерности формулируется следующим образом:

Пусть метрический компакт  $X$  имеет емкостную размерность (верхнюю или нижнюю), равную  $a$ . Верно ли, что для любого неотрицательного  $b < a$  в  $X$  существует замкнутое подмножество, соответствующая емкостная размерность которого равна  $b$ ?

Известно, что для верхней емкостной размерности этот вопрос решается положительно. Для нижней емкостной размерности автором ранее был построен пример одномерного (в смысле  $\underline{\dim}_B$ ) метрического компакта без промежуточных значений  $\underline{\dim}_B$ . В настоящей работе доказана следующая теорема, усиливающая этот результат:

Для любого положительного числа  $a \leq \infty$  существует метрический компакт  $X$  размерности  $\underline{\dim}_B X = a$ , все непустые собственные замкнутые подмножества которого имеют размерность  $\underline{\dim}_B$ , равную нулю.

Таким образом, существуют метрические компакты любой наперед заданной емкостной размерности  $a$  без промежуточных значений нижней емкостной размерности. Наибольший интерес здесь представляет случай  $a = \infty$ .

**Ключевые слова:** метрический компакт; емкостная размерность; компакт без промежуточных размерностей; обратный спектр; канторовское совершенное множество

**Для цитирования:** Иванов А. В. Бесконечномерный компакт без промежуточных значений нижней емкостной размерности // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 23–27. doi: 10.17076/mat1883

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

# A. V. Ivanov. INFINITE-DIMENSIONAL COMPACTUM WITHOUT INTERMEDIATE VALUES OF THE LOWER BOX DIMENSION

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The term «(bi)compactum without intermediate dimensions» was introduced by V. V. Fedorchuk in 1973 to denote compact spaces of topological (Lebesgue) dimension  $n$ , all non-empty closed subsets of which are either zero-dimensional or also have dimension  $n$ . The box dimensions (upper  $\overline{\dim}_B$  and lower  $\underline{\dim}_B$ ) of metric compacta can take any non-negative value (including infinity), and the question of intermediate values of their dimension is formulated as follows.

Let a metric compact space  $X$  have a box dimension (upper or lower) equal to  $a$ . Is it true that for any non-negative  $b < a$  there exists a closed subset in  $X$  whose corresponding box dimension is equal to  $b$ ?

The answer for the upper box dimension is known to be positive. For the lower box dimension, the author has previously constructed an example of a one-dimensional (in the sense of  $\dim_B$ ) metric compactum without intermediate values of  $\underline{\dim}_B$ .

In this paper, we prove the following theorem, which strengthens this result: for any positive real number  $a \leq \infty$  there exists a metric compact space  $X$  of dimension  $\dim_B X = a$ , in which all non-empty proper closed subsets have the dimension  $\underline{\dim}_B$  equal to zero.

Thus, there exist metric compacta of any predefined box dimension  $a$  without intermediate values of the lower box dimension. The case of greatest interest here is  $a = \infty$ .

Keywords: metric compact space; box dimension; compact space without intermediate dimensions; inverse system; Cantor perfect set

For citation: Ivanov A. V. Infinite-dimensional compactum without intermediate values of the lower box dimension. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2024;4:23–27. doi: 10.17076/mat1883

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

В работе рассматривается емкостная размерность замкнутых подмножеств метрического компакта  $(X, \rho)$ . Напомним определения. Для замкнутого подмножества  $F \subset X$  и  $\varepsilon > 0$  через  $N(F, \varepsilon)$  обозначается наименьшее число точек в  $\varepsilon$ -сети  $F$ . Если  $F$  бесконечно, то число  $N(F, \varepsilon)$  неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Скорость этого возрастания характеризует емкостная размерность  $\dim_B F$  подмножества  $F$ , которая определяется по формуле

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Указанный предел не всегда существует, и тогда рассматривают верхний и нижний пределы и говорят (соответственно) о верхней  $\overline{\dim}_B F$  и нижней  $\underline{\dim}_B F$  емкостных размерностях  $F$ . Размерность  $\dim_B$  находит широкие

приложения в различных областях математики. Подробное изложение теории емкостных размерностей приведено в [3, глава 2].

В топологической теории компактов известен вопрос о промежуточных размерностях, который формулируется следующим образом. Пусть компакт  $X$  имеет лебегову размерность  $\dim X = n$ . Верно ли, что для любого натурального  $k < n$  в  $X$  существует замкнутое подмножество  $F$  размерности  $\dim F = k$ ? В метризуемом случае ответ на этот вопрос положительный, но для неметризуемых компактов это, вообще говоря, не так. В. В. Федорчук [4] построил пример  $n$ -мерного компакта, любое замкнутое подмножество которого имеет размерность либо  $n$ , либо 0.

Емкостные размерности метрических компактов (верхняя  $\overline{\dim}_B$  и нижняя  $\underline{\dim}_B$ ) могут принимать любое неотрицательное веществен-



ное значение, и вопрос о промежуточных значениях для этих размерностей имеет следующую формулировку. Пусть емкостная размерность (верхняя или нижняя) метрического компакта  $X$  равна  $\alpha \in (0, \infty]$ . Верно ли, что для любого  $\beta \in [0, \alpha]$  в  $X$  существует замкнутое подмножество, соответствующая емкостная размерность которого равна  $\beta$ ?

Для верхней емкостной размерности положительный ответ на этот вопрос дан в [2]. В работе [1] автор показал, что для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение неверно. А именно, в [1] построен одномерный (в смысле  $\dim_B$ ) метрический компакт  $X$ , любое собственное непустое замкнутое подмножество  $F$  которого имеет размерность  $\dim_B F = 0$ . В терминологии Федорчука это компакт без промежуточных значений нижней емкостной размерности.

В настоящей работе доказана следующая теорема, усиливающая результат работы [1].

**Теорема.** Для любого  $a \in (0, \infty]$  существует метрический компакт  $X$  размерности  $\dim_B X = a$ , гомеоморфный канторовскому совершенному множеству, все непустые собственные замкнутые подмножества которого имеют размерность  $\dim_B$ , равную нулю.

Таким образом, существуют метрические компакты любой наперед заданной емкостной размерности  $a$  без промежуточных значений нижней емкостной размерности. Наибольший интерес здесь представляет случай  $a = \infty$ . При доказательстве сформулированной выше теоремы используется техника работы [1].

Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт,  $x \in X$  и  $\varepsilon > 0$ . Мы используем следующие стандартные обозначения:

$$O(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\},$$

$$B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Аналогично обозначаются открытая и замкнутая  $\varepsilon$ -окрестности подмножества  $A \subset X$ . Подмножество  $A$  называется  $\varepsilon$ -сетью в  $X$ , если  $B(A, \varepsilon) = X$ .

Переходим к доказательству теоремы. Как обычно, квадратными скобками мы будем обозначать целую часть числа, знаком «!» – факториал натуральных чисел. Положим

$$A_n = 2^{\lfloor a(n-1) \rfloor}$$

при  $a < \infty$  и

$$A_n = 2^{(n-1)^2}$$

при  $a = \infty$ .

Пусть  $T_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  – семейство бесконечных попарно непересекающихся подмножеств натурального ряда  $\mathbb{N}$  таких, что

$$\{1, \dots, n+1\} \subset \bigcup_{m \leq n} T_m \quad (1)$$

для любого  $n$ .

Методом индукции по  $i$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$  определим подмножество  $X_n \subset \mathbb{N}^n$ . На шаге  $i \geq 2$  будем строить  $X_n$  для индексов  $n \in ((i-1)!, i!]$ .

Положим

$$X_1 = \{1\} \subset \mathbb{N}$$

и определим отображение  $f_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{N}$  по формуле  $f_1(1) = 1$ .

Шаг 2:

$$X_2 = \{(1, 1), \dots, (1, A_2)\} \subset \mathbb{N}^2.$$

Определим инъективное отображение  $f_2 : X_1 \oplus X_2 \rightarrow \mathbb{N}$  так, что  $f_2|_{X_1} = f_1$  и  $\text{Im}(f_2)$  есть начальный отрезок  $\mathbb{N}$ .

Предположим теперь, что для всех  $n \leq (i-1)!$  уже построены множества  $X_n \subset \mathbb{N}^n$ , для которых выполняются условия:

$$1) |X_n| = A_n,$$

$$2) \text{ если } (x_1, \dots, x_n) \in X_n, \text{ то } (x_1, \dots, x_n, 1) \in X_{n+1} \text{ при } n+1 \leq (i-1)!.$$

Кроме того, предположим, что определено инъективное отображение

$$f_{i-1} : \bigoplus_{j \leq i-1} X_j \rightarrow \mathbb{N},$$

для которого  $\text{Im}(f_{i-1})$  есть начальный отрезок  $\mathbb{N}$ .

Шаг  $i$ . Число  $i$  лежит в некотором множестве  $T_{m(i)}$ . В силу (1)  $m(i) \leq i-1$ . Следовательно, прообраз  $f_{i-1}^{-1}(m(i))$  непуст и состоит из точки  $(z_1, \dots, z_l) \in X_l$ , где  $l = j!$  для некоторого  $j \leq i-1$ .

Для всех  $n \in ((i-1)!, i!]$  определим  $X_n$  по индукции по  $n$ . Положим

$$X_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in X_{n-1}\} \cup \{(z_1, \dots, z_l, 1, \dots, 1, i) : i = 2, \dots, A_n - A_{n-1} + 1\}.$$

В качестве отображения

$$f_i : \bigoplus_{j \leq i} X_j \rightarrow \mathbb{N}$$

возьмем любое инъективное продолжение отображения  $f_{i-1}$  на  $X_{i!}$ , при котором  $\text{Im}(f_i)$  есть начальный отрезок  $\mathbb{N}$ .

Продолжая индукцию, получим искомое семейство множеств  $X_n \subset \mathbb{N}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  таких, что  $|X_n| = A_n$ . Будем считать, что на  $X_n$  задана дискретная топология.

При  $n > k$  обозначим через  $p_k^n$  отображение  $X_n$  в  $\mathbb{N}^k$ , действующее по формуле

$$p_k^n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k).$$

Согласно построению множеств  $X_n$ , имеет место равенство  $p_k^n(X_n) = X_k$ . Таким образом, семейство  $S = \{X_n, p_k^n : n, k \in \mathbb{N}, n > k\}$  пространств и отображений является обратным спектром, предел которого обозначим через  $X$ , а предельные проекции – через  $p_n : X \rightarrow X_n$ . Из определения предела спектра следует, что  $X$  является нульмерным компактом со счетной базой.

Покажем, что  $X$  не имеет изолированных точек. Предположим противное. Тогда для некоторой точки  $x \in X$  существует  $k$  такое, что

$$p_k^{-1}(p_k(x)) = \{x\}. \quad (2)$$

Пусть  $i! > k$  и  $m = f_i(p_{i!}(x))$ . По построению множеств  $X_n$  для любого  $j \in T_m$ ,  $j > i$  имеет место неравенство

$$|(p_{i!}^{j!})^{-1}(p_{i!}(x))| > 1,$$

что противоречит формуле (2). Таким образом, пространство  $X$  – нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек. Следовательно,  $X$  гомеоморфно канторовскому совершенному множеству.

Определим на  $X$  метрику  $\rho$  по формуле:

$$\rho(x, y) = 2^{-n},$$

где  $x \neq y$  и  $n = \min\{k : p_k(x) \neq p_k(y)\}$ . Легко проверить, что аксиомы метрики при этом выполнены.

Положим  $\varepsilon_n = 2^{-n}$ . Базу топологии  $X$ , порожденной метрикой  $\rho$ , образуют множества вида  $O(x, \varepsilon_n)$ , где  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . При этом нетрудно показать, что

$$O(x, \varepsilon_n) = p_n^{-1}(p_n(x)).$$

В то же время множества вида  $p_n^{-1}(p_n(x))$ , где  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , образуют базу предела спектра  $S$ . Таким образом, метрика  $\rho$  совместима с топологией  $X$ .

Покажем, что метрический компакт  $(X, \rho)$  является искомым. Легко проверить, что множество  $B \subset X$  является  $\varepsilon_n$ -сетью в  $X$  тогда и только тогда, когда

$$p_{n-1}B = X_{n-1}.$$

Таким образом,

$$N(X, \varepsilon_n) = |X_{n-1}| = A_{n-1}$$

для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Следовательно,

$$\dim_B X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A_{n-1}}{-\log \varepsilon_n} = a$$

(первое равенство в этой формуле следует из предложения 1 работы [2]).

Пусть теперь  $F$  – непустое собственное замкнутое подмножество  $X$ . Тогда для некоторого  $k \in \mathbb{N}$  существует точка  $z = (z_1, \dots, z_{k!}) \in X_{k!}$  такая, что

$$p_{k!}^{-1}(z) \cap F = \emptyset.$$

Пусть  $m = f_k(z)$ . По построению множеств  $X_n$  для каждого  $i \in T_m$ ,

$$|p_{(i-1)!}F| = |p_{i!}F| \leq A_{(i-1)!}. \quad (3)$$

При этом если  $B \subset F$  и  $p_n B = p_n F$ , то  $B$  –  $\varepsilon_n$ -сеть в  $F$ . Таким образом, из (3) следует, что

$$N(F, \varepsilon_{i!}) \leq A_{(i-1)!}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &\leq \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty, i \in T_m} \frac{\log N(F, \varepsilon_{i!})}{-\log \varepsilon_{i!}} \\ &\leq \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty, i \in T_m} \frac{\log A_{(i-1)!}}{-\log \varepsilon_{i!}} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. В. О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сибирский математический журнал. 2023. Т. 64, № 3. С. 540–545. doi: 10.33048/smzh.2023.64.307
2. Иванов А. В., Фомкина О. В. О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1034
3. Песин Я. Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.
4. Федорчук В. В. Бикомпакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 795–797.

## REFERENCES

1. Ivanov A. V. On the intermediate values of the box dimensions. *Siberian Mathematical Journal*. 2023;64(3):593–597. doi: 10.1134/S0037446623030072

2. *Ivanov A. V., Fomkina O. V.* On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2019;7:5–14. doi: 10.17076/mat1034 (In Russ.)

3. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications. Chicago: The Univ. of Chicago Press; 1997. 397 p.

4. *Fedorchuk V. V.* Bicomacta with no intermediate dimensions. *Dokl. Acad. Nauk SSSR = Proceedings AS of the USSR.* 1973;213(4):795–797. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 16.03.2024; принята к публикации / accepted: 16.04.2024.  
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Иванов Александр Владимирович**  
д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник

*e-mail:* [alvlivanov@krc.karelia.ru](mailto:alvlivanov@krc.karelia.ru)

#### CONTRIBUTOR:

**Ivanov, Alexander**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher

УДК 517.977.57

## РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПОПУЛЯЦИЕЙ УЧАСТКА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ЕГО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ РЕСУРСАХ

А. Н. Кириллов<sup>1\*</sup>, И. В. Данилова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910), \*krllv1812@yandex.ru*

<sup>2</sup> *Институт математики и информационных технологий, Петрозаводский  
государственный университет (пр. Ленина, 33, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматривается задача рационального выбора популяцией участка, содержащего энергетические (пищевые) ресурсы. Данная задача относится к теории оптимального фуражирования, в которой изучаются вопросы, касающиеся поведения популяции в случае, когда она покидает участок или выбирает наиболее подходящий. Для определения оптимального для популяции выбора участка используется подход, основанный на идее распределения Больцмана: в статистической физике распределение Больцмана описывает вероятность перехода системы в определенное энергетическое состояние. В настоящей работе распределение Больцмана строится с учетом функций полезности, которые, в свою очередь, строятся с учетом меры информированности популяции о качестве участков, объема энергетических ресурсов на каждом участке и затрат на получение информации (ее общей стоимости) об их качестве. Также при построении распределения Больцмана учитывается неотрицательный параметр, характеризующий рациональность выбора популяцией участка. При этом данный параметр влияет на стоимость информации. В работе введено понятие оптимальной рациональности, которая определяется с учетом стоимости информации и энергетической ценности всех участков. Цель данной работы – развитие предложенного подхода для задачи оптимального выбора популяцией участка. Участки условно делятся на два типа: «плохие» и «хорошие» в зависимости от объема содержащихся в них пищевых ресурсов. При этом объем ресурсов на участках меняется с течением времени. Результаты работы носят общий характер и могут быть использованы при построении различных процессов, связанных с принятием решений.

Ключевые слова: оптимальная рациональность; стоимость информации; математическое ожидание; распределение Больцмана; объем ресурсов

Для цитирования: Кириллов А. Н., Данилова И. В. Рациональный выбор популяцией участка при неполной информации о его изменяющихся ресурсах // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 28–32. doi: 10.17076/mat1908

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 23-21-00092 (<https://rscf.ru/project/23-21-00092/>).

# A. N. Kirillov<sup>1\*</sup>, I. V. Danilova<sup>2</sup>. THE RATIONAL CHOICE BY POPULATION OF A PATCH UNDER IMPERFECT INFORMATION ABOUT ITS VARIABLE RESOURCES

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), \*krllv1812@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Institute of Mathematics and Information Technologies, Petrozavodsk State University (33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The paper examines the problem of rational choice by a population of a patch containing energy (food) resources. This problem belongs to the theory of optimal foraging, which studies issues related to the behavior of a population leaving a patch or choosing the most suitable one. We used an approach based on the idea of the Boltzmann distribution to determine the optimal choice of a patch: in statistical physics, the Boltzmann distribution describes the probability of a system falling into a particular energy state. In this paper, the Boltzmann distribution is constructed taking into account the utility functions, which, in turn, are derived taking into account the population's awareness of the quality of patches, the volume of energy resources in each patch, and the costs of obtaining information (total information cost) about patch quality. Also, a non-negative parameter that characterizes the rationality of the population's choice of patch is taken into account. At the same time, this parameter influences on the cost of information. We introduce the concept of optimal rationality, which is determined taking into account the cost of information and the energy value of all patches. The goal of this paper is to elaborate the proposed approach to address the problem of the optimal patch choice by a population. Patches are divided into two types: "bad" and "good", depending on the volume of food resources they contain. The volume of food resources in the patches varies over time. The results of the study are general in nature and can be used in constructing various decision-making processes.

**Keywords:** optimal rationality; expected value; information cost; Boltzmann distribution; volume of resources

**For citation:** Kirillov A. N., Danilova I. V. The rational choice by population of a patch under imperfect information about its variable resources. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:28–32. doi: 10.17076/mat1908

**Funding.** The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-21-00092 (<https://rscf.ru/project/23-21-00092/>).

## ВВЕДЕНИЕ

Задача рационального выбора является одной из важнейших задач, рассматриваемых в биологии, нейробиологии, поведенческой экологии, в области искусственного интеллекта и во многих других областях. Данная задача возникает в теории оптимального фуражирования, которая изучает выбор популяцией наиболее подходящего участка, содержащего пищевые ресурсы [1]. Важно понимать механизмы процесса принятия решений в условиях ограниченности ресурсов, в частности доступной информации. Задача принятия решения в условиях ограниченности ресурсов (проблема ограниченной рациональности) рассматривается в работах [3, 6]. При этом важно учитывать, что поведение популяции направлено на максимизацию количества потребляемой энергии [2]. В рамках данной теории была

предложена концепция идеального свободного распределения (IFD) [4]. Согласно концепции IFD, популяция владеет полной информацией о качестве участков и распределяется между ними так, чтобы максимизировать количество потребляемой энергии. Но эмпирические наблюдения показывают, что модель IFD не отражает реальные процессы выбора популяцией участков. Популяция при недостатке информации о качестве участков может выбирать и плохие участки [7].

С учетом недостатков концепции идеального свободного распределения в работе [7] был предложен подход, основанный на идее распределения Больцмана и учитывающий функцию полезности участка:

$$P_k = \frac{e^{qU_k}}{\sum_{i=1}^m e^{qU_i}}, \quad (1)$$

где  $U_i$  – функция полезности участка  $i$ , которая задается с учетом имеющегося у популяции объема информации  $I_i$  о качестве участка  $i$ , под качеством участка  $i$  подразумевается объем пищевых ресурсов  $V_i$ ,  $q$  – неотрицательный параметр, характеризующий рациональность выбора,  $i = 1, \dots, m$ .

В данной статье на основе распределения Больцмана исследуется задача влияния доступной информации на рациональность выбора подходящего участка.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [5] авторами предложен подход для характеристики понятия оптимального рационального выбора.

Будем рассматривать объем ресурсов  $i$ -го участка  $V_i$  как значение случайной величины  $V$ , а  $P_i = P(V = V_i)$ , заданное (1), как вероятность того, что популяция выберет участок  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Рассмотрим  $P_i$  как функцию от параметра  $q$ , тогда математическое ожидание  $E(V)$ , как функция от параметра  $q$ , примет вид:  $E(q) = E(V, q) = \sum_{i=1}^m P_i(q)V_i$ .

**Определение 1.** Параметр рациональности  $q^*$  называется оптимальным, если  $E(q^*) = \max_q E(q)$ , где  $E(q) = \sum_{i=1}^m V_i \frac{e^{qU_i}}{\sum_{k=1}^m e^{qU_k}}$ .

Также в [5] исследовано влияние недостатка информации и ее стоимости на рациональный выбор. В настоящей работе эти исследования распространяются на случай, когда ресурсы изменяются во времени.

Рассмотрим задачу рациональности выбора популяцией участка  $i$  на промежутке времени  $[0, T]$ , разбитом на  $n$  полуинтервалов  $\delta t_j = (t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_n = T$ . При этом учитывается изменение объема энергетического ресурса  $V_i = V_i(t)$  участка  $i$  на рассматриваемых временных интервалах  $\delta t_j$ . Изменение объема энергетических ресурсов  $V_i$  задается кусочно-постоянной функцией:

$$V_i(t) = \begin{cases} V_{i1}, & t \in \delta t_1, \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{in}, & t \in \delta t_n, \end{cases} \quad (2)$$

$i = 1, \dots, m$ .

Вероятность выбора участка  $k$  на интервале времени  $\delta t_j$  задается распределением Больцмана:

$$P_{kj} = \frac{e^{qU_{kj}}}{\sum_{i=1}^m e^{qU_{ij}}}, \quad (3)$$

$\sum_{i=1}^m P_{ij} = 1$ , где функция полезности  $U_{ij}$  участка  $i$  на промежутке времени  $\delta t_j$  задается в следующем виде:  $U_{ij} = I_{ij}V_{ij}$ ,  $I_{ij}$  – мера информированности популяции о качестве участка  $i$  на промежутке времени  $\delta t_j$  и  $I_{ij} \in [0, 1]$ ,  $q \geq 0$  – параметр, характеризующий рациональность выбора популяцией участка  $i$ .

Пусть  $V(t, q)$  – случайная величина, объем энергетических ресурсов в момент времени  $t$ , имеющая распределение  $\{V_{ij}, P_{ij}\}_{i=1}^m$ ,  $t \in \delta t_j$ . Введем функцию  $Z(q)$ :

$$Z(q) = \frac{1}{T} \int_0^T E(V(t, q)) dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^{t_1} (V_{11}P_{11} + \dots + V_{m1}P_{m1}) dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (V_{1n}P_{1n} + \dots + V_{mn}P_{mn}) dt \right).$$

Требуется найти  $q^*$  такое, что:

$$Z(q^*) = \max_q Z(q). \quad (4)$$

## СЛУЧАЙ ДВУХ УЧАСТКОВ, $m = 2$

Рассмотрим случай  $m = 2$ . Изменения объемов энергетических ресурсов для участков 1 и 2 и вероятности выбора на промежутке времени  $\delta t_j$  задаются согласно (2) и (3) при  $m = 2$ .

Рассмотрим  $Z(q)$ :

$$Z(q) = \frac{1}{T} \left( \int_0^{t_1} (V_{11}P_{11} + V_{21}P_{21}) dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (V_{1n}P_{1n} + V_{2n}P_{2n}) dt \right) \quad (5)$$

и найдем  $q^*$  из условия (4).

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть  $I_{1j} = I_{2j}$ , тогда  $Z(q^*) = \max_q Z(q) = \lim_{q \rightarrow +\infty} Z(q)$ .

*Доказательство.* Несложно показать, что после интегрирования (5) и дальнейших несложных преобразований получим

$$Z(q) = \frac{1}{T} \left( P_{21}\Delta V_1\Delta t_1 + V_{11}\Delta t_1 + P_{22}\Delta V_2\Delta t_2 + V_{12}\Delta t_2 + \dots + P_{2n}\Delta V_n\Delta t_n + V_{1n}\Delta t_n \right),$$

где  $\Delta V_j = V_{2j} - V_{1j}$ ,  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . После несложных преобразований производ-

ная  $Z(q)$  по параметру  $q$  примет вид:

$$Z'(q) = \frac{\Delta V_1^2 I \Delta t_1 e^{qIV_{21} + qIV_{11}}}{(e^{qU_{11}} + e^{qU_{21}})^2} + \frac{\Delta V_2^2 I \Delta t_2 e^{qIV_{22} + qIV_{12}}}{(e^{qU_{12}} + e^{qU_{22}})^2} + \dots + \frac{\Delta V_n^2 I \Delta t_n e^{qIV_{2n} + qIV_{1n}}}{(e^{qU_{1n}} + e^{qU_{2n}})^2}.$$

Таким образом,  $Z'(q) > 0$  и, следовательно,  $Z(q)$  возрастает с ростом параметра  $q$ . Из чего следует заключение утверждения 1.  $\square$

### Стоимость информации

В работе [5] были введены стоимость единицы информации и функция, зависящая от параметра  $q$ , ограничивающая эту стоимость. Пусть  $\beta_{ij}$  – стоимость единицы информации об участке  $i$ , на промежутке времени  $\delta t_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , функция  $f(q) \in [0, 1]$  задает ограничение стоимости информации за счет рационального поведения популяции, то есть  $f(0) = 1$ . Пусть  $I_{ij}$  – мера информированности популяции об участке  $i$  на промежутке времени  $\delta t_j$ , тогда  $\beta_{ij} f(q) I_{ij}$  – стоимость информации об участке  $i$  на промежутке времени  $\delta t_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Введем следующую функцию полезности:

$$U_{ij} = I_{ij} V_{ij} - \beta_{ij} f(q) I_{ij}, \quad (6)$$

где  $\beta_{ij} \in [0, V_{ij}]$ .

В дальнейшем будем рассматривать случай двух участков  $m = 2$  и двух промежутков времени  $n = 2$  и будем считать, что:  $\beta_{2j} = \beta_{1j} = \beta$ ,  $I_{2j} = I_2$ ,  $I_{1j} = I_1$ . Введем обозначения, которые будем использовать в дальнейшем:  $\Delta V_j = V_{2j} - V_{1j}$ ,  $\Delta I = I_2 - I_1$ ,  $\Delta U_j = U_{2j} - U_{1j}$ ,  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ .

Функция  $Z(q)$  также задается по формуле (5), с учетом того, что теперь в вероятности (3) входит функция полезности (6).

Учет стоимости информации приводит к тому, что оптимальный рациональный выбор может реализоваться не только при  $q \rightarrow +\infty$ , как это показано в [7], где этот фактор не принимался во внимание.

**Пример 1.** Пусть  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ ,  $\Delta V_1 = \Delta V_2$ ,  $\Delta U_1 = \Delta U_2 \equiv \Delta U$ , что равносильно условию  $I_2 V_{21} - I_1 V_{11} = I_2 V_{22} - I_1 V_{12} \equiv A$ . Тогда

$$2Z'(q) = (A - \beta(I_2 - I_1)(f(q) + f'(q))) \times \frac{e^{-q\Delta U}}{(1 + e^{-q\Delta U})^2}.$$

Обозначим  $G(q) = A - \beta(I_2 - I_1)F(q)$ , где  $F(q) = f(q) + qf'(q)$ . Предположим, что  $F(0) > 0$ , то есть  $A > \beta(I_2 - I_1)$ , а также пусть найдется такое  $q = \tilde{q}$ , что  $F(\tilde{q}) < 0$ , то есть  $A < \beta(I_2 - I_1)F(\tilde{q})$ .

Последнее условие определяется соответствующим выбором функции  $f(q)$ . Тогда на промежутке  $(0, \tilde{q})$  существует точка  $q^*$ , доставляющая  $\max_q Z(q)$ .

**Пример 2.** Пусть  $f(q)$  – непрерывно дифференцируемая функция на промежутке  $[0, +\infty)$ ,  $I_2 > I_1$ ,  $V_{21} = V_{22} = V_2$ , изменение  $V_1$  задано (2),  $V_2 > V_1$ ,  $\beta < V_2$ . Тогда

$$Z'(q) = \frac{1}{T} \left( \frac{\Delta V_1 \Delta t_1 (\Delta U_1 + q \Delta U_1') e^{-q \Delta U_1}}{(e^{-q \Delta U_1} + 1)^2} + \frac{\Delta V_2 \Delta t_2 (\Delta U_2 + q \Delta U_2') e^{-q \Delta U_2}}{(e^{-q \Delta U_2} + 1)^2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= (I_2 V_{21} - I_1 V_{11}) - \beta(I_2 - I_1)f(q), \\ \Delta U_2 &= (I_2 V_{22} - I_1 V_{12}) - \beta(I_2 - I_1)f(q), \\ \Delta U_1' &= \Delta U_2' = -\beta(I_2 - I_1)f'(q). \end{aligned}$$

Рассмотрим  $\Delta U_j + q \Delta U_j' = (I_2 V_{2j} - I_1 V_{1j}) - \beta(I_2 - I_1)f(q) - \beta(I_2 - I_1)qf'(q)$ ,  $j = 1, 2$ . Несложно показать, что

$$\frac{I_2 V_{2j} - I_1 V_{1j}}{\beta(I_2 - I_1)} > 1.$$

Из чего следует, что  $\Delta U_j > 0$ . И, следовательно, при  $f'(q) < 0$  получим  $Z(q^*) = \max_q Z(q) =$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} Z(q).$$

В случае, когда  $f'(q) > 0$ , требуется дополнительное исследование параметров, входящих в  $Z'(q)$ , которое затруднено вследствие их значительного количества.

Приведенные примеры показывают возможность различных реализаций, в зависимости от условий, оптимального рационального выбора. Наличие большого количества параметров не позволяет провести достаточно полное, доступное восприятию исследование функции  $Z(q)$ . Предлагаемый подход к понятию оптимального рационального выбора дает возможность в каждом конкретном случае, для определенной ситуации делать различные выводы о рациональности того или иного выбора.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача рационального выбора популяцией участка. Для определения оптимального выбора

участка предлагается подход, основанный на идее распределения Больцмана. Для построения распределения Больцмана были предложены функции полезности. Также предложены методы анализа рациональности выбора участка: анализ математического ожидания как функции, зависящей от параметра  $q$ . Исследовано влияние затрат на получение информации о качестве участков на процесс принятия решения относительно выбора подходящего участка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А. Н., Данилова И. В. Динамика распределения популяции по ареалам // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. № 3. С. 268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275
2. Barack D. L., Chang S. W. C., Platt M. L. Posterior cingulate neurons dynamically signal decisions to disengage during foraging // *Neuron*. 2017. No. 2. P. 339–347. doi: 10.1016/J.Neuron.2017.09.048
3. Braun D. A., Ortega P. A. Information-theoretic bounded rationality and  $\varepsilon$ -optimality // *Entropy*. 2014. No. 16. P. 4662–4676. doi: 10.3390/e16084662
4. Cressman L., Krivan V. The ideal free distribution as an evolutionarily stable state in density-dependent population games // *Oikos*. 2010. No. 8. P. 1231–1242. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.17845.x
5. Kirillov A. N., Danilova I. V. The Boltzmann distribution in the problem of rational choice by population of a patch under an imperfect information about its resource // Моделирование и анализ информационных систем. 2023. № 3. С. 234–245. doi: 10.18255/1818-1015-2023-3-234-245
6. Ortega P. A., Braun D. A., Dyer J., Kim K. E., Tishby N. Information-theoretic bounded rationality. Preprint, 2015. URL: <https://arxiv.org/abs/1512.06789> (дата обращения: 30.04.2024).

Поступила в редакцию / received: 30.04.2024; принята к публикации / accepted: 10.06.2024.  
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Кириллов Александр Николаевич**  
д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник

e-mail: [krlv1812@yandex.ru](mailto:krlv1812@yandex.ru)

**Данилова Инна Владимировна**  
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

e-mail: [danilovainna1987@mail.ru](mailto:danilovainna1987@mail.ru)

7. Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U. Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: Departures from the ideal free distribution // *Oikos*. 2010. No. 9. P. 1469–1483. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.18196.x

## REFERENCES

1. Kirillov A. N., Danilova I. V. Dynamics of population patch distribution. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh system = Modeling and Analysis of Information Systems*. 2018;3:268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275 (In Russ.)
2. Barack D. L., Chang S. W. C., Platt M. L. Posterior cingulate neurons dynamically signal decisions to disengage during foraging. *Neuron*. 2017;2:339–347. doi: 10.1016/J.Neuron.2017.09.048
3. Braun D. A., Ortega P. A. Information-theoretic bounded rationality and  $\varepsilon$ -optimality. *Entropy*. 2014;16:4662–4676. doi: 10.3390/e16084662
4. Cressman L., Krivan V. The ideal free distribution as an evolutionarily stable state in density-dependent population games. *Oikos*. 2010;8:1231–1242. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.17845.x
5. Kirillov A. N., Danilova I. V. The Boltzmann distribution in the problem of rational choice by population of a patch under an imperfect information about its resource. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh system = Modeling and Analysis of Information Systems*. 2023;3:234–245. doi: 10.18255/1818-1015-2023-3-234-245
6. Ortega P. A., Braun D. A., Dyer J., Kim K. E., Tishby N. Information-theoretic bounded rationality. Preprint, 2015. URL: <https://arxiv.org/abs/1512.06789> (accessed: 30.04.2024).
7. Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U. Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: Departures from the ideal free distribution. *Oikos*. 2010;9:1469–1483. doi: 10.1111/j.1600-0706.2010.18196.x

## CONTRIBUTORS:

**Kirillov, Alexander**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Leading Researcher

**Danilova, Inna**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Lecturer



УДК 519.214.4+519.214.8

## О ТЕОРЕМЕ С. Г. ТКАЧУКА ДЛЯ СХЕМЫ СЕРИЙ

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматривается сумма  $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$  независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин. Задача оценивания вероятности  $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$  при  $N \rightarrow \infty$  в случае больших отклонений решена в теореме С. Г. Ткачука. Мы доказали подобную теорему в более узкой зоне изменения параметров  $N$  и  $n$ , когда распределение слагаемых зависит от неизвестной медленно меняющейся функции и имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию, включая случай зависимости параметра этого распределения от  $N$ , что приводит к возникновению схемы серий.

Ключевые слова: сумма случайных величин; большие отклонения; схема серий; медленно меняющаяся функция; предельная теорема

Для цитирования: Павлов Ю. Л. О теореме С. Г. Ткачука для схемы серий // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 33–38. doi: 10.17076/mat1877

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### Yu. L. Pavlov. ON TKACHUK'S THEOREM FOR A SERIES SCHEME

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

We consider the sum  $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$  of independent identically distributed integer-valued random variables. The problem of estimating the probability  $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$  as  $N \rightarrow \infty$  in the case of large deviations was solved in Tkachuk's theorem. We prove a similar theorem for the series scheme where the summand distribution depends on an unknown slowly varying function and has finite expectation and infinite variance.

Keywords: sum of random variables; large deviations; series scheme; slowly varying function; limit theorem

For citation: Pavlov Yu. L. On Tkachuk's theorem for a series scheme. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2024;4:33–38. doi: 10.17076/mat1877

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

## ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для решения многих перечислительных задач комбинаторного анализа часто используется так называемая обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и исследованная В. Ф. Колчиным (см., например, [2]). В процессе применения этой схемы нередко возникает необходимость исследования предельного поведения сумм независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин в области больших уклонений. Подходящим инструментом для этого служит следующая теорема, принадлежащая С. Г. Ткачуку. Формулировка этой теоремы опубликована в [7], там же кратко изложена идея ее доказательства.

**Теорема 1.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин, имеющих функцию распределения, принадлежащую области притяжения устойчивого закона с показателем  $\beta$ ,  $0 < \beta < 2$ ,  $\beta \neq 1$ , при этом если  $1 < \beta < 2$ , то  $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ . Пусть при  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = Ck^{-(\beta+1)}(1 + o(1)),$$

где  $C$  – некоторая положительная постоянная. Тогда при  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $nN^{-1/\beta} \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} = N\mathbf{P}\{\xi_1 = n\}(1 + o(1)).$$

В последние годы появился ряд работ, в которых подобные задачи рассматриваются в случае, когда общее распределение случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_N$  имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad (1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\tau \in (2, 3)$ , а  $h(x)$  – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Задачи, связанные с такими распределениями, возникают при изучении структуры и динамики конфигурационных графов, предназначенных для моделирования современных сложных сетей коммуникаций, а также при исследовании свойств лесов Гальтона–Ватсона (см., например, [3–6, 9–11]). Заметим, что в этих работах медленно меняющаяся функция  $h(x)$  из распределения (1) ограничена сверху.

Результатом настоящей статьи является следующая теорема 2, представляющая собой модификацию теоремы 1 для наиболее важного в упомянутых приложениях случая

$\tau \in (2, 3)$  и  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N^{\tau-1} \rightarrow \infty$ . Отличие от теоремы 1 состоит в наличии в распределении (1) неизвестной медленно меняющейся функции  $h(x)$  и в возможности возникновения схемы серий, когда параметр  $\tau$  зависит от числа слагаемых в сумме  $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин с общим распределением (1), где

$$h(x) \leq C < \infty. \quad (2)$$

Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что

$$n/N^{\tau-1} \rightarrow \infty, \quad (3)$$

а параметр  $\tau \in (2, 3]$  фиксирован или  $\tau = \tau(N) \in [2 + \theta, 3]$ , где постоянная  $\theta$  такова, что  $0 < \theta < 1$ . Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{Nh(n)}{n^\tau}(1 + o(1)).$$

В следующем разделе приводится доказательство теоремы 2. Мы надеемся, что это доказательство может рассматриваться как схема доказательства подобных теорем в более сложных случаях. В частности, в последующих исследованиях желательнее расширить область изменения параметров  $N$  и  $n$  и изучить случай  $\tau = \tau(N) \downarrow 2$ .

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть значение параметра  $\tau$  фиксировано. Обозначим

$$\gamma = \left( \frac{N^{(1-\alpha)/(\tau-1)}}{n} \right)^{1/6}, \quad (4)$$

где выбор достаточно малого  $\alpha > 0$  будет ясен из дальнейшего. Из условия (3) очевидно, что  $\gamma \rightarrow 0$ . Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = P_1(n) + NP_2(N) + P_3(n), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(n) &= \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leq \gamma n, i = 1, \dots, N\}, \\ P_2(n) &= \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \leq \gamma n, i \leq N-1, \xi_N > \gamma n\}, \\ P_3(n) &= \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \bigcup_{i \neq j} (\xi_i > \gamma n, \xi_j > \gamma n)\}. \end{aligned}$$

Оценим  $P_1(n)$ . Обозначим

$$R(w) = \sum_{k \leq \gamma n} e^{wk} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\}. \quad (6)$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k>l} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \sum_{k>l} \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}.$$

Обозначая здесь и далее  $C_1, C_2, \dots$  некоторые положительные постоянные, учитывая (2), и заменяя суммирование интегрированием, находим, что

$$\sum_{k>l} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \leq C_1 \sum_{k>l} k^{-\tau} \leq C_2 l^{1-\tau}. \quad (7)$$

Поскольку при  $0 \leq y \leq 1$

$$e^y = 1 + v(y), \quad (8)$$

где  $v(y) < 2y$ , из (6) получаем

$$R\left(\frac{1}{\gamma n}\right) = 1 - \sum_{k>\gamma n} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} + \sum_{k \leq \gamma n} v\left(\frac{k}{\gamma n}\right) \mathbf{P}\{\xi_1 = k\}. \quad (9)$$

Из (4) ясно, что при достаточно малых  $\alpha$

$$\gamma n \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{\gamma n} = o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (10)$$

поэтому из (8) получаем

$$\sum_{k \leq \gamma n} v\left(\frac{k}{\gamma n}\right) \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (11)$$

Отсюда и из (7), (10)

$$\sum_{k>\gamma n} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = o(N^{-1}). \quad (12)$$

Из (9), (11), (12) вытекает соотношение

$$R\left(\frac{1}{\gamma n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (13)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_1^{(\gamma)}, \dots, \xi_N^{(\gamma)}$  такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(\gamma)} = k\} = e^{k/(\gamma n)} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} / R(1/(\gamma n)), \quad (14)$$

где  $k \leq \gamma n$ . Пусть  $\zeta_N^{(\gamma)} = \xi_1^{(\gamma)} + \dots + \xi_N^{(\gamma)}$ . Тогда из (5), (6), (14)

$$P_1(n) = R^N(1/(\gamma n)) e^{-1/\gamma} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)} = n\}. \quad (15)$$

Докажем, что при достаточно больших  $N, n$

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)} = n\} \leq C_3 N^{-1/(\tau-1)+u}, \quad (16)$$

где выбор достаточно малой величины  $u$  будет ясен из дальнейшего. Обозначим  $\varphi(t), \varphi_\gamma(t)$  характеристические функции случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_1^{(\gamma)}$  соответственно. По формуле обращения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)} = n\} &= \frac{1}{2\pi N^{1/(\tau-1)-u}} \\ &\times \int_{-\pi N^{1/(\tau-1)-u}}^{\pi N^{1/(\tau-1)-u}} \exp\left\{-\frac{itn}{N^{1/(\tau-1)-u}}\right\} \\ &\times \varphi_\gamma^N\left(\frac{t}{N^{1/(\tau-1)-u}}\right) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим выражение

$$|\varphi_\gamma(t)| = \left| \frac{R((\gamma n)^{-1} + it)}{R(1/(\gamma n))} \right|. \quad (18)$$

Используя (6), (8), выводим равенство

$$\begin{aligned} &|R((\gamma n)^{-1} + it)| \\ &= \left| \sum_{k \leq \gamma n} e^{itk} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} + \sum_{k \leq \gamma n} e^{itk} v\left(\frac{k}{\gamma n}\right) \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \right| \\ &= |\varphi(t)| \left| 1 - \varphi^{-1}(t) \left( \sum_{k>\gamma n} e^{itk} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} - \sum_{k<\gamma n} e^{itk} v\left(\frac{k}{\gamma n}\right) \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} \right) \right|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (11), (12) находим, что при достаточно малых  $t$

$$|R((\gamma n)^{-1} + it)| = |\varphi(t)|(1 + o(N^{-1})).$$

Поэтому из (13), (18)

$$|\varphi_\gamma(t)|^N \sim |\varphi(t)|^N. \quad (19)$$

Обозначим  $F_\xi(x)$  функцию распределения случайной величины  $\xi_1$ . Из (1) следует, что при  $x < 0$

$$F_\xi(x) = 0, \quad (20)$$

а если  $x > 0$ , то, в силу [8, гл. VIII, § 9, теорема 1.a], при  $x \rightarrow \infty$

$$F_\xi(x) = 1 - \frac{h(x)}{(\tau-1)x^{\tau-1}}(1 + o(1)). \quad (21)$$

Соотношения (20) и (21) означают, что для  $F_\xi(x)$  выполнены условия теоремы 2.6.1 из [1, гл. II, § 6], поэтому эта функция распределения принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем  $\tau - 1$ . Далее можно воспользоваться теоремами 2.2.2 и 2.6.5 [1, гл. II], из которых следует, что в окрестности нуля

$$\ln \varphi(t) = i\lambda t - c|t|^{\tau-1}l(t) \times \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau-1)}{2}\right), \quad (22)$$

где константы  $\lambda, \beta$  и  $c > 0$  определены в теореме 2.2.2 [1], а  $l(t)$  – медленно меняющаяся в нуле функция.

По определению медленно меняющейся в нуле функции  $l(t) = L(1/|t|)$ , где  $L(x)$  – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Одно из простейших свойств медленно меняющейся на бесконечности функции  $f(x)$  состоит в том, что при любом  $\delta > 0$  и достаточно больших  $n$

$$n^{-\delta} < f(n) < n^\delta. \quad (23)$$

Тогда из (22), (23) вытекает, что сколь угодно малую положительную величину  $u$  можно подобрать так, что если  $|t| \leq \varepsilon N^{1/(\tau-1)-u}$ , то

$$\left| \varphi^N \left( \frac{t}{N^{1/(\tau-1)-u}} \right) \right| \leq \exp\{-C_4|t|^{\tau-1+\delta}\}, \quad (24)$$

где  $\delta > 0$  может быть взято сколь угодно малым. Если  $\varepsilon N^{1/(\tau-1)-u} < |t| \leq \pi N^{1/(\tau-1)-u}$ , то, как хорошо известно,

$$\left| \varphi \left( \frac{t}{N^{1/(\tau-1)-u}} \right) \right| \leq e^{-C_5}. \quad (25)$$

Разбивая интеграл, стоящий в правой части (17), на сумму двух интегралов, соответствующих двум указанным выше областям изменения  $t$ , с помощью (19), (24), (25) получаем

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(\gamma)} = n\} \leq C_6 N^{-1/(\tau-1)+u} \times \left( \int_0^\infty \exp\{-C_4|t|^{\tau-1+\delta}\} dt + 2\pi N^{1/(\tau-1)-u} e^{-C_5 N} \right),$$

откуда и следует (16).

Применяя (23) к  $h(n)$ , выбирая достаточно малое  $\delta$  и объединяя (3), (4), (13), (15), (16), находим оценку

$$P_1(n) \leq C_7 N^{-1/(\tau-1)+u} e^{-1/\gamma} = o\left(\frac{Nh(n)}{n^\tau}\right). \quad (26)$$

Оценим  $P_2(n)$ . Очевидно,

$$P_2(n) = \sum_{k \in K} \mathbf{P}\{\xi_N = n - k\} \times \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k, \xi_i \leq \gamma n, i \leq N-1\}, \quad (27)$$

где  $K = \{k : 0 \leq k < n(1 - \gamma)\}$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k, \xi_i \leq \gamma n, i \leq N-1\} \\ &= \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k | \xi_i \leq \gamma n, i \leq N-1\} \\ & \times \mathbf{P}^N\{\xi_1 \leq \gamma n\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначим  $\xi_1(\gamma n), \dots, \xi_N(\gamma n)$  вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\gamma n) = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leq \gamma n\}. \quad (29)$$

Обозначим также  $\zeta_{N-1}(\gamma n) = \xi_1(\gamma n) + \dots + \xi_{N-1}(\gamma n)$ . Из (12), (27)–(29)

$$P_2(n) = (1 + o(1))$$

$$\times \sum_{k \in K} \mathbf{P}\{\xi_N = n - k\} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) = k\}.$$

Эту сумму можно представить следующим образом:

$$P_2(n) = S_1 + S_2 + S_3, \quad (30)$$

где

$$S_i = (1 + o(1))$$

$$\times \sum_{k \in K_i} \mathbf{P}\{\xi_N = n - k\} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) = k\},$$

$$i = 1, 2, 3; \quad K_1 = \{k : 0 \leq k \leq \gamma^\alpha n\},$$

$$K_2 = \{k : \gamma^\alpha n < k \leq n(1 - \gamma^{1/6})\},$$

$$K_3 = \{k : n(1 - \gamma^{1/6}) < k < n(1 - \gamma)\}.$$

Из (1) находим, что

$$S_1 = \frac{h(n)}{n^\tau} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) \leq \gamma^\alpha n\} (1 + o(1)). \quad (31)$$

Из (29) следует равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) \leq \gamma^\alpha n\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} \leq \gamma^\alpha n, \xi_i \leq \gamma n, i \leq N-1\}}{(1 - \mathbf{P}\{\xi_1 > \gamma n\})^{N-1}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Выше было установлено, что  $F_\xi(x)$  принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем  $\tau - 1$ . В этом случае, как показано в [1, формула (2.2.18)], нормирующий множитель из определения области притяжения имеет вид  $B_N = N^{1/(\tau-1)} q(N)$ , где  $q(x)$  – медленно меняющаяся функция. Используя (3), (4),

(23), нетрудно показать, что при достаточно малых  $\alpha, \delta$

$$\gamma^\alpha n / B_N \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} \leq \gamma^\alpha n, \xi_i \leq \gamma n, i \leq N-1\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} \leq \gamma^\alpha n\} \\ & - (N-1)\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} \leq \gamma^\alpha n, \xi_1 > \gamma n\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя определение области притяжения, видим, что в силу (33)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} \leq \gamma^\alpha n\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1}}{B_N} \leq \frac{\gamma^\alpha n}{B_N}\right\} \rightarrow 1, \end{aligned}$$

а из (12) следует соотношение

$$(N-1)\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} \leq \gamma^\alpha n, \xi_1 > \gamma n\} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (31), (32), (34) следует

$$S_1 = \frac{h(n)}{n^\tau} (1 + o(1)). \quad (35)$$

Из (1), (30) видно, что

$$S_2 \leq C_8 \frac{h(n)}{(n\gamma^{1/6})^\tau} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) > \gamma^\alpha n\}. \quad (36)$$

Далее, согласно (12),

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) > \gamma^\alpha n\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_{N-1} > \gamma^\alpha n, \xi_i \leq \gamma n, i \leq N-1\}}{(1 - \mathbf{P}\{\xi_1 > \gamma n\})^{N-1}} \\ & \leq C_9 \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} > \gamma^\alpha n\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Случайная величина  $\xi_1$  имеет конечное математическое ожидание, поэтому, используя неравенство Чебышева, из (10) находим

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} > \gamma^\alpha n\} \leq C_{10} N / (\gamma^\alpha n).$$

Отсюда нетрудно вывести, что при достаточно малых  $\alpha$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} > \gamma^\alpha n\} / \gamma^{\tau/6} = o(1),$$

и из (36), (37)

$$S_2 = o\left(\frac{h(n)}{n^\tau}\right). \quad (38)$$

Из (1) и (30) видим, что

$$S_3 \leq \frac{C_{11} h(n)}{(n\gamma)^\tau} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}(\gamma n) > n(1 - \gamma^{1/6})\}. \quad (39)$$

Оценивая  $S_3$  аналогично (38), из (39) находим, что

$$S_3 = o\left(\frac{h(n)}{n^\tau}\right).$$

Отсюда и из (30), (35), (38)

$$P_2(n) = \frac{h(n)}{n^\tau} (1 + o(1)). \quad (40)$$

Осталось рассмотреть  $P_3(n)$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} P_3(n) & \leq \frac{N(N-1)}{2} \sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = k\} \\ & \times \mathbf{P}\{\xi_{N-1} + \xi_N = n - k, \xi_{N-1} > \gamma n, \xi_N > \gamma n\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P_3(n) & \leq C_{12} N^2 \sum_{k < n(1-2\gamma)} \mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = k\} \\ & \times \left( \sum_{l \in L} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} = l\} \mathbf{P}\{\xi_N = n - k - l\} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

где  $L = \{l : \gamma n < l < n(1 - \gamma) - k\}$ . Из (1) и (12) следует

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in L} \mathbf{P}\{\xi_{N-1} = l\} \mathbf{P}\{\xi_N = n - k - l\} \\ & \leq C_{13} \frac{h(n)}{(\gamma n)^\tau} \mathbf{P}\{\xi_N > \gamma n\} \leq C_{14} \frac{h(n)}{(\gamma n)^{2\tau-1}}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (3), (4), (41) при достаточно малом  $\alpha$  вытекает оценка

$$P_3(n) \leq C_{15} \frac{N^2 h(n)}{(\gamma n)^{2\tau-1}} = o\left(\frac{N h(n)}{n^\tau}\right).$$

Эта оценка вместе с (5), (26), (40) завершает доказательство теоремы 2 для фиксированных  $\tau$ . Пусть теперь параметр  $\tau$  зависит от  $N : \tau = \tau(N)$ . Все участвующие в доказательстве функции от  $\tau$  равномерно непрерывны, поскольку  $\tau$  изменяется на компакте  $[2 + \theta, 3]$ . Таким образом, утверждение теоремы сохраняет силу и при изменяющихся  $\tau$ .

**Замечание.** Нетрудно проверить, что если  $\tau \downarrow 2$  и скорость сходимости неизвестна, то нельзя гарантировать выполнение второго из соотношений (10). Этим и объясняется выбор левой границы  $2 + \theta$  области изменений  $\tau$ .

*Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания, позволившие существенно улучшить текст и устранить опечатки.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматгиз, 2000. 208 с.
3. *Павлов Ю. Л.* Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе // Математический сборник. 2021. Т. 212, вып. 9. С. 146–163. doi: 10.4213/sm9481
4. *Павлов Ю. Л.* О максимальном дереве леса Гальтона–Ватсона с бесконечной дисперсией распределения числа потомков // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 2. С. 78–92. doi: 10.4213/dm1765
5. *Павлов Ю. Л., Челюкова И. А.* Объемы деревьев случайного леса и конфигурационные графы // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2022. Т. 316. С. 298–315. doi: 10.4213/tm4216
6. *Павлов Ю. Л., Челюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, вып. 3. С. 468–486. doi: 10.4213/tvp5332
7. *Ткачук С. Г.* Локальные предельные теоремы, учитывающие большие отклонения в случае предельных устойчивых законов // Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. 1973. № 2. С. 30–33.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
9. *Хворостянская Е. В.* О числе деревьев заданного объема в лесе Гальтона–Ватсона в критическом случае // Теория вероятностей и ее применения. 2023. Т. 68, вып. 1. С. 75–92. doi: 10.4213/tvp5573
10. *Челюкова И. А.* Об одной характеристике условного распределения конфигурационного графа // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 4. С. 132–145. doi: 10.4213/dm1761
11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

## REFERENCES

1. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters-Noordho; 1971. 438 p.
2. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342
3. *Pavlov Yu. L.* The maximum tree of a random forest in the configuration graph. *Sbornik: Mathematics*. 2021;212(9):1329–1346. doi: 10.1070/SM9481
4. *Pavlov Yu. L.* On the maximum tree of a Galton–Watson forest with infinite variance of the offspring distribution. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2023;35(2):78–92. doi: 10.4213/dm1765 (In Russ.)
5. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Sizes of trees in a random forest and configuration graphs. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2022;316:280–297. doi: 10.1134/S0081543822010205
6. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Limit distributions of the number of vertices of a given degree in a configuration graph with bounded number of edges. *Theory of Probability and its Applications*. 2021;66(3):376–390. doi: 10.1137/S0040585X97T990460
7. *Tkachuk S. G.* Local limit theorems that take into account large deviations in the case of limit stable laws. *Izvestiya AN UzSSR, ser. fiz.-mat. nauk = Izvestia AS UzSSR, Ser. Phys. and Math*. 1973;2:30–33. (In Russ.)
8. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2. New York: John Wiley; 1991. 704 p.
9. *Khvorostyanskaya E. V.* On the number of trees of a given size in a Galton–Watson forest in the critical case. *Theory of Probability and its Applications*. 2023;68(1):62–76. doi: 10.1137/S0040585X97T991283
10. *Cheplyukova I. A.* One one characteristic of the conditional distribution of the configuration graph. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics*. 2023;35(4):132–145. doi: 10.4213/dm1761 (In Russ.)
11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

Поступила в редакцию / received: 24.02.2024; принята к публикации / accepted: 22.04.2024.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Павлов Юрий Леонидович**  
д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

## CONTRIBUTOR:

**Pavlov, Yury**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher

УДК 519.175.4

## ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

**И. А. Чеплюкова**

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматриваются конфигурационные графы с  $N$  вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, распределение которых удовлетворяет следующему условию: при  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k},$$

$d > 0$ ,  $h \geq 0$ ,  $g + h > 1$ ,  $2 < g < 3$ , где случайная величина  $\eta$  равна степени любой вершины графа. Изучаются случайные графы при условии, что сумма степеней всех вершин равна  $n$ . Найдены предельные распределения числа вершины заданной степени в таком условном графе при  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \rightarrow \infty$ .

**Ключевые слова:** конфигурационный граф; степень вершины; предельное распределение

Для цитирования: Чеплюкова И. А. Об одной характеристике условного конфигурационного графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 39–48. doi: 10.17076/mat1903

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### **I. A. Cheplyukova. ON A CHARACTERISTIC OF A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH**

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

We consider configuration graphs with  $N$  vertices. The vertex degrees are independent equally distributed random variables whose distribution satisfies the following condition: as  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k},$$

$d > 0$ ,  $h \geq 0$ ,  $g + h > 1$ ,  $2 < g < 3$ , and the random value  $\eta$  is equal to the degree of any vertex of the graph. We study the random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is  $n$ . The limit distributions of the number of vertices with the given degree in the conditional graph are derived as  $N, n \rightarrow \infty$  and  $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \rightarrow \infty$ .

**Key words:** configuration graph; vertex degree; limit distribution

**For citation:** Cheplyukova I. A. On a characteristic of a conditional configuration graph. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2024;4:39–48. doi: 10.17076/mat1903

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Объект исследования в данной работе – конфигурационные графы, которые являются одним из известных видов случайных графов, используемых для моделирования различных сложных сетей коммуникаций (см, например, [10, 11]). Впервые конфигурационные графы были введены в [9].

Опишем процесс построения этих графов. Обозначим через  $N$  число вершин конфигурационного графа, степени вершин которого являются независимыми случайными величинами. Значения этих случайных величин равны числу выходящих из данной вершины полуребер, т. е. ребер, инцидентных этой вершине, но для которых смежные вершины еще не определены. Все полуребра считаются различными и, соединяясь друг с другом попарно и равновероятно, образуют ребра. Поскольку сумма степеней вершин графа должна быть четной, при необходимости вводится вспомогательная вершина единичной степени. В [12] замечено, что эта дополнительная вершина не влияет на асимптотические свойства графа при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать степени только основных вершин. Нетрудно понять, что такая конструкция допускает появление и петель, и кратных ребер.

Наблюдения за реальными сетями (см., например, [10]) показали, что число вершин степени не меньше, чем  $k$ , при достаточно больших  $k$  пропорционально  $1/k^{\tau-1}$ , где  $\tau > 1$ . Это значит, что распределение случайной величины  $\eta$ , равной степени любой вершины, при больших значениях  $k$  можно определить равенством

$$\mathbf{P}\{\eta \geq k\} = \frac{h(k)}{k^{\tau-1}}, \quad \tau > 1, \quad (1)$$

где  $h(k)$  – медленно меняющаяся на бесконечности функция. В [12] было предложено рас-

сматривать наиболее простую модель, в которой распределение случайной величины  $\eta$  имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{1}{k^{\tau-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\tau-1}}, \quad (2)$$

где  $k = 1, 2, \dots$  и  $2 < \tau < 3$ .

Исследованию предельного поведения конфигурационных графов посвящено большое число работ (см., например, [10]). В настоящей работе рассматриваются условные конфигурационные графы при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна  $n$ , впервые они исследовались в статье [6]. А в [3] и [5] изучаются конфигурационные графы при более естественном предположении, что число ребер графа ограничено сверху. Исследование таких условных графов представляет определенный интерес, поскольку на практике иногда удается оценить число связей в реальных сетях. Кроме того, их можно использовать для сетей без ограничений на число ребер путем усреднения результатов об условных графах по известному распределению суммы степеней вершин.

Приведем примеры ранее рассмотренных условных конфигурационных графов, распределения степеней которых удовлетворяют соотношению (1). В статьях [2] и [5] рассматривались конфигурационные графы, распределение степеней вершин которых соответствует условию: при  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k},$$

где  $d > 0$ ,  $h \geq 0$ ,  $g + h > 1$ ,  $g \geq 1$ . Нетрудно видеть, что данное соотношение удовлетворяет (1) и является частным случаем при  $h(k) = d/\ln^h k$ ,  $g = \tau$ . В [4] исследуется конфигурационный граф, степени вершин которого имеют распределение (2) при всех значениях



$k = 1, 2, \dots$ , где параметр  $\tau$  является случайной величиной с равномерным распределением на отрезке  $[a, b]$ ,  $0 < a < b < \infty$ . Также был рассмотрен пример, когда параметр  $\tau$  распределения (2) имеет гамма-распределение с параметрами  $(\alpha, 1)$ , где  $\alpha > 1$ . Нетрудно видеть, что из (2) для первого примера справедлива асимптотика при  $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{a}{(b-a)k^{\alpha+1} \ln k},$$

а для второго –

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{\alpha}{k \ln^{\alpha+1} k}.$$

В [2, 4, 5] главное внимание уделяется предельному поведению таких важных числовых характеристик степенной структуры условных графов, как максимальная степень и число вершин заданной степени. Так, например, в статье [2] найдены предельные распределения этих характеристик в случаях, когда  $n, N \rightarrow \infty$ ,  $n/N < M = \mathbf{E}\eta$ . А в [5] получены предельные распределения числа вершин заданной степени для условных графов при условии, что сумма степеней всех вершин ограничена сверху. В основе доказательств всех этих результатов лежит обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и изученная В. Ф. Колчиным (см., например, [1]), или ее аналог (см. [8])

В настоящей работе изучается конфигурационный граф, в котором распределение степени любой вершины соответствует условию: при  $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{d}{k^g \ln^h k}, \quad (3)$$

где  $d > 0$ ,  $h \geq 0$ ,  $2 < g < 3$ . Будем предполагать, что  $p_1 > 0$ . Выбор области изменения параметра распределения  $g$  обусловлен тем, что, согласно многочисленным наблюдениям за реальными сетями, такие значения параметра  $g = \tau - 1$  являются наиболее подходящими для большого числа реальных сетей. Заметим, что в данной области изменения параметра  $g$  распределение степеней вершин рассматриваемого графа имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. Рассмотрим подмножество таких графов, при условии, что сумма степеней всех вершин данного графа равна  $n$ :

$$\xi_1 + \dots + \xi_N = n,$$

где случайные величины  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , равны степеням вершин условного графа с номерами  $i = 1, \dots, N$  соответственно. Такие

условные графы рассматривались в статье [7], где были найдены предельные распределения максимальной степени вершины при  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \rightarrow \infty$ . В настоящей работе получены предельные теоремы для числа вершин заданной степени условного конфигурационного графа при  $n, N \rightarrow \infty$ ,  $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \rightarrow \infty$ . Учитывая, что в данной области изменения параметров  $n$  и  $N$  отношение  $n/N$  стремится к бесконечности, то утверждения, приведенные ниже, дополняют ранее полученные результаты статьи [2].

Сформулируем основные результаты данной работы. Через  $\mu_r$  обозначим случайную величину, равную числу вершин степени  $r$  в рассматриваемом графе. Тогда справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $n, N \rightarrow \infty$ ,  $2 < g < 3$ ,  $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \rightarrow \infty$ ,  $N/(r^g \ln^h r) \rightarrow \infty$ . Тогда равномерно относительно целых неотрицательных  $k$  таких, что  $u_r = \frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r(1-p_r)}}$  лежит в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} e^{-u_r^2/2}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $n, N, r \rightarrow \infty$ ,  $2 < g < 3$ ,  $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \rightarrow \infty$ . Тогда равномерно относительно целых неотрицательных  $k$  таких, что  $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$  лежит в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1)).$$

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ И ТЕОРЕМ

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины  $\eta_1, \dots, \eta_N$ , распределение которых совпадает с распределением случайной величиной  $\eta$ , удовлетворяющим соотношению (3). Тогда для целых  $k_1, \dots, k_N$  таких, что  $k_1 + \dots + k_N = n$ , выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \dots + \eta_N = n\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, для двух наборов случайных величин  $(\xi_1, \dots, \xi_N)$  и  $(\eta_1, \dots, \eta_N)$  выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам.

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины  $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$ , распределение которых имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \quad (5)$$

при  $k = 1, 2, \dots$  и  $i = 1, 2, \dots, N$ . Пусть

$$\zeta_N = \eta_1 + \dots + \eta_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \dots + \eta_N^{(r)}.$$

В [1] доказано, что для случайной величины  $\mu_r$  следствием из равенства (4) является следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\mu_r = k\} \\ &= \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \end{aligned}$$

Согласно Лемме 1 для доказательства теорем 1 и 2 достаточно найти асимптотику сумм независимых случайных величин  $\zeta_N$  и  $\zeta_N^{(r)}$  и асимптотику биномиальной вероятности.

Рассмотрим предельное поведение суммы  $\zeta_N^{(r)}$ .

**Лемма 2.** *Пусть  $N, n \rightarrow \infty$ ,  $2 < g < 3$ ,  $n/N^{(3g-4)/(2g-2)} \rightarrow \infty$ . Тогда при  $S = N(1 - p_r)(1 + o(1))$  равномерно относительно целых неотрицательных  $k$ , для которых  $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$  лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\} = \frac{dN(1 + o(1))}{n^g \ln^h n}.$$

*Доказательство.* Мы будем одновременно рассматривать два случая, когда  $r$  фиксировано и когда  $r \rightarrow \infty$ , учитывая при этом, что в случае  $r \rightarrow \infty$  случайные величины  $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$  образуют схему серий. Из (3) и (5) нетрудно получить, что

$$m_r = \mathbf{E}\eta_1^{(r)} = \frac{M - rp_r}{1 - p_r}, \quad (6)$$

где  $M = \mathbf{E}\eta$ .

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\xi_j^{(r)} = \eta_j^{(r)} - m_r, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

и их сумму  $\zeta_S^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_S^{(r)} = \zeta_S^{(r)} - Sm_r$ . Обозначим  $l = n - kr - Sm_r$  и

$$\gamma = \left( \frac{S^{1/(g-1)}}{l} \right)^{1/3}. \quad (8)$$

Согласно условиям леммы нетрудно видеть, что  $\gamma \rightarrow 0$ . Тогда вероятность  $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\} \\ &= \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l\} = P_1(l) + SP_2(l) + P_3(l), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$P_1(l) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leq \gamma l, j = 1, \dots, S\},$$

$$P_2(l) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leq \gamma l, j = 1, \dots, S-1,$$

$$\xi_N^{(r)} > \gamma l\},$$

$$P_3(l) = \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \bigcup_{i \neq j} \{\xi_i^{(r)} > \gamma l, \xi_j^{(r)} > \gamma l\}\}.$$

Ниже мы покажем, что основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (9), дает второе слагаемое.

Оценим первое слагаемое  $P_1(l)$ . Положим

$$R(\omega) \quad (10)$$

$$= \sum_{j \leq \gamma l + m_r} \exp\{(j - m_r)\omega\} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = j - m_r\}.$$

Заметим при этом, что  $\gamma l \rightarrow \infty$ . Введем вспомогательные независимые случайные величины  $\xi_i^{(r)}(\gamma)$ ,  $i = 1, \dots, S$  такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)}(\gamma) = j - m_r\} \quad (11)$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = j - m_r\} \exp\{(j - m_r)/(\gamma l)\}}{R(1/(\gamma l))},$$

где  $1 \leq j \leq \gamma l + m_r$ . Тогда  $P_1(l)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_1(l) &= R^S \left( \frac{1}{\gamma l} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{\gamma} \right\} \\ &\times \mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma) = l\} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\zeta_S^{(r)}(\gamma) = \xi_1^{(r)}(\gamma) + \dots + \xi_N^{(r)}(\gamma)$ .

Рассмотрим вероятность  $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma) = l\}$ .

Обозначим через  $\varphi(t)$ ,  $\varphi_1^{(r)}(t)$ ,  $\tilde{\varphi}(t)$  и  $\varphi_\gamma(t)$  характеристические функции случайных величин  $\eta_1$ ,  $\eta_1^{(r)}$ ,  $\xi_1^{(r)}$  и  $\xi_1^{(r)}(\gamma)$  соответственно. Используя (10) и (11), нетрудно получить, что

$$\varphi_\gamma(t) = R \left( it + \frac{1}{\gamma l} \right) / R \left( \frac{1}{\gamma l} \right). \quad (13)$$

Согласно формуле обращения, для вероятности  $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma) = l\}$  справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)}(\gamma) = l\} \leq \frac{1}{2\pi B_S} \int_{-\pi B_S}^{\pi B_S} \left| \varphi_\gamma^S \left( \frac{t}{B_S} \right) \right| dt, \quad (14)$$

где

$$B_S = (S(g-1)^h / \ln^h S)^{1/(g-1)}. \quad (15)$$

Используя (12), (13) и (14), нетрудно показать, что при  $0 < \varepsilon < 1$

$$P_1(l) \leq \frac{e^{-1/\gamma}}{2\pi B_S} \left( \int_{|t| \leq \varepsilon B_S} \left| R \left( \frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S dt + \int_{\varepsilon B_S < |t| \leq \pi B_S} \left| R \left( \frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S dt \right). \quad (16)$$

Покажем, что интегралы правой части (16) ограничены. Учитывая, что при достаточно малых  $y > 0$  верно неравенство  $1 - e^{-y} < y$ , а при  $0 \leq y \leq 1$  справедливо равенство

$$e^y = 1 + y + \delta(y), \quad \text{где} \quad \delta(y) \leq y^2,$$

из (7) и (10) находим, что

$$\begin{aligned} \left| R \left( it + \frac{1}{\gamma l} \right) \right| &= \left| \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} \exp \{ (j - m_r) \left( it + \frac{1}{\gamma l} \right) \} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = j - m_r\} \right| \leq \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| \\ &+ \left| \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} e^{itj} \exp \left\{ (j - m_r) \frac{1}{\gamma l} \right\} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} - \sum_{j \geq 1} e^{itj} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} \right| = \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| \\ &+ \left| \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} e^{itj} \left( \exp \left\{ \frac{j - m_r}{\gamma l} \right\} - 1 \right) \times \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} - \sum_{j > \gamma l + m_r} e^{itj} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} \right| \leq \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{1 \leq j \leq m_r} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} \left( 1 - \exp \left\{ \frac{j - m_r}{\gamma l} \right\} \right) \\ &+ \sum_{m_r < j \leq \gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} \left( -1 + \exp \left\{ \frac{j - m_r}{\gamma l} \right\} \right) \\ &+ \sum_{j > \gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} \\ &\leq \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| + \frac{1}{\gamma l} \sum_{1 \leq j < m_r} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} (m_r - j) \\ &+ \frac{1}{\gamma l} \sum_{m_r \leq j < \gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} (j - m_r) \\ &+ \sum_{m_r \leq j < \gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} \delta \left( \frac{j - m_r}{\gamma l} \right) \\ &+ \sum_{j > \gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Из (3) и (5) нетрудно видеть, что при достаточно больших  $k$

$$\begin{aligned} \sum_{j > k} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} &= \frac{1}{1 - p_r} \sum_{j > k} \mathbf{P}\{\eta_1 = j, \eta_1 \neq r\} \\ &\leq C_1 \sum_{j > k} p_k = C_1 \sum_{j > k} \frac{d(1 + o(1))}{j^g \ln^h j} \\ &< C_2 \int_k^{+\infty} y^{-g} (\ln y)^{-h} dy \leq C_3 (\ln k)^{-h} k^{-g+1}. \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь и далее  $C_1, C_2, \dots$  обозначают некоторые положительные постоянные. Аналогично тому, как получена оценка (18), переходя к интегральным суммам, можно показать, что при достаточно больших  $k$  справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{j < k} (j - m_r)^2 \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} &\leq C_4 \sum_{j \leq k} (j - m_r)^2 p_k \\ &\leq C_5 k^{-g+3}. \quad (19) \end{aligned}$$

Из (17), (18) и (19) находим, что

$$\begin{aligned} \left| R \left( it + \frac{1}{\gamma l} \right) \right| &\leq \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| + \frac{M}{\gamma l} + C_6 \left( (\gamma l)^{1-g} \right) \\ &\leq \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| + C_7 \left( (\gamma l)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что при выполнении условий леммы 2 верно соотношение

$$\gamma l / S = \left( \frac{l}{S^{(3g-4)/(2g-2)}} \right)^{2/3} \rightarrow \infty,$$

можно показать, что

$$\left| R\left(it + \frac{1}{\gamma l}\right) \right| = |\varphi_1^{(r)}(t)| + o\left(\frac{1}{S}\right), \quad (20)$$

где

$$\varphi_1^{(r)}(t) = \mathbf{E}e^{it\eta_1^{(r)}} = \frac{\varphi(t) - p_r e^{itr}}{1 - p_r}. \quad (21)$$

Пусть  $\delta \in (0, 1)$ . Тогда для любого фиксированного  $r$  найдется положительное  $\varepsilon_r$  такое, что  $|\varphi_1^{(r)}(t)| > \delta$  при  $|t| \leq \varepsilon_r$ . А при  $r \rightarrow \infty$  из (3) и (21) находим такое  $\varepsilon > 0$ , что  $|\varphi_1^{(r)}(t)| > \delta$  при  $|t| \leq \varepsilon$ . Тогда из (20) находим, что

$$\left| R\left(it + \frac{1}{\gamma l}\right) \right|^S \leq |\varphi_1^{(r)}(t)|^S.$$

Отсюда следует, что первый интеграл в (16) ограничен.

По свойству характеристических функций решетчатых распределений с единичным максимальным шагом при  $\varepsilon < |t| \leq \pi$  верно неравенство

$$\left| R\left(it + \frac{1}{\gamma l}\right) \right| \leq C_8 < 1.$$

Значит, и второй интеграл (16) ограничен, следовательно, из (16) получаем, что

$$P_1(l) \leq C_9 B_S^{-1} e^{-1/\gamma}. \quad (22)$$

Учитывая, что  $\ln l < C_{10} \gamma^{-C_{11}}$ , из (8) и (15) нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{e^{-1/\gamma} l^g \ln^h l}{S B_S} &< C_{12} \exp\left\{-\left(\frac{l}{S^{1/(g-1)}}\right)^{1/3}\right\} \\ &\times \left(\frac{l}{S^{1/(g-1)}}\right)^g \ln^{C_{13}} l < C_{14} e^{-1/\gamma} \gamma^{-C_{15}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (15), (22) следует, что

$$P_1(l) = o\left(\frac{S}{l^g \ln^h l}\right). \quad (23)$$

Рассмотрим  $P_2(l)$ . Нетрудно видеть, что  $P_2(l)$  можно представить в виде суммы:

$$P_2(l) = \sum_{j > \gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j - m_r\} \quad (24)$$

$\times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(r)} = l - j + m_r, \xi_i^{(r)} \leq \gamma l, i = 1, \dots, S-1\}$ .

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_{i,\gamma l}^{(r)}$ ,  $i = 1, \dots, S-1$ , для которых

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} = k\} \\ = \mathbf{P}\{\eta_1 = k - m_r \mid \eta_1 \neq r, \eta_1 \leq \gamma l\}, \end{aligned} \quad (25)$$

и их сумму  $\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = \xi_{1,\gamma l}^{(r)} + \dots + \xi_{S-1,\gamma l}^{(r)}$ . Из (5), (7), (8), (18) и (25), учитывая, что

$$(\gamma l)^{1-g} S = \left(\frac{S}{l^{g-1}}\right)^{2/3} \rightarrow 0, \quad (26)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(r)} = l - j + m_r, \xi_i^{(r)} \leq \gamma l, i = 1, \dots, S-1\} \\ = \left(\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} \leq \gamma l\}\right)^{S-1} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\} \\ = \left(1 - \sum_{k > \gamma l} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = k + m_r\}\right)^{S-1} \\ \times \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\} \\ = \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (27)$$

Используя (24) и (27),  $P_2(l)$  можно представить в следующем виде:

$$P_2(l) = \sum_{i=1}^4 R_i(l) (1 + o(1)), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} R_i(l) &= \sum_{J_i} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j - m_r\} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\}, \\ J_1 &= \{j : \gamma l + m_r < j < \gamma^{1/2} l\}; \\ J_2 &= \{j : \gamma^{1/2} l \leq j < l - \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\}; \\ J_3 &= \{j : l - \gamma^{-1} S^{1/(g-1)} \leq j \leq l + \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\}; \\ J_4 &= \{j : j > l + \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала слагаемое  $R_3(l)$ , поскольку оно дает основной вклад в сумму (28). Из (3) и соотношения  $S^{1/(g-1)}/l \rightarrow 0$  получаем, что в области  $J_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j - m_r\} \\ = \begin{cases} \frac{d(1+o(1))}{((1-p_r)l^g \ln^h l)}, & \text{если } j \neq r; \\ 0, & \text{если } j = r. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда и из (28) находим, что

$$R_3(l) = \frac{d(1+o(1))}{(1-p_r)l^g \ln^h l} \mathbf{P}\left\{-\frac{S^{1/(g-1)}}{\gamma} + m_r\right\}$$

$$\leq \left\{ \zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} \leq \frac{S^{1/(g-1)}}{\gamma} + m_r \right\}. \quad (29)$$

Пусть  $g(x)$  обозначает плотность устойчивого закона с показателем  $g - 1$  и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ \Gamma(1 - g) d \cos(\pi(g - 1)/2) |t|^{g-1} \times \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \tan(\pi(g - 1)/2) \right) \right\},$$

где  $\Gamma(x)$  – значение гамма функции в точке  $x$ . Кроме того, обозначим через  $\varphi_{\gamma l, r}(t)$  характеристическую функцию случайной величины  $\xi_{1, \gamma l}^{(r)}$ . Из (18), (21), (25) и (26) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma l, r}(t) &= \sum_k e^{itk} \mathbf{P}\{\xi_{1, \gamma l}^{(r)} = k\} \\ \tilde{\varphi}(t) &= \frac{\sum_{k > \gamma l} e^{itk} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\}}{1 - \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} > \gamma l + m_r\}} \\ &= \tilde{\varphi}(t) \left( 1 + O((\gamma l)^{1-g} \ln^{-h}(\gamma l)) \right) \\ &= e^{-itm_r} \varphi_1^{(r)}(t) (1 + o(1/S)). \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда и из [5, лемма 6] следует, что при  $r/B_S \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{-\gamma^{-1} S^{1/(g-1)} + m_r \leq \zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} \\ \leq \gamma^{-1} S^{1/(g-1)} + m_r\} &\rightarrow \int_{-A_1}^{A_1} g(x) dx, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$A_1 = \frac{\gamma^{-1} (S(1 - p_r))^{1/(g-1)}}{B_S},$$

а  $B_S$  определена в (15). Кроме того, из (30) и [5, лемма 9] следует, что при  $r/B_S \geq C_{16}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{-\gamma^{-1} S^{1/(g-1)} + m_r \leq \zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} \\ \leq \gamma^{-1} S^{1/(g-1)} + m_r\} &\rightarrow \int_{-A_2}^{A_2} g(x) dx, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $A_2 = \gamma^{-1} S^{1/(g-1)} / B_S$ . Из (8) и (15) нетрудно видеть, что  $A_1, A_2 \rightarrow \infty$ . Тогда отсюда, из (31) и (32) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{-\gamma^{-1} S^{1/(g-1)} + m_r \leq \zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} \\ \leq \gamma^{-1} S^{1/(g-1)} + m_r\} &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Тогда из (29) и (33) находим, что

$$R_3(l) = \frac{d(1 + o(1))}{(1 - p_r) l^g \ln^h l}. \quad (34)$$

Рассмотрим  $R_4(l)$ . Из (3) и (28), учитывая, что  $\gamma^{-1} S^{1/(g-1)} / l \rightarrow 0$ , несложно получить, что

$$R_4(l) \leq \frac{C_{17}}{l^g \ln^h l} \mathbf{P}\{\zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} < -\gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\}. \quad (35)$$

Следуя алгоритму получения соотношения (31) и используя [5, леммы 6 и 9], нетрудно показать, что справедливо

$$\mathbf{P}\{\zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} < -\gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\} \rightarrow 0. \quad (36)$$

Из (35) и (36) находим, что

$$R_4(l) = o\left(\frac{1}{l^g \ln^h l}\right). \quad (37)$$

Оценим  $R_1(l)$ . Учитывая, что  $\gamma l \rightarrow \infty$ , из (3) и (28) получаем, что

$$R_1(l) \leq \frac{C_{18}}{(\gamma l)^g \ln^h(\gamma l)} \mathbf{P}\{\zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2}\}. \quad (38)$$

Оценим вероятность  $\mathbf{P}\{\zeta_{S^{-1}, \gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2}\}$ , используя неравенство Чебышева. Из (3) легко показать, что при достаточно больших  $k$

$$\sum_{j > k} (j - m_r) p_j \leq C_{19} (\ln k)^{-h} k^{-g+2}. \quad (39)$$

Сделаем оценку первого и второго момента случайной величины  $\xi_{1, \gamma l}^{(r)}$ . Из (3), (5), (6), (18), (25), (39), учитывая, что  $\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \mathbf{0}$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}\xi_{1, \gamma l}^{(r)} \right| &= \left| \sum_{k \leq \gamma l} k \frac{\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = k - m_r\}}{1 - (1 - p_r)^{-1} \sum_{k > \gamma l} p_k} \right| \\ &= \sum_{k > \gamma l} k \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \left( 1 + O\left(\left((\gamma l)^g \ln^h(\gamma l)\right)^{-1}\right) \right) \\ &\leq C_{20} \sum_{k > \gamma l} (k - m_r) p_k \leq C_{20} \frac{(\gamma l)^{2-g}}{\ln^h(\gamma l)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Аналогично тому, как получено (40), используя (19), нетрудно показать, что справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \xi_{1, \gamma l}^{(r)} \right)^2 &= \sum_{1 - m_r \leq k} k^2 \mathbf{P}\{\xi_{1, \gamma l}^{(r)} = k\} \\ &\leq C_{21} \sum_{1 - m_r \leq k \leq \gamma l} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \end{aligned}$$

$$\leq C_{22}(\gamma l)^{3-g}. \quad (41)$$

Применяя неравенство Чебышева, из (40) и (41) находим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2}\} \\ & \leq \frac{C_{23}}{l^2} \mathbf{E} \left( \xi_{1,\gamma l}^{(r)} + \dots + \xi_{S-1,\gamma l}^{(r)} \right)^2 \\ & = \frac{C_{23}}{l^2} ((S-1)(l\gamma)^{3-g} \\ & + (S-1)(S-2) \frac{(\gamma l)^{-2g+4}}{\ln^{2h}(\gamma l)}) \leq C_{24}\gamma^{2g}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (8), (38) и (42) получаем, что

$$R_1(l) = O\left(\frac{\gamma^g}{l^g \ln^h(\gamma l)}\right) = o\left(\frac{1}{l^g \ln^h l}\right). \quad (43)$$

Рассмотрим  $R_2(l)$ . Учитывая, что  $\gamma^{1/2}l \rightarrow \infty$ , из (3) и (28) следует, что

$$\begin{aligned} R_2(l) & \leq \frac{C_{25}}{(\gamma^{1/2}l)^g \ln^h(\gamma^{1/2}l)} \\ & \times \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Пусть  $u = \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}$ . Поскольку  $u < \gamma l$ , вероятность  $\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > u\}$  можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > u\} = (S-1)\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} > u\} \\ & + \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > u \mid \xi_{i,\gamma l}^{(r)} \leq u, i = 1, \dots, S-1\} \\ & \times \left( \mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} \leq u\} \right)^{S-1} \leq (S-1)\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} > u\} \\ & + \left( \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} \leq u \mid \xi_1^{(r)} \leq \gamma l\} \right)^{S-1} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,u}^{(r)} > u\} \\ & = (S-1)\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} > u\} + \left( \frac{1 - \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} > u\}}{1 - \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} > \gamma l\}} \right)^{S-1} \\ & \times \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,u}^{(r)} > u\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое последней суммы соотношений (45). Из (5), (7), (18), (24), (25) для первого слагаемого этой суммы получаем, что

$$\begin{aligned} & (S-1)\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\} \\ & \leq (S-1) \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}}{1 - \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} > \gamma l\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq C_{26} \frac{S}{1-p_r} \left( \sum_{k>\gamma^{-1}S^{1/(g-1)}, k \neq r} p_k \right) \\ & \times \left( 1 - \frac{1}{1-p_r} \sum_{k>\gamma l, k \neq r} p_k \right)^{-1} \\ & \leq C_{27} \frac{\gamma^{g-1}}{\ln^h(\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})}. \end{aligned} \quad (46)$$

Рассмотрим вероятность  $\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,u}^{(r)} > u\}$  при  $u = \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}$ . Оценим первый и второй моменты случайной величины  $\xi_{1,u}^{(r)}$ . Учитывая, что  $\mathbf{E}(\xi_1^{(r)}) = 0$ , из (5), (7), (18), (19), (24) и (25) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}(\xi_{1,u}^{(r)}) \right| \leq \left| C_{28} \sum_{1-m_r \leq k \leq u} k \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \right| \leq \\ & \leq \left| C_{29} \sum_{k < u} k \mathbf{P}\{\eta_1 = k + m_r\} \right| \\ & \leq C_{30} \frac{(\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})^{2-g}}{\ln^h(\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})} \end{aligned} \quad (47)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\xi_{1,u}^{(r)})^2 \leq C_{31} \sum_{1-m_r \leq k \leq u} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \\ & \leq C_{32} \sum_{1-m_r \leq k \leq u} (k - m_r)^2 p_k \\ & \leq C_{33} (\gamma^{-1}S^{1/(g-1)})^{3-g}. \end{aligned} \quad (48)$$

Применяя неравенство Чебышева, аналогично тому, как получено соотношение (42), из (47) и (48) находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,u}^{(r)} > u\} \leq C_{34}\gamma^{g-1}. \quad (49)$$

Учитывая, что

$$(\gamma l)^{1-g}S = \gamma^{2(g-1)} \rightarrow 0,$$

из (7), (18) следует, что

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 - \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)}\}}{1 - \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} > \gamma l\}} \right)^{S-1} \\ & = \left( \frac{1 - \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} > \gamma^{-1}S^{1/(g-1)} + m_r\}}{1 - \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} > \gamma l + m_r\}} \right)^{S-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + O\left(\frac{(\gamma l)^{1-g}}{\ln^h(\gamma l)}\right)\right)^{S-1} = \left(1 + o\left(\frac{1}{S}\right)\right)^{S-1} \\
&= 1 + o(1). \tag{50}
\end{aligned}$$

Тогда из соотношений (45), (46), (49) и (50) находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{S-1, \gamma l}^{(r)} > \gamma^{-1} S^{1/(g-1)}\} \leq C_{35} \gamma^{g-1}. \tag{51}$$

Тогда из (8), (44) и (51) получаем, что

$$R_2(l) = O\left(\frac{\gamma^{g/2-1}}{l^g \ln^h(\gamma l)}\right) = o\left(\frac{1}{l^g \ln^h l}\right). \tag{52}$$

Следовательно, из (28), (34), (37), (43) и (52) находим, что

$$P_2(l) = \frac{d(1 + o(1))}{(1 - p_r) l^g \ln^h l}. \tag{53}$$

Осталось рассмотреть  $P_3(l)$ . Из (9) нетрудно видеть, что

$$P_3(l) \tag{54}$$

$$= \binom{S}{2} \sum_{k > 2(\gamma l + m_r)} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = k - 2m_r,$$

$$\xi_{S-1}^{(r)} > \gamma l, \xi_S^{(r)} > \gamma l\} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-2}^{(r)} = l - k + 2m_r\}.$$

Из (7), (18) получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = k - 2m_r, \xi_{S-1}^{(r)} > \gamma l, \xi_S^{(r)} > \gamma l\} \\
&= \sum_J \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} = j - m_r\} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = k - m_r - j\} \\
&\leq C_{36} (\gamma l)^{-g} \ln^{-h}(\gamma l) \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} > \gamma l\} \\
&\leq C_{37} (\gamma l)^{-2g+1} \ln^{-2h}(\gamma l), \tag{55}
\end{aligned}$$

где

$$J = \{j : \gamma l + m_r < j < k - \gamma l - m_r\}.$$

Учитывая, что

$$S \gamma^{-2g+1} l^{-g+1} = \gamma^{g-2} \rightarrow 0,$$

из соотношений (54) и (55) вытекает, что

$$\begin{aligned}
&P_3(l) \leq C_{38} S^2 (\gamma l)^{-2g+1} \ln^{-2h}(\gamma l) \\
&\times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-2}^{(r)} > l - 2l\gamma\} = o\left(S l^{-g} \ln^{-h} l\right). \tag{56}
\end{aligned}$$

Тогда утверждение леммы следует из соотношений (9), (23), (53) и (56).  $\square$

Для суммы независимых случайных величин  $\zeta_N$  можно использовать [7, лемма 2], согласно которой для вероятности  $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$  справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$ ,  $2 < g < 3$ ,  $n/B_N \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{dN(1 + o(1))}{n^g \ln^h n},$$

где  $B_N$  определено в (15).

Теперь можно перейти к доказательству основных теорем. Учитывая, что  $N - k = N(1 - p_r)(1 + o(1))$ , из лемм 2 и 3 находим, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \rightarrow 1. \tag{57}$$

Тогда при использовании нормального приближения биномиальной вероятности для доказательства теоремы 1 и пуассоновского приближения биномиальной вероятности для теоремы 2 утверждения теорем 1 и 2 следуют из леммы 1 и соотношения (57).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматгиз, 2000. 208 с.
2. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
3. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512
4. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Дискретная математика. 2018. Т. 30, № 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445
5. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, № 3. С. 468–486. doi: 10.4213/tvp5332
6. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
7. Челюкова И. А. Об одной характеристике условного распределения конфигурационного графа // Дискретная математика. 2023. Т. 35, № 4. С. 132–145. doi: 10.4213/dm1761

8. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

9. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Combin. 1980. Vol. 1, no. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

10. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

11. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 321 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Perform. Eval. 2004. Vol. 55, no. 1–2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

## REFERENCES

1. Kolchin V. F. Random graphs. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2010. 256 p.

2. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *Sbornik: Mathematics*. 2018;209(2):258–275. doi: 10.1070/SM8832

3. Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V. On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *Sbornik: Mathematics*. 2016;207(3):400–417. doi: 10.1070/SM8512

4. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with a bounded number of edges. *Discrete*

*Mathematics and Applications*. 2019;29(4):219–232. doi: 10.1515/dma-2019-0020

5. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Limit distributions of the number of vertices of a given degree in a configuration graph with a bounded number of edges. *Theory of Probability and its Applications*. 2021;66(3):376–390. doi: 10.1137/S0040585X97T990460

6. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008;18(5):447–463. doi: 10.1515/DMA.2008.033

7. Cheplyukova I. A. On one characteristic of the conditional distribution of a configurational graph. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2023;35(4):132–145. doi: 10.4213/dm1761 (In Russ.)

8. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012;22(1):101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

9. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combin.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

10. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2007. 212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

11. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 321 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004;55(1–2):3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию / received: 01.04.2023; принята к публикации / accepted: 01.05.2023.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна  
канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

e-mail: chia@krc.karelia.ru

## CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher



УДК 519.115:519.2

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗАПОЛНЕНИЙ В МОДЕЛЯХ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)*

В моделях равновероятных исходов схем размещения  $R$  частиц по  $n$  ячейкам изучаются вероятностные распределения максимальных уровней заполнения ячеек (задача 2) и чисел исходов при их фиксированных значениях. Схемы различаются всеми возможными парными качествами ячеек и частиц по их различимости. Предложен прием проведения вероятностного анализа схем, состоящий в пересчете ранее полученных результатов при нахождении вероятностных распределений минимальных значений уровней заполнения ячеек (задача 1) при определенных соотношениях между их параметрами. В основе этого приема лежит специально построенная процедура согласованного размещения двух типов частиц одного качества по различимости по одним и тем же ячейкам в каждой изучаемой схеме задачи 2 и аналогичной со своим числом частиц в изученной схеме задачи 1. В связи с этим получен ряд вспомогательных новых результатов.

**Ключевые слова:** размещение частиц; максимальный уровень заполнения ячеек; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Вероятностный анализ максимальных заполнений в моделях размещения частиц по ячейкам // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 49–54. doi: 10.17076/mat1856

## N. Yu. Enatskaya. PROBABILITY ANALYSIS OF MAXIMUM OCCUPATION IN MODELS OF PARTICLE PLACEMENT TO CELLS

*National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)*

The probabilistic distributions of maximum cell occupancy levels (problem 2) and the numbers of outcomes given their fixed values are studied in models of equiprobable outcomes of the schemes for placing  $R$  particles in  $n$  cells. The schemes differ in all possible pairwise qualities of cells and particles in terms of their distinguishability. A method for probabilistic analysis of the schemes is proposed, which consists in recalculating the previously obtained results when finding the probabilistic distributions of the minimum cell occupancy levels (problem 1) for certain ratios of their parameters. This technique is based on a specially constructed

procedure for coordinated placement of two types of particles of the same quality in terms of distinguishability in the same cells in each scheme studied in problem 2 and its analog with its own number of particles in the scheme studied in problem 1. In this regard, a number of auxiliary novel results were obtained.

**Key words:** particle placement; maximum cell occupancy; numbering problem; modeling

**For citation:** Enatskaya N. Yu. Probability analysis of maximum occupation in models of particle placement to cells. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2024;4:49–54. doi: 10.17076/mat1856

## ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–6] проводился асимптотический анализ вероятностного поведения максимальных уровней заполнения ячеек в схемах равновероятного размещения различных частиц по различным ячейкам. Здесь представлено доасимптотическое исследование их вероятностных распределений в классе схем с равновероятными исходами размещения  $r$  частиц по  $n$  ячейкам при всех парных качествах ячеек и частиц по различимости.

Фиксация минимального уровня заполнения ячеек, равного  $k$ , означает его нижнее ограничение  $\geq k$  с достижением (первая группа схем или схемы 1), а максимального – (вторая группа схем или схемы 2), равного  $k^*$ , – его верхнее ограничение  $\leq k^*$  с достижением. Нахождение вероятностных распределений исходов схем этих групп будем называть соответственно задачами 1 и 2. Задача 1 решена в [7], а задача 2 решается здесь пересчетом из результатов задачи 1 при специально согласованных значениях ее параметров с параметрами в задаче 2.

Вероятностные распределения для максимальных уровней заполнения ячеек определяются в следующих четырех схемах размещения частиц по ячейкам, характеризующихся разными парными качествами по различимости ячеек и частиц в них, как и в [7]:

схема  $A$  – размещение различных частиц по различным ячейкам;

схема  $B$  – размещение различных частиц по неразличимым ячейкам;

схема  $C$  – размещение неразличимых частиц по различным ячейкам;

схема  $D$  – размещение неразличимых частиц по неразличимым ячейкам.

Вероятностный анализ схем проводится со следующими обозначениями:

$U$  – минимальный уровень заполнения ячеек  $k$  в исходе из схем 1;

$V$  – максимальный уровень заполнения ячеек  $k^* = r - k$  в исходе из схем 2;

$\mu_k$  – число ячеек с  $U = k$ ;  $\mu_{k^*}$  – число ячеек с  $V = k^*$

Во всех схемах задачи 1 число частиц  $r \geq nk$ , а во всех схемах задачи 2 – число частиц  $R \leq nk^*$ .

Напомним обозначения для чисел исходов в схемах  $A, B, C, D$  задачи 1 и введем новые для пересчета чисел исходов в аналогичных схемах, указанных в нижних индексах в задаче 2:  $M_A = M_A(r, n, k)$ ,  $M_B = M_B(r, n, k)$ ,  $M_C = M_C(r, n, k)$ ,  $M_D = M_D(r, n, k)$  и  $N_A = N_A(R, n, k^*)$ ,  $N_B = N_B(R, n, k^*)$ ,  $N_C = N_C(R, n, k^*)$ ,  $N_D = N_D(R, n, k^*)$  соответственно в задачах 1 и 2 для событий  $U = k$  и  $V = k^*$ .

**Постановка задачи:** в моделях равновероятных исходов схем  $A, B, C, D$  решить задачу 2.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь представлены отдельные используемые сведения и характеристики изучаемых схем в задаче 2.

### 1.1. Основания для связи задач 1 и 2

Для установления соответствия (согласования) любых значений параметров задачи 2 с их значениями задачи 1 в условиях схем размещения  $A$ – $D$  предложим следующую интерпретацию связи между схемами 1 и 2: считая  $R$  частиц в задаче 2 синими, будем к каждому исходу схем в задаче 2 добавлять  $r = Rn - R$  красных частиц того же качества (по различимости), что и синие, в каждую ячейку до общего уровня  $R$  в каждой ячейке. Тогда все составы уровней заполнения ячеек  $U = U(r, n) \geq k = R - k^*$  при размещении красных частиц по ячейкам взаимно-однозначно соответствуют всем возможным составам уровней заполнения ячеек  $V = V(R, n) \leq k^*$  при размещении синих частиц по тем же ячейкам.

Отличие в методике нахождения вероятностных распределений минимальных и максимальных уровней заполнения ячеек в каждом из условий размещения  $A$ – $D$  частиц по

ячейкам, т. е. в задачах 1 и 2, состоит в определении разных наборов составов уровней заполнения ячеек со своими согласованными количествами частиц  $r$  и  $R$  при разных общих числах исходов, зависящих от  $r$  и  $R$ .

На этом основании для всех результатов задачи 2 можно получить теоремы, аналогичные теоремам из [7] (для решения задачи 1) при соответствующих множествах  $\{\bar{w}_i\}$  составов уровней заполнения ячеек в ней  $\bar{w}_i = (w_1, \dots, w_n)$  в задаче 2. Они находятся при решении задачи 2 покомпонентным вычитанием из  $n$ -мерного вектора  $(R, R, \dots, R)$  векторов множества составов уровней заполнения ячеек в задаче 1, которые определены в [7].

### 1.2. Диапазоны возможных значений $k^*$ , $\mu_{k^*}$

Диапазоны возможных значений  $k$ ,  $\mu_k$  в задаче 1 получены в [7] ( $1 \leq k \leq [r/n]$ ,  $l \leq \mu_k \leq L$ ,  $l = \max(1, n(k+1) - r)$ ,  $L = n - 1 + C_n^{n+r-nk}$ , где  $[Z]$  – целая часть числа  $Z$ ).

**Лемма 1.** *Диапазон возможных значений  $k^*$  определяется соотношением*

$$k^* = \left( \left[ \frac{R+n-1}{n} \right], R \right). \quad (1)$$

*Доказательство.* Правое ограничение очевидно из возможности попадания всех частиц в одну ячейку, а левое ограничение следует из получения наименьшего значения  $k^*$  из условий:  $k^* = [R/n]$ , когда  $R$  делится на  $n$ , и  $k^* = [R/n] + 1$ , когда  $R$  не делится на  $n$ . Это можно записать в виде наименьшего значения  $k^*$  в (1), т. к. при первом условии  $[R/n] = [(R+n-1)/n]$ , а при втором – остаток от деления  $R$  на  $n \in (1, n-1)$ , а тогда  $[(R+n-1)/n] = [R/n] + 1$ .  $\square$

**Лемма 2.** *Диапазон возможных значений  $\mu_{k^*}$  определяется соотношением*

$$l^* = \max(1, R - n(k^* - 1)) \leq \mu_{k^*} \leq [R/k^*] = L^*. \quad (2)$$

*Доказательство.* Из условия существования схемы  $\mu_{k^*} \geq 1$  и  $R - \mu_{k^*} k^* \leq (n - \mu_{k^*})(k^* - 1)$ , или  $\mu_{k^*} \geq (R - n(k^* - 1))$ , откуда получаем левое ограничение в (2) для  $\mu_{k^*}$ , а правое ограничение в (2) следует из того, что  $[R/k^*]$  – наибольшее число ячеек, на которые хватит по  $k^*$  частиц.  $\square$

### 1.3. Прием вычисления чисел исходов схемы $B$

**Лемма 3.**

$$B(r, n) = \sum_{\{\bar{v}_i\}} \frac{r!}{\prod_{i=1}^n v_i! \prod_{a=1}^r q_a!}, \quad (3)$$

где сумма производится по перечислению всех составов  $\{\bar{v}_i\}$  уровней заполнения  $n$  неразличимых ячеек  $r$  частицами  $\bar{v}_i = (v_1, \dots, v_n)$  (т. е. без учета порядка ячеек или в их заранее установленном порядке), а  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_r)$  – вторая маркировка уровней заполнения ячеек ( $q_a$  – число положительных совпадающих в  $\bar{v}$  уровней заполнения ячеек в исходе, равных  $a$ , где  $a = \overline{1, r}$ ).

*Доказательство.*  $B(r, n)$  – число всех размещений  $r$  различных частиц по  $n$  неразличимым ячейкам. Их можно представить как сумму размещений в этой схеме по всем составам уровней заполнения ячеек без учета их порядка, т. е. в заранее заданном (или одном фиксированном, как в схеме перестановок с повторением) порядке составов в исходах и без учета порядков среди составов совпадающих уровней заполнения ячеек, что учитывается делением на  $\prod_{a=1}^r q_a!$ . А это значит, что числа Белла  $B(r, n)$  вычисляются по приведенной в утверждении леммы 3 формуле (3).  $\square$

**Пример 1.** Пусть  $r = 3$ ,  $n = 3$ . (Номера частиц: 1, 2, 3.) Тогда  $\{\bar{v}_i\} = (0, 0, 3), (0, 1, 2), (1, 1, 1)$  и по (3)  $B(3, 3) = (3!/0!0!3!) + (3!/0!1!2!) + (3!/1!1!1!3!) = 1+3+1=5$ , что совпадает с их числом 5 при очевидном переборе исходов вида составов номеров частиц в ячейках без учета порядка ячеек, т. е., например, в возрастающем порядке числа непустых ячеек:  $(0,0,123), (0,1,23), (0,2,13), (0,3,12), (1,2,3)$ .

### 1.4. Числа исходов схемы размещения $r$ неразличимых частиц по $n$ неразличимым ячейкам

Бесповторное перечисление исходов этой схемы без ограничений проведено в [8], откуда число ее исходов  $N^*(r, n)$  может быть определено (см. [8, (1)]) из  $N(r, n)$  – числа исходов в схеме размещения без пустых ячеек  $r$  неразличимых частиц по  $n$  неразличимым ячейкам, где число  $N(r, n)$  считается по рекурренте (см. [8, (2)])  $N(r, n) = N(r-1, n-1) + N(r-n, n)$  с начальными значениями: 1)  $N(r, r) = 1$ ; 2)  $N(r, n) = 0$  при  $r < n$ ; 3)  $N(r, 0) = 0$ ; 4)  $N(r, 1) = 1$ , а число

$$N^*(r, n) = N(r+n, n). \quad (4)$$

Кроме этого, покажем, что можно вычислять значение  $N^*(r, n)$  из значений  $N(r, n)$  по следующему утверждению.

**Лемма 4.**

$$N^*(r, n) = \sum_{i=1}^{n-1} N(r, n-i). \quad (5)$$

*Доказательство.* Оно следует из того, что  $N(r, n)^*$  по этой формуле, очевидно, складывается из чисел исходов схем без пустых ячеек с поединично убывающими от  $(n-1)$  до 1 количествами непустых ячеек.  $\square$

**Пример 2.** Пусть  $n = 3, r = 5$ . Тогда по (4) и по рекурренте получаем  $N(5, 3)^* = N(8, 3) = N(7, 2) + N(5, 3) = N(6, 1) + N(5, 2) + N(4, 2) + N(2, 3) = 1 + N(4, 1) + N(3, 2) + N(3, 1) + N(2, 2) + 0 = 1 + 1 + N(2, 1) + N(2, 2) + 1 = 5$ , а по рекурренте и (5)  $N(5, 3)^* = N(5, 3) + N(5, 2) + N(5, 1) = 2 + 2 + 1 = 5$ . Результаты совпали.

## 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ УРОВНЕЙ ЗАПОЛНЕНИЯ ЯЧЕЕК В СХЕМАХ $A, B, C, D$

Идея вычисления вероятностных распределений максимальных уровней заполнения ячеек в условиях схем размещения частиц по ячейкам  $A-D$  с **равновероятными исходами** в задаче 2 из соответствующих результатов (полученных по классическому определению вероятностей) задачи 1 (см. [8]) объяснена в п. 1.1. Поясним ее подробнее.

Исходы схем 2 определяются составами уровней заполнения ячеек (для **неразличимых** частиц в условиях их размещения  $C$  и  $D$ ) или составами частиц ячеек (для **различимых** частиц в условиях их размещения  $A$  и  $B$ ). Порядки перечисления этих составов в исходах схем 2 устанавливаются при **различимых** ячейках (в условиях их размещения  $A$  и  $C$ ) в порядке ячеек, а при **неразличимых** ячейках (в условиях их размещения  $B$  и  $D$ ) – в одном заранее определенном порядке, зависящем от конкретных составов.

**Общие числа исходов** в задаче 2 в условиях размещения частиц по ячейкам  $A-D$  определяются, как и в задаче 1, с заменой числа частиц  $r$  на  $R$ .

Так как по п. 1.1 все составы уровней заполнения ячеек при одинаковых условиях размещения частиц по ячейкам  $A-D$  совпадают по количеству в задачах 1 и 2, то **числа благоприятных исходов** в схеме 2 в условиях размещения  $C$  и  $D$  **неразличимых частиц** будем находить по результату решенной

в [7] задачи 1 в диапазоне возможных частот  $\mu_k$  минимальных значений  $k$  уровней заполнения ячеек  $(l, L)$  (см. п. 1.2) при согласованных по п. 1.1 с задачей 2 значениях параметров. А в условиях размещения  $A$  и  $B$  **различимых частиц числа благоприятных исходов** в схеме 2 будем находить, как и в задаче 1, с заменой множеств составов уровней заполнения ячеек (полученных в задаче 1 при соответствующих качествах ячеек в условиях размещения соответственно  $C$  и  $D$ ) на определяемые по п. 1.1 задачи 2 при делении различных  $R$  частиц по ячейкам.

Приведем конкретные формулировки теорем при каждом из условий  $A-D$  равновероятных исходов размещения частиц по ячейкам с измененными (по п. 1.1) значениями параметров и вычисленными по п. 1.1 составами уровней заполнения ячеек в задаче 2.

### Схема $A$

**Теорема 1.** Пусть в условиях схемы  $A$  размещают  $R$  частиц по  $n$  ячеек. Тогда по (2) и [7]

$$P(V(R, n) = k^*) = \frac{M_A(R, n, k^*)}{n^R} = \frac{1}{n^R} \sum_{i=l^*}^{L^*} \sum_{\{\bar{w}_i\}} \left( \frac{R!}{\prod_{j=1}^n w_j!} \right) \left( \frac{n!}{\prod_{a=1}^r q_a!} \right), \quad (6)$$

где первая сумма производится по перечислению количеств ячеек с максимальным заполнением  $V(R, n) = k^*$ , вторая – по перечислению всех составов  $\{\bar{w}_i\}$  уровней заполнения ячеек  $\bar{w}_i = (w_1, \dots, w_n)$  в заранее установленном порядке при каждой фиксации числа  $i$  ячеек с их заданным максимальным уровнем заполнения  $k^*$ , а  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_r)$  – вторая маркировка уровней заполнения ячеек ( $q_a$  – число ячеек с уровнем заполнения  $a = \bar{1}, r$ ).

*Доказательство.* Оно следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому определению вероятностей с общим числом исходов  $n^R$  (по схеме размещения с повторением) и благоприятным числом исходов, полученным по аналогии с задачей 1 с уровнями заполнения ячеек, определяемыми по п. 1.1.  $\square$

**Пример 3.** Пусть  $n = 3, R = 4, k^* = 2$ . Тогда из п. 1.1  $n = 3, r = 8, k = 2$ . По [2] в схеме 1 получаем составы уровней заполнения ячеек  $(3, 3, 2), (4, 2, 2)$ , откуда в схеме 2 им соответствуют по п. 1.1 составы уровней заполнения ячеек  $(1, 1, 2), (0, 2, 2)$ . (Те же составы в задачах 1 и 2 визуальны очевидны.)

Тогда по (6) получаем

$$P(V(4, 3) = 2) = \frac{1}{3^4} \left( \frac{4!}{0!2!2!} \frac{3!}{2!1!} + \frac{4!}{1!1!2!} \frac{3!}{2!1!} \right) = \frac{2}{3}.$$

### Схема В

**Теорема 2.** Пусть в схеме В размещают  $R$  частиц по  $n$  ячеек. Тогда по (2) и [7]

$$P(V(R, n) = k^*) = \frac{M_B(R, n, k^*)}{B(R, n)} = \frac{1}{B(R, n)} \sum_{i=l^*}^{L^*} \sum_{\{\bar{w}_i\}} \frac{R!}{\prod_{j=1}^n w_j! \prod_{a=1}^r q_a!}, \quad (7)$$

где  $B(R, n)$  вычислены в лемме 3, первая сумма производится по перечислению количества ячеек с максимальным заполнением  $V(R, n) = k^*$ , вторая – по перечислению всех составов  $\{\bar{w}_j\}$  уровней заполнения ячеек  $\bar{w}_i = (w_{1j}, \dots, w_{nj})$  в заранее установленном порядке при каждой фиксации числа  $i$  ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения  $k$ , а  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_r)$  – вторая маркировка уровней заполнения ячеек ( $q_a$  – число ячеек с уровнем заполнения  $a = \bar{1}, r$ ).

*Доказательство.* Следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому определению вероятностей с общим числом исходов  $B(R, n)$ , вычисляемым по (3), и благоприятным числом исходов, полученным по аналогии с задачей 1 с уровнями заполнения ячеек, определяемыми по п. 1.1.  $\square$

**Пример 4.** Пусть  $n = 3, R = 4, k^* = 2$ . Тогда из п. 1.1  $n = 3, r = 8, k = 2, i = \bar{1}, 2$ . Как и в примере 3, в схеме 1 получаем составы уровней заполнения ячеек  $(3, 3, 2), (4, 2, 2)$ , откуда в схеме 2 им соответствуют составы уровней заполнения ячеек  $(1, 1, 2), (0, 2, 2)$ .  $B(4, 3)$  вычисляется по (3) при  $\{\bar{v}_i\} = (0, 0, 4), (0, 1, 3), (1, 1, 2), (0, 2, 2)$ :

$$B(4, 3) = \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!2!2!} = 14.$$

Тогда по (7)

$$P(V(4, 3) = 2) = \frac{1}{B(4, 3)} \left( \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!2!2!} \right) = \frac{9}{14}.$$

### Схема С

**Теорема 3.** Пусть в схеме С размещают  $R$  частиц по  $n$  ячеек. Тогда по [7]

$$P(V(R, n) = k^*) = \frac{N_C(k^*)}{C_{n+R-1}^R} = \frac{1}{C_{n+R-1}^R} \sum_{i=l}^L C_n^i C_{r-kn-1}^{n-i-1}, \quad (8)$$

где в задаче 1 по  $n$  различным ячейкам размещают  $r = Rn - R$  неразличимых частиц с минимальным уровнем заполнения  $k = R - k^*$  частиц в ячейке.

*Доказательство.* Следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому определению вероятностей с общим числом исходов  $C_{n+R-1}^R$ , вычисляемым по схеме сочетаний с повторением, и благоприятным числом исходов в решенной в [7] задаче 1 с приведенными в теореме и согласованными с задачей 2 по п. 1.1 значениями параметров и данному в [7] диапазону возможных значений  $i = \bar{1}, L$  чисел ячеек с данным  $k$  минимальным уровнем заполнения ячеек:  $(l, L)$  (см. п. 1.2).  $\square$

**Пример 5.** Пусть  $n = 3, R = 4, k^* = 2$ . Тогда из п. 1.1  $n = 3, r = 8, k = 2, i = \bar{1}, 2$ . Как и в примере 3, в схеме 1 по п. 1.1 получаем составы уровней заполнения ячеек  $(3, 3, 2), (4, 2, 2)$ . Тогда по (8) получаем

$$P(V(4, 3) = 2) = (C_3^1 C_1^1 + C_3^2 C_1^0) / C_6^4 = 2/5.$$

### Схема D

**Теорема 4.** Пусть в схеме D размещают  $R$  частиц по  $n$  ячеек. Тогда

$$P(V(R, n) = k^*) = \frac{N_D(k^*)}{N^*(R, n)} = \frac{1}{N^*(R, n)} \sum_{i=l}^L N(r - nk, n - i),$$

где  $N(R, n), N^*(R, n)$  – числа исходов в схеме размещения  $r$  неразличимых частиц по  $n$  неразличимым ячейкам соответственно без пустых ячеек и без ограничений определяют по рекурренте из [8], приведенной в п. 1.4 и по (4) и (5);  $N_D(k^*)$  – число исходов события ( $V = k^*$ ); сумма производится по перечислению количества  $i$  ячеек с минимальным заполнением  $U(r, n) = k$ .

*Доказательство.* Следует из п. 1.1 и приведенных выше рассуждений по классическому

определению вероятностей с общим числом исходов  $N^*(R, n)$ , вычисляемым по схеме размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам (см. [8]), и благоприятным числом исходов из решенной в [7] задачи 1 с приведенными в теореме и согласованными с задачей 2 (по п. 1.1) значениями параметров и данному в [7] диапазону возможных значений  $i = \overline{1, L}$  чисел ячеек с данным  $k$  минимальным уровнем заполнения ячеек:  $(l, L)$  (см. п. 1.2).  $\square$

**Пример 6.** Пусть  $n = 3$ ,  $R = 4$ ,  $k^* = 2$ . Тогда из п. 1  $n = 3$ ,  $r = 8$ ,  $k = 2$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Общее число исходов в этом примере  $N^*(4, 3) = N(7, 3) = N(6, 2) + N(4, 3) = N(5, 1) + N(4, 2) + N(3, 2) + N(1, 3) = 1 + N(3, 1) + N(2, 2) + N(2, 1) = 4$ , что совпадает с их числом при визуальном перечислении всех составов уровней заполнения ячеек в примере:  $(0, 0, 4)$ ,  $(0, 1, 3)$ ,  $(0, 2, 2)$ ,  $(1, 1, 2)$ . Тогда  $P(V(4, 3) = 2) = 2/4 = 1/2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Викторова И. И. Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме // Математические заметки. 1969. Т. 3, № 3. С. 305–316.
2. Колчин В. Ф. О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, № 3. С. 476–487.
3. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.
4. Павлов Ю. Л. Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 3. С. 523–533.
5. Хакимуллин Е. Р. О предельном поведении максимального заполнения в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // Математические заметки. 1981. Т. 30, № 2. С. 277–289.
6. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 122–129. doi: 104213/dm1203

7. Энатская Н. Ю. Вероятностный анализ схем размещения частиц по ячейкам с фиксированным значением их минимального заполнения // Труды Карельского научного центра РАН. 2021. № 6. С. 77–84. doi: 10.17076/mat1347

8. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В. Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // Труды Карельского научного центра РАН. 2014. № 4. С. 143–154.

#### REFERENCES

1. Viktorova I. I. Asymptotic behavior of maximum of an equiprobable polynomial scheme. *Mathematical Notes*. 1969;5(3):184–191. doi: 10.1007/BF01388624
2. Kolchin V. F. On the limiting behavior of extreme order statistics in a polynomial scheme. *Theory of Probability and its Applications*. 1969;14(3):458–469. doi: 10.1137/1114058
3. Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P. Random postings. Moscow: Nauka; 1976. 223 p. (In Russ.)
4. Pavlov Yu. L. The asymptotic distribution of maximum tree size in a random forest. *Theory of Probability and its Applications*. 1978;22(3):509–520. doi: 10.1137/1122061
5. Khakimullin E. R. Asymptotic behavior of the maximum occupancy in an equiprobable scheme of allocation of particles by complexes. *Mathematical Notes*. 1981;30(2):626–633. doi: 10.1007/BF01708846
6. Chuprunov A. N., Fazekash I. An analogue of the generalized allocation scheme: limit theorems for maximum cell load. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012;22(3):307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020
7. Enatskaya N. Yu. Probability analysis of the schemes of particle allocation to cells with a fixed minimum filling value. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2021;6:77–84. doi: 10.17076/mat1347 (In Russ.)
8. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V. Analysis of a scheme of allocating indistinguishable particles to indistinguishable cells. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2014;4:143–154. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 13.12.2023; принята к публикации / accepted: 08.04.2024.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталья Юрьевна  
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента  
прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

#### CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

УДК 519.115:519.2

## СХЕМА ПЕРЕСТАНОВОК С ЗАДАНЫМ РАЗБРОСОМ ЕЕ ФИКСИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)*

Заданный разброс фиксированных элементов перестановки означает определенное число элементов между крайними из них по расположению в перестановке в каждом их порядке. Предложенная схема анализируется в доасимптотической области возможных значений параметров авторским перечислительным методом, т. е. решаются задачи перечислительной комбинаторики нахождения числа ее исходов, их неповторного нумерованного перечисления, установления взаимно-однозначного соответствия видов исходов с их номерами, определения вероятностей исходов и предлагается процедура их универсального моделирования.

Ключевые слова: схема перестановок; разброс фиксированных элементов перестановки; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Схема перестановок с заданным разбросом ее фиксированных элементов // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 55–60. doi: 10.17076/mat1859

### N. Yu. Enatskaya. PERMUTATION SCHEME WITH A GIVEN RANGE OF FIXED ELEMENTS

*National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)*

A given range of fixed elements of a permutation means a certain number of elements between the elements located at the extremes in the permutation in each sequence. The proposed scheme is analyzed in the pre-asymptotic region of feasible parameter values using the enumerative method designed by the author, i. e., the enumerative combinatorics problems of finding the number of its outcomes, their non-repeated numbered enumeration, finding one-to-one correspondence between the types of outcomes and their numbers, determining the probabilities of outcomes are solved and a procedure for their universal modeling is proposed.

Keywords: permutation scheme; range of fixed elements of permutation; numbering problem; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Permutation scheme with a given range of fixed elements. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:55–60. doi: 10.17076/mat1859

## ВВЕДЕНИЕ

Введем параметры схемы:  $n$  – размер перестановки,  $t$  – число ее фиксированных элементов  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_t)$ , перечисленных здесь в возрастающем порядке их номеров мест в перестановке с заданным разбросом  $\rho$ . Для данной схемы будем решать перечисленные в аннотации задачи комбинаторики на основе бесповторного перечисления всех ее исходов с введением следующих основных понятий и обозначений:

**Итерация** – исходы действия с элементами схемы при перечислении ее исходов;

**ПМ** – перечислительный метод анализа закономерностей и вычисления характеристик исходов схем на основе построения процесса их перечисления в виде последовательных исходов действий-итераций над их элементами;

**МГ** – представление случайного процесса перечисления исходов схемы в виде вероятностного графа переходов в порядке итераций;

**ЗН** – задача нумерации о соответствии между номерами и видами исходов схемы;

**ПЗН** – прямая задача нумерации нахождения вида исхода схемы по его номеру;

**ОЗН** – обратная задача нумерации нахождения номера исхода схемы по его виду;

**траектория исхода** – последовательность исходов итераций, ведущая к нему в графе от начала их перечисления;

**бесповторное перечисление исходов схемы** характеризуется единственной траекторией для ее каждого исхода;

**пучок** в графе процесса – совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;

**размер пучка** на каждой итерации – число переходов из каждого исхода итерации;

**пучковая структура графа** – перечисленные размеры пучков всех итераций;

**число исходов итерации** при бесповторном перечислении исходов схемы совпадает с суммой размеров пучков предшествующей итерации;

**число исходов схемы** при бесповторном перечислении ее исходов – число исходов последней итерации.

Здесь и в дальнейшем номера элементов перестановки для краткости будем называть элементами.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основы используемого здесь перечислительного метода (см. [1]) будут представлены ниже. Результаты других участвующих здесь ранее изученных схем: перестановок, сочетаний и схемы последовательных действий (ПД) приведены в [2]. На результаты первых двух

будем ссылаться, а основные результаты схемы ПД, являющейся итоговой для нашей схемы, кратко приведем.

### 1.1. Перечислительный метод

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ (см. [1, 2]), суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ), состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между видами исходов и их номерами, и универсальное моделирование (УМ) исходов, дающее его единый прием, состоящее в разыгрывании номеров исходов с установленным вероятностным распределением, виды которых определяются по решению задачи нумерации, учитывающей специфику схемы. Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

### 1.2. Схема последовательных действий

Схема  $k$  ПД возникает, когда каждому следующему действию (итерации) подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Если  $i$ -е действие ( $i = \overline{1, k}$ ) совершается  $d_i$  числом способов, то число исходов схемы  $N = \prod_{i=1}^k d_i$ .

Вид исхода после совершения  $i$  действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые соответственно обозначаются через  $R_{ij_i}$ , где  $i$  – номер действия, а  $j_i$  – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид  $R_{ij_i}$  определяется характером действия. Исход совершения  $r$  действий ( $r \leq k$ ) обозначен в виде  $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{rj_r}\}$ . Тогда окончательный исход схемы получается при  $r = k$ .

**Теорема 1. ПЗН.** Пусть в схеме с параметрами  $d_1, \dots, d_k$  дан номер  $N^{(k)}$  ее исхода. Тогда вид исхода  $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$ , опреде-



ляемый номерами  $(j_1, \dots, j_k)$  исход его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при  $i = \overline{1, k}$  находится по формуле  $j_i = t_i + I(t_i)d_i$ , где  $t_i = N^{(i)} \bmod d_i$ ;  $I(Z) = 0$  при  $Z \neq 0$  и  $I(Z) = 1$  при  $Z = 0$ ;

$$N^{(i-1)} = \left\lfloor \frac{N^{(i)} + d_i - 1}{d_i} \right\rfloor,$$

где  $[Z]$  – целая часть числа  $Z$ , и  $i = k, k - 1, \dots, 1$ ;  $N^{(0)} = 1$ .

**Теорема 2. ОЗН.** Пусть в схеме с параметрами  $d_1, \dots, d_k$  дан вид ее исхода  $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$ , определяющий номера  $(j_1, \dots, j_k)$  исход его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при  $i = \overline{1, k}$ . Тогда его номер вычисляется по формуле

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^k d_i + j_k.$$

(Анализ схем ПД с доказательством теорем 1 и 2 см. в [2, п. 1.8].)

### 1.3. О параметрах изучаемой схемы

Введем обозначения:

$\bar{m} = (m_1, \dots, m_t)$  – номера последовательных мест  $t$  фиксированных элементов  $\bar{a}$  в перестановке;

$\bar{V}$  – участок элементов перестановки на местах  $(m_1, m_1 + 1, \dots, m_t)$  размером  $\rho + 2$ , как 2 крайних элемента и  $\rho$  элементов между ними, среди которых  $t - 2$  фиксированных.

**Лемма 1.** Для параметров изучаемой схемы верны соотношения:

$$\rho = m_t - m_1 - 1; \quad 0 \leq \rho \leq n - 2; \quad (1)$$

$$m_1 = \overline{1, n - \rho - 1}; \quad m_t = \overline{\rho + 2, n}. \quad (2)$$

*Доказательство.* Доказательство (1) следует из условия схемы, что между элементами на местах  $m_1$  и  $m_t$  лежит  $\rho$  элементов перестановки, откуда при крайних значениях  $m_1 = 1$ ,  $m_t = n$  получаем данное верхнее ограничение для  $\rho$  при очевидном нижнем ограничении, когда  $t = 2$ ,  $m_2 - m_1 = 1$ .

Из (1)  $m_1 = m_t - \rho - 1$ ;  $m_t = \rho + m_1 + 1$ . Очевидно, что  $\min m_1 = 1$ ;  $\max m_t = n$ . Тогда по (1)  $\max m_1 = \max m_t - \rho - 1 = n - \rho - 1$ ;  $\min m_t = \rho + \min m_1 + 1 = \rho + 2$ , что и доказывает (2).  $\square$

## 2. Вид исхода схемы, их прямое перечисление и число всех исходов схемы

Вид исхода схемы представляем перестановкой  $n$  ее элементов с заданным размахом фиксированных элементов.

Перечисление исходов схемы состоит из объединения каждого с каждым результатов четырех этапов-итераций с постоянными размерами пучков внутри каждой итерации, т. е. представляет собой схему ПД (см. п. 1.2, а схемы действий перестановок и сочетаний изучены в [2, пп. 1.2 и 1.3]). Представим процедуру перечисления исходов схемы по шагам (итерациям):

1) перестановка из  $t$  фиксированных элементов  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_t)$  числом способов  $d_1 = t!$  (совокупность 1-х перестановок);

2) перестановка из  $(n - t)$  остальных элементов  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_{n-t})$  числом способов  $d_2 = (n - t)!$  (совокупность 2-х перестановок);

3) выбор  $(t - 2)$  элементов  $(m_2^{(0)}, \dots, m_{t-1}^{(0)})$  из  $\rho$  элементов множества  $\bar{V}$  без крайних числом способов  $d_3 = C_\rho^{t-2}$  (при  $m_1 = 1$  исходы этого шага назовем исходами нулевого сдвига);

4) перебор значений  $m_1$  при правом поединичном сдвиге всех (полученных в шаге 3) значений из  $\bar{m}$ , числом способов  $d_4 = n - \rho - 1 = S$  (по (2) леммы п. 1.3) с последующей расстановкой на  $t$  местах  $\bar{m}$  перестановки элементов  $\bar{a}$ , а на остальных  $n - t$  местах перестановки – элементов  $\bar{b}$ .

Получаем исход нашей схемы как результат последовательной реализации этих четырех шагов.

Переборы исходов схем перестановок первых двух этапов перечисления исходов нашей схемы даны в [2], для третьего этапа – описаны шагом 3) и даны в [2] для схемы сочетаний, а для 4-го этапа – приведены здесь в шаге 4) при каждом фиксированных исходах 1-, 2- и 3-го этапов в условиях схемы. Исходы этих четырех последовательных этапов будут являться исходами нашей схемы.

Процедуру перечисления исходов схемы представим в виде графа последовательной реализации описанных этапов перечисления схемы ПД (см. п. 1.2) с пучковой структурой, определяемой указанными числами способов их проведения.

Из условия схемы, размеры пучков каждого этапа одинаковы и совпадают с числами их исходов, указанными выше при перечислении исходов этапов из каждого фиксированного состояния (исхода) предшествующего этапа.

Таким образом, для явного перечисления исходов схемы по методу графов (см. [1]) строится случайный процесс пошагового последовательного поединичного добавления этапов с исходами всех предшествующих этапов, т. е. схемы ПД, изображаемый графом на рис. 1. На нем показана пучковая поэтапная (поитерационная) структура графа перечисления исходов схемы, где пучки одинакового размера итераций представлены крайними пучками (с вертикальными многоточиями между ними). А крайние пучки изображены парами своих крайних ребер, между которыми указаны их размеры в соответствии с полученными выше по четырем итерациям.

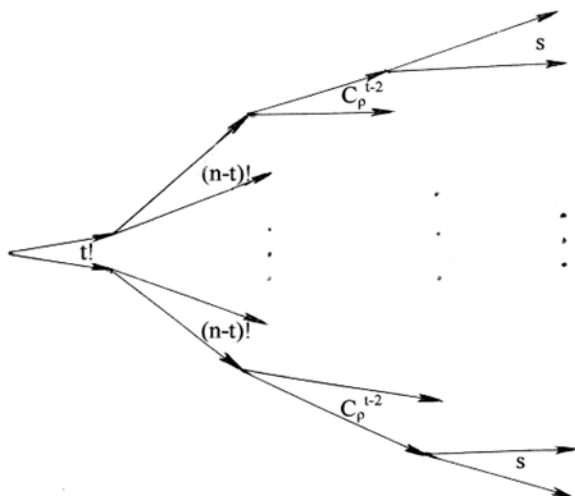


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы  
Fig. 1. The graph of outcomes enumeration of the scheme

Нумерацию исходов на каждом шаге проводим в порядке роста номеров упорядоченных в схеме этапов и в порядке роста номеров исходов, заданных по каждому этапу в порядке его реализации.

Число  $N$  исходов схемы вычисляется как суммарная численность пучковой структуры третьего этапа перечисления исходов или как произведение чисел способов перечисления четырех этапов, откуда получаем

$$N = \prod_{i=1}^4 d_i = t!(n-t)!C_p^{t-2}(n-\rho-1). \quad (3)$$

Приведем числовой пример прямого перечисления исходов схемы.

**Пример 1.** Пусть  $n = 6$ ,  $t = 3$ ,  $\rho = 2$ ,  $\bar{a} = (2, 5, 6)$ . Отсюда по (3) имеем  $N = 3!3!C_2^{3-2}(6-2-1) = 216$ .

В силу большого размера полного графа перечисления исходов схемы построим в примере его фрагмент из одного исхода (из  $3! = 6$  исходов) первого этапа и по нему вычислим число исходов схемы  $N$ .

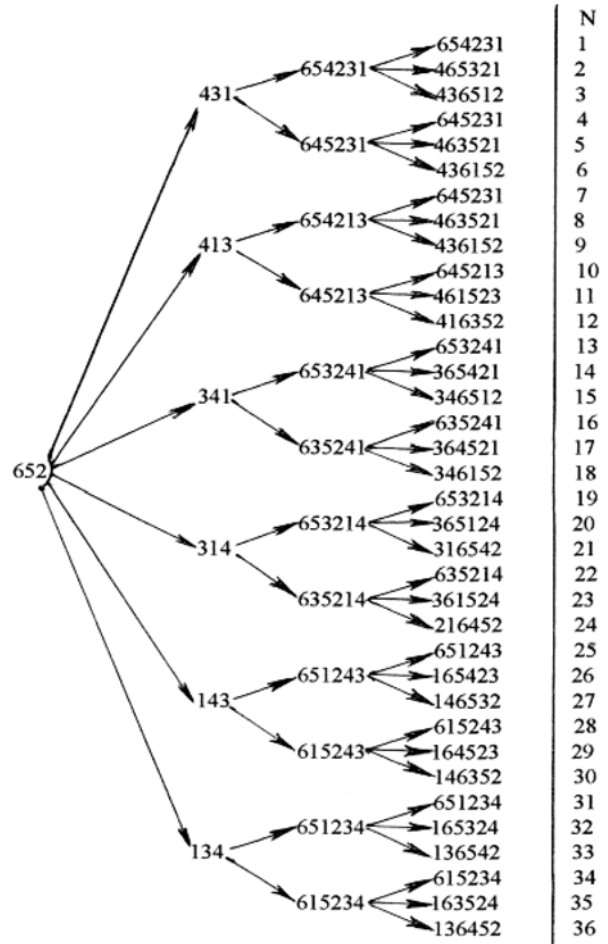


Рис. 2. Фрагмент графа перечисления исходов схемы примера 1  
Fig. 2. Fragment of the graph of outcomes enumeration of the scheme in example 1

По фрагменту графа на рис. 2 (при очевидном 6-кратном увеличении при варьировании только перестановок первого этапа перечисления, из которого, очевидно, и следуют в аналогичном порядке все остальные виды исходов схемы) и по (3) получаем  $N = 216$ .

Пучковая структура приведенного на рис. 2 фрагмента графа перечисления исходов схемы:  $(6)$ ,  $(2,2,2,2,2,2)$ ,  $(3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3)$ .

Пучковая структура всего графа перечисления исходов схемы получается 5-кратным повторением приведенной выше структуры его фрагмента по каждой итерации с добавлением слева структуры начальной итерации.

### 3. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ ДЛЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Рассматриваемая схема представляет собой схему ПД, которыми являются приведенные выше четыре этапа перечисления ее исходов, где  $i$ -е действие ( $i = \overline{1, k}$ ) совершается  $d_i$  числом способов (в нашей схеме  $k = 4$ ,  $d_1 = t!$ ,  $d_2 = (n - t)!$ ,  $d_3 = C_{\rho}^{t-2}$ ,  $d_4 = n - \rho - 1 = S$ ).

Общее число  $N$  исходов схемы  $k$  последовательных действий известно и задано формулой  $N = \prod_{i=1}^k d_i$ , что совпадает с результатом формулы (3).

Результаты решения ЗН в схеме ПД приведены в п. 1.2 при известной пучковой структуре графа перечисления ее исходов всех действий, которые будут обозначаться для их номеров и видов соответственно через  $j_i$  и  $R^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Для первых трех действий-этапов результаты решения ЗН приведены в [2]. Для 4-го этапа ЗН будет решена здесь, что и завершит решение ЗН для нашей схемы.

#### Решение ЗН четвертого этапа

При решенных ЗН первых трех этапов по [2] известны соответствия видов и номеров их исходов. Для решения ЗН 4-го этапа (со своими обозначениями) заметим, что вид его исхода определяется видом 3-го этапа и значением  $m_1$  – места первого из  $t$  фиксированных элементов в перестановке, совпадающего с его номером  $j_4$ .

**ПЗН.** Пусть при заданном  $\rho$ , фиксированных исходах первых двух этапов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  и виде исхода нулевого сдвига третьего этапа дан номер исхода  $j_4$  4-го этапа. Требуется найти его вид  $R^{(4)}$ , совпадающий с видом исхода всей схемы и однозначно следующий из значения  $m_1$  по шагу 4) п. 2 перечисления исходов схемы.

**Решение.** Искомый вид исхода схемы  $R^{(4)}$  получается из исхода первых трех этапов по шагу 4) п. 2 в результате определения значений  $\{m_j\}$ ,  $j = \overline{1, t}$ , где  $m_1 = j_4$ , а значит, и все значения в  $\bar{m}$  увеличиваются на  $j_4$ . Отсюда по шагу 4) п. 2 перечисления исходов схемы получаем  $R^{(4)}$ .

**ОЗН.** Пусть при заданном  $\rho$ , фиксированных исходах первых двух этапов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  и виде исхода нулевого сдвига третьего этапа дан вид исхода  $R^{(4)}$  4-го этапа, совпадающий с исходом схемы. Требуется найти его номер  $j_4$  4-го действия.

**Решение.** Искомый номер исхода схемы  $R^{(4)}$  получается из вида исхода первых трех этапов в результате определения по нему значения  $m_1$  – места в исходе  $R$  первого из фик-

сированных элементов, совпадающего с искомым значением  $j_4$ .

Имея теперь решение ЗН всех четырех последовательных действий, составляющих нашу исследуемую схему, по приведенному здесь результату п. 1.2 из [2], будем считать ее теоретически решенной для всей схемы.

Для иллюстрации приведем численный пример ее решения.

**Пример 2.** Пусть в условиях примера 1 ставится ЗН для схемы.

**ПЗН.** Пусть дан номер исхода схемы  $N^{(*)} = 23$ . (По рис. 2 его вид  $R^{(*)} = R^{(4)} = 361524$ .) Требуется найти его вид  $R^{(4)}$  по формулам из п. 1.2 теоремы 1, при  $k = 4$ ,  $d_1 = 3! = 6$ ,  $d_2 = 3! = 6$ ,  $d_3 = C_2^1 = 2$ ,  $d_4 = 6 - 3 = 3$ .

#### Шаги решения:

1) из  $N^{(4)} = 23$  находим номера исходов схемы, предшествующих искомому по этапам-действиям из теоремы 1 п. 1.2:  $N^{(3)} = [(23 + 3 - 1)/3] = 8$ ,  $N^{(2)} = [(8 + 2 - 1)/2] = 4$ ,  $N^{(1)} = [(4 + 6 - 1)/6] = 1$ ;

2) из теоремы 1 п. 1.2 находим номера исходов схемы, предшествующих искомому в своих пучках по результату шага 1):  $j_4 = 23 \bmod 3 = 2$ ,  $j_3 = 8 \bmod 2 + 2 = 2$ ,  $j_2 = 4 \bmod 6 = 4$ ,  $j_1 = 1 \bmod 6 = 1$ ;

3) из решенных ПЗН для этапов получаем по результатам шага 2) по номерам исходов этих этапов виды их исходов: для первых двух исходов (652) при  $j_1 = 1$  и (314) при  $j_2 = 4$ , тогда на третьем этапе при  $j_3 = 2$  получаем исход нулевого сдвига (635214), из которого при сдвиге  $j_4 = 2$  находим искомый вид  $R^{(4)} = 361524$ , что совпадает с результатом по рис. 2.

**ОЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R^{(4)} = 361524$  (по рис. 2 его номер  $N^{(4)} = 23$ ). Требуется найти его номер  $N^{(4)}$  по теореме 2 п. 1.2 или из [2] при  $k = 4$ ,  $d_1 = 3! = 6$ ,  $d_2 = 3! = 6$ ,  $d_3 = C_2^1 = 2$ ,  $d_4 = 6 - 3 = 3$ .

#### Шаги решения:

1) из данного  $R_{(4)} = 361524$  и  $\bar{a} = 2, 5, 6$  находим виды исходов этапов  $R^{(1)} = 652$ ,  $R^{(2)} = 314$ ,  $R^{(3)} = 635214$ ;

2) из решенных ОЗН для этапов получаем по результатам п. 1)  $j_1 = 1$ ,  $j_2 = 4$ ,  $j_3 = 2$ ,  $j_4 = 2$ ;

3) теперь по теореме 2 п. 1.2 вычисляем искомое значение  $N^{(4)} = (1 - 1)6 \cdot 2 \cdot 3 + (4 - 1)2 \cdot 3 + (2 - 1)3 + 2 = 23$ , что совпадает с результатом по рис. 2.

#### 4. ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НА МНОЖЕСТВЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Для определения вероятностей на множестве исходов схемы строим итерационный граф перечисления исходов схемы перестановок по МГ (см. [2, п. 1.1.1.2]) без ограничений с принятыми вероятностями итерационных переходов в ней с их единичными суммами в каждом пучке. Удаляем «лишние» для нашей схемы траектории, ведущие к исходам, не удовлетворяющим условиям нашей схемы. Далее в каждом пучке каждой итерации, начиная с первой, производим пересчет вероятностей оставшихся итерационных переходов так, чтобы их сумма равнялась единице. Для этого их прежние вероятности делим на сумму прежних вероятностей оставшихся в пучке переходов. Это называется пропорциональным пересчетом вероятностей оставшихся итерационных переходов в графе. В результате получаем вероятностный граф бесповторного перечисления исходов нашей изучаемой схемы. Теперь итоговые вероятности исходов нашей схемы вычисляются по вероятностям их траекторий перемножением пересчитанных вероятностей составляющих их итерационных переходов.

Поступила в редакцию / received: 13.12.2023; принята к публикации / accepted: 09.04.2024.  
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**  
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента  
прикладной математики

*e-mail: nat1943@mail.ru*

#### 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Теперь, имея вероятностное распределение исходов схемы и решенную ПЗН, будем моделировать ее исходы по УМ (см. [1 и 2, п. 1.1]), т. е. по разыгранному с известным распределением номеру исхода будем получать смоделированный исход по результату ПЗН.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Энатская Н. Ю.* Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312
2. *Энатская Н. Ю.* Доасимптотический анализ комбинаторных схем. М.: URSS, 2023. 536 с.

#### REFERENCES

1. *Enatskaya N. Yu.* Probabilistic models of combinatorial schemes. *Vestnik YuUrGU = Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software.* 2020;13(3):103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)
2. *Enatskaya N. Yu.* Pre-asymptotic analysis of combinatorial schemes. Moscow: URSS; 2023. 536 p. (In Russ.)

#### CONTRIBUTOR:

**Enatskaya Natalia**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

## МЕЖДУНАРОДНОЕ РАБОЧЕЕ СОВЕЩАНИЕ «СЕТЕВЫЕ ИГРЫ И МЕНЕДЖМЕНТ-2024» – NETWORKING GAMES AND MANAGEMENT, NGM-2024

(Петрозаводск, 5–7 марта 2024 г.)

Весной 2024 года на базе отеля «Дворцы» в пос. Марциальные Воды проводилось очередное международное рабочее совещание «Сетевые игры и менеджмент-2024» (Networking Games and Management), посвященное юбилею профессора Владимира Викторовича Мазалова (ИПМИ КарНЦ РАН). Мероприятие было организовано Институтом прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, а также факультетом прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Совещание является традиционным и проводилось уже в седьмой раз, продолжая серию совещаний в области сетевых игр. Пер-

вое такое мероприятие было организовано в 2002 году под названием «Сетевые игры и распределение ресурсов» (Networking Games and Resource Allocation). Затем начиная с 2009 года оно стало проводиться под постоянным названием «Сетевые игры и менеджмент» (Networking Games and Management). Традиционно все совещания проходили непосредственно перед либо после международной конференции «Теория игр и менеджмент» (Game Theory and Management) в г. Санкт-Петербурге, поскольку в тематике обоих мероприятий много общего. В этом году совещание проводилось в марте, так как было приурочено к юбилею профессора В. В. Мазалова.



В рабочем совещании приняли участие 25 человек из разных городов России (Петрозаводск, Санкт-Петербург, Москва, Нижний Новгород, Ростов-на-Дону, Новосибирск), а также из Польши. В состав программного комитета вошли ведущие ученые из России и других стран: председатель Леон Петросян (СПбГУ, Санкт-Петербург), Константин Авраченко (INRIA, Франция), Андрей Гуртов (Университет г. Линкопинг, Швеция), Владимир Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск), Евсей Морозов (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск), Дмитрий Новиков (ИПУ РАН, Москва), Елена Парилина (СПбГУ, Санкт-Петербург), Артем Седаков (СПбГУ, Санкт-Петербург), Кшиштоф Шайовский (ISDG, Польша), Александр Васин (МГУ, Москва), Виктор Захаров (СПбГУ, Санкт-Петербург), Николай Зенкевич (СПбГУ, Санкт-Петербург).

Целью рабочего совещания является обсуждение последних разработок в области теории игр в сетях и менеджменте. Были представлены и обсуждались результаты по следующим направлениям в теории игр: сетевые игры и менеджмент, задачи оптимальной маршрутизации, аукционы, переговорные задачи, игры с обучением и адаптивные игры. Во время работы семинара заслушано три пленарных и 17 секционных докладов. Наибольший интерес вызвали доклады Д. Новикова «Модели ограниченной рациональности», В. Колокольцова «On the control over the propagation of ticks», Н. Коргина «Распределенная сеть полигонов для отработки сценариев применения гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях – проблема согласования интересов». Профессор К. Шайовский и К. Авраченко принимали участие в семинаре через удаленное Zoom-подключение.



По результатам работы совещания приняты следующие решения: продолжить серию рабочих совещаний «Сетевые игры и менеджмент», избранные результаты из представлен-

ных на семинаре опубликовать в будущих выпусках журнала «Математическая теория игр и ее приложения» (<http://mgta.krc.karelia.ru>).

*Ю. В. Чиркова*

**XI МЕЖДУНАРОДНАЯ ПЕТРОЗАВОДСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
«ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ»,  
ПОСВЯЩЕННАЯ 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В. Ф. КОЛЧИНА  
(Петрозаводск, 27–31 мая 2024 г.)**

С 27 по 31 мая 2024 года в Карельском научном центре РАН проходила XI Международная Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике». Она была посвящена 90-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора, академика Академии криптографии Российской Федерации Валентина Федоровича Колчина. Первая конференция состоялась в 1983 г. и была всесоюзной. Начиная с третьей конференции в 1992 г. Петрозаводские конференции стали международными. Главным организатором и лидером Петрозаводских конференций был В. Ф. Колчин (1934–2016). Значительный вклад в проведение этих научных мероприятий внесли выдающиеся математики: академик АН СССР Ю. В. Прохоров, член-корреспондент АН СССР и член Президиума Карельского филиала АН СССР В. Я. Козлов, член-корреспондент РАН Б. А. Севастьянов. Среди важнейших достижений конференций – создание в 1989 г. журнала «Дискретная математика», главным редактором которого с 2008 по 2016 г. был В. Ф. Колчин. Это один из ведущих математических журналов России, входящий в базы научных публикаций Web of Science, Scopus, РИНЦ. В настоящее время журнал возглавляет А. М. Зубков.

Валентин Федорович Колчин внес заметный вклад в развитие математических исследований в Карелии и способствовал созданию Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. В частности, несколько диссертаций сотрудников института были защищены с уча-

стием В. Ф. Колчина в качестве официального оппонента или научного консультанта.

Обычно Петрозаводские конференции проводились один раз в четыре года. В 2016 г. было принято решение сократить этот срок, и десятая конференция прошла в 2019 г. Однако из-за пандемии COVID-19 проведение следующей конференции пришлось отложить до 2024 г.

Организаторами XI конференции выступили Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН и Московский физико-технический институт. Цель конференции состояла в развитии современных вероятностных методов дискретной математики. Были представлены доклады о жизни и творчестве В. Ф. Колчина, о его вкладе в теорию случайных отображений, случайных графов и вероятностную комбинаторику. Обсуждались последние достижения в этих областях математики, теории ветвящихся процессов, теории игр и стохастической оптимизации, теории массового обслуживания, статистического и имитационного моделирования.

Конференция состоялась при финансовой поддержке Минобрнауки (грант на создание и развитие математического центра мирового уровня Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, соглашение № 075-15-2022-265) и Московского физико-технического института. Заявка на финансирование конференции содержала состав Программного комитета. Сопредседатели: А. М. Зубков, заведующий отделом дискретной математики Ма-

тематического института им. В. А. Стеклова РАН, А. М. Райгородский, директор Физтехшколы математики и информатики МФТИ, В. В. Мазалов, директор Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН. В состав комитета входили В. А. Ва-

тутин (Москва), В. А. Афанасьев (Москва), Л. А. Петросян (Санкт-Петербург), Ю. С. Харин (Беларусь), А. Н. Тихомиров (Сыктывкар), Ю. Л. Павлов (Петрозаводск), А. Н. Реттеева (Петрозаводск), Е. В. Морозов (Петрозаводск), А. С. Румянцев (Петрозаводск).



В конференции приняли очное участие 65 человек, среди них 29 молодых ученых. Кроме того, 7 человек участвовали заочно. Была организована трансляция заседаний в ZOOM и в YouTube. Благодаря этому в очной и заочной форме на конференции были представлены математики из Узбекистана, Белоруссии, Болгарии, Колумбии, Эритреи и США. Российские ученые приехали в Петрозаводск из Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска, Нижнего Новгорода, Воронежа, Ульяновска, Сыктывкара, Чебоксар.

Конференцию открыл совместный доклад В. А. Ватутина и Ю. Л. Павлова о жизни и творчестве В. Ф. Колчина. Состоялось 10 пленарных докладов, посвященных следующим вопросам. В докладе А. М. Зубкова рассматривались итерации неравновероятных случайных взаимно однозначных отображений конечных множеств. Доклад В. А. Ватутина, Е. Е. Дьяконовой и С. Dong (Китай) посвящался развитию ветвящихся процессов в экстремальной случайной среде. Последние результаты о случайных лесах Гальтона – Ватсона изложены в сообщении Ю. Л. Павлова. А. М. Райгородский представил результаты об оценках турановского типа для дистанционных графов. А. Н. Тихомиров провел сравнительный анализ методов Стейна и характеристических функций и рассказал

о применении характеристических функций в методе Стейна, что в современной литературе получило название «метод Стейна – Тихомирова». В докладе В. В. Мазалова раскрыта связь игр на истощение и случайных блужданий. В. И. Афанасьев рассматривал ветвящиеся процессы, начинающиеся с большого числа частиц и функционирующие в случайной среде. Н. В. Перцев представил подход к построению и исследованию стохастической модели динамики популяций применительно к задачам иммунологии. А. Н. Чупрунов рассказал о функциональных предельных теоремах для числа частиц в ячейках обобщенной схемы размещения, а Д. А. Шабанов – о дробных раскрасках случайных гиперграфов. Состоялось 42 секционных доклада, первым из которых было сообщение сына В. Ф. Колчина, Андрея Валентиновича, об обобщенной схеме размещения и некоторых аспектах ее развития и применения.

Тезисы докладов участников конференции опубликованы в электронном виде по адресу: [http://vmadm2024.krc.karelia.ru/files/1716274405\\_Abstracts2024.pdf](http://vmadm2024.krc.karelia.ru/files/1716274405_Abstracts2024.pdf)

Для участников конференции были также организованы экскурсии на остров Кижы, в горный парк «Рускеала» и другие.

*Ю. Л. Павлов*



## ИНСТИТУТУ ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ КарНЦ РАН – 25 ЛЕТ

Развитие математических исследований в Карельском научном центре началось в начале 60-х годов прошлого века в связи с использованием вычислительной техники (ЭВМ «Минск-1») в Карельском филиале АН СССР. Эти исследования проводились под руководством известного специалиста в этой области Н. Г. Зайцева.

В 1969 г. в КФ АН СССР была создана лаборатория математических методов и вычислительной техники под руководством В. Л. Файнберга. В 1971 г. заведующим лабораторией избран к. т. н. Г. А. Борисов. В 1973 году лаборатория реорганизовалась в Отдел математических методов и вычислительной техники в составе Института леса КФ АН СССР. Исследования и разработки первоначального периода существования отдела были направлены на создание систем статистической обработки экспериментальных данных и систем автоматизированного проектирования транспортных сетей и лесомелиоративных каналов.

Первые шаги к преобразованию отдела в самостоятельное научное подразделение сделаны в 1972 г. и поддержаны президентом АН СССР академиком М. В. Келдышем после его визита в КФ АН СССР, когда было принято постановление Президиума АН СССР о создании отдела математического профиля. В итоге в 1975 г. был организован Отдел математических методов автоматизации научных исследований и проектирования (ОММАНИП) (протокол № 39 от 10.07.1974 г.) как самостоятельное научное подразделение. Тогда же были утверждены следующие основные направления научных исследований:

- исследование и разработка экономико-математических моделей, используемых

для создания автоматизированных систем управления в различных областях народного хозяйства КАСССР;

- проведение работ в области автоматизации обработки данных научных исследований с целью повышения их эффективности;
- проведение работ по автоматизированному проектированию транспортных коммуникаций и мелиоративных систем.

Большую поддержку и помощь в организации отдела оказали член Отделения математики АН СССР член-корреспондент Академии наук В. Я. Козлов и председатель Президиума КФ АН СССР Н. И. Пьявченко. Структура отдела включала пять лабораторий:

- автоматизации научных исследований (АНИ, зав. лабораторией к. т. н. А. Д. Соколин);
- научных основ автоматизации проектирования (НОАП, руководитель к. т. н. Г. А. Борисов);
- математического обеспечения ЭВМ (МО ЭВМ, зав. лабораторией В. В. Аксенов);
- вычислительной техники (ВТ, зав. лабораторией к. т. н. Г. Н. Пырх);
- автоматизированных информационных систем (АИС, заведующий к. э. н. В. А. Лебедев).

В 1980-е годы при расширении тематики исследований происходило и изменение структуры отдела. В 1986 г. была организована лаборатория программных средств автоматизации на базе лабораторий АИС и МО ЭВМ (за-

ведущий к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын), а также лаборатория микропроцессорных систем на базе лабораторий АНИ и ВТ (руководитель к. т. н. А. Д. Сорокин). В 1989 г. лаборатория АИС преобразуется в лабораторию геоэкоинформатики (заведующий к. э. н. В. А. Лебедев). С расширением тематики исследований продолжился рост численного и качественно-техническая база. Были приобретены и запущены в эксплуатацию мощная ЭВМ ЕС-1052 (1982 г.), специализированные измерительно-вычислительные комплексы ИВК-3 (1981 г.) и ИВК-1 (1986 г.) для автоматизации экспериментов. Первая в КФ АН СССР персональная ЭВМ РС ХТ появилась в отделе в 1986 г. Наивысшего пика количественный состав отдела достиг в 1990 г., когда в нем работало 87 человек – 38 научных (в том числе 11 кандидатов наук) и 49 научно-технических сотрудников.

Очередное изменение структуры отдела произошло в 1991 г., когда постановлением Президиума Карельского научного центра РАН (№ 27 от 17.04.1991) были организованы следующие лаборатории:

- научных основ автоматизации проектирования (зав. к. т. н. Г. А. Борисов);
- математического моделирования (зав. к. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов);
- программных средств автоматизации (зав. к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын);
- геоэкоинформатики (зав. к. э. н. В. А. Лебедев);
- локально-вычислительных сетей (рук. к. т. н. А. Д. Сорокин);
- группа эксплуатации ЭВМ (рук. С. Б. Смирнов);
- группа автоматизации управленческих задач (рук. Г. В. Воинова);
- совместная с физическим факультетом ПетрГУ лаборатория «Элементная база вычислительной техники и АСНИ» (рук. д. ф.-м. н. В. А. Гуртов).

В ноябре 1992 г. ОММАНИП меняет название и становится Отделом математики и анализа данных (ОМАД). Это переименование было инициировано Отделением математики РАН, и Президиум Карельского научного центра РАН принял соответствующее постановление (№ 53 от 26.11.1992). Приказом

№ 344-к от 23.11.1993 Отдел математики и анализа данных с 1 октября переводился на самостоятельный баланс и наделялся правами юридического лица. В порядке подготовки к переводу был разработан и утвержден Президиумом Карельского научного центра РАН первый Устав отдела (постановление № 43 от 29.10.1992).

В рамках принятых основных направлений НИР сотрудниками отдела решались следующие задачи:

- теоретические исследования в математике и прикладной статистике;
- разработка программных средств математического моделирования с использованием статистических методов;
- применение методов и программных средств математического моделирования для решения разнообразных научно-исследовательских задач;
- исследование новых информационных технологий и их применение для решения задач автоматизации научных исследований в Карельском научном центре РАН;
- исследование и разработка компьютерных систем связи;
- информатизация фундаментальных и прикладных научных исследований в Карельском научном центре РАН в области экологии и охраны природы;
- автоматизация проектирования транспортных и энергетических систем;
- создание систем моделирования энергетических объектов и изучение пространственно-временного распределения возобновляемых энергетических ресурсов Карелии.

Очередным этапом в развитии отдела стала подготовка к реорганизации его в институт. Первые шаги в этом направлении сделаны в феврале 1997 г., когда Ученый совет принял решение о целесообразности создания на базе ОМАД Института математики и анализа данных. Президиум Карельского научного центра РАН в марте того же года поддержал это решение, а в апреле 1997 г. бюро Отделения математики РАН (постановление № 3 от 30.04.1997) поддерживает преобразование ОМАД в институт математического профиля. Директором-организатором в апреле 1998 г.

приглашается В. В. Мазалов (Читинский институт природных ресурсов Сибирского отделения РАН). В ходе подготовки к преобразованию в декабре 1998 г. утверждается новая структура ОМАД в составе лабораторий:

- теории вероятностей и компьютерной статистики (зав. д. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов);
- математической кибернетики (рук. д. ф.-м. н. В. В. Мазалов);
- информационных компьютерных технологий (зав. к. ф.-м. н. В. Т. Вдовицын, с 30.09.2014 лабораторией руководит к. т. н. А. А. Крижановский);
- телекоммуникационных систем (рук. к. т. н. А. Д. Сорокин, с 13.10.2014 зав. лабораторией – д. т. н. А. А. Печников);
- моделирования природно-технических систем (зав. к. т. н. Г. А. Борисов, с 1999 г. – д. ф.-м. н. Ю. В. Заика).

В июне 1999 г. Президиум РАН принимает решение о реорганизации ОМАД в Институт прикладных математических исследований (постановление № 187 от 29.06.1999). В 2000 г. общее собрание Отделения математики РАН избирает директором института д. ф.-м. н. В. В. Мазалова. Большую помощь и содействие в реорганизации отдела в институт оказали вице-президент РАН академик А. А. Гончар, академик-секретарь Отделения математики РАН Л. Д. Фаддеев, зам. академика-секретаря Отделения математики РАН д. ф.-м. н. (академик РАН с 2011 г.) А. Б. Жижченко, председатель Президиума Карельского научного центра РАН д. б. н. (член-корреспондент РАН с 2003 г.) А. Ф. Титов и помощник председателя Карельского научного центра РАН к. т. н. Н. С. Пширков. Подготовку соответствующих документов о необходимости создания ИПМИ осуществлял к. т. н. А. Д. Сорокин. Основными направлениями исследований института были утверждены:

- исследование проблем дискретной математики, математического программирования, теории вероятностей, математической и прикладной статистики;
- исследование и разработка методов математического и информационного моделирования с целью решения экологических, энергетических и других проблем природной и социально-культурной среды Республики Карелия;

- исследование и разработка информационных и телекоммуникационных систем для обеспечения проведения фундаментальных исследований.

В течение полутора лет после создания ИПМИ были выбраны и утверждены руководящие органы, в том числе и Ученый совет, разработан, утвержден и зарегистрирован в Министерстве юстиции Республики Карелия Устав института.

После выхода в 2013 году закона о реформировании РАН и передачи институтов в ФАНО разработан и утвержден новый Устав ИПМИ. В 2017 г. приказом ФАНО России от 26 июля № 462 и приказом ФГБУН КарНЦ РАН от 4 декабря 2017 г. № 192 «О реорганизации КарНЦ РАН» Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН был присоединен к ФГБУН «Карельский научный центр РАН» и получил статус обособленного подразделения центра.

В настоящее время в структуру ИПМИ КарНЦ РАН входят следующие лаборатории:

- теории вероятностей и компьютерной статистики (рук. д. ф.-м. н. Ю. Л. Павлов);
- математической кибернетики (рук. д. ф.-м. н. В. В. Мазалов);
- информационных компьютерных технологий (рук. к. т. н. А. А. Крижановский);
- стохастического моделирования информационно-вычислительных и телекоммуникационных систем (рук. д. ф.-м. н. А. С. Румянцев);
- моделирования природно-технических систем (рук. д. ф.-м. н. Ю. В. Заика).

За период функционирования института значительно усилилась публикационная деятельность сотрудников. Выпущено 9 сборников научных трудов института «Методы математического моделирования и информационные технологии» (1999–2009 гг.), вышло 15 выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» (2010–2024 гг.) журнала «Труды Карельского научного центра Российской академии наук», опубликовано 18 монографий и 25 учебных пособий. С 2009 г. ИПМИ совместно с Санкт-Петербургским госуниверситетом издает журнал «Математическая теория игр и ее приложения» (4 выпуска в год), который включен в список журналов Russian Science Citation Index (RSCI) на базе Web of Science.

С 2024 года работа в институте ведется по следующим темам НИР:

- Управляемая динамика, структурные изменения и краевые задачи в нелинейных моделях экологических, экономических и природно-технических систем (рук. д. ф.-м. н. А. Н. Кириллов);
- Случайные графы, структура и информационный поиск, кооперация и конкуренция в сетях и приложения в сложных системах (рук. д. ф.-м. н. В. В. Мазалов);
- Стохастическое моделирование, анализ и оценивание характеристик информационно-вычислительных и телекоммуникационных систем (рук. д. ф.-м. н. А. С. Румянцев).

Исследования, проводимые в институте, регулярно поддерживались различными фондами. Осуществляются совместные исследования с учеными из Франции, Италии, Китая, Индии и ряда других стран.

Сотрудники ИПМИ активно занимаются образовательной деятельностью – ежегодно читают более 30 курсов лекций, проводят около 20 практических и лабораторных занятий, под их руководством подготавливаются и защищаются магистерские диссертации, квалификационные работы на получение степени бакалавра, курсовые работы.

На момент создания института при нормативной численности 40 единиц в его составе работало 26 научных сотрудников, из них 3 доктора физико-математических наук и 9 кандидатов наук. К настоящему времени общая численность по штатному расписанию составляет 39 человек, в их числе 33 научных сотрудника, включая 12 докторов и 17 кандидатов наук. С 2024 г. обязанности директора исполняет д. ф.-м. н. Ю. В. Заика.

В ИПМИ КарНЦ РАН ведется подготовка аспирантов по следующим научным специальностям: 1.1.4. Теория вероятностей и мате-

матическая статистика; 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика.

За период существования института аспирантуру окончили более двух десятков человек, и в настоящее время в научных должностях работают 15 кандидатов наук, прошедших обучение в аспирантуре института; 6 человек защитили докторские диссертации. Доля исследователей в возрасте до 39 лет составляет 30 процентов от общей численности научных сотрудников.

С течением времени значительно укрепилась материально-техническая база института. В 2008 г. по подготовленному в ИПМИ обоснованию КарНЦ РАН приобрел вычислительный кластер производительностью 851 Гфлопс. На его базе в 2009 г. организован Центр коллективного пользования (ЦКП) «Центр высокопроизводительной обработки данных» (руководитель – к. ф.-м. н. И. А. Фалько, а с 2010 г. – к. ф.-м. н. Е. Е. Ивашко). С 2020 г. ЦКП института входит в состав Центра коллективного пользования научным оборудованием КарНЦ РАН. В 2022 г. по программе обновления приборной базы ведущих организаций, выполняющих научные исследования и разработки, в рамках федерального проекта «Развитие инфраструктуры для научных исследований и подготовки кадров» национального проекта «Наука и университеты» приобретено оборудование для модернизации кластера. В настоящей конфигурации теоретическая пиковая производительность кластера 2500 Гфлопс. Вычислительный кластер используется сотрудниками институтов КарНЦ РАН, преподавателями и студентами ПетрГУ.

*А. Д. Сорожин, В. В. Мазалов, Ю. В. Заика,  
А. Н. Реттиева, О. В. Лукашенко*

## АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ ИВАНОВ (к 70-летию со дня рождения)



Александр Владимирович родился 14 января 1954 г. в Москве. В 1975 г. окончил механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. После окончания аспирантуры МГУ с 1978 по 2017 год работал в Петрозаводском государственном университете на кафедрах алгебры и геометрии, математического анализа, геометрии и топологии. В 1979 г. защитил кандидатскую диссертацию «О некоторых размерностных и кардинальнозначных инвариантах топологических пространств» по специальности «геометрия и топология», а в 1988 г. – докторскую диссертацию «Кардинальнозначные инварианты и функторы в категории бикомпактов». В 1998 г. ему присвоено звание профессора.

С 2017 года работает в ИПМИ КарНЦ РАН в должности ведущего научного сотрудника лаборатории теории вероятностей и компьютерной статистики. Член Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН. Благодаря Александру Владимировичу в лаборатории теории вероятностей и компьютерной статистики стали раз-

виваться исследования проблем квантования вероятностных мер.

А. В. Иванов является ведущим специалистом в области геометрии и топологии. Основные направления его деятельности связаны с исследованием проблем теоретико-множественной топологии. Он отличается высокой публикационной активностью, ежегодно публикуя статьи в ведущих российских и зарубежных математических журналах.

Основные научные результаты и достижения:

1. Построен бикомпакт мощности гиперконтинуума, все конечные степени которого наследственно сепарабельны;
2. Построен совершенно нормальный бикомпакт, в котором совпадают размерности внутреннего размерностного ядра и его дополнения;
3. Доказано, что суперрасширение какого-нибудь бикомпакта является пространством Дугунджи (абсолютным ретрактом) тогда и только тогда, когда этот бикомпакт открыто порожден (и связан);
4. Получен критерий, характеризующий полунормальные функторы, для которых выполняется обобщение теоремы Катетова о метризуемости компакта, куб которого наследственно нормален;
5. Построена теория размерностей квантования для метризуемых функторов, доказаны теоремы о промежуточных значениях емкостных размерностей и размерностей квантования вероятностных мер.

Не одно поколение студентов математического факультета Петрозаводского государственного университета помнят увлекательные и хорошо структурированные лекции Александра Владимировича по аналитической геометрии и топологии. Под руководством А. В. Иванова были защищены следующие кандидатские диссертации: Матюшичев К. В. « $\epsilon$ -компактификации,  $H$ -замкнутые расширения и обобщенные близости» (2001 г.); Кашуба Е. В. «Полунормальные функторы в категории  $\text{SOMP}$  и обобщенная теорема Катетова» (2008 г.).

А. В. Иванов активно участвует в обсуждении проблем преподавания математики в школах и высших учебных заведениях. За успешную научно-организационную и педагогическую деятельность он награжден Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2003 г.); знаком «Почетный работник высшего профессионального образования» (2006 г.); почетным званием «Заслуженный деятель науки Республики Карелия» (2014 г.); Почетной грамотой РАН (2019 г.).

Александр Владимирович живет за городом, в деревне Михеева Сельга Кондопожского района. У него большая семья: семь детей и семнадцать внуков. А. В. Иванов ведет активный образ жизни, увлекается рыбалкой и охотой. Всю мебель в своем доме он сделал собственными руками. Коллеги знают Александра Владимировича как человека неиссякаемого трудолюбия. От всей души поздравляем юбиляра и желаем ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

*Коллектив сотрудников  
ИПМИ КарНЦ РАН*

#### СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ А. В. ИВАНОВА

**1978.** О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны // Доклады АН СССР. Т. 243, № 5. С. 1109–1112.

Об одной проблеме абелевых групп // Математический сборник. Т. 105, № 4. С. 525–542.

О вложении счетных произведений сепарабельных метрических пространств в слабо бесконечные компакты // Успехи математических наук. Т. 33, № 6. С. 211–212.

**1980.** Суперрасширения метризуемых континуумов и обобщенного канторовского дис-

континуума // Доклады АН СССР. Т. 254, № 2. С. 279–281.

**1982.** Решение проблемы Ван Милла о характеристизации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // Доклады АН СССР. Т. 262, № 3. С. 526–528.

**1984.** Функторы типа суперрасширения и мягкие отображения // Математические заметки. Т. 36, вып. 1. С. 103–108.

**1986.** О наследственной нормальности  $F$ -бикомпактов // Математические заметки. Т. 39, вып. 4. С. 606–611.

**1992.** Миксеры, функторы и мягкие отображения // Труды МИАН СССР. Т. 193. С. 128–131.

**2010.** Степень дискретной порожденности компактов // Математические заметки. Т. 87, вып. 3. С. 396–401. (Соавт. Е. В. Осипов.)

**2015.** Пример компакта несчетного характера, для которого пространства  $\text{exp}_n(X) \setminus X$  нормальны // Математические заметки. Т. 98, вып. 2. С. 221–229.

**2020.** О равномерных распределениях на метрических компактах // Сибирский математический журнал. Т. 61, № 6. С. 1343–1358.

О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 63. С. 15–26.

On products of quasi- $F$ -compacta // Topology and its applications. Vol. 275. Art. 106998.

Locally uniformly rotund renormings of the space of continuous functions on Fedorchuk compacta // Topology and its applications. Vol. 281. Art. 107211. (Соавт. S. R. Gulko, M. S. Shulkina, S. Troyanski.)

**2022.** О множестве значений размерности квантования вероятностных мер на метрическом компакте // Сибирский математический журнал. Т. 63, № 5. С. 1074–1080.

On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology and its applications. Vol. 306. Art. 107931.

**2023.** О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сибирский математический журнал. Т. 64, № 3. С. 540–545.

On metrization of the idempotent measures functor and quantization dimensions // Topology and its applications. Vol. 329. Art. 108362.

**2024.** О промежуточных значениях нижней размерности квантования // Математические заметки. Т. 115, вып. 3. С. 348–354.

## АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ КИРИЛЛОВ (к 70-летию со дня рождения)



Александр Николаевич Кириллов родился 9 апреля 1954 г. в Ленинграде. С 1961 по 1971 г. учился в средней школе № 80 (с преподаванием ряда предметов на английском языке). Был победителем ленинградских городских олимпиад по математике, физике и литературе.

В 1971 г. А. Н. Кириллов поступил на факультет прикладной математики – процессов управления (ПМ-ПУ) Ленинградского государственного университета (ЛГУ). После окончания учебы в 1976 г. поступил в аспирантуру ЛГУ. За время обучения в аспирантуре был деканом малого факультета ПМ-ПУ, занимаясь организацией профориентационной работы с абитуриентами.

После аспирантуры с 1979 по 2010 г. работал на кафедре высшей математики Ленинградского государственного институ-

та целлюлозно-бумажной промышленности (с 1993 г. – Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, СПбГТУРП) ассистентом, доцентом (с 1986 г.). В 1988 г. ему присвоено звание доцента.

В СПбГТУРП в течение нескольких лет А. Н. Кириллов работал заместителем декана по научной работе факультета АСУТП и заместителем декана по воспитательной работе теплоэнергетического факультета. Избирался членом профкома университета.

В 1986–1988 гг. А. Н. Кириллов – член комиссии по математике Совета по контролю за приемом в вузы г. Ленинграда. Многократно участвовал в работе предметной экзаменационной комиссии по математике, с 2000 по 2010 г. – председатель предметной экзаменационной комиссии СПбГТУРП. С 2004 по 2009 г. – заместитель ответственного секретаря приемной комиссии. С 2004 по 2008 г. – ответственный за проведение ЕГЭ в СПбГТУРП, в 2006–2008 гг. – член городской конфликтной комиссии Санкт-Петербурга (при проведении ЕГЭ).

В 2009–2010 учебном году готовил команду студентов СПбГТУРП для участия в олимпиаде по математике среди вузов Санкт-Петербурга и Северо-Запада РФ. По результатам олимпиады команда заняла третье место (впервые за время существования университета).

В 2007–2010 г. был привлечен к работе в Санкт-Петербургском университете экономики и финансов для создания базы данных тестовых заданий по математике, которые ис-

пользуются, в частности, Министерством образования РФ для проверки знаний студентов.

С 2010 г. – ведущий научный сотрудник лаборатории природно-технических систем, с 2015 г. – лаборатории информационных компьютерных технологий Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. С 2010 по 2019 г. – профессор кафедры математического анализа ПетрГУ.

Основные области научных исследований А. Н. Кириллова: теория управления, динамические системы, гибридные системы, теория неподвижных точек, математическое моделирование технологических, экологических и экономических процессов, популяционная динамика.

А. Н. Кирилловым предложен подход к построению динамических систем со структурными изменениями на основе разработанных им концепции эволюционного времени и метода динамической декомпозиции. Получено обобщение классической модели Вольтерра, учитывающее миграционные процессы. Построены математические модели экономического роста в системах с переменной структурой, модели технологических процессов целлюлозно-бумажной промышленности и рационального природопользования. Предложены новые подходы к математическому моделированию режимов стабилизации нелинейных динамических систем за конечное время. Получены результаты в направлении развития классической теоремы Пуанкаре–Биркгофа (о двух неподвижных точках в кольце).

В 1983 г. А. Н. Кириллов защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (на факультете ПМ-ПУ в ЛГУ). Тема диссертации: «Исследование управляемости систем при смешанных ограничениях». В 2009 г. в ПетрГУ защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по теме «Методы математического моделирования динамики систем со структурными изменениями в задачах экологии и рационального природопользования». Александр Николаевич является автором более 80 научных и 20 учебно-методических работ, руководит аспирантами.

А. Н. Кириллов – член Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН, входит в редакционные коллегии серии «Математическое моделирование и информационные технологии» журнала «Труды Карельского научного центра РАН» и журнала «Вопросы анализа» (ПетрГУ). В течение ряда лет является председателем ГАК в ПетрГУ (специальность «математика»).

А. Н. Кириллов – почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации (2006), почетный работник науки и высоких технологий Российской Федерации (2022), награжден Почетной грамотой Российской академии наук (2019), грамотой Комитета по науке и высшей школе Правительства г. Санкт-Петербурга (2004), Благодарностью Министерства образования РФ (2001).

Под руководством А. Н. Кириллова успешно защитились теперь уже сотрудники КарНЦ РАН и ПетрГУ Н. В. Смирнов, А. С. Иванова, И. В. Данилова и А. М. Сазонов.

Александру Николаевичу присущи скромность, тактичность, интеллигентность и эрудированность. Помимо высокого профессионального уровня юбиляра характеризует увлечение английской литературой, литературоведением и историей, особенно такими периодами, как Отечественная война 1812 года, Великая французская революция и наполеоновские войны, движение декабристов.

Коллектив Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН поздравляет Александра Николаевича и желает ему дальнейших творческих успехов.

*Ю. В. Заика, А. А. Крижановский*

#### СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ А. Н. КИРИЛЛОВА

**1979.** Об оценке адекватности моделей объектов в задачах управления // Труды Военного инженерного Краснознаменного института им. А. Ф. Можайского. Вып. 592. С. 18–21. (Сов. авт. Р. М. Юсупов.)

**1982.** Одна математическая модель распределения капитальных вложений // Экономика и математические методы. Т. 18, вып. 5. С. 922–925.

**1989.** Системы управления с переменной структурой технологическими объектами в ЦБП. Л.: ЛТИ ЦБП. 52 с. (Сов. авт. В. Н. Суриков.)

**1997.** The Stabilization Problem for Certain Class of Ecological Systems // International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering. Vol. 7, no. 2. P. 247–251.

**1999.** Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 6, вып. 2. С. 318–336.

**2006.** Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. Вып. 4. С. 127–131.



**2008.** Нелинейная стабилизация динамических систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. № 12. С. 6–11.

**2009.** Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. Т. 52, № 3. С. 23–28.

**2011.** Моделирование динамики структур гибридных систем // Информационно управляющие системы. № 4. С. 42–46.

**2012.** Линейная алгебра в управляемой динамике // Курс лекций. Петрозаводск: Изд-во КарНЦ РАН. 102 с.

**2013.** Some extensions of the Poincaré–Birkhoff theorem // Journal of Fixed Point Theory and Applications. Vol. 13, iss. 2. P. 611–625. (Соавт. V. Starkov.)

**2019.** The method of normal local stabilization // Issues of Analysis. Vol. 8(26), no. 1. P. 72–83.

**2020.** Utility function in the foraging problem with imperfect information // Информационно-управляющие системы. № 2. P. 60–70. (Соавт. I. V. Danilova.)

**2021.** An extension of the Poincaré–Birkhoff fixed point theorem to noninvariant annuli // Fixed Point Theory. Vol. 22, no. 1. P. 251–262.

**2023.** Mathematical Model of the Cyclic Process of Introducing New Technologies // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 269, no. 6. P. 835–846. (Соавт. A. M. Sazonov.)

## ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ МАЗАЛОВ (к 70-летию со дня рождения)



Владимир Викторович Мазалов родился 6 марта 1954 г. в Магнитогорске Челябинской области. После окончания школы поступил на факультет прикладной математики – процессов управления Ленинградского государственного университета, который окончил в 1976 г. Там же продолжил обучение в аспирантуре под руководством профессора В. И. Зубова. После окончания аспирантуры работал в Читинском политехническом институте. В 1981 г. защитил кандидатскую диссертацию, продолжая работать в институте в должности старшего преподавателя. В 1984 г. был приглашен в Читинский институт природных ресурсов Сибирского отделения РАН для организации лаборатории математического моделирования, где с 1993 по 1998 г. работал в должности директора. В 1991 г. защитил докторскую диссертацию на тему «Методы оптимальной остановки в оптимизационных и минимаксных задачах». В 1998 г. получил приглашение от Отделения математики РАН и Карельско-

го научного центра РАН организовать Институт прикладных математических исследований. В 1998 г. стал директором-организатором, а с 1999 г. – директором ИПМИ КарНЦ РАН.

Владимир Викторович Мазалов – широко известный в России и за рубежом специалист в области теории игр и исследования операций, автор более 300 научных работ в ведущих научных журналах, таких как «Доклады Российской академии наук», «Известия РАН. Теория и системы управления», «Теория вероятностей и ее применения», «Дискретная математика», «Математическое моделирование», «Operations Research Letters», «Ecological Modelling», «Optimization Letters» и др., а также автор 7 монографий и учебных пособий, в том числе «Математическая теория игр и приложения», «Переговоры. Математическая теория» и «Сетевые игры».

Область его научных интересов – теория игр, стохастическое динамическое программирование, случайные процессы. В. В. Мазаловым разработаны новые подходы к построению решений многокритериальных задач наилучшего выбора в условиях неопределенности и управления возобновляемыми ресурсами на основе выделения охраняемой территории. Исследован широкий класс динамических и эволюционных игр, возникающих в задачах экологии поведения животных, и разработаны методы нахождения равновесия в таких играх. Предложены новые теоретико-игровые методы анализа структуры информационно-коммуникационных систем, разработан метод кластеризации на основе потенциальных игр. В последние годы он активно развивает новое в теории игр направление – сетевые иг-

ры с приложениями в информационных и транспортных системах. Недавние исследования связаны с обобщением равновесия Вардропа в транспортных задачах с рациональными агентами, построением устойчивых коалиционных структур для различных процедур распределения выигрышей, применением методов кооперативных игр для ранжирования альтернатив в процедурах голосования и динамических играх с сетевой структурой.

Исследования В. В. Мазалова неоднократно были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, Отделением математических наук РАН, Международным научным фондом ИНТАС, Швейцарским научным фондом, Немецкой службой академических сообществ, Международной Соросовской образовательной программой, Шведским институтом, Японским фондом развития науки, Академией наук Финляндии. Полученные результаты использовались при решении различных практических задач, в том числе в Республике Карелия. Владимир Викторович являлся руководителем грантов РФФИ «Равновесие по Нэшу в несимметричных динамических моделях управления биоресурсами», «Методы построения стратегий, гарантирующих кооперативное поведение, в задачах управления биоресурсами», «Равновесие в задачах управления биоресурсами» и программы Президиума РАН «Теоретико-игровые методы в задачах управления биоресурсами». С 2022 г. руководит грантом Российского научного фонда, проводимым совместно с органами власти Республики Карелия, «Разработка и исследование математических моделей и программ нахождения равновесия транспортных потоков и оптимизации транспортной сети на примере Петрозаводска».

В. В. Мазалов является членом Американского математического общества, председателем Российского общества исследования операций (RuORS), в 2016–2022 гг. был президентом Международного общества динамических игр (ISDG). Является членом редколлегии ряда журналов: «Applied Mathematics and Computation» (Elsevier), «Scientiae Mathematicae Japonica» (International Society for Mathematical Sciences), «International Game Theory Review» (World Scientific), «Journal of the Operations Research of China» (Springer), «Управление большими системами», «Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления», является соредактором ежегодников «Modeling and Optimization in Science and Technologies» (Springer), «Game

Theory and Applications» (Nova Science Publishers). В 2009 г. совместно с факультетом прикладной математики – процессов управления СПбГУ организовал журнал «Математическая теория игр и ее приложения», включенный в список ВАК и Российский индекс научного цитирования на платформе Web of Science (RSCI), является заместителем главного редактора этого журнала.

В. В. Мазалов активно участвует в подготовке кадров, среди его учеников 2 доктора наук и 25 кандидатов наук. Аспиранты, обучающиеся под его руководством, поощрялись стипендиями Президента Российской Федерации, Республики Карелия, были лауреатами конкурса «Лучшие аспиранты Российской академии наук». В. В. Мазалов неоднократно приглашался для проведения совместных исследований в ведущие зарубежные университеты (Лозанна, Швейцария; Дрезден, Германия; Сидней, Австралия; Стокгольм, Йёнчёпинг, Швеция; Оулу, Финляндия и др.). Он читает лекции в Университете Циндао (Китай), Забайкальском государственном педагогическом университете и Петрозаводском государственном университете.

В. В. Мазалов регулярно входит в состав оргкомитетов международных конференций, являлся организатором Международного симпозиума по динамическим играм (2002), Всероссийского Симпозиума по прикладной и промышленной математике (2003, 2012), Скандинавского симпозиума по теории вероятностей (2006, 2014), Международной конференции «Математическая теория оптимизации и исследование операций» (2022), серии Международных Петрозаводских конференций «Вероятностные методы в дискретной математике» (2000, 2004, 2008, 2012, 2016, 2019, 2024), Школ молодых ученых «Математические методы в экологии» (2001, 2003, 2008), Международных рабочих совещаний по сетевым играм и оптимальной остановке (2002, 2005, 2009, 2012, 2013, 2015, 2016, 2024).

За успешную научную, научно-организационную и педагогическую деятельность В. В. Мазалов награжден Почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации» (2009 г.), Почетной грамотой РАН и профсоюзов (2004 г.), Почетной грамотой РАН (2016 г.), Почетным знаком Главы Республики Карелия «За вклад в развитие Республики Карелия», Почетной грамотой Республики Карелия (2004 г.), Почетной грамотой г. Петрозаводска (2006 г.). Является почетным профессором Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого (2019 г.).

За последние 5 лет им опубликовано 58 работ, включая 2 монографии, 50 статей в рецензируемых журналах, сделано 20 докладов на международных конференциях.

Владимир Викторович пользуется большим уважением у сотрудников нашего и других институтов КарНЦ РАН, его отличает огромная трудоспособность, инициативность, высокая ответственность и доброжелательность. Он любит природу и спорт, увлекается горными лыжами и дайвингом.

Коллектив Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН сердечно поздравляет юбиляра с 70-летием, желает ему крепкого здоровья, дальнейших научных успехов и интересных путешествий.

*А. Н. Реттиева*

#### СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ В. В. МАЗАЛОВА

**1987.** Игровые моменты остановки. Новосибирск: Наука. 189 с.

**1990.** Оптимальная остановка наблюдений в задачах управления случайными блужданиями // Теория вероятностей и ее применения. Т. 35, вып. 4. С. 669–676. (Соавт. С. В. Винниченко.)

**1992.** Моменты остановки и управляемые случайные блуждания. Новосибирск: Наука. 104 с. (Соавт. С. В. Винниченко.)

**1996.** Two-person Hi-Lo Poker-stud and draw // *Mathematica Japonica*. Vol. 44, no. 1. P. 39–53. (Соавт. М. Sakaguchi.)

**1999.** Dipersal and inbreeding avoidance // *American Naturalist*. Vol. 154, no. 3. P. 282–292. (Соавт. N. Perrin.)

**2000.** Local competition, inbreeding, and the evolution of sex-biased dispersal // *American Naturalist*. Vol. 155, no. 1. P. 116–127. (Соавт. N. Perrin.)

**2002.** The house-selling problem with reward rate criterion // *Journal of Applied Probability*. Vol. 39, no. 3. P. 644–649. (Соавт. V. Saario.)

**2003.** Location game on the plane // *International Game Theory Review*. Vol. 5, no. 1. P. 13–25. (Соавт. М. Sakaguchi.)

**2006.** An explicit formula for the optimal gain in the full-information problem of owning a relatively best object // *Journal of Applied Probability*. Vol. 43, no. 1. P. 87–101. (Соавт. М. Tamaki.)

On a discrete arbitration procedure // *Scientiae Mathematicae Japonicae*. Vol. 63, no. 3. P. 325–330. (Соавт. А. Mentcher, J. Tokareva.)

**2007.** Duration problem on trajectories // *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*. Vol. 79, no. 3–4. P. 211–218. (Соавт. М. Tamaki.)

**2008.** Регулируемое равновесие в дискретной задаче разделения биоресурсов // Доклады Академии наук. Т. 423, № 3. С. 220–222. (Соавт. А. Н. Реттиева.)

Nash equilibrium in two-sided mate choice problem // *International Game Theory Review*. Vol. 10, no. 4. P. 421–435. (Соавт. А. А. Falko.)

**2009.** О равновесии в модели переговоров с арбитром // *Известия РАН. Теория и системы управления*. № 5. С. 77–83. (Соавт. А. Э. Менчер, Ю. С. Токарева.)

**2010.** Математическая теория игр и приложения. СПб.-М.-Краснодар: Лань. 446 с.

Условия, стимулирующие рациональное поведение, в дискретных задачах управления биоресурсами // Доклады Академии наук. Т. 432, вып. 3. С. 308–311. (Соавт. А. Н. Реттиева.)

Fish wars and cooperation maintenance // *Ecological Modelling*. Vol. 221. P. 1545–1553. (Соавт. А. Н. Rettieva.)

**2011.** Дискретная задача разделения биоресурсов // *Прикладная математика и механика*. Т. 75, вып. 2. С. 259–270. (Соавт. А. Н. Реттиева.)

**2012.** Переговоры. Математическая теория. СПб.-М.-Краснодар: Лань. 302 с. (Соавт. А. Э. Менчер, Ю. С. Токарева.)

Arbitration procedures with multiple arbitrators // *European Journal of Operational Research*. Vol. 217, iss. 1. P. 198–203. (Соавт. Yu. Tokareva.)

**2014.** *Mathematical Game Theory and Applications*. John Wiley & Sons. 414 p.

Производящие функции и вектор Майерсона в коммуникационных сетях // *Дискретная математика*. Т. 26, вып. 3. С. 65–75. (Соавт. Л. И. Трухина.)

Location-price Game-theoretic Model and Applications in Transportation Networks // *Procedia Computer Science*. Vol. 31. P. 754–757. (Соавт. H. Gao, J. Hu, A. Shchiptsova, L. Song, J. Tokareva.)

**2015.** Passenger Traffic Evaluation and Price Formation on the Transportation Services Market // *Advances in Operations Research*. Vol. 2015. (Соавт. V. M. Bure, A. V. Melnik, N. V. Plaksina.)

Equilibrium in cloud computing market // *Performance Evaluation*. Vol. 92. P. 40–50. (Соавт. А. Lukyanenko, S. Luukkainen.)

**2016.** Equilibrium Prices and Flows in the Passenger Traffic Problem // *International*

Game Theory Review. Vol. 18, no. 1. (Соавт. А. В. Melnik.)

Game-Theoretic Centrality Measures for Weighted Graphs // *Fundamenta Informaticae*. Vol. 145, iss. 3. (Соавт. К. Е. Avrachenkov, L. I. Trukhina, В. Т. Tsynguev.)

**2018.** Сетевые игры. СПб.-М.-Краснодар: Лань. 320 с. (Соавт. Ю. В. Чиркова.)

Network partitioning algorithms as cooperative games // *Computational Social Networks*. Vol. 5, iss. 11. P. 1–28. (Соавт. К. Е. Avrachenkov, А. Е. Kondratev, D. G. Rubanov.)

**2019.** Potential functions for finding stable coalition structures // *Operations Research Letters*. Vol. 47. P. 478–482. (Соавт. V. V. Gusev.)

Стратегии оптимальной остановки в игре «The price is right» // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. Т. 25, № 3. С. 217–231. (Соавт. Т. В. Серегина, А. А. Ивашко.)

**2020.** Tournament solutions based on cooperative game theory // *International Journal of Game Theory*. Vol. 49(1). P. 119–145. (Соавт. А. У. Kondratev.)

**2021.** Transportation network with externalities // *Journal of Computational and*

*Applied Mathematics*. Vol. 382. P. 113091. (Соавт. Z. Kuang, X. Tang, J. Zheng.)

A Modified Myerson Value for Determining the Centrality of Graph Vertices // *Automation and Remote Control*. Vol. 82, iss. 1. P. 145–159. (Соавт. V. A. Khitraya.)

**2022.** Optimal externalities in a parallel transportation network // *Optimization Letters*. Vol. 16, iss. 7. P. 1971–1989. (Соавт. J. V. Chirkova.)

**2023.** Ранжирование вершин графа с использованием абсолютных потенциалов узлов электрической цепи // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. Т. 19, вып. 2. (Соавт. В. А. Хитрая.)

Opinion Dynamics Control in a Social Network with a Communication Structure // *Dynamic Games and Applications*. Vol. 13, iss. 1. P. 412–434. (Соавт. H. Jiang, H. Gao, C. Wang.)

**2024.** Equilibrium Arrivals to Preemptive Queueing System with Fixed and Random Population Size // *Journal of the Operations Research Society of China*. Vol. 12. P. 77–92. (Соавт. J. Chirkova.)

## ЮРИЙ ЛЕОНИДОВИЧ ПАВЛОВ (к 75-летию со дня рождения)



У Юрия Леонидовича Павлова юбилей! Главному научному сотруднику Института прикладных математических исследований, руководителю лаборатории теории вероятностей и компьютерной статистики, известному математику, имеющему бесспорное признание в научном мире, – три четверти века.

Знаковые даты – хороший повод сказать о коллеге, товарище и гражданине те слова, которые в обыденной жизни могут показаться неуместными. Пять лет назад к 70-летию нашего юбиляра в «Трудах Карельского научного центра РАН» была опубликована статья, в которой отражены ключе-

вые даты его научной биографии, перечислены главные публикации и научные достижения, указана его важная роль в организации серии международных конференций, в подготовке научной смены. Эта публикация дает возможность отойти от принятого формата юбилейных текстов и остановиться на важных чертах личности Юрия Леонидовича.

Прошедшие пять лет оказались очень непростыми для всех, но эти годы ознаменовались новыми яркими научными результатами юбиляра. Приведем здесь наиболее значимые публикации за эти пять лет.

- О связности конфигурационных графов // Дискретная математика. 2019. Т. 31, вып. 2. С. 115–123.
- Об асимптотике кластерного коэффициента конфигурационного графа с неизвестным распределением степеней вершин // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 3. С. 9–13.
- Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, вып. 3. С. 468–486. (Совместно с И. А. Чеплюковой.)
- Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе // Математический сборник. 2021. Т. 212, вып. 9. С. 146–163.
- Объемы деревьев случайного леса и конфигурационные графы // Труды математического института им. В. А. Стеклова. 2021. Т. 177, вып. 1. С. 1–12.

лова. 2022. Т. 316. С. 298–315. (Соавт. И. А. Чеплюкова.)

- О максимальном объеме дерева случайного леса // Дискретная математика. 2022. Т. 34, вып. 4. С. 69–83.
- О максимальном дереве леса Гальтона – Ватсона с бесконечной дисперсией распределения числа потомков // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 2. С. 78–92.
- Локальная древовидность в конфигурационных графах со степенным распределением // Информатика и ее применения. 2024. Т. 18, вып. 1. С. 46–53. (Соавт. М. М. Лери.)

Нередко говорят, что математика – наука молодых. Если так, то Юрий Леонидович относится к числу тех, кто умеет хранить свою научную молодость. Но если спросить его, в чем тут секрет, он скажет, что секретов нет, а есть работа, каждодневная обязательная работа. Исключительная ответственность и целеустремленность руководителя лаборатории теории вероятностей и компьютерной статистики эффективно и ненавязчиво мотивирует ее сотрудников. Юрий Леонидович относится к тому дефицитному и востребованному типу руководителей, которые не подходят под определение «менеджер». Его важнейшая черта – бережное отношение к коллективу. Он не боится перехвалить, но очень аккуратен в критических замечаниях, где резкие оценки могут породить незаслуженные обиды. Ему совершенно чужды модные нынче технологии «сдержек и противовесов» в управлении подчиненными.

Любая руководящая должность связана с бюрократической нагрузкой. В небольшом коллективе лаборатории нет возможности назначить «зама по бюрократии». И тут у руководителя есть два пути: выполнить работу самому или разделить бюрократическую задачу

по сотрудникам, отвлекая их от творческой работы икратно увеличивая общие затраты времени на ее решение. Юрий Леонидович, как правило, выбирает первый вариант. В каких-то структурах такую систему управления подвергнут резкой критике, но в научном коллективе – это высшая ценность.

За долгие годы работы Юрий Леонидович приобрел заслуженный авторитет и уважение в коллективе Института прикладных математических исследований и в других институтах Карельского научного центра РАН. Коллеги давно подметили, что когда наш юбиляр берет слово, шум сразу стихает. У него есть редкая способность погасить эмоции и перевести обсуждение в конструктивное русло. Неслучайно Юрий Леонидович является постоянным представителем ИПМИ в Ученом совете Карельского научного центра.

В солидном возрасте людям свойственно вспоминать былое. И вот характерная деталь: Юрий Леонидович с большой теплотой отзывается о всех своих учителях. В школе № 9 города Петрозаводска, в Петрозаводском государственном университете, в аспирантуре МИАН им. В. А. Стеклова. Казалось бы, так не бывает, чтобы все педагоги оставили только добрую память, какое-то исключительное везение. Но ясно, что тут и самим учителям повезло с хорошим учеником.

Юрий Леонидович – интеллигент в истинном смысле слова, широкой эрудиции и независимых взглядов. Неудобно отвлекать ученого «праздными разговорами», но с ним хочется беседовать на самые разные темы. Литература, музыка, кино, наша карельская природа и погода, семья, дети, внуки, образование и политика. Его суждения всегда интересны, часто оригинальны и неожиданны.

Коллектив Института прикладных математических исследований от всей души поздравляет юбиляра с самыми добрыми пожеланиями на будущее.

*Коллектив сотрудников  
лаборатории ТВиКС*

## ПАМЯТИ ВИКТОРА АЛЕКСЕЕВИЧА ЛЕБЕДЕВА (1935–2024)



5 января 2024 г. ушел из жизни высококвалифицированный специалист в области программных средств и математического обеспечения ЭВМ Виктор Алексеевич Лебедев.

Виктор Алексеевич родился 18 декабря 1935 года в г. Ивантеевка Московской области. В 1960 году молодым специалистом после окончания электромеханического факультета Ленинградского политехнического института он был принят на работу в Карельский филиал АН СССР и прошел в нем путь от лаборанта до заведующего лабораторией, позднее работал в должности ведущего научного сотрудника.

В. А. Лебедев – один из первых исследователей в Карелии в области автоматизации программирования. В период работы в

КарНИИЛПе участвовал в разработке устройств по автоматизации распределения нагрузок в энергосистеме, являлся руководителем группы по запуску в эксплуатацию и обслуживанию ЭВМ «Минск-1», принимал участие в работах по использованию ЭВМ для исследования удаленных производственных процессов, был участником разработки одной из первых в СССР систем автоматизации программирования «Субалгол», переданной для эксплуатации ряду университетов и научных институтов СССР. В 1966 г. был назначен руководителем темы по исследованию и разработке системы автоматизации планирования, учета и нормирования для лесной промышленности. Одновременно проводил серию исследований по теории обработки данных. Результатом этих исследований 1966–1969 гг. явились более 10 печатных работ и кандидатская диссертация на тему «Некоторые вопросы повышения эффективности автоматизированных систем обработки данных». Практическим результатом стали системы автоматизации расчетов по техпромфинплану и заработной плате для леспромхозов, последняя из которых успешно использовалась в леспромхозах «Кареллеспрома». В апреле 1971 г. диссертация была успешно защищена и В. А. Лебедеву присуждена ученая степень кандидата экономических наук. В 1973 г. ему присвоено звание старшего научного сотрудника по специальности «Применение математических методов и вычислительной техники в экономических исследованиях и управлении народным хозяйством и его отраслями». В период с 1971 по 1975 г. В. А. Лебедев возглавляет исследования и разработки по созданию автоматизированной системы управления (АСУ)



объединением «Кареллеспром» с разработкой типовых проектных решений для других объединений Минлеспрома СССР, уделяет большое внимание вопросам внедрения АСУ в лесозаготовительных объединениях страны. Типовые проектные решения и АСУ были внедрены в 11 лесозаготовительных объединениях Советского Союза.

В 1975 г. Виктор Алексеевич проходит по конкурсу на должность старшего научного сотрудника Отдела математических методов автоматизации научных исследований и проектирования (ОММАНИП) КФ АН СССР. С 1977 г. работает в этом отделе в должности заведующего лабораторией автоматизированных информационных систем (АИС). Он углубленно занимается проблемами создания и использования в научных исследованиях систем баз данных, распределенных в локальных сетях. Под руководством В. А. Лебедева вновь организованная лаборатория АИС стала продуктивным коллективом. В короткий срок была разработана система математического обеспечения АИС для ЭВМ «Минск-32», одна из первых в стране систем реляционного типа, отличающаяся высокой степенью автоматизации процессов.

В 1989 г. он становится заведующим лабораторией геоэкоинформатики. Им были проведены теоретические и экспериментальные исследования моделей и технологий создания и эксплуатации прикладных систем с базами данных, в последующем – систем с базами знаний. Эти исследования позволили получить практические технологии создания систем баз данных, на основе которых в Карельском научном центре под его руководством и при его участии создано более десяти крупных информационных систем, в частности, по гидрохимии поверхностных вод, по биоразнообразию экосистем Восточной Фенноскандии, по гидрологии осушения болот, информационная система научной библиотеки и др.

С декабря 1998 г. он ведущий научный сотрудник лаборатории математической кибер-

нетики. Под его руководством и при непосредственном участии проводятся исследования и разработки по созданию интегрированной распределенной системы баз данных и знаний по экологии для КарНЦ РАН с применением в ее составе элементов искусственного интеллекта. В результате этих исследований, в частности, создано программное обеспечение геоинформационно-справочных систем. На основе этих разработок в Комитете по природным ресурсам были внедрены такие геоинформационные системы, как «Гидрография озер Карелии» (2000 г.), «Гидрография водосборов р. Шуи, р. Суна и Заонежья» (2002 г.).

В последние годы трудовой деятельности научные интересы В. А. Лебедева были направлены на исследования в области построения и применения предметных онтологий для систематизации и структуризации электронной научной информации (в частности, для построения эффективных систем поиска данных в информационных системах).

Виктор Алексеевич в молодости увлекался игрой в настольный теннис, зимней и летней рыбалкой, участвовал в соревнованиях по зимнему лову, работая в Карельском НИИ лесной промышленности. Он был общительным человеком, неоднократно совершал походы на моторной лодке (позднее на катере) по Онежскому озеру. С удовольствием ездил на своей машине в лес за грибами. Когда у него на даче в Шапшезере появилась баня, он почти ежегодно в начале своего отпуска организовывал «банные» посиделки, приглашая на них сослуживцев. До своей болезни в последний год жизни он регулярно проходил до полутора-двух километров по набережной Онежского озера и очень гордился этим.

Виктор Алексеевич был очень трудолюбивым, инициативным, широко эрудированным человеком. Светлая память о нем сохранится в сердцах знавших его людей.

*Коллеги из ИПМИ КарНЦ РАН*

# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

## Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации  
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, утраты науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учётом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редколлегия серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляет за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил её оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы анкеты и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия анкеты и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее чем через месяц после получения рецензии. Перед опубликованием авторам высылаются электронная версия статьи, которую авторы вычитывают и заверяют.

Журнал имеет систему электронной редакции на базе Open Journal System (OJS), позволяющую вести представление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегиями серий и рецензентами в электронном формате и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Содержание выпусков Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные версии статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru/>; <http://journals.krc.karelia.ru/>

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

### ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отрецензированы авторами.

Объём рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объём рисунков не должен превышать 1/4 объёма статьи. Рукописи большего объёма (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

При оформлении рукописи применяется полуторный межстрочный интервал, шрифт Times New Roman, кегль 12, выравнивание по обоим краям. Размер полей страницы – 2,5 см со всех сторон. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в правом нижнем углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

Рукописи подаются в электронном виде в систему электронной редакции на сайте <http://journals.krc.karelia.ru> либо высылаются на e-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru), или же представляются в редакцию лично (г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, каб. 502).

**Для публикации в выпусках серии «Математическое моделирование и информационные технологии» рукописи принимаются в формате .tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу: <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>. Статья в файле с расширением .pdf загружается на сайт журнала <http://journals.krc.karelia.ru>. Исходный файл с расширением .tex и необходимые рисунки загружаются на 4-м шаге «Загрузка дополнительных файлов».**

### **Обязательные элементы рукописи располагаются в следующем порядке:**

УДК курсивом в левом верхнем углу первой страницы; заглавие статьи на русском языке полужирным шрифтом; инициалы и фамилии авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название и полный почтовый адрес организации – места работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов аффилированным организациям; автора, ответственного за переписку, следует отметить звездочкой и указать в аффилиации его электронный адрес); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; указание источников финансирования выполненных исследований на русском языке.

Далее располагаются все вышеуказанные элементы на английском языке.

Текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: **Введение. Материалы и методы. Результаты и обсуждение. Выводы** либо **Заключение**); благодарности; списки литературы на языке оригинала (**Литература**) и на английском языке (**References**); таблицы на русском и английском языках (на отдельных листах); рисунки (на отдельных листах); подписи к рисункам на русском и английском языках (на отдельном листе).

На отдельном листе дополнительные сведения об авторах: фамилии, имена, отчества всех авторов полностью на русском и английском языке; должности, ученые звания, ученые степени авторов; адрес электронной почты каждого автора; можно указать телефон для контакта редакции с авторами статьи.

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать ее содержание и состоять из 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, создавать возможно полное представление о содержании статьи и иметь объем не менее 200 слов. Рукопись с недостаточно раскрывающей содержание аннотацией может быть отклонена.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ (как правило, не менее пяти). Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце точка не ставится.

Раздел «Материалы и методы» должен содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

Изложение результатов должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. На табличный и иллюстративный материал следует ссылаться так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т.д.), фотографии, помещаемые на клейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой в разделе «Заключение» основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во «Введении». Ссылки на литературу в работах **серии «Математическое моделирование и информационные технологии»** даются цифрами.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Заголовки таблиц, заголовки и содержание столбцов, строк, а также примечания приводятся на русском и английском языках. Диаграммы и графики не должны дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, поясняются в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

РИСУНКИ представляются отдельными файлами с расширением TIFF (\*.TIF) или JPG. При первичной подаче материала в редакцию рисунки вставляются в общий текстовый файл. При сдаче материала, принятого в печать, все рисунки должны быть представлены в виде отдельных файлов в вышеуказанном формате. Графические материалы могут быть снабжены указанием желательного размера рисунка, пожеланиями и требованиями к конкретным иллюстрациям. На каждый рисунок должна быть как минимум одна ссылка в тексте.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ приводятся на русском и английском языках, должны содержать достаточную информацию для того, чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях, детали на рисунках следует обозначать цифрами или буквами, значение которых также приводится в подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все прочие сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. Располагаются после основного текста статьи отдельным абзацем, в котором авторы выражают признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и организациям, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи.

ИНФОРМАЦИЯ О КОНФЛИКТЕ ИНТЕРЕСОВ. При подаче статьи авторы должны раскрыть потенциальные конфликты интересов, которые могут быть восприняты как оказавшие влияние на результаты или выводы, представленные в работе. Если конфликт интересов отсутствует, следует об этом сообщить в отдельной формулировке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ оформляется по ГОСТ Р 7.0.5-2008. Источники располагаются в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами авторов ставится пробел.

REFERENCES. Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Библиографические записи источников оформляются согласно стилю Vancouver (см. примеры в ГОСТ Р 7.0.7–2021 и образцы ниже). Заголовки русскоязычных работ приводятся на английском языке; для журналов и сборников, в которых размещены цитируемые работы, указывается параллельное английское наименование (при его наличии) либо русскоязычное наименование приводится в латинской транслитерации (вариант BSI) с переводом на английский язык. Прочие элементы библиографической записи приводятся на английском языке (русскоязычное название издательства транслитерируется). При наличии переводной версии источника в References желательно указать ее. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала.

Для каждого источника обязательно указание DOI при его наличии; если приводится адрес интернет-страницы источника (URL), нужно указать дату обращения к ней.

**Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences**  
**No. 4, 2024**  
**“MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES” Series**

**TABLE OF CONTENTS**

ORIGINAL ARTICLES

|   |    |
|---|----|
| B. Z. Belashev. EXPERIENCE OF AUTOMATICALLY RECORDING PINE BIOELECTRICAL ACTIVITY . . .   | 5  |
| K. V. Grudova. MODELING DAILY FLUCTUATIONS OF TEMPERATURE WAVES IN FOREST SANDY SOILS . . . . .   | 15 |
| A. V. Ivanov. INFINITE-DIMENSIONAL COMPACTUM WITHOUT INTERMEDIATE VALUES OF THE LOWER BOX DIMENSION . . . . .                                   | 23 |
| A. N. Kirillov, I. V. Danilova. THE RATIONAL CHOICE BY POPULATION OF A PATCH UNDER IMPERFECT INFORMATION ABOUT ITS VARIABLE RESOURCES . . . . . | 28 |
| Yu. L. Pavlov. ON TKACHUK’S THEOREM FOR A SERIES SCHEME . . . . .   | 33 |
| I. A. Cheplyukova. ON A CHARACTERISTIC OF A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH . . . . .   | 39 |
| N. Yu. Enatskaya. PROBABILITY ANALYSIS OF MAXIMUM OCCUPATION IN MODELS OF PARTICLE PLACEMENT TO CELLS . . . . .                                 | 49 |
| N. Yu. Enatskaya. PERMUTATION SCHEME WITH A GIVEN RANGE OF FIXED ELEMENTS . . . . .   | 55 |

CHRONICLE

|  |    |
|--|----|
| Yu. V. Chirkova. International Workshop “Networking Games and Management”, NGM-2024 (Petrozavodsk, March 5-7, 2024) . . . . .  | 61 |
| Yu. L. Pavlov. 11th Petrozavodsk International Conference “Probability Methods in Discrete Mathematics” dedicated to the 90th anniversary of V. F. Kolchin’s birth (Petrozavodsk, May 27-31, 2024) . . . . . | 63 |

DATES AND ANNIVERSARIES

|   |    |
|---|----|
| A. D. Sorokin, V. V. Mazalov, Yu. V. Zaika, A. N. Rettieva, O. V. Lukashenko. Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS turns 25 . . . . . | 65 |
| Alexander V. Ivanov (on the 70th anniversary) . . . . .   | 69 |
| Alexander N. Kirillov (on the 70th anniversary) . . . . .   | 71 |
| Vladimir V. Mazalov (on the 70th anniversary) . . . . .   | 74 |
| Yuri L. Pavlov (on the 75th anniversary) . . . . .  | 78 |

BEREAVEMENTS

|  |    |
|--|----|
| In memory of Viktor A. Lebedev (1935–2024) . . . . . | 80 |
|--|----|

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| INSTRUCTIONS FOR AUTHORS . . . . . | 82 |
|------------------------------------|----|

Научный журнал

**Труды Карельского научного центра  
Российской академии наук**  
№ 4, 2024

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению Ученого совета  
Федерального исследовательского центра  
«Карельский научный центр Российской академии наук»*

Выходит 8 раз в год

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
Регистрационная запись ПИ № ФС 77-72429 от 28.02.2018 г.

Редактор А. И. Мокеева  
Компьютерная верстка Л. Э. Бюрокланд

Подписано в печать 21.06.2024. Дата выхода 29.06.2024. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,7. Усл. печ. л. 10,2.  
Тираж 100 экз. Заказ 813. Цена свободная

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»  
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН  
185030, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50