

Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр  
Российской академии наук»

# **ТРУДЫ**

## **КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

№ 4, 2023

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Петрозаводск  
2023

Главный редактор

А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; О. Н. БАХМЕТ (зам. главного редактора), член-корр. РАН, д. б. н.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; И. В. ДРОБЫШЕВ, доктор биологии (Швеция – Канада); Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; Х. ЙООСТЕН, доктор биологии, проф. (Германия); А. М. КРЫШЕНЬ, д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; О. Л. КУЗНЕЦОВ, д. б. н.; Н. В. ЛУКИНА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, академик РАН, д. б. н., проф.; О. ОВАСКАЙНЕН, доктор математики, проф. (Финляндия); О. Н. ПУГАЧЕВ, академик РАН, д. б. н.; С. А. СУББОТИН, доктор биологии (США); Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; Т. Э. ХАНГ, доктор географии (Эстония); П. ХЁЛЬТТЯ, доктор геологии, проф. (Финляндия); К. ШАЕВСКИЙ, доктор математики, проф. (Польша); В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Редакционная коллегия серии «Математическое моделирование и информационные технологии»

В. А. ВАТУТИН, д. ф.-м. н., проф.; Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; О. В. ЛУКАШЕНКО (ответственный секретарь), к. ф.-м. н.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.

*Издается с января 2009 г.*

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Тел. (8142)762018; факс (8142)769600

E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

© ФИЦ «Карельский научный центр РАН», 2023

© Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, 2023

Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences

# **TRANSACTIONS**

**of the KARELIAN RESEARCH CENTRE  
of the RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES**

No. 4, 2023

**MATHEMATICAL MODELING  
AND INFORMATION TECHNOLOGIES**

Petrozavodsk  
2023

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; O. N. BAKHMET (Deputy Editor-in-Chief), RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); I. V. DROBYSHEV, PhD (Biol.) (Sweden – Canada); N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; T. E. HANG, PhD (Geog.) (Estonia); P. HÖLTTÄ, PhD (Geol.), Prof. (Finland); E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; H. JOOSTEN, Dr. (Biol.), Prof. (Germany); A. M. KRYSHEN', DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; O. L. KUZNETSOV, DSc (Biol.); N. V. LUKINA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Academician, DSc (Biol.), Prof.; O. OVASKAINEN, PhD (Math.), Prof. (Finland); O. N. PUGACHYOV, RAS Academician, DSc (Biol.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; S. A. SUBBOTIN, PhD (Biol.) (USA); D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); K. SZAJEWSKI, PhD (Math.), Prof. (Poland); A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Editorial Board of the «Mathematical Modeling and Information Technologies» Series

A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; O. V. LUKASHENKO (Executive Secretary), PhD (Phys.-Math.); V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. A. VATUTIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.

*Published since January 2009*

*8 issues a year*

Editorial Office address: 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia

Tel. (8142)762018; fax (8142)769600

E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Full-text electronic version: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

УДК 550.8.05, 004.65, 581.342.2, 537.075

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

Б. З. Белашев

*Институт геологии КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН»  
(ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Исследованы временные ряды сейсмического шума, геомагнитных вариаций, объемной активности радона приземного слоя атмосферы. Данные получены геофизическими комплексами, ведущими мониторинговые измерения на территории Республики Карелия. Для рядов, зарегистрированных в условиях низкой сейсмической и геомагнитной активности, рассчитаны их спектры мощности. Близость выявленных периодов рядов к периодам собственных колебаний Земли рассматривается как свидетельство модулирующей и синхронизирующей роли собственных колебаний Земли. Модуляция объемной активности радона в атмосфере собственными колебаниями Земли объяснена транспортом радона на земную поверхность пузырьковыми водородными образованиями.

Ключевые слова: сейсмический шум; геомагнитные вариации; объемная активность радона; спектры мощности; собственные колебания Земли; водородная дегазация

Для цитирования: Белашев Б. З. Спектральный анализ данных геофизического мониторинга // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 5–15. doi: 10.17076/mat1768

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт геологии КарНЦ РАН).

### **B. Z. Belashev. SPECTRAL ANALYSIS OF GEOPHYSICAL MONITORING DATA**

*Institute of Geology, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences  
(11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The time series of seismic noise, geomagnetic variations and radon activity concentration in the atmospheric boundary layer were studied. The data were obtained by geophysical systems providing monitoring measurements in the Republic of Karelia, Russia. The power spectra were calculated and analyzed for the series recorded under low seismic and geomagnetic activity. The similarity of the detected periods of the spectra with periods of the Earth's natural oscillations is regarded as evidence of a modulating and synchronizing role of these oscillations. The modulation of the radon activity concentration in the atmosphere by the Earth's own oscillations is explained by the transport of radon to the Earth's surface by bubble hydrogen formations.

Key words: seismic noise; geomagnetic variations; radonactivity concentration; power spectra; the Earth's natural oscillations; hydrogen degassing

For citation: Belashev B. Z. Spectral analysis of geophysical monitoring data. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2023;4:5–15. doi: 10.17076/mat1768

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Geology KarRC RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование опирается на данные геофизического мониторинга по территории Республики Карелия, поступающие от автоматизированных аппаратно-программных комплексов, ведущих инструментальные наблюдения за литосферой и магнитосферой региона [25].

Предметом исследования являются ряды сейсмического шума, геомагнитных вариаций, объемной активности радона, характеризующие состояние геофизической среды. Микросейсмы порождаются землетрясениями, стоячими морскими волнами, циклонами, производственной деятельностью [6]. Их интенсивность зависит от особенностей места регистрации [32]. Геомагнитные вариации связывают с активностью Солнца, процессами в земном ядре, возмущениями магнитосферы, изменением электропроводности и напряженного состояния поверхностных участков земной коры [16]. Эксхалиция радона в атмосферу оказывается чувствительной к геодинамической обстановке, фильтрационным свойствам горных пород. Радон повышает электропроводность приповерхностного слоя атмосферы, вызывает конденсацию водяного пара, образование приземного озона [5]. В живых организмах биологически активные радиоактивные радон и продукты его распада провоцируют онкологические заболевания [31]. При оценке экологической безопасности территорий радоновая съемка является обязательной.

Локальные особенности исследуемых рядов часто рассматривают как предвестники опасных явлений [7, 14]. Нас будут интересовать интегральные характеристики рядов, отражающие ритмы геофизической среды суточного диапазона.

Цель работы – изучение цикличности временных рядов сейсмического шума, геомагнитных вариаций, объемной активности радона в условиях низкой сейсмической и геомагнитной активности. В задачи работы входит расчет спектров мощности указанных рядов, оценка значимости спектральных пиков, сравнение полученных результатов с известными

данными и их интерпретация. При обработке временных рядов использованы традиционные для анализа сигналов преобразования Фурье, Скарлжа, вейвлеты, метод максимума энтропии [8, 29, 34]. Близость периодов описываемых процессов друг к другу и к периодам собственных колебаний Земли рассматривается как свидетельство модулирующей, синхронизирующей роли последних.

Модуляция объемной активности радона собственными колебаниями Земли объяснена транспортом радона из недр к земной поверхности пузырьковыми образованиями.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

### Регистрация данных

Геомагнитные данные получены в геофизической обсерватории «Петрозаводск». Расположенная в лесном массиве на окраине Петрозаводска, обсерватория испытывает слабое техногенное воздействие города [25]. Измерения вариаций горизонтальных  $V_x$  (юг-север),  $V_y$  (запад-восток) и вертикальной  $V_z$  (к центру Земли) компонент магнитного поля Земли проведено геофизическим комплексом GI MTS-1 [20]. Переориентацию его чувствительного элемента – магнита самарий-кобальтового сплава в меняющемся магнитном поле фиксируют по отраженному от закрепленного на магните зеркала сигналу светодиода. Отклик фотодетекторов фильтруется по низким частотам, усиливается и перераспределяется между АЦП и катушками индуктивности, создающими обратное магнитное поле. Диапазон частот комплекса 0,001–8 Гц, чувствительность 0,1 нТл, динамический диапазон измерений индукции магнитного поля  $\pm 1800$  нТл. Дискретность регистрируемых рядов  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  составляла 1 с.

Аналогичным образом представлены микросейсмические данные  $S_z$ ,  $S_x$  и  $S_y$ , поступающие от ориентированных в вертикальном и горизонтальном направлениях датчиков станции «РІТК» (координаты 61,671 с. ш. 31,266 в. д., открыта 03.06.2014). Сейсмоприемники станции Guralp GMC-6TD [30] уста-

новлены на бетонном основании в специально выстроенном крытом павильоне, расположенном на амфиболитовых базальтах туфогенно-карбонатного горизонта. Из всех станций локальной карельской сети станция в п. Лепшясилта, находящемся примерно в 10 км от г. Питкяранты, имеет самый низкий уровень шума [13].

Объемную активность радона в воздухе подвальных помещений измеряли в деревне Царевичи, г. Питкяранте, районе Петрозаводска Соломенное. Деревня Царевичи находится примерно в 40 км от Петрозаводска на скалистом перешейке между двух малых озер. Производственная деятельность в деревне отсутствует, ее дорожная сеть загружена слабо. По сравнению с другими участками съемки техногенное воздействие на результаты измерений здесь можно считать минимальным.

Мониторинг радона вели сейсмической станцией СРС-05 [22]. С часовой дискретностью станция измеряет объемную активность радона, температуру, давление, влажность воздуха, сохраняет результаты измерений во внутренней памяти. Дополнительные

устройства в составе станции реализуют дистанционное управление, выход в Интернет, передачу данных на ftp-сервер [11]. Данные от аппаратно-программных комплексов по Интернету и мобильной связи поступали на ftp-сервер Института геологии КарНЦ РАН в Петрозаводске. Радиационный фон в пунктах мониторинга радона измеряли в ручном режиме гамма-радиометром СРП-68.

### Соответствие условиям слабых геомагнитных возмущений

Соответствие условиям слабых геомагнитных и сейсмических возмущений проверяли по интенсивности высокочастотной компоненты микросейсм и каталогам геомагнитной активности [15]. Для анализа отбирали ряды, соответствующие значениям горизонтальных компонент магнитного поля Земли с разбросом менее 100 нТл и суточными Кр-индексами глобальной геомагнитной активности менее 3. Пример контроля Кр-индексов дает табл. 1, в последней строке которой приведены среднесуточные значения Кр-индексов в течение 20–26 марта 2016 г., не превышающие 2,5.

Таблица 1. Кр-индексы в течение 20–26.03.2016  
Table 1. Kp indices in time interval 20–26.03.2016

Часы\Дни Hours\Date	20.03	21.03	22.03	23.03	24.03	25.03	26.03
0–3	1	2	3	2	3	2	0
3–6	2	2	3	2	3	3	0
6–9	3	2	2	3	2	2	1
9–12	2	2	2	4	2	1	1
12–15	2	2	3	2	2	1	0
15–18	3	2	1	2	1	1	1
18–21	3	2	0	1	1	1	1
21–24	4	1	1	2	1	1	1
Среднее Mean	2,5	1,9	1,9	2,3	1,9	1,5	0,6

Из-за технических сбоя в ходе мониторинга не все ряды могли быть привязаны к одному временному промежутку. Продолжительность отобранных для анализа рядов составляла от одной до двух недель. Усреднение данных сейсмического шума и геомагнитных вариаций в часовом интервале дискретизации подавляло высокочастотные флуктуации. В рядах, где необходимо, устраняли линейные тренды. Все ряды центрировали на их средние значения.

### Методы обработки и анализа данных

Обработку данных вели в системе компьютерной математики «MATLAB» с применением апробированных методов и программ [8].

Использованы преобразования Фурье, Скарлжа, вейвлеты, метод максимума энтропии (ММЭ) [29]. Основным методом расчета спектральной плотности мощности изучаемых рядов был ММЭ. ММЭ использует авторегрессионную модель данных, представляет ошибку текущего значения линейной комбинацией этого и  $p$  предшествующих членов временного ряда. Для гауссовского случайного процесса требование максимума функционала энтропии спектральной мощности при соблюдении условий теоремы Винера–Хинчина для  $p + 1$  значений автокорреляционной функции дает спектр мощности сигнала  $P(f)$ , получаемый делением выходной оценки мощности шума



$2\sigma_a^2$  на квадрат спектральной характеристики «отбеливающего» фильтра

$$P(f) = \frac{2\sigma_a^2}{(1 - \sum_{j=1}^p a(j) \exp(-i2\pi f j))^2},$$

где  $f$  – частота ( $0 < f < 0,5$ ), а  $j$  – коэффициенты авторегрессии порядка  $j$ .

ММЭ оценка спектральной плотности мощности сигнала является несмещенной, положительной. Метод имеет высокое частотное разрешение. К его недостаткам относят отсутствие точных сведений об амплитудах и фазах выделяемых гармоник и необходимость выбора порядка авторегрессии, влияющего на устойчивость спектральных оценок. В расчетах спектров мощности значение порядка авторегрессии  $p = 40$ . Преобразование Фурье применяли в одном из методов оценивания значимости спектральных пиков, модифицированное преобразование Скарлжа и вейвлеты – при получении амплитудных спектров и вейвлетограмм. По сравнению с преобразованием Фурье преобразование Скарлжа дает более точные значения параметров гармоник. В качестве материнского вейвлета использован вейвлет Морле.

Наличие шумовой компоненты процесса требует оценки значимости пиков спектра. Значимость пиков спектра зависит от метода оценивания [21]. Доверительные интервалы ММЭ оценок спектральной плотности временных рядов объемной активности радона длиной  $N$  и дисперсией  $s^2$  получали в предположении  $\chi^2$  – распределения ошибок спектральной плотности с  $\nu = N/p$  степенями свободы и уровнем доверия  $\alpha$  [8, 18].

$$(\nu - 1)s^2/\chi_{\nu-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \sigma^2 < (\nu - 1)s^2/\chi_{\nu-1, \frac{\alpha}{2}}^2.$$

В меньшей степени от априорной информации о виде распределения зависит комбинация методов наименьших квадратов и Монте-Карло [12, 24]. Сначала по ММЭ периодам определяли амплитуды и фазы гармоник исходного ряда, решая обратную задачу методом наименьших квадратов со следующей модельной функцией:

$$y(t) = C_0 + \sum_{k=1}^m C_k \sin(2\pi t/T_k + \theta_k). \quad (1)$$

Близость исходного и модельного рядов контролировали по критерию  $\chi^2 \cong 1$ .

Методом Монте-Карло генерировали 3000 случайных рядов «красного» шума с дисперсией исходного ряда. В рядах, лишенных гармоник, определяли число случаев с амплитудами, равными или превосходящими соответ-

ствующие амплитуды спектральных пиков исходного ряда. Доля таких случаев  $\alpha$  от общего числа сгенерированных рядов для каждой гармоники исходного ряда отвечала вероятности  $1 - \alpha$ , по которой судили о значимости спектрального пика. Уровень значимости  $\alpha$  принимали равным 0,05.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 показаны ряды сейсмического шума трех ортогональных датчиков станции «РИТК» за период с 20 по 26 сентября 2016 г. и их соответствующие спектры мощности.

На рис. 2 даны ряды геомагнитных вариаций трех ортогональных магнитных датчиков геофизического комплекса GI MTS-1 в интервале с 20 по 26 марта 2016 г. и их спектры мощности.

На рис. 3 представлены ряды объемной активности радона, зарегистрированной в трех населенных пунктах в разные промежутки времени, и их спектры мощности. Узкие пики спектров (б, г) свидетельствуют о высокой добротности и резонансном характере колебаний.

Периоды выявленных гармоник приведены в табл. 2. Табл. 3 содержит параметры рядов и результаты расчетов доверительных интервалов амплитуд ММЭ спектров рядов объемной активности радона. Нижние границы доверительных интервалов на рис. 3 выделены прямыми линиями.

В табл. 4 показаны ММЭ периоды, амплитуды и фазы гармоник, вычисленные согласно формуле (1), соответствующие амплитудам пиков спектров вероятности, полученные методом Монте-Карло. Прошедшие проверку на значимость этим методом спектральные компоненты в табл. 4 выделены жирным шрифтом, в табл. 2 отмечены звездочками. В спектрах рядов сейсмического шума и геомагнитных вариаций интенсивные пики соответствуют суткам, их половине и одной трети. Большая часть пиков близка к периодам собственных колебаний Земли суточного диапазона, приведенным в последних столбцах табл. 2 [4, 17].

Значимые с доверительной вероятностью 0,95, подтвержденные двумя независимыми методами (табл. 3, 4) амплитуды гармоник объемной активности радона отвечают частотам, близким к  $\Omega + n\omega$  с  $n = 1, 2, 3$ . Незначимость амплитуд других гармоник может быть следствием нестационарности радоновой дегазации, отраженной на рис. 4 амплитудными спектрами со скользящим окном 60 отсчетов и вейвлетограммами рядов объемной активности радона.



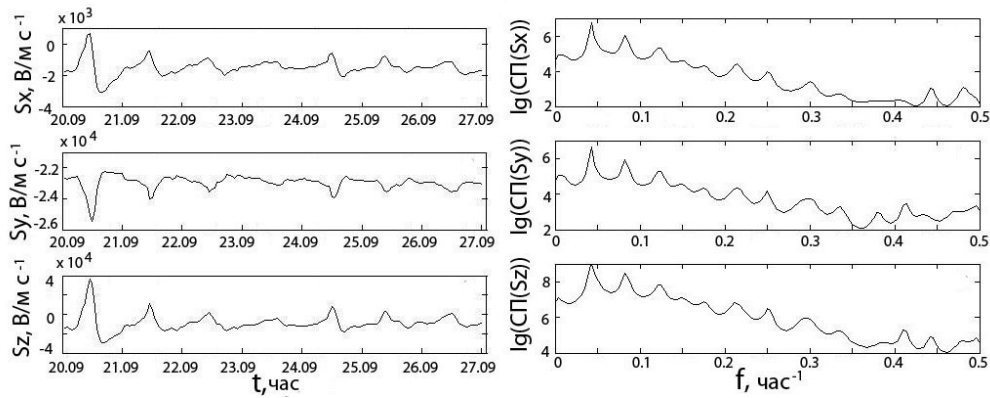


Рис. 1. Временные ряды сейсмического шума  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  трех пространственно ориентированных сейсмических датчиков с часовым интервалом дискретизации и их спектры мощности. СП – спектральная плотность  
 Fig. 1. Seismic noise series  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  of three spatially oriented seismic meters with a one-hour discretization interval and their power spectra. SD – spectral density

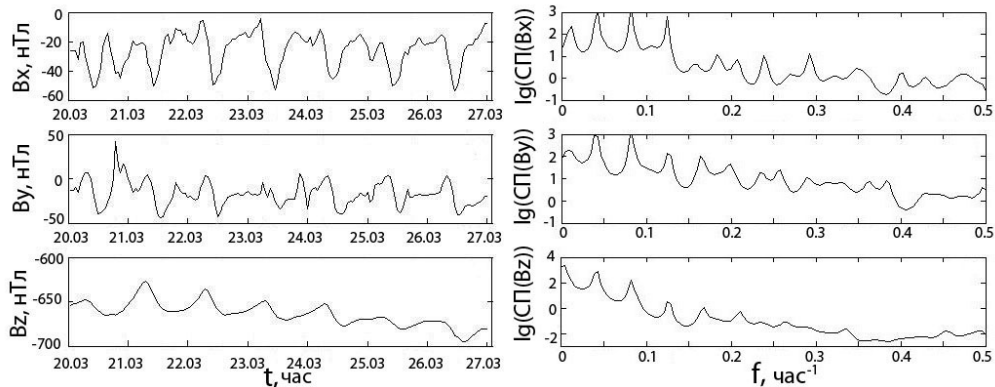


Рис. 2. Вариации трех компонент  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  геомагнитного поля 20–26.03.2016 с часовым интервалом дискретизации и их спектры мощности. СП – спектральная плотность  
 Fig. 2. Variations in three components  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  of a geomagnetic field 20–26.03.2016 with a one-hour discretization period and their power spectra. SD – spectral density

## ОБСУЖДЕНИЕ

Территория проведения геофизического мониторинга находится в пределах Карельского кратона. Устойчивость и асейсмичность данного фрагмента земной коры способствует проявлению собственных движений литосферы. Магнитосфера региона, напротив, часто бывает неустойчивой из-за близости к арктическим широтам и авроральной зоне северных сияний. Длительность интервалов ее слабых возмущений в рядах геомагнитных вариаций составляет около недели (табл. 1).

Соломенская брекчия, которой сложены поверхностные слои земной коры в Соломенном и д. Царевичи, имеет низкое содержание урана, калия, тория. Фоновые уровни радиации 0,06–0,12 мкЗв/час не согласуются со значениями объемной активности радона, превышающими нормативные для строений 200 Бк/м<sup>3</sup> (рис. 3, а, в, д). По-видимому,

радон на земную поверхность на этих участках поступает из глубоких горизонтов.

Суточная периодичность в рядах сейсмического шума и геомагнитных вариаций отражает чередование дня и ночи, изменение светового, геомагнитного, температурного режима, ритм производственной деятельности. Полусуточную периодичность связывают с приливными явлениями, 8-часовой период – с нелинейностью процессов. Полный набор периодов объяснить только этими явлениями не удастся. Часть периодов можно связать с собственными колебаниями Земли (табл. 2).

Собственные колебания Земли (механические колебания ее упругого тела) делят на сейсмогравитационные колебания – в меняющемся гравитационном поле и крутильные колебания – в постоянном поле. Первый тип регистрируют гравиметры, второй – датчики деформаций, оба типа – сейсмографы.

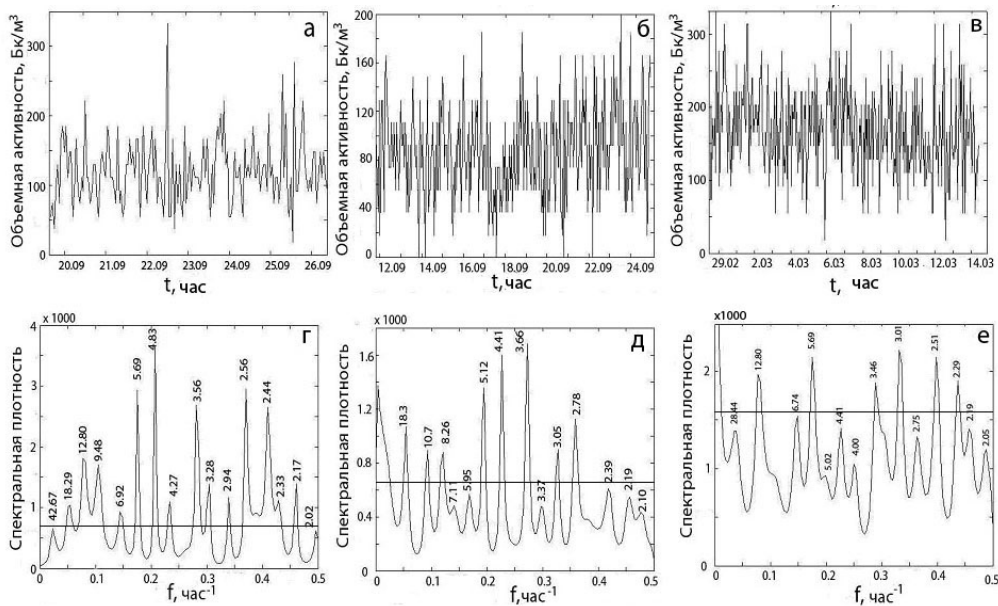


Рис. 3. Временные ряды объемной активности радона в воздухе подвальных помещений в д. Царевичи (2016) (а), Соломенном (2014) (б), г. Питкяранта (2016) (в) и их спектры мощности (г–е соответственно). Прямая на графиках спектров – нижняя граница доверительных интервалов амплитуд пиков с  $\alpha = 0,05$  (табл. 3)  
 Fig. 3. Volumetric radon activity time series recorded in the air of basements in the village of Tsarevichi (2016) (a), Solomennoye (2014) (b), the City of Pitkyaranta (2016) (c) and their power spectra (г–е, respectively). The straight line in the plots of spectra marks the lower bound of the confidence interval of peak amplitudes with  $\alpha = 0,05$  (Table 3)

Линейчатые спектры собственных колебаний используют при проверке моделей внутреннего строения Земли и планет.

Первоначально собственные колебания Земли регистрировали после сильных землетрясений [28]. Их обнаружение в фоновом сейсмическом процессе дало возможность уточнить статистический спектр колебаний, сравнить периоды, полученные разными авторами, подтвердить близость результатов. Периоды колебаний в диапазоне 3,06–6,03 час даны в столбце А табл. 2 [17].

Гармоники с периодами меньше 3,45 часа связывают с космическими ритмами, колебаниями сферической Земли, вариациями атмосферного давления, осцилляциями АЕ индекса [9].

В модели Земли, представляющей систему несферичных, несбалансированных оболочек, цикличность эндогенной активности вызвана гравитационным действием небесных тел [3, 4, 10]. Эта модель вводит новые виды колебаний, например, колебание центра тяжести земного ядра относительно центра тяжести мантии с частотой  $\Omega$ , соответствующей периоду 4,01 часа. Модулируемое суточным вращением Земли с частотой  $\omega$ , это колебание порождает гар-

моники с частотами  $\Omega \pm n\omega$  (n-натуральное число), периодами, представленными соответственно в столбцах С и В табл. 2.

Модуляция сейсмического шума и геомагнитных вариаций собственными колебаниями Земли известна уже более 30 лет [1, 19, 33]. Ее объясняют высокой чувствительностью пластически деформируемой среды, совершающей скачкообразные переходы из одного метастабильного состояния в другое под действием внешних факторов.

Нестабильный выход радона обычно связывают с местной геодинамикой, атмосферными, техногенными факторами [2]. С собственными колебаниями Земли его ранее не ассоциировали. Отмеченная в табл. 2 близость периодов для объемной активности радона с одной стороны и собственных колебаний Земли, сейсмического шума и геомагнитных вариаций с другой стороны указывает на возможность существования такой связи.

Объяснить подобную модуляцию объемной активности радона в атмосфере можно посредством процесса дегазации Земли. Известно, что в приповерхностные слои грунта и атмосферу тяжелый радон поступает с пузырьковыми образованиями водорода и метана [26].

В отличие от метана, переносящего радон на участках со шлейфами углеводородных скопленений [27], водород является универсальным носителем.

Глобальный характер водородной дегазации подтверждают наблюдения за озоновым слоем, разрушаемым водородом, покидающим планету [23]. Синхронные изменения, фиксируемые на динамических картах содержания

озона в разных местах земного шара, свидетельствуют о едином глубинном источнике водорода. Таким источником считают земное ядро. Колебания ядра модулируют водородную дегазацию, а через нее – эксхалицию радона в атмосферу. На выход радона оказывать влияние могут и другие связанные с колебаниями Земли факторы, такие как раскрытие-сжатие трещин, уровень подземных вод.

Таблица 2. Периоды исследуемых временных рядов и собственных колебаний Земли (час)  
Table 2. Periods of the investigated time series and natural oscillations of the Earth (hour)

Сейсмический шум Seismic noise			Геоманнитное поле Geomagnetic field			Эксхалиция радона Radon exhalation			Петрова [33]	Баркин [4]	
Sx	Sy	Sz	Bx	By	Bz	1	2	3	A	B	C
23,27	23,27	23,27	23,27	25,60	23,27	18,29	28,44	18,33		23,37	$\Omega - 7\omega$
12,19	12,19	12,19	12,19	12,19	12,19	12,80	12,80	10,70		12,03	$\Omega - 4\omega$
8,26	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	9,48		8,26		8,07	$\Omega - 3\omega$
6,74	6,74	6,74	6,40	6,10		6,92	6,74	7,11			
					5,95			5,95	6,03	5,97	$\Omega - 2\omega$
5,69	5,69	5,69	5,45			5,69	5,69		5,67		
				5,02			5,02	5,12			
		4,75	4,83		4,74	4,83			4,75	4,80	$\Omega - \omega$
4,65	4,65						4,41	4,41	4,35		
			4,20	4,27	4,27	4,27					
4,00	4,00	4,00					4,00		4,01	4,01	$\Omega$
			3,71	3,88	3,76				3,76		
						3,56*		3,66*	3,60		
3,32	3,32	3,41	3,41	3,46	3,46		3,48*	3,37	3,41	3,43	$\Omega + \omega$
				3,16		3,28			3,21		
3,01	2,98	2,98	3,12	3,05	2,98	2,94*	3,01*	3,05	3,06	3,00	$\Omega + 2\omega$
			2,88	2,72				2,75*	2,78*		
2,64	2,64	2,59		2,61	2,69	2,56*	2,51*			2,66	$\Omega + 3\omega$
2,47	2,42	2,44	2,49		2,37	2,44		2,39*		2,40	$\Omega + 4\omega$
2,27	2,31	2,27	2,33	2,33		2,33	2,29				
				2,25	2,21	2,17	2,19	2,19		2,18	$\Omega + 5\omega$

Примечание. 1 – Царевичи, 2 – Питкяранта, 3 – Соломенное.  
Note. 1 – Tsarevichi, 2 – Pitkyaranta, 3 – Solommenoye.

Таблица 3. Данные рядов активности радона и доверительные интервалы амплитуд пиков их ММЭ спектров  
Table 3. Confidence intervals of MME peak amplitudes of radon volumetric activity time series spectra

Параметры\Пункт Parameters\Settlement	Царевичи Tsarevichi	Питкяранта Pitkyaranta	Соломенное Solommenoye
Длина ряда $N$ , час Length of time series $N$ , hour	162	359	316
Дисперсия ряда $s^2$ , Бк <sup>2</sup> /м <sup>6</sup> Variance $s^2$ , Bq <sup>2</sup> /m <sup>6</sup>	2260,2	3488,6	1509
Число степеней свободы $\nu = \text{int}(N/p)$ Number of degrees of freedom $\nu = \text{int}(N/p)$	4	9	8
Доверительный интервал $\sigma^2$ , Бк <sup>2</sup> /м <sup>6</sup> Confidence interval $\sigma^2$ , Bq <sup>2</sup> /m <sup>6</sup>	[726 31421]	[1592 12804]	[660 6250]



Таблица 4. Параметры гармоник рядов объемной активности радона в методах МНК и Монте-Карло  
 Table 4. Harmonics parameters of radon volumetric activity series in LS and Monte Carlo methods

Царевичи Tsarevichi				Питкяранта Pitkyaranta				Соломенное Solommennoye			
$T$ , час $T$ , hour	$C$ , Бк/м <sup>3</sup> $C$ , Bq/m <sup>3</sup>	$\theta$ , рад $\theta$ , rad	$1 - \alpha$ $1 - \alpha$	$T$ , час $T$ , hour	$C$ , Бк/м <sup>3</sup> $C$ , Bq/m <sup>3</sup>	$\theta$ , рад $\theta$ , rad	$1 - \alpha$ $1 - \alpha$	$T$ , час $T$ , hour	$C$ , Бк/м <sup>3</sup> $C$ , Bq/m <sup>3</sup>	$\theta$ , рад $\theta$ , rad	$1 - \alpha$ $1 - \alpha$
42,67	9,24	-0,49	0,034	28,44	9,63	-3,07	0,069	18,33	6,41	0,03	0,143
18,29	8,16	-2,26	0,068	12,80	5,18	-2,01	0,067	12,80	3,00	-2,99	0,056
12,80	13,89	-2,71	0,318	6,74	2,67	2,51	0,068	10,70	3,61	-2,70	0,108
9,48	12,24	-1,32	0,402	5,69	8,42	2,87	0,593	8,26	3,90	-0,77	0,205
6,92	7,74	2,57	0,330	5,02	9,34	-0,95	0,77	7,11	1,23	-0,19	0,025
5,69	12,66	1,35	0,796	4,41	2,85	1,87	0,161	5,95	3,74	0,50	0,320
4,83	12,35	-0,96	0,830	4,00	3,27	1,29	0,244	5,12	3,77	-2,75	0,391
4,27	8,81	1,10	0,693	<b>3,48</b>	<b>11,92</b>	<b>2,94</b>	<b>0,987</b>	4,41	2,08	0,96	0,189
<b>3,56</b>	<b>13,74</b>	<b>-0,35</b>	<b>0,980</b>	<b>3,01</b>	<b>12,37</b>	<b>0,88</b>	<b>0,995</b>	<b>3,66</b>	<b>10,64</b>	<b>1,64</b>	<b>0,997</b>
3,28	7,96	1,71	0,741	<b>2,75</b>	<b>10,84</b>	<b>-2,98</b>	<b>0,994</b>	3,37	3,62	0,50	0,605
<b>2,94</b>	<b>10,15</b>	<b>-1,72</b>	<b>0,953</b>	<b>2,51</b>	<b>11,08</b>	<b>0,31</b>	<b>0,998</b>	3,05	5,40	-0,03	0,895
<b>2,56</b>	<b>13,01</b>	<b>1,79</b>	<b>0,988</b>	2,29	6,34	-2,52	0,860	<b>2,78</b>	<b>6,02</b>	<b>-1,32</b>	<b>0,952</b>
2,44	9,61	-1,72	0,941	2,19	4,22	-0,71	0,588	<b>2,39</b>	<b>6,92</b>	<b>-0,99</b>	<b>0,997</b>
2,33	2,37	2,79	0,153					2,19	1,80	-3,08	0,283
2,17	8,31	2,94	0,882					2,10	2,09	1,71	0,375

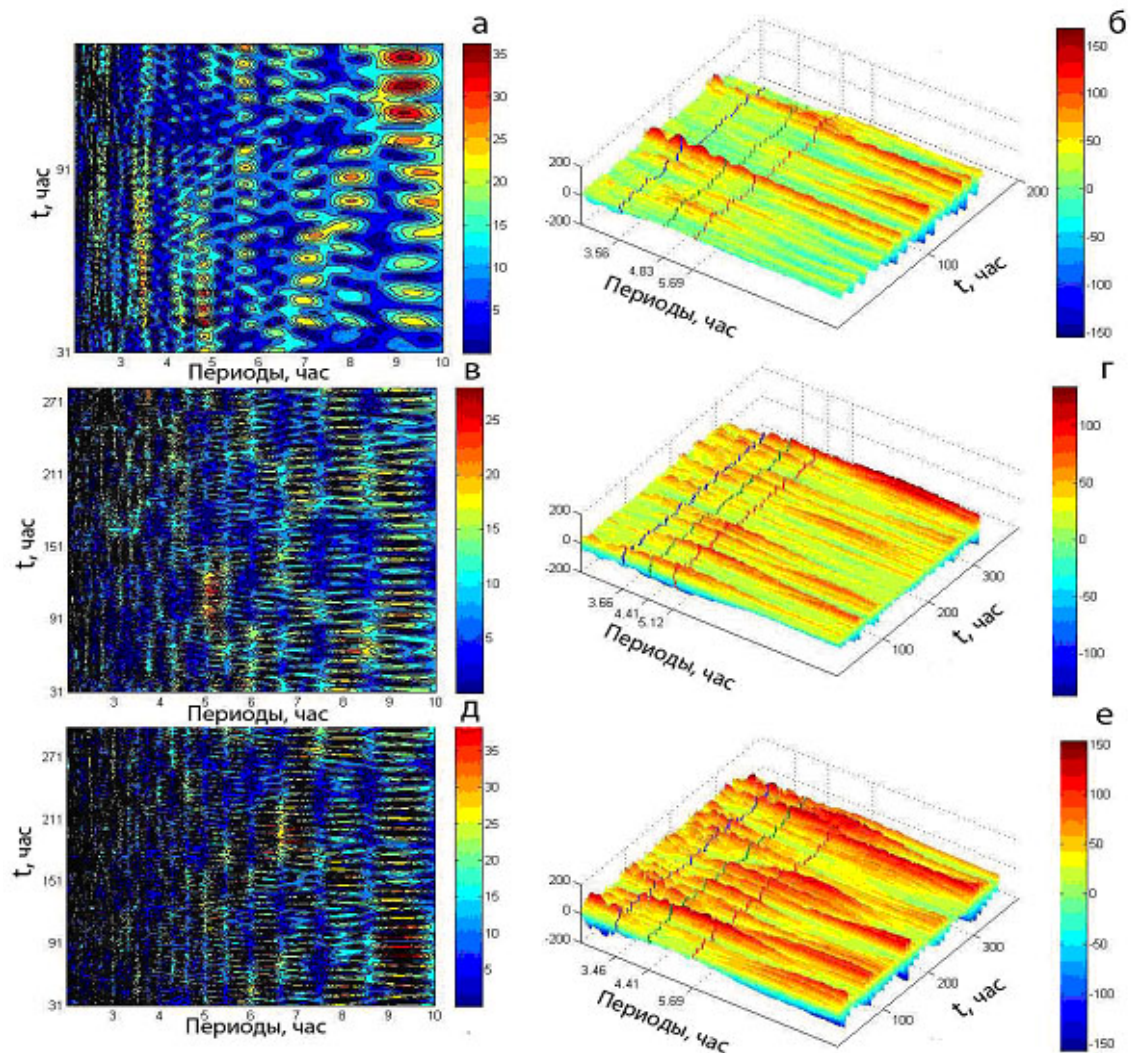


Рис. 4. Амплитудные спектры временных рядов объемной активности радона, зарегистрированных в деревне Царевичи (а), в Соломенном (в) и г. Питкяранта (д) (рис. 3), и вейвлетограммы этих рядов (б), (г), (е) соответственно. На вейвлетограммах показаны изменения основных гармоник спектров на рис. 3  
 Fig. 4. Amplitude spectra of volumetric radon activity series recorded in the village of Tsarevichi (a), Solommennoye (c) and the City of Pitkyaranta (e) (Fig. 3) and waveletograms of these series – (б), (г), (е), respectively. Alterations of the basic harmonics of spectra in Fig. 3 are shown in waveletograms

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Инструментальные автоматизированные комплексы, ведущие мониторинг литосферы и магнитосферы на территории Карелии, дают содержательный материал для анализа цикличности геофизических процессов.

2. Информативными являются временные ряды сейсмического шума, геомагнитных вариаций, объемной активности радона, зарегистрированные в условиях низкой сейсмической и геомагнитной активности.

3. Близость периодов гармоник спектров мощности этих рядов к периодам собственных колебаний Земли свидетельствует о модулирующей, синхронизирующей роли последних. Если для сейсмического шума (акустической эмиссии), вариаций геомагнитного поля такая модуляция известна, то для объемной активности радона рассматривается впервые.

4. Модуляция объемной активности радона собственными колебаниями Земли согласуется с механизмом транспорта радона в атмосферу пузырьковыми водородными образованиями. Модулируемые колебаниями земного ядра, потоки этих образований переносят тяжелый радон из верхних слоев земной коры в атмосферу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов Ю. В., Антонова И. Ю., Рыбин А. К., Щелочков Г. Г. Модуляция вариаций вертикального градиента силы тяжести и электромагнитного поля собственными колебаниями Земли // Изв. вузов. Геология и разведка. 2010. № 6. С. 101–105.
2. Аптикаева О. И., Костенко К. А., Сельюков Е. И., Стигнеева Л. Т., Черепанов О. А. Особенности ритмической структуры рядов объемной активности радона при регистрации в условиях мегаполиса // Атлас временных вариаций природных, антропогенных и социальных процессов. Сер. Человек и три окружающие его среды. М.: Янус-К, 2013. Т. 5. С. 255–264.
3. Баркин Ю. В. Дрейф центра масс Земли и вековые вариации силы тяжести // Геофизические исследования. 2010. Т. 11. С. 18–31.
4. Баркин Ю. В. Объяснение эндогенной активности планет и спутников и ее цикличности // Изв. РАЕН. Секция наук о Земле. 2002. Вып. 9. С. 45–97.
5. Белашев Б. З., Горьковец В. Я. Экологические аспекты дегазации радона // Энергия. Техника. Экономика. Экология. 2015. № 9. С. 38–48.
6. Богомолов Л. М. От исследования штормовых микросейсм к анализу сейсмо-ионосферных эффектов // Вестник ДВО РАН. 2011. № 6. С. 27–33.
7. Божов В. Н., Воробьев В. Н. Прогнозы сейсмических событий с использованием геофизических и атмосферных предвестников // Ученые записки РГГМУ. 2015. № 44. С. 141–152.
8. Вишератин К. Н., Карманов Ф. И. Практические методы оценивания спектральных параметров. Обнинск: ИАТЭ, 2008. 60 с.
9. Владимирский Б. М., Конрадов А. А. Космическая физика, геофизика и внутрисуточные биологические ритмы // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. 2007. Т. 20(59), № 1. С. 92–100.
10. Гончаров М. А., Разницын Ю. Н., Баркин Ю. В. Особенности деформации континентальной и океанической литосферы как следствие северного дрейфа ядра Земли // Геодинамика и тектонофизика. 2012. Т. 3, № 1. С. 27–54. doi: 10.5800/GT-2012-3-1-0060
11. Долгий К. А., Белашев Б. З. Аппаратно-программный комплекс сейсмической радоновой станции // Фундаментальные исследования. 2017. № 10. С. 206–211.
12. Зельк Я. И., Степанян Н. Н., Андреева О. А. Спектральные методы анализа вращения солнечных структур // Изв. Крым. обс. 2007. Т. 103, № 1. С. 56–69.
13. Зуева И. А., Лебедев А. А. Сейсмический эффект промышленных взрывов Костомукшского ГОК // Вестник НГТУ. 2020. Т. 23, № 1. С. 22–28. doi: 10.21443/1560-9278-2020-23-1-22-28
14. Купцов А. В., Ларионов И. А., Шевцов Б. М. Особенности геоакустической эмиссии при подготовке Камчатских землетрясений // Вулканология и сейсмология. 2005. № 5. С. 45–49.
15. Лаборатория «Рентгеновская астрономия солнца» ФИАН. URL: [https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id\\_level=786](https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id_level=786) (дата обращения: 11.04.2023).
16. Максимочкин В. И. Геомагнитные вариации и магнитосфера Земли. М.: МГУ, 2014. 115 с.
17. Петрова Л. Н., Беляков А. С., Николаев А. В. Акустическая эмиссия и сейсмогравитационные колебания Земли как связанные компоненты при изучении внутриклинной динамики // Российско-китайский журнал «Исследования по прогнозу землетрясений». 1996. Т. 5, № 2. С. 211–223.
18. Рыбак О. О. Спектральная структура изотопного состава антарктических ледовых кернов: сравнение оценок Ломба-Скаргла и максимальной энтропии // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2007. № 6. С. 50–56.
19. Рыкунов Л. Н., Хаврошкин О. Б., Цыпलाков В. В. Эффект модуляции сейсмических шумов Земли 25 лет спустя. Второе сообщение // Наука и технология в России. 1998. Т. 358, № 1. С. 16–19.
20. Сергушин П. А. Магнитовариометр как средство измерения магнитных полей // Вестник ИТМО. 2006. Т. 6, № 5. С. 173–175.

21. Серебрянников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Физматгиз, 1965. 244 с.
22. СРС-05 Сейсмическая радоновая станция. URL: <http://ntm.ru/products/133/7832> (дата обращения: 11.04.2023).
23. Сывороткин В. Л. Озонная методика изучения водородной дегазации Земли // Электронное научное издание Альманах Пространство и время. 2013. Т. 4, № 1.
24. Тербиж В. Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992. 388 с.
25. Шаров Н. В. Геофизическая обсерватория «Петрозаводск» // Труды Карельского научного центра РАН. 2013. № 1. С. 169–171.
26. Шулейкин В. Н. Перенос радона в приповерхностные слои грунта и приземную атмосферу // Геофизические процессы и биосфера. 2013. Т. 12, № 2. С. 57–66. doi: 10.1134/S0001433813080069
27. Шулейкин В. Н., Щужин Г. Г. Исследование вариаций атмосферного электрического поля в районах нефтяных месторождений нефти и газа // Метеорология и гидрология. 2015. № 2. С. 21–29. doi: 10.3103/S106837391502003X
28. Bogert B. P. An observation of free oscillations of the Earth // Journal of Geophysical Research. 1961. Vol. 66(2). P. 643–646.
29. Burg J. P. The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra // Geophysics. 1972. Vol. 37. P. 275–276.
30. GURALP CMG-6TD Digital output broad band seismometer. URL: [https://dsys.ru/images/photos/pictures/Soft/Velosimetr/РЭ\\_CMG\\_6TD.pdf](https://dsys.ru/images/photos/pictures/Soft/Velosimetr/РЭ_CMG_6TD.pdf) (дата обращения: 11.04.2023).
31. Ionizing radiation: sources and biological effects. Presentation at the UN General Assembly. 1988. Vol. 1.
32. Maxwell S. C., Urbancic T. I. The role of passive micro seismic monitoring in the instrumental oil field // The Leading Edge. 2001. Vol. 20(6). P. 636–639.
33. Petrova L. N. Seismogravitational oscillation of the Earth from observation by spaced vertical pendulums in Eurasia // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. 2002. Vol. 38(4). P. 325–336.
34. Scargle J. D. Studies in astronomical time series analysis. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data // The Astrophysical Journal. 1982. Vol. 263. P. 835–853.
- Higher Educational Establishments. *Geology and Exploration*. 2010;6:101–105. (In Russ.)
2. Aptikaeva O. I., Kostenko K. A., Selyukov E. I., Stigneeva L. T., Cherepanov O. A. Features of the rhythmic structure of the series of volumetric activity of radon during registration in a megalopolis. *Atlas vremennykh variatsii prirodnnykh, antropogennykh i sotsial'nykh protsessov. Ser. Chelovek i tri okruzhayushchie ego sredy = Atlas of time variations of natural, anthropogenic and social processes*. Moscow: Yanus-K; 2013. Vol. 5. P. 255–264.
3. Barkin Yu. V. Drift of the Earth's centre of mass and secular variations in gravity. *Geofizicheskie issledovaniya = Journal of Geophysical Research*. 2010;11:18–31. (In Russ.)
4. Barkin Yu. B. Explanation of endogenous activity of planets and satellites and its cyclicity. *Izvestiya Sektsii nauk o Zemle Rossiiskoi akademii estestvennykh nauk = Proceedings of the Earth Sciences Section of the Russian Academy of Natural Sciences*. 2002;9:45–97. (In Russ.)
5. Belashev B. Z., Gor'kovets V. Ya. Ecological aspects of radon degassing. *Energiya. Tekhnika. Ekonomika. Ekologiya = Energy. Technologies. Economy. Ecology*. 2015;9:38–48. (In Russ.)
6. Bogomolov L. M. From the study of storm microseisms to the analysis of seismo-ionospheric effects. *Vestnik DVO RAN = Vestnik of the Far East Branch RAS*. 2011;6:27–33. (In Russ.)
7. Bokov V. N., Vorob'ev V. N. Seismic event predictions with the use of geophysical and atmospheric precursors. *Uchenye zapiski RGGMU = Proceedings of the Russian State Hydrometeorological University*. 2015;44:141–152. (In Russ.)
8. Visheratin K. N., Karmanov F. I. Practical methods for assessing spectral parameters. Obninsk: IATE; 2008. 60 p. (In Russ.)
9. Vladimirskii B. M., Konradov A. A. Space physics, geophysics and daily biological rhythms. *Uchenye zapiski Tavricheskogo natsional'nogo universiteta im. V. I. Vernadskogo = Scientific Notes of V. I. Vernadsky Crimean Federal University*. 2007;20(1):92–100. (In Russ.)
10. Goncharov M. A., Raznitsin Yu. N., Barkin Yu. V. Specific features of deformation of the continental and oceanic lithosphere as a result of the Earth core northern drift. *Geodinamika i tektonofizika = Geodynamics & Tectonophysics*. 2012;3(1):27–54. doi: 10.5800/GT-2012-3-1-0060 (In Russ.)
11. Dolgii K. A., Belashev B. Z. Hardware-software complex of seismic radon station. *Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental Research*. 2017;10: 206–211. (In Russ.)
12. Zelyk Ya. I., Stepanyan N. N., Andreeva O. A. Spectral methods for analyzing the rotation of solar structures. *Izv. Krym. Obs. = Proceedings of the Crimean Astrophysical Observatory*. 2007;103(1):56–69. (In Russ.)

## REFERENCES

1. Antonov Yu. V., Antonova I. Yu., Rybin A. K., Shchelochkov G. G. Modulation of variations in the vertical gradient of gravity and the electromagnetic field by natural oscillations of the Earth's. *Izv. vuzov. Geologiya i razvedka = Proceedings of*



13. Zueva I. A., Lebedev A. A. Seismic effect of industrial explosions of GOK Kostomuksha. *NSTU Vestnik = Vestnik of NSTU*. 2020;23(1):22–28. doi: 10.21443/1560-9278-2020-23-1-22-28 (In Russ.)
14. Kuptsov A. V., Larionov I. A., Shevtsov B. M. Features of geoacoustic emission during the preparation of the Kamchatka earthquake. *Vulkanologiya i seismologiya = Volcanology and Seismology*. 2005;5:45–49. (In Russ.)
15. Laboratory of X-Ray Astronomy of the Sun, LPI RAS. URL: [https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id\\_level=786](https://lebedev.ru/ru/main-structure/main-units/optics.html?id_level=786) (accessed: 11.04.2023). (In Russ.)
16. Maksimochkin V. I. Geomagnetic variations and the Earth's magnetosphere. Moscow: MSU; 2014. 115 p. (In Russ.)
17. Petrova L. N., Belyakov A. S., Nikolaev A. V. Acoustic emission and seismogravitational oscillations of the Earth as coupled components in the study of intrawedge dynamics. *Rossiisko-kitaiskii zhurnal «Issledovaniya po prognozu zemletryasenii» = Russian-Chinese Journal 'Research of Earthquake Prediction'*. 1996;5(2):211–223. (In Russ.)
18. Rybak O. O. Spectral structure of the isotopic composition of Antarctic ice core samples: Comparison of the Lomb–Scargle estimates and maximum entropy. *Izv. Vuzov. Severo-Kavkazskii region = Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region*. 2007;6:50–56. (In Russ.)
19. Rykunov L. N., Khavroshkin O. B., Tsyplakov V. V. The effect of modulation of the Earth's seismic noise 25 years later. Second note. *Nauka i tekhnologiya v Rossii = Science and Technologies in Russia*. 1998;358(1):16–19. (In Russ.)
20. Sergushin P. A. Magnetovariometer as a means of measuring magnetic fields. *Vestnik ITMO = Proceedings of ITMO*. 2006;6(5):173–175. (In Russ.)
21. Cerebrennikov M. G., Pervozvanskii A. A. Revealing hidden periodic sequences. Moscow: Fizmatgiz; 1965. 244 p. (In Russ.)
22. SRS-05 Seismic radon station. URL: <http://ntm.ru/products/133/7832> (accessed: 11.04.2023). (In Russ.)
23. Syvorotkin V. L. Ozone method for Earth hydrogen degassing study. *Elektronnoe nauchnoe izdanie Al'manakh Prostranstvo i vremya = Electronic Scientific Edition of e-Almanac 'Space and Time'*. 2013;4(1). (In Russ.)
24. Terebizh V. Yu. Time series analysis in astrophysics. Moscow: Nauka; 1992. 388 p. (In Russ.)
25. Sharov N. V. Petrozavodsk Geophysical Observatory. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2013;1:169–171. (In Russ.)
26. Shuleikin V. N. Radon transport to the near-surface soil and air layers. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* 2013;49:853–859. doi: 10.1134/S0001433813080069 (In Russ.)
27. Shuleikin V. N., Shchukin G. G. Studying the variations of atmospheric electric field in the areas of oil and gas fields. *Russ. Meteorol. Hydrol.* 2015;40: 85–91. doi: 10.3103/S106837391502003X (In Russ.)
28. Bogert B. P. An observation of free oscillations the Earth. *Journal of Geophysical Research*. 1961;66(2):643–646.
29. Burg J. P. The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra. *Geophysics*. 1972;37:275–276.
30. GURALP CMG-6TD Digital output broad band seismometer. URL: [https://dsys.ru/images/photos/pictures/Soft/Velositetr/PЭ\\_CMG\\_6TD.pdf](https://dsys.ru/images/photos/pictures/Soft/Velositetr/PЭ_CMG_6TD.pdf) (accessed: 11.04.2023).
31. Ionizing radiation: sources and biological effects. Presentation at the UN General Assembly. 1988. Vol. 1.
32. Maxwell S. C., Urbancic T. I. The role of passive micro seismic monitoring in the instrumental oil field. *The Leading Edge*. 2001;20(6):636–639.
33. Petrova L. N. Seismogravitational oscillation of the Earth from observation by spaced vertical pendulums in Eurasia. *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2002;38(4):325–336.
34. Scargle J. D. Studies in astronomical time series analysis. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*. 1982;263:835–853.

Поступила в редакцию / received: 11.04.2023; принята к публикации / accepted: 02.05.2023.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Белашев Борис Залманович**  
д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник  
e-mail: [belashev@krc.karelia.ru](mailto:belashev@krc.karelia.ru)

## CONTRIBUTOR:

**Belashev, Boris**  
Dr. Sci. (Tech.), Leading Researcher



УДК 81.32

## ПОИСК ПОЧТИ ПОХОЖИХ ТЕКСТОВ В ЛИНГВИСТИЧЕСКОМ КОРПУСЕ ВЕПКАР

Ф. Ю. Быков<sup>1</sup>, А. А. Крижановский<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики и информационных технологий, Петрозаводский государственный университет (пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

<sup>2</sup> *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910), \*andew.krizhanovsky@gmail.com*

При построении лингвистических корпусов разработчикам требуется очищать корпусы от текстовых дубликатов. В статье представлен небольшой обзор способов поиска почти похожих текстов в различных корпусах. Разработан алгоритм и программа поиска почти похожих текстов на основе подсчета числа общих биграмм. Проведены эксперименты на текстах Открытого корпуса вепского и карельского языков ВепКар. Из 100 найденных программой пар наиболее похожих текстов эксперт подтвердил около половины случаев сходства. С помощью рангового расстояния Кендалла подсчитано, какая из трех рассмотренных метрик сходства текстов упорядочивает пары похожих текстов наиболее близко к экспертному. Разработанная программа и в дальнейшем будет использоваться в корпусе текстов ВепКар.

**Ключевые слова:** корпусная лингвистика; почти похожие тексты; ранговая корреляция Кендалла

Для цитирования: Быков Ф. Ю., Крижановский А. А. Поиск почти похожих текстов в лингвистическом корпусе ВепКар // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 16–23. doi: 10.17076/mat1773

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### F. Yu. Bykov<sup>1</sup>, A. A. Krizhanovsky<sup>2\*</sup>. SEARCH FOR NEAR-DUPLICATE TEXTS IN THE LINGUISTIC CORPUS VEPKAR

<sup>1</sup> *Institute of Mathematics and Information Technologies, Petrozavodsk State University (33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

<sup>2</sup> *Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), \*andew.krizhanovsky@gmail.com*

Developers of linguistic corpora need to spot and eliminate text duplicates. An overview of approaches to searching for near-duplicate texts in various corpora is presented in this article. An algorithm and a program for searching for near-

duplicate texts (based on the number of common bigrams) have been developed. Experiments were carried out with texts from the Veps and Karelian Open Corpus VepKar. The program found 100 pairs of the most similar texts and offered them to an expert, who confirmed 42 cases to be duplicates. Three metrics of text similarity were considered. The metric that was the closest to the expert's output in its pairwise text alignments was identified using Kendall's rank distance. The newly developed program will be a useful tool for editors of the VepKar text corpus.

**Key words:** corpus linguistics; near-duplicate texts; Kendall rank correlation

**For citation:** Bykov F. Yu., Krizhanovsky A. A. Search for near-duplicate texts in the linguistic corpus VepKar. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2023;4:16–23. doi: 10.17076/mat1773

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Задачу поиска почти похожих текстов или нечетких дубликатов при сборе данных в Интернете для работы поисковых систем решают достаточно давно [2]. В работе [15] почти похожими (near-duplicate) считают такие тексты, которые разделяют (имеют) очень большую долю общего словаря, где словарь – это множество лемм документа. В работе [7, с. 55] тексты, имеющие общее содержание (например, плагиат, разные версии документа, аннотация), называют co-derived (буквально: *совместно или одновременно полученный из чего-либо*). Два текста являются co-derived, если (1) часть текста извлечена из другого текста или (2) оба текста содержат фрагмент третьего текста [7, с. 56].

Такая же задача поиска почти похожих текстов встает при отборе текстов на этапе создания лингвистического корпуса или в ходе его последующей очистки от дубликатов. Рассмотрим, как эта задача решалась при построении различных корпусов.

При обходе сайтов Интернета и автоматическом построении двух корпусов текстов на немецком и итальянском в 1 млрд слов авторы работы [6] полностью исключали из рассмотрения дубликаты, поскольку обычно они находились на одном сайте и содержали однотипные предупреждения, тексты лицензий и тому подобное. При постобработке экспериментально было решено выбирать из каждого текста 25 5-грамм, при этом тексты считались дубликатами, если у них совпадали хотя бы две последовательности из пяти слов [6]. В корпусе британского английского языка ukWaC похожими считались тексты, ес-

ли у них также совпадали хотя бы две из 25 последовательностей 5-грамм [10, с. 49].

Отметим, что  $n$ -граммы – непрерывные подпоследовательности из  $n$  элементов, идущие внахлест.  $N$ -граммы называют *шинглами*, когда элементами являются слова. Если подпоследовательность состоит из двух слов, то ее называют биграммой, если из трех, то – триграммой, и так далее.

В веб-корпусе чешского языка объемом в 2,7 млрд слов дубликаты искали и удаляли на уровне абзацев, а не текстов [16, с. 312]. При этом авторы корпуса мирились с тем, что тексты после такой обработки будут содержать пробелы, поскольку корпус можно было скачивать только со случайно перемешанными предложениями внутри одного текста, чтобы избежать лицензионных вопросов [16, с. 314]. Для ускорения обработки выполнялось сравнение не всех пар текстов, а сравнивали  $n$ -граммы документа со всеми уже добавленными в корпус текстами. Из текста извлекались 8-граммы (последовательности из 8 слов). Абзац считался дубликатом, если он содержал более 30% уже встреченных 8-грамм. После удаления дубликатов объем корпуса уменьшился на 20% [16, с. 312].

Для поиска дубликатов в веб-корпусе словенского языка, содержащем 1,2 млрд токенов, была использована программа Onion [14] с параметрами: уровень порога 0,5 и последовательности 5-грамм. Дубликаты текстов удалялись полностью. Дубликаты-абзацы были оставлены, но помечены, что позволило сохранить целостность текстов [9, с. 36].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наша задача заключается в том, чтобы найти почти похожие тексты в Откры-

том корпусе вепсского и карельского языков ВеКар ([dictorpus.krc.karelia.ru](http://dictorpus.krc.karelia.ru)). Описаны три особенности задачи.

Во-первых, относительно небольшой объем корпуса, а именно 1,5 млн слов. Поэтому неактуальны проблемы, связанные с недостатком памяти при поиске дубликатов. Однако размеры корпуса достаточно велики, чтобы искать почти похожие тексты вручную, для этого нужны программные средства.

Во-вторых, корпус создается не автоматически, как в примерах выше, а вручную. Из первых двух пунктов следует, что мы достаточно бережно относимся к текстам корпуса и не можем себе позволить удалять дубликаты без ручной проверки. Таким образом, нужно разработать алгоритм поиска почти похожих текстов, который будет выдавать кандидатов для последующей ручной работы эксперта.

В-третьих, авторы дают разрешение на включение своих текстов в корпус, поэтому тексты предоставляются пользователям сайта ВеКар полностью, что делает неприемлемым удаление дубликатов на уровне абзацев. То есть мы будем искать только нечеткие дубликаты текстов.

## ОБЗОР СПОСОБОВ ПОИСКА ПОЧТИ ПОХОЖИХ ТЕКСТОВ

На примере 65 млн последовательностей из 8 слов (8-грамм), извлеченных из статей «Лос-Анджелес таймс», было обнаружено, что только 908 тыс. 8-грамм повторяются хотя бы раз, то есть менее 1,4% от исходного числа  $n$ -грамм [14, с. 66].

Наблюдения такого рода изложили авторы алгоритма SPEX [7] в 2004 году. Вообще, в алгоритмах поиска дубликатов из связанной и непрерывной последовательности, которую представляет собой текст, выбирается несколько фрагментов, то есть  $n$ -грамм, – это и будет *отпечаток документа* (fingerprint). Общая гипотеза алгоритмов поиска дубликатов в том, что если тексты имеют достаточно большое число общих кусочков, то маловероятно, что эти тексты появились независимо друг от друга. Идея алгоритма SPEX в том, чтобы при построении отпечатка выбирать в документе только те  $n$ -граммы, которые встречаются два и более раз [7]. То есть нет смысла для поиска похожих документов брать уникальные  $n$ -граммы, которые больше не встречаются в коллекции документов.

Недостатком алгоритма SPEX является то, что для больших корпусов, включающих более 10 млрд слов, требования к памяти становятся запредельными [14, с. 68]. В этом слу-

чае альтернативой является алгоритм поиска дубликатов с суффиксным массивом, где размер требуемой памяти является константой и не зависит от размера корпуса [14, с. 66].

В работе А. В. Крюковой [3] рассматривается поиск почти похожих текстов с помощью того же вычисления близости на основе  $n$ -грамм (Word N-Gram Containment Measure и Word N-Gram Jaccard Measure) и с помощью строковых метрик: расстояние Левенштейна, Greedy String Tiling, самая длинная общая подстрока, косинусный коэффициент [3]. В ходе ее экспериментов на небольшом корпусе русских текстов лучший результат показали метрики N-Gram Containment Measure и косинусный коэффициент [3].

- *N-Gram Containment Measure*. Обратим внимание, что эта мера, использованная в работе А. В. Крюковой [3], была взята из работы [8], в которой эта мера называется *containment*, см. далее формулу (2).
- *Косинусный коэффициент*. При переводе документов в векторное пространство (vector space model) документу соответствует вектор. Каждый элемент вектора соответствует словарному слову. Если это слово встречается в тексте, то значение элемента в векторе равно весу этого термина в тексте, вычисленному, например, по схеме TF-IDF. Таким образом, *косинусный коэффициент* сходства двух документов  $A$  и  $B$  вычисляется как косинусный коэффициент между их векторными представлениями  $\vec{V}(A)$  и  $\vec{V}(B)$  [12, с. 121]:

$$\text{sim}(A, B) = \frac{\vec{V}(A) \cdot \vec{V}(B)}{|\vec{V}(A)| |\vec{V}(B)|}.$$

Таким образом, один из лучших результатов показала метрика сходства *containment* [3]. Эта метрика предложена в работе [8], в которой рассматриваются две метрики сравнения текстов на основе  $n$ -грамм: *containment* и *resemblance* (дословный перевод: «содержание» и «сходство»). Обе метрики дают значение от 0 до 1, чем ближе к 1, тем больше общих  $n$ -грамм есть в текстах  $A$  и  $B$ , тем более тексты похожи.

Для вычисления метрик *containment* и *resemblance* нужно разбить каждый из сравниваемых текстов на токены. Затем нужно построить  $n$ -граммы из соседних слов. Таким образом, обработанному тексту  $A$  будет соответствовать множество  $n$ -грамм  $S(A, \omega)$ , где  $\omega$  – размер  $n$ -грамм.

Метрика *resemblance* сходства текстов  $A$  и  $B$  вычисляется по формуле [8, с. 23]:

$$resemblance(A, B) = \frac{|S(A, \omega) \cap S(B, \omega)|}{|S(A, \omega) \cup S(B, \omega)|}. \quad (1)$$

Метрика *containment* – содержание текста  $A$  в тексте  $B$  вычисляется по формуле [8, с. 23]:

$$containment(A, B) = \frac{|S(A, \omega) \cap S(B, \omega)|}{|S(A, \omega)|}. \quad (2)$$

От перестановки параметров значение метрики *containment* может измениться из-за знаменателя, так как тексты могут быть разной длины. Метрикой  $containment_1$  будем называть содержание текста  $A$  в тексте  $B$ , т. е.  $containment_1 = containment(A, B)$ , а метрикой  $containment_2$  – содержание текста  $B$  в  $A$ .

### АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА ПОИСКА ПОЧТИ ПОХОЖИХ ТЕКСТОВ

Для поиска почти похожих текстов был разработан Алгоритм, вычисляющий метрики *containment* и *resemblance* на множестве текстов.

Алгоритм реализован в программе *Texiclast*, написанной на языке PHP<sup>1</sup>. Программа *Texiclast* извлекает тексты из базы данных корпуса ВепКар. Тексты приводятся к нижнему регистру, разбиваются на токены. По токенам с помощью библиотеки *php-text-analysis*<sup>2</sup> генерируются биграмы, то есть пары соседних слов (см. строки 6–7 Алгоритма).

Метрики *containment* и *resemblance* для текстов  $T_i$  и  $T_j$  вычисляются по формулам (1) и (2) в строках 8–12. Полученные значения сохраняются в строке 13.

**Алгоритм.** Вычисление метрик ( $containment_1$ ,  $containment_2$  и *resemblance*) сходства текстов с помощью  $n$ -грамм

```

1 Input: texts T.
2 Output: array R: (TA, TB,
3     similarity metrics).
4 for i ← 0; i++; i < |T| do
5     for j ← i+1; j++; j < |T| do
6         Bi ← bigrams(Ti)
7         Bj ← bigrams(Tj)
8         I ← |Bi ∩ Bj|
9         U ← |Bi ∪ Bj|
10        cont1 ← I/|Bi|
11        cont2 ← I/|Bj|
12        resemblance ← I/U
13        R ← (TA, TB, cont1, cont2, resemblance)

```

<sup>1</sup>Исходный код программы сравнения текстов *Texiclast* доступен онлайн: <https://github.com/saimur420/Search-for-similar-texts-in-the-linguistic-corpus>.

<sup>2</sup>Библиотека PHP Text Analysis: <https://github.com/yooper/php-text-analysis>.

### ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ПОИСКУ ПОХОЖИХ ТЕКСТОВ В КОРПУСЕ ВЕПКАР

Тексты корпуса ВепКар хранятся в базе данных, содержащей 4178 текстов на вепском и карельском языках с тремя наречиями (собственно карельским, ливвиковским и людииковским). Найдем дубликаты для текстов на собственно карельском наречии.

При помощи SQL запроса “SELECT \* FROM ‘texts‘ WHERE lang\_id = 4;” было найдено 1180 текстов на собственно карельском наречии. Поле *lang\_id* содержит идентификатор языка, собственно карельское наречие имеет номер 4. Результаты вычислений метрик  $containment_1$ ,  $containment_2$  и *resemblance* для текстов на собственно карельском наречии представлены в таблице на рис. 1, строки упорядочены по убыванию значений метрики  $containment_1$ .

Для сравнения метрик были выбраны первые наиболее похожие 100 пар текстов, отсортированные по значению метрики  $containment_1$  (см. полную таблицу [1]). Тексты, значение метрик у которых равно 1, полностью идентичны. Возьмем два текста, у которых значение метрики максимально большое, но меньше 1, то есть тексты различаются. Например, сравним тексты с идентификаторами 1652 и 2116. Программа *WinMerge* показывает (рис. 2), что различие заключается в одном символе: скорее всего, это опечатка.

Программа *WinMerge* позволяет сравнивать и объединять как отдельные файлы, так и целые папки с файлами. Программа показывает построчное сравнение двух файлов. Если строки частично совпадают, то программа *WinMerge* показывает посимвольное сравнение. Важным достоинством программы является визуализация сходства и различия в текстах, развитая система быстрых клавиш (Keyboard shortcut).

*WinMerge* – это настолько старый и тщательно разрабатываемый проект в мире открытого программного обеспечения, что тексты программы *WinMerge* использовались при анализе связности кода [13], при изучении эволюции внутреннего словаря программистов, отражающегося в именах переменных и комментариях [5], в задаче поиска и визуализации концептов в исходном коде программы [17].



id текста 1	id текста 2	Метрики			Кол-во совпавших n-грам	Дубликат?
		Containment 1	Containment 2	Resemblance		
3495	3090	1	1	1	1614	да
1649	2113	1	1	1	1106	да
2966	3136	1	1	1	1101	да
2963	3044	1	1	1	856	да
1659	2123	1	1	1	158	да
3482	3038	1	1	1	85	да
3501	3150	1	1	1	59	да
3480	3036	1	1	1	43	да
1652	2116	0,9974	0,9974	0,9948	772	да
2118	1654	0,9973	0,9973	0,9946	1480	да
3082	3127	0,9960	0,9973	0,9933	739	да
1650	2114	0,9941	0,9926	0,9868	673	да
2641	2377	0,9933	0,9933	0,9868	298	да
3489	3067	0,9920	0,9920	0,9841	247	да
1644	2109	0,9919	0,9880	0,9801	246	да
3502	3141	0,9873	0,9873	0,9749	311	да
4042	4043	0,9866	0,9866	0,9735	147	да
3481	3037	0,9826	0,9826	0,9658	113	да
3494	3089	0,9821	0,9821	0,9649	440	да
3498	3152	0,9809	0,9809	0,9625	308	да
3497	3134	0,9776	0,9817	0,9601	697	да
3490	3070	0,9766	0,9785	0,9561	501	да
3483	3039	0,9701	0,9848	0,9559	130	да
3499	3153	0,9661	0,9661	0,9344	1966	да
3503	3138	0,9648	0,9691	0,9360	439	да
2087	2603	0,9622	0,9770	0,9409	1273	да
1058	1205	0,9606	0,9442	0,9090	609	да
1076	1233	0,9592	0,9673	0,9291	799	да
3479	3024	0,9585	0,9585	0,9204	185	да
1090	1169	0,9551	0,9635	0,9218	766	да
3496	3103	0,9495	0,9543	0,9082	376	да
3488	3063	0,9432	0,9396	0,8893	249	да
2338	3183	0,9381	0,9164	0,8641	318	да
1730	1748	0,9305	0,9457	0,8832	174	да
3477	3015	0,9179	0,9179	0,8483	179	да
1658	2122	0,8736	0,9636	0,8457	159	да
1924	1980	0,7430	0,8362	0,6486	240	нет

Рис. 1. Степень сходства текстов, вычисленная с помощью метрик  $containment_1$ ,  $containment_2$  и  $resemblance$ , экспертная оценка наличия текстов-дубликатов (см. полную таблицу [1])  
 Fig. 1. Degree of texts similarity, calculated using the metrics  $containment_1$ ,  $containment_2$  and  $resemblance$ , expert assessment of duplicate texts presence (see full table in [1])

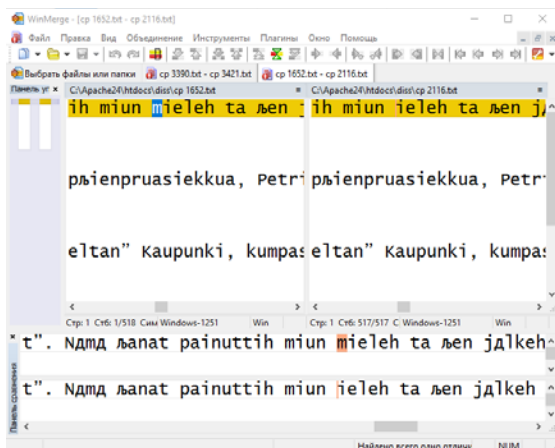


Рис. 2. Сравнение текстов 1652 и 2116 в программе WinMerge  
 Fig. 2. Comparison of texts 1652 and 2116 in the WinMerge program

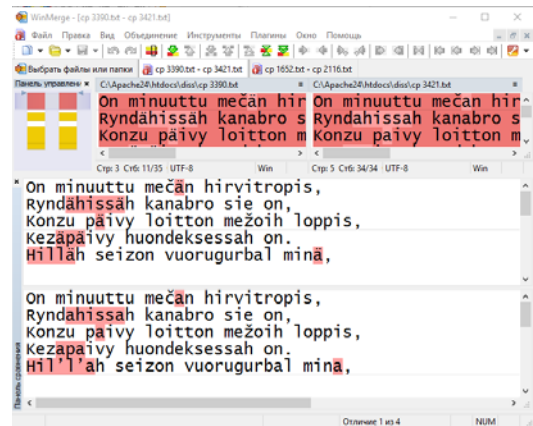


Рис. 3. Сравнение текстов ВепКар на карельском языке с идентификаторами 3390 и 3421 в программе WinMerge

Fig. 3. Comparison of VepCar texts in Karelian with identifiers 3390 and 3421 in the WinMerge program

Сравним еще одну пару текстов с идентификаторами 3390 и 3421 с меньшей степенью сходства ( $resemblance = 0,474$ ). В этих текстах есть различие в написании букв «а» и «ä», но видно, что это один и тот же текст (рис. 3).

### ЭКСПЕРТНАЯ ОЦЕНКА ДУБЛИКАТОВ ТЕКСТА

Для оценки полученных результатов были выбраны результаты сравнения 100 пар текстов с наибольшим значением метрики  $containment_1$ . Для удобства работы экспертов была создана таблица со ссылками на тексты в корпусе ВепКар и полями для заполнения (рис. 1). Эксперт вручную проверил найденные пары текстов и отметил дубликаты и почти похожие тексты с указанием, какой текст удалить, а какой оставить. Из 100 предложенных пар, найденных программой, эксперт нашел 42 дубликата.

Последние несколько пар текстов, например тексты 3900<sup>3</sup> и 3647<sup>4</sup> (не попали на рис. 1), – это фрагменты Евангелия от Марка и от Матфея. Это разные тексты, но они описывают один и тот же случай. Поскольку в них используются похожие фразы, то метрика  $containment$  показала достаточно высокое значение сходства этих текстов (0,4249).

Такой неожиданный результат нахождения сходства разных текстов Библии подсказывает, что разработанную программу Texiclast можно использовать для того, чтобы кластеризовать тексты ВепКар и выявить близкие по смыслу группы текстов в корпусе.

<sup>3</sup>См. <http://dictorpus.krc.karelia.ru/en/corpus/text/3900>.

<sup>4</sup>См. <http://dictorpus.krc.karelia.ru/en/corpus/text/3647>.

## РАНГОВОЕ РАССТОЯНИЕ КЕНДАЛЛА

Ранговый коэффициент корреляции Кендалла (а также  $\tau$ -расстояние Кендалла или ранговое расстояние Кендалла) оценивает степень сходства между двумя упорядоченными наборами данных. Этот коэффициент зависит от числа таких перестановок пар объектов, которые одну последовательность (упорядоченное множество, далее кратко: *упорядочение*) преобразуют в другую [4, с. 1].

Одна из интерпретаций  $\tau$ -расстояния Кендалла – это вероятность наблюдения согласованных пар (concordant,  $n_c$  – число пар) и несогласованных пар (discordant,  $n_d$  – число пар) переменных [11, с. 473]. Две переменные являются согласованными, если их порядок в двух упорядочениях сохраняется. Другими словами,  $\tau$ -расстояние Кендалла показывает долю согласованностей и противоречий между двумя наборами упорядоченных данных:

$$\tau = \frac{(N \text{ согл. пар}) - (N \text{ несогл. пар})}{(N \text{ пар})} \quad (3)$$

$$= \frac{n_c - n_d}{\binom{n}{2}}, \text{ где } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

т. е.  $\binom{n}{2}$  – количество сочетаний из  $n$  по 2, число всевозможных пар из множества размера  $n$ .

В работе [11] исследуется вопрос, насколько коррелирует ранговое расстояние Кендалла с оценками людей в задачах упорядочения информации. Применение ранговой корреляции подходит для того случая, когда есть экспертное (идеальное) упорядочение и есть упорядочения, полученные с помощью программы, которые нужно оценить [11, с. 473]. В нашем случае для 100 пар текстов есть ответ эксперта (столбец «Дубликат» на рис. 1) и значения трех метрик.

Чтобы выяснить, какая из рассмотренных метрик лучше подходит для поиска дубликатов, подсчитаем ранговую корреляцию Кендалла между значениями метрик сходства и ответами эксперта и сравним результаты. Получили, что  $\tau$ -расстояние Кендалла от метрик  $containment_1$ ,  $containment_2$  и  $resemblance$  до ответов эксперта равно 0,427, 0,423 и 0,438 соответственно. При  $n = 92$  (число рассматриваемых пар текстов)<sup>5</sup> значение стандартизованной оценки (z-value) для корреляции Кендалла, вычисляемое по формуле

$$z\text{-value} = \frac{3(n_c - n_d)}{\sqrt{n(n-1)(2n+5)/2}},$$

<sup>5</sup>Рассматривает не 100, а 92 пары текстов, поскольку первые 8 пар текстов обладают полным сходством, см. рис. 1.

получилось соответственно 6,02, 5,97 и 6,18 с уровнем значимости  $p < 0,01$ .

Поясним с помощью рис. 4, что для каждой из трех метрик была получена последовательность пар текстов, упорядоченная по значению метрики. То есть на рис. 4 в первом столбце номера значений всегда упорядочены (от максимального значения сходства в первой строке), а вот оценки экспертов будут упорядочены по-разному. Мы подсчитали число согласованных ( $n_c$ ) и несогласованных ( $n_d$ ) пар этого упорядочения относительно ответов эксперта. Затем вычислили  $\tau$ -расстояние Кендалла по формуле (3). Из этой формулы и рис. 4 видно, что для полного соответствия ( $\tau = 1$ ) требуется такое упорядочение значений метрики  $containment_1$ , чтобы сначала (сверху) в столбце оценки эксперта шли только единицы, затем – только нули.

Containment 1	Эксперт	Concordant	Discordant
1	1	4	0
2	1	4	0
3	1	4	0
4	0	0	3
5	1	3	0
6	0	0	2
7	0	0	2
8	1	1	0
9	0	0	1
10	1	0	0

Рис. 4. Пример подготовки данных для вычисления  $\tau$ -расстояния Кендалла между упорядочением пар текстов по значению метрики  $containment$  и экспертным значением сходства, где Concordant – это число согласованных пар, Discordant – число несогласованных пар

Fig. 4. An example of preparing data for calculating Kendall's  $\tau$  coefficient between the ordering of texts pairs by the value of the  $containment$  metric and the expert similarity value, where Concordant is the number of matched pairs, Discordant – the number of mismatched pairs

На практике эксперт может вручную проверить не все, а ограниченное количество пар текстов. Поэтому, возвращаясь к формулировкам  $\tau$ -расстояния Кендалла, данным в начале главы, определим его так: ранговое расстояние Кендалла (при сравнении с упорядоче-

нием эксперта) позволяет оценить, насколько близко к началу списка будут находиться интересные нас объекты – в нашем случае это пары наиболее похожих документов.

Таким образом, любая из трех рассмотренных метрик подходит для поиска почти похожих текстов, но  $\tau$ -расстояние Кендалла показало несколько лучший результат для метрики *resemblance*.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена актуальная задача поиска почти похожих текстов. Разработан алгоритм поиска почти похожих текстов на основе подсчета числа общих биграмм.

Проведен эксперимент на 1180 текстах на собственно карельском наречии из Открытого корпуса вепсского и карельского языков. Были найдены тексты с высокой степенью сходства. Из 100 найденных программой пар наиболее похожих текстов эксперт подтвердил около половины случаев сходства.

С помощью рангового расстояния Кендалла подсчитано, какая из трех рассмотренных метрик сходства текстов упорядочивает пары похожих текстов наиболее близко к экспертному.

Надеемся, что разработанная программа и в дальнейшем будет использоваться в корпусе текстов ВепКар.

*Выражаем благодарность старшему научному сотруднику ИЯЛИ КарНЦ РАН, кандидату филологических наук Ирине Петровне Новак за выполнение экспертной оценки найденных пар текстов на карельском языке.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Быков Ф. Ю. Почти похожие тексты в ВепКар 2023 // Figshare. doi: 10.6084/m9.figshare.22134422.v1
2. Зеленков Ю. Г., Сегалович И. В. Сравнительный анализ методов определения нечетких дубликатов для Web-документов // Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции: Труды 9-й Всероссийской научной конференции, RCDL'2007. Переславль-Залесский, 2007. С. 166–174.
3. Крюкова А. В. Определение семантической близости текстов с использованием инструмента DKPro Similarity // Компьютерная лингвистика и вычислительные онтологии. Вып. 1. СПб: ИТМО, 2017. С. 87–97. doi: 10.17586/2541-9781-2017-1-87-97
4. Abdi H. The Kendall rank correlation coefficient // Encyclopedia of Measurement and Statistics. CA. 2007. P. 508–510.

5. Abebe S. L., Haiduc S., Marcus A., Tonella P., Antoniol G. Analyzing the evolution of the source code vocabulary // 13th European Conference on Software Maintenance and Reengineering. 2009. P. 189–198. doi: 10.1109/CSMR.2009.61

6. Baroni M., Kilgarriff A. Large linguistically-processed web corpora for multiple languages // EACL'06: Proceedings of the Eleventh Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics. Trento, Italy, 2006. P. 87–90. doi: 10.3115/1608974.1608976

7. Bernstein Y., Zobel J. A scalable system for identifying co-derivative documents // String Processing and Information Retrieval Symp. Springer, 2004. P. 55–67.

8. Broder A. Z. On the resemblance and containment of documents // Proceedings of the Compression and Complexity of Sequences. June 1977. P. 21–29. doi: 10.1109/SEQUEN.1997.666900

9. Erjavec T., Ljubešić N., Logar N. The slWaC corpus of the Slovene Web // Informatica. 2015. Vol. 39, no. 1. P. 35–42.

10. Ferraresi A., Zanchetta E., Baroni M., Bernardini S. Introducing and evaluating ukWaC, a very large web-derived corpus of English // Proceedings of the 4th Web as Corpus Workshop (WAC-4) Can we beat Google. 2008. P. 47–54.

11. Lapata M. Automatic evaluation of information ordering: Kendall's tau // Computat. Linguist. 2006. Vol. 32, iss. 4. P. 471–484.

12. Manning C. D., Raghavan P. Schütze H. An introduction to information retrieval. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. URL: <https://nlp.stanford.edu/IR-book> (дата обращения: 27.05.2023).

13. Marcus A., Poshyvanyk D. The conceptual cohesion of classes // 21st IEEE International Conference on Software Maintenance. 2005. P. 133–142.

14. Pomikalek J. Removing boilerplate and duplicate content from Web Corpora: PhD thesis. Masaryk University, Faculty of Informatics. Brno, 2011.

15. Potthast M., Stein B. New issues in near-duplicate detection // Data Analysis, Machine Learning and Applications. Springer, 2008. P. 601–609.

16. Spoustová J., Spousta M. A High-quality Web corpus of Czech // Proceedings of the Eighth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'12). 2012. P. 311–315.

17. Xie X., Poshyvanyk D., Marcus A. Support for static concept location with sv3D // 3rd IEEE International Workshop on Visualizing Software for Understanding and Analysis. 2005. P. 1–6.

## REFERENCES

1. Bykov F. Yu. Near-duplicate texts in VepKar 2023. Figshare. doi: 10.6084/m9.figshare.22134422.v1 (In Russ.)



2. Zelenkov Yu. G., Segalovich I. V. Comparative analysis of near-duplicate detection methods of Web documents. *Digital libraries: advanced methods and technologies, digital collections, RCDL 2007*. Pereslavl-Zalessky; 2007. P. 166–174. (In Russ.)

3. Kriukova A. V. Computing semantic similarity of russian texts by means of DKPro Similarity tool. *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proceedings of the Annual conference 'Dialogue'*. Iss. 1. St. Petersburg; 2017. P. 87–97. doi: 10.17586/2541-9781-2017-1-87-97 (In Russ.)

4. Abdi H. The Kendall rank correlation coefficient. *Encyclopedia of Measurement and Statistics*. Sage, Thousand Oaks, CA. 2007. P. 508–510.

5. Abebe S. L., Haiduc S., Marcus A., Tonella P., Antoniol G. Analyzing the evolution of the source code vocabulary. *13th European Conference on Software Maintenance and Reengineering*. 2009. P. 189–198. doi: 10.1109/CSMR.2009.61

6. Baroni M., Kilgarriff A. Large linguistically-processed web corpora for multiple languages. In *EACL'06: Proceedings of the Eleventh Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics*. Trento, Italy; 2006. P. 87–90. doi: 10.3115/1608974.1608976

7. Bernstein Y., Zobel J. A scalable system for identifying co-derivative documents. *String Processing and Information Retrieval Symp.* Springer; 2004. P. 55–67.

8. Broder A. Z. On the resemblance and containment of documents. *Proceedings of the Compression and Complexity of Sequences*. June 1997. P. 21–29. doi: 10.1109/SEQUEN.1997.666900

9. Erjavec T., Ljubešić N., Logar N. The slWaC corpus of the Slovene Web. *Informatica*. 2015;39(1):35–42.

10. Ferraresi A., Zanchetta E., Baroni M., Bernardini S. Introducing and evaluating ukWaC, a very large web-derived corpus of English. *Proceedings of the 4th Web as Corpus Workshop (WAC-4) Can we beat Google*. 2008. P. 47–54.

11. Lapata M. Automatic evaluation of information ordering: Kendall's tau. *Computat. Linguist.* 2006;32(4):471–484.

12. Manning C. D., Raghavan P. Schütze H. An introduction to information retrieval. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2009. URL: <https://nlp.stanford.edu/IR-book> (accessed: 27.05.2023).

13. Marcus A., Poshyvanyk D. The conceptual cohesion of classes. *21st IEEE International Conference on Software Maintenance*. 2005. P. 133–142.

14. Pomikalek J. Removing boilerplate and duplicate content from Web Corpora: PhD thesis. Masaryk University, Faculty of Informatics. Brno; 2011.

15. Potthast M., Stein B. New issues in near-duplicate detection. *Data Analysis, Machine Learning and Applications*. Springer; 2008. P. 601–609.

16. Spoustová J., Spousta M. A High-quality Web Corpus of Czech. *Proceedings of the Eighth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC)*. 2012. P. 311–315.

17. Xie X., Poshyvanyk D., Marcus A. Support for static concept location with sv3D. *3rd IEEE International Workshop on Visualizing Software for Understanding and Analysis*. 2005. P. 1–6.

Поступила в редакцию / received: 30.04.2023; принята к публикации / accepted: 29.05.2023.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Быков Федор Юрьевич**  
студент

*e-mail: saimur2@gmail.com*

**Крижановский Андрей Анатольевич**  
канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник

*e-mail: andrew.krizhanovsky@gmail.com*

## CONTRIBUTORS:

**Bykov, Fedor**  
Student

**Krizhanovsky, Andrew**  
Cand. Sci. (Tech.), Leading Researcher

УДК 519.654 : 630\*114.16

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СУТОЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ КОРНЕОБИТАЕМОГО СЛОЯ ЛЕСНЫХ ПЕСЧАНЫХ ПОЧВ

К. В. Грудова

*Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

В контексте проблемы анализа антропогенного воздействия углекислого газа на окружающую среду возникает потребность в исследовании динамики почвенного углерода. Тепловые параметры (теплоемкость, теплопроводность и температуропроводность) играют существенную роль в процессах переноса и продуцирования  $CO_2$ . С учетом зависимости этих процессов от текстуры почвы и других различных факторов актуальной является задача математического описания теплового режима почв для конкретной местности. Существует множество оценок коэффициента температуропроводности, каждая из которых не является универсальной. В данной работе методом наименьших квадратов проводится оценка коэффициента затухания температурной волны (температуропроводности) для лесных песчаных почв Восточной Финляндии в предположении однородности среды. Также предлагается метод оценки амплитуды дневного колебания температурной волны и даются практические рекомендации по проведению измерений.

**Ключевые слова:** тепловой режим почвы; температуропроводность; метод наименьших квадратов

Для цитирования: Грудова К. В. Моделирование суточных колебаний температуры корнеобитаемого слоя лесных песчаных почв // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 24–30. doi: 10.17076/mat1775

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН).

### **K. V. Grudova. MODELING OF DAILY TEMPERATURE FLUCTUATIONS IN THE ROOT LAYER OF SANDY FOREST SOILS**

*Department for Multidisciplinary Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The problem of analyzing the impact of anthropogenic carbon dioxide on the environment necessitates the study of the soil carbon dynamics. Thermal parameters (heat capacity, thermal conductivity, and thermal diffusivity) play an essential role in the processes of  $CO_2$  transfer and production. Considering that these processes

depend on the soil texture and other various factors, mathematical description of the thermal regime of soils in a specific area is a relevant task. There are many ways to estimate the thermal diffusivity coefficient, none of which is universal. In this paper, the least squares method is used to estimate the temperature wave attenuation coefficient (thermal diffusivity) for sandy forest soils of Eastern Fennoscandia, under the assumption that the medium is uniform. Also, a method for estimating the amplitude of daily temperature wave fluctuations is proposed and practical recommendations for the measurements are given.

**Key words:** soil thermal regime; thermal diffusivity; least squares method

**For citation:** Grudova K. V. Modeling of daily temperature fluctuations in the root layer of sandy forest soils. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2023;4:24–30. doi: 10.17076/mat1775

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Department for Multidisciplinary Research, Karelian Research Centre RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Мониторинг динамики почвенного  $CO_2$  имеет важное значение для количественной оценки и моделирования глобального цикла углерода, который, в свою очередь, исследуется в контексте проблемы антропогенного воздействия на биосферу. Тепловые параметры грунта являются существенными факторами почвообразования и важны для расчета переноса и продуцирования  $CO_2$ . Существует большой объем экспериментальных данных, описывающих влияние температуры на динамику газовой фазы почв [1, с. 10] (температура влияет на гидрофизические характеристики, определяет скорости протекания внутрипочвенных реакций, активность почвенной биоты и др.). Под «тепловым режимом» понимаются процессы поступления, перераспределения и расхода тепла в почве и на ее границах. А под «температурным режимом» почвы – порождаемая этими процессами динамика температуры на поверхности и в почвенном профиле (различных слоях почвы) [6, с. 330].

Математическое моделирование и прогноз распределения температуры по профилю почвы нужен как для проведения фундаментальных исследований в области почвоведения, в частности в условиях глобального изменения климата [8, с. 70], так и в практической агрофизике [7, 9–12]. Кроме того, актуальной является задача построения алгоритмов, позволяющих получать количественные оценки тепловых параметров почв (теплоемкости, теплопроводности и температуропроводности), используя данные об их плотности, пористости, содержании органического вещества, влажности и др. Эти данные называются основными (базовыми) свойствами почв. Они извест-

ны для большинства случаев, так как при стандартных исследованиях определяются в первую очередь. Однако экспериментальные данные по теплоемкости, теплопроводности и температуропроводности имеют весьма разрозненный характер [1, с. 14–15]. Зависимость этих параметров от базовых свойств затрудняет их оценку.

Стоит отметить, что из-за многообразия почв и условий их жизненного цикла возникает необходимость более пристального внимания к математическому описанию теплового режима почв для конкретной местности. В данной работе автор использует следующие предположения: исследуется песчаная почва, покрытая лесной подстилкой, в погожий летний день в конце июля в сосновом лесу Восточной Фенноскандии. Колебания температуры затрагивают по существу лишь примерно полуметровый корнеобитаемый подповерхностный слой почвы, где из-за физико-химических процессов разложения органических веществ и жизнедеятельности микроорганизмов происходит в основном активное дыхание и продуцирование  $CO_2$ .

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания распространения температурных волн в почвенном профиле используется уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial(c_v T(t, z))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \cdot \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где  $T(t, z)$  ( $[T] = K$ ) – температура почвы в момент времени  $t$  на глубине  $z$  ( $[z] = m$ ),  $c_v$  – объемная теплоемкость ( $[c_v] = Дж \cdot м^{-3} \cdot K^{-1}$ ),  $\lambda$  – теплопроводность ( $[\lambda] = Вт \cdot м^{-1} \cdot K^{-1}$ ).

В [8, с. 78-80] рассматриваются различные зависимости  $c_v$ ,  $\lambda$  и их влияние на вид уравнения теплопроводности. Обычно предполагается, что почва является однородной средой, для которой характерно постоянство величин  $c_v$ ,  $\lambda$  [4, с. 166]. В этом случае вводится коэффициент температуропроводности  $\chi$  ( $[\chi] = \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ), связанный с  $c_v$  и  $\lambda$  соотношением  $\chi = \lambda/c_v$ , и уравнение (1) записывается в виде:

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2}, \quad (2)$$

где  $\chi$  является постоянной величиной. В данной работе остановимся на предположении однородности почвы.

Рассмотрим суточный ход температуры. Температура почвы обладает периодичным характером и колеблется в окрестности некоторого среднего значения.

Рассмотрим комплексную функцию

$$T = T_0 e^{i(\omega t - \alpha z)}, \quad (3)$$

где  $T_0$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  – постоянные. Подставим это выражение в уравнение (2) и после преобразований получим:

$$i\omega = -\alpha^2 \chi, \\ \alpha = \sqrt{-i\omega/\chi} = \pm(1 - i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Таким образом, выражение (3) примет вид:

$$T = T_0 e^{i(\omega t \mp \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z)} \cdot e^{\mp \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z}. \quad (4)$$

Это выражение содержит в себе два решения, которые отличаются знаком в показателе степени. Колебания температуры начинают возбуждаться на поверхности почвы и передаются внутрь ее. По мере удаления от поверхности среды они должны затухать. Множитель  $e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z}$  стремится к бесконечности при  $z \rightarrow \infty$ , что не соответствует условиям задачи. Таким образом, в выражении (4) оставляем знак минус. Далее от комплексного решения переходим к двум вещественным, воспользовавшись формулой Эйлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ :

$$\left( \frac{\partial T_1(t, z)}{\partial t} - \chi \cdot \frac{\partial^2 T_1(t, z)}{\partial z^2} \right) + i \left( \frac{\partial T_2(t, z)}{\partial t} - \chi \cdot \frac{\partial^2 T_2(t, z)}{\partial z^2} \right) \equiv 0, \\ T_1(t, z) \equiv T_0 \cdot \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z \right) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z}, \quad (5) \\ T_2(t, z) \equiv T_0 \cdot \sin \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z \right) \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} z}.$$

Решения  $T_{1,2}$  однотипны, остановимся на (5).

Применим этот результат к тепловым волнам, возбуждаемым в поверхностном слое почвы суточными и среднегодовыми колебаниями температуры. Для среднегодового колебания имеем следующее выражение:

$$T_y(t, z) = T_\infty + \Delta T_y \exp \{ -\alpha_y z \} \\ \times \cos \{ \omega_y t - \alpha_y z \}, \quad \alpha_y \equiv \sqrt{\omega_y [2\chi_y]^{-1}},$$

где индекс  $y$  означает «year»;  $T_\infty$  – установившееся значение температуры на глубине 3–4 метра;  $\Delta T_y$  – среднегодовая амплитуда колебания;  $\tau_y = 2\pi/\omega_y$  – период колебаний, равный году;  $\omega_y$  – соответствующая частота;  $\alpha_y$  – коэффициент затухания температурных волн ( $[\alpha_y] = \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ );  $\chi_y$  – коэффициент температуропроводности. Для ориентировки по порядку величин значения параметров приняты в соответствии с [3, с. 101]: период  $\tau_y \approx 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 3.15 \times 10^7 \text{с}$ , частота  $\omega_y \approx 2 \times 10^{-7}$ , коэффициент  $\chi_y \approx 2 \times 10^{-7} \text{м}^2/\text{с}$ .

Тепловая волна распространяется с задержкой по фазе. Максимальное значение температуры приповерхностного слоя почвы ( $z = 0$ ) достигается при  $t = 0$ . Таким образом, за начало отсчета времени условно принимаем границу июль-август. В текущей работе нас интересуют суточные колебания температуры, поэтому в соответствии с [2, с. 36-37], пренебрегая малой величиной  $\omega_y t$ , фиксируем «базовое распределение  $J = J_{uly}$ »:

$$T_J(z) = T_\infty + \Delta T_y \exp \{ -\alpha_y z \} \\ \times \cos \{ -\alpha_y z \}. \quad (6)$$

В дневном диапазоне принимаем аппроксимацию ( $d = \text{day}$ ):

$$T_d(t, z) = T_J(z) - \Delta T_d \exp \{ -\alpha_d z \} \\ \times \cos \{ \omega_d t - \alpha_d z \}, \quad (7)$$

где  $\Delta T_d$  – дневная амплитуда колебаний;  $\omega_d \approx 365 \cdot \omega_y$  и  $\alpha_d \approx 19 \cdot \alpha_y$ . Так как лесная подстилка оказывает демпфирующее влияние, амплитуда  $\Delta T_d$  будет невелика ( $\approx 2$  градуса).

За начальный момент времени в формуле (7) принимается начало нагрева почвы после ночного охлаждения (6 часов утра). Минимум приповерхностной ( $z = 0$ ) температуры достигается при  $t = 0$ .

Для нахождения амплитуды дневного колебания ( $\Delta T_d$ ) температуру измеряют начиная с некоторой глубины  $h > 0$ , а не с условной поверхности  $z = 0$ . Пусть на фиксированной глубине  $t_{max}$  – момент времени, при котором достигается максимальное значение температуры в течение дня;  $t_{min}$  – момент времени, при котором достигается минимальное

значение температуры в течение дня. Обратим внимание на формулу (7). При фиксированном значении  $z = h$  максимальное и минимальное значение температуры достигается при минимальном и максимальном значении  $\cos(\omega_d t - \alpha_d h)$  соответственно. Получаем следующее выражение для  $\Delta T_d$ :

$$\Delta T_d = \Delta T_{d,h} \exp \{ \alpha_d h \},$$

где  $\Delta T_{d,h} \equiv (T_d(t_{max}, h) - T_d(t_{min}, h))/2$  определяется по экспериментальным данным. Принятая аппроксимация температурной волны в суточном диапазоне времени преобразуется к следующему виду:

$$T_d(t, z) = T_J(z) - \Delta T_{d,h} \exp \{ \alpha_d (h - z) \} \times \cos \{ \omega_d t - \alpha_d z \}, \quad (8)$$

$$T_J(z) = T_\infty + \Delta T_y \exp \{ - \alpha_y z \} \times \cos \{ - \alpha_y z \}. \quad (9)$$

Лесные песчаные почвы характеризуются верхним относительно тонким ( $\approx 5-8$  см) слоем лесной подстилки, после которого идет корнеобитаемый слой ( $\approx 30$  см), переходящий в практически однородный песчаный «моноклит» до рассматриваемой глубины (1 м). Наиболее целесообразны измерения на глубинах примерно 5–30 см.

## ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ

На начальном этапе с помощью принятой аппроксимации (6)–(7) были сгенерированы «экспериментальные» данные ( $T_e$ ) для суток (с 06:00 до 06:00 следующих суток) с временным шагом равным часу (строки таблицы  $T_e$ )

на глубине 5, 10, 15 см (столбцы) со следующими значениями коэффициентов:  $\Delta T_d = 3$  К,  $T_\infty = 276$  К,  $\Delta T_y = 8$  К,  $\alpha_y = 1 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $\alpha_d = \alpha_y \times 19$ ,  $\omega_y = 2 \times 10^{-7}$ ,  $\omega_d = 365 \times \omega_y$ .

На следующем шаге, условно «забыв» коэффициент  $\alpha_y$ , аппроксимировали значения  $T_e$  с помощью формул (8)–(9), варьируя неизвестную теперь переменную  $\alpha_y$ .

Из таблицы  $T_e$  несколькими способами, описанными ниже, были получены различные выборки  $T_e^l$  ( $l$  – номер способа формирования выборки). Для каждого случая методом наименьших квадратов (МНК) оценивалось значение параметра  $\alpha_y$ , находилось  $\Delta \alpha = |\alpha_{y,e} - \alpha_y|$ , где  $\alpha_{y,e} = 1 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$  – «идеальное» значение коэффициента, и определялась среднеквадратичная относительная ошибка аппроксимации экспериментальных данных  $S$  по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \frac{T(t_i, z_j) - T_e^l(t_i, z_j)}{T_e^l(t_i, z_j)} \right)^2}{n \cdot m}}.$$

Полученные результаты сравнивались между собой с целью определения предпочтительных условий измерения температурных показателей почвы.

**Способ 1.** Из таблицы экспериментальных данных ( $T_e$ ) были выбраны пять строк, соответствующие моментам времени 06:00, 12:00, 18:00, 00:00 и 05:00. К каждой выборке был применен МНК. При этом взято значение глубины  $h$  для определения амплитуды дневного колебания равное 15 см. Результаты отображены на рис. 1, а ( $\Delta \alpha = 10^{-2} \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ). Стоит отметить: изменение  $h$  с 15 до 5 см не оказало влияния на  $\Delta \alpha$ , но уменьшило  $S$  (рис. 1, б).

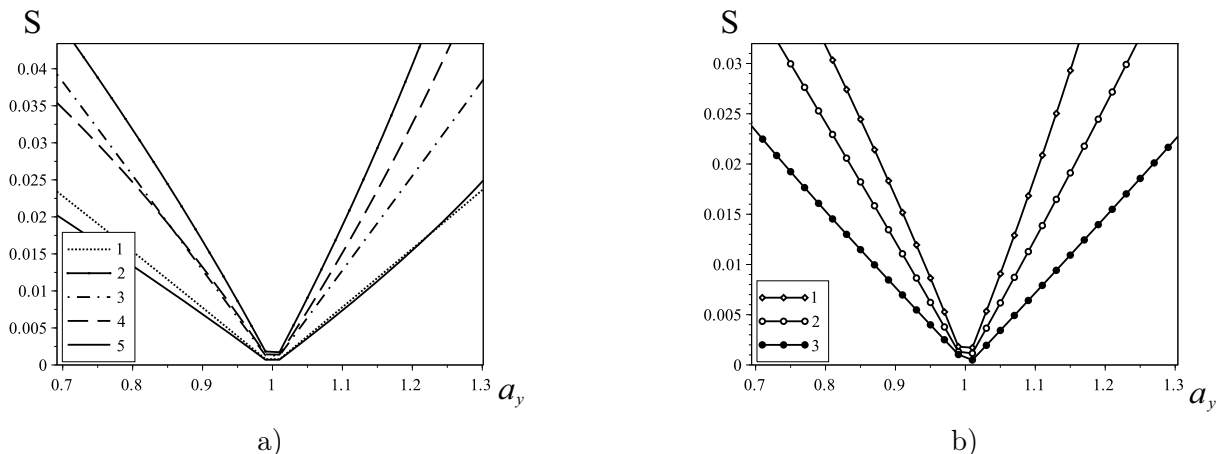


Рис. 1. МНК для выборок, полученных способом 1: (а.1) 6:00, (а.2) 12:00, (а.3) 18:00, (а.4) 00:00, (а.5) 5:00; (б.1) 12:00,  $h = 15$  см, (б.2) 12:00,  $h = 10$  см, (б.3) 12:00,  $h = 5$  см  
Fig. 1. LS for samples obtained by method 1: (a.1) 6:00, (a.2) 12:00, (a.3) 18:00, (a.4) 00:00, (a.5) 5:00; (b.1) 12:00,  $h = 15$  cm, (b.2) 12:00,  $h = 10$  cm, (b.3) 12:00,  $h = 5$  cm



**Способ 2.** В качестве выборок были взяты столбцы матрицы  $T_e$ , соответствующие глубинам  $z = 5$  см,  $z = 10$  см и  $z = 15$  см, к каждому из которых также был применен МНК. Результаты получились аналогичными предыдущим (см. рис. 2). Заметим, что для аппрок-

симации волны на глубине  $z = 15$  см варьирование  $h$  не оказывало значительного влияния на квадратичную ошибку аппроксимации ( $h \leq z$ ), в то время как на глубине  $z = 5$  см ( $h \geq z$ ) оказало существенное воздействие (см. рис. 2, b).

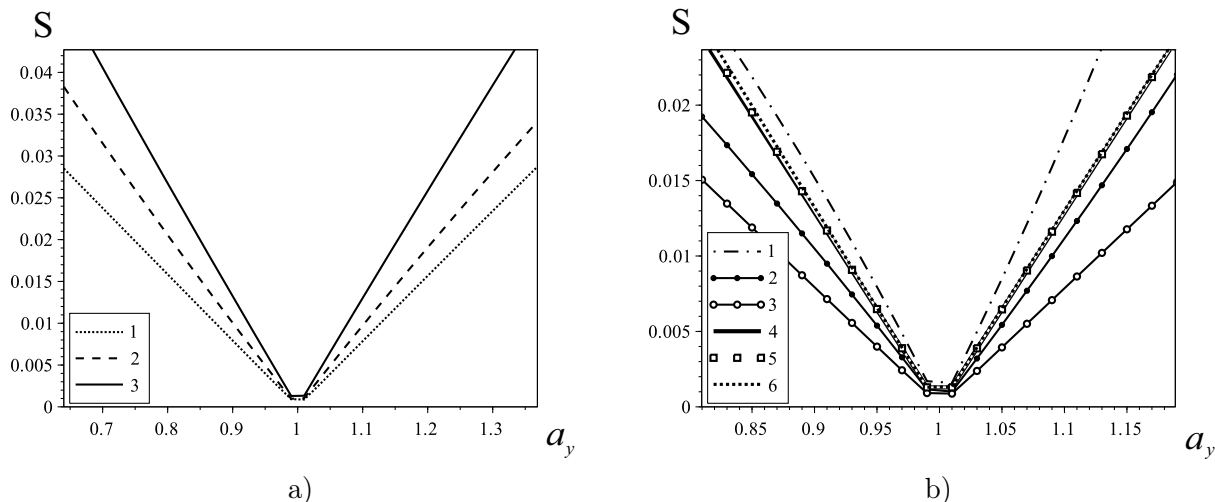


Рис. 2. МНК для выборок, полученных способом 2: (a.1)  $z = 5$  см,  $h = 15$  см; (a.2)  $z = 10$  см,  $h = 15$  см; (a.3)  $z = 15$  см,  $h = 15$  см; (b.1)  $z = 5$  см,  $h = 15$  см; (b.2)  $z = 5$  см,  $h = 10$  см; (b.3)  $z = 5$  см,  $h = 5$  см; (b.4)  $z = 15$  см,  $h = 15$  см; (b.5)  $z = 15$  см,  $h = 10$  см; (b.6)  $z = 15$  см,  $h = 5$  см

**Способы 3–5.** Пример схем третьих и четвертых способов генерации выборок из таблицы  $T_e$  дан на рис. 3 (закрашенные ячейки – элементы, вошедшие в выборку). В качестве последней исследуемой выборки взята вся таблица  $T_e$ .

ошибку  $S$  дает аппроксимация выборки, сформированной способом 1. Выборки, сформированные способами 3 и 4, дают похожие между собой результаты. Наибольшую ошибку дает 2-й способ генерации выборки.

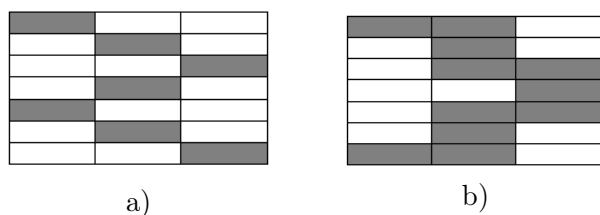


Рис. 3. Способ 3 (a) и 4 (b). Элементы, вошедшие в выборки

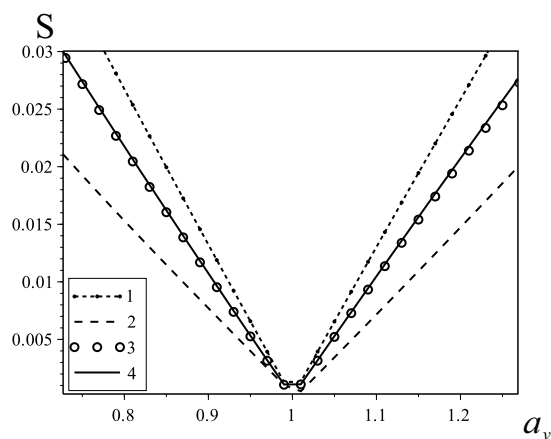


Рис. 4. МНК для различных выборок: (1) способ 2,  $z = 5$  см; (2) способ 1, время 12:00; (3) способ 3; (4) способ 4

Во всех предложенных случаях результаты работы МНК были аналогичны предыдущим ( $\Delta\alpha = 10^{-2} \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ).

Итоговое сравнение полученных результатов для выборок, сформированных всеми четырьмя способами, отображено на рис. 4 ( $h = 5$  см). На графиках видно, что наименьшую

## Проверка модели на полевых данных

Результаты предыдущего раздела подтверждают эффективность применения МНК в оценке коэффициента затухания температурной волны. Получим оценку  $\alpha_y$  для реальных температурных показателей, характерных для почв Карелии. Данные взяты из работы [5, с. 78]. Полевые наблюдения проводили на площадке, расположенной в центре вырубке, на расстоянии 30 м от стены леса. Температуру почвы измеряли в середине июля 2014 г. Для оценки взяты данные о суточном колебании температуры на глубине 5 см.

Так как в статье речь идет об открытой местности, находящейся под прямым воздействием солнечного тепла, то помимо параметра  $\alpha_y$  будет изменяться и среднее значение температуры на глубине ( $T_\infty$ ). Поэтому использовался МНК по отношению к двум параметрам: и к  $\alpha_y$ , и к  $T_\infty$ . Полученные результаты отображены на рис. 5.

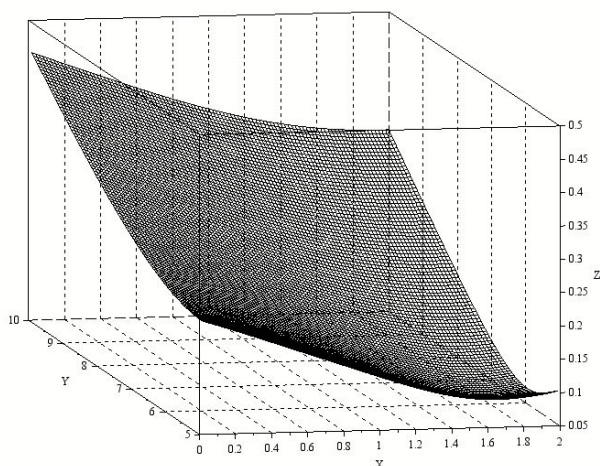


Рис. 5.  $S$  (ось  $Z$ ) для  $T_\infty \in [5, 10]$  °C (ось  $Y$ ) и  $\alpha_y \in [0, 2]$   $\text{m}^{-1} \cdot \text{c}^{-1}$  (ось  $X$ )  
Fig. 5.  $S$  ( $Z$  axis) for  $T_\infty \in [5, 10]$  °C ( $Y$  axis) and  $\alpha_y \in [0, 2]$   $\text{m}^{-1} \cdot \text{c}^{-1}$  ( $X$  axis)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельская Т. А. Температурный режим комплексного почвенного покрова. М.: ГЕОС, 2012. 282 с.
2. Заика Ю. В., Бахмет О. Н. Краевая задача переноса  $\text{CO}_2$  в лесных песчаных почвах // Труды Карельского научного центра РАН. 2020. № 7. С. 34–45. doi: 10.17076/mat1244
3. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 457 с.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. II. Термодинамика и мо-

лекулярная физика. 5-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005. 544 с.

Наименьшая среднеквадратичная ошибка была приблизительно равна  $6,89 \times 10^{-2}$  при значениях  $T_\infty = 5,85$  °C,  $\alpha_y = 1,75$   $\text{m}^{-1} \cdot \text{c}^{-1}$ . График аппроксимации с заданными параметрами представлен на рис. 6.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведена оценка коэффициента затухания температурных волн (температуропроводности) методом наименьших квадратов с учетом особенностей песчаных почв Восточной Финноскандии в предположении однородности почвы. Тепловые волны, аппроксимированные с помощью МНК, сравнивались с реальными температурными измерениями для подтверждения эффективности его применения. Предложен метод оценки амплитуды дневного колебания волны на основе полевых измерений. Определена оптимальная глубина измерений температуры почвы для предложенной оценки.

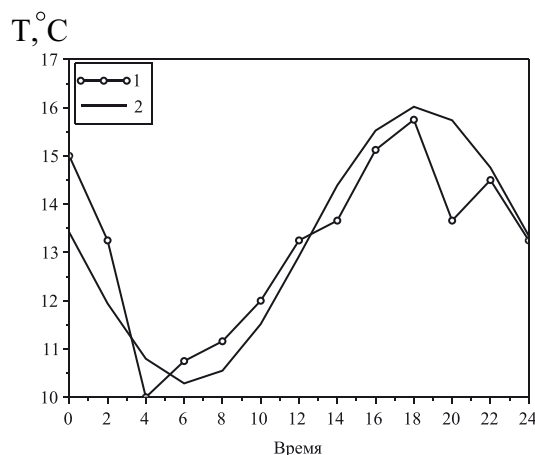


Рис. 6. Оценка реальных температурных показателей (1) МНК (2)  
Fig. 6. Real temperature indicators estimation (1) of the LS (2)

лекулярная физика. 5-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005. 544 с.

5. Тарасов П. А., Бакшеева Е. О., Иванов В. А. Исследование влияния мульчирования сплошной вырубке на температуру почвы // Вестник КрасГАУ. 2015. № 8. С. 75–80.
6. Шейн Е. В. Курс физики почв. М.: МГУ, 2005. 432 с.
7. Шейн Е. В., Болотов А. Г., Мазиров М. А., Мартынов А. И. Определение профильного распределения температуры почвы на основании температуры ее поверхности // Земледелие. 2018. № 7. С. 26–29. doi: 10.24411/0044-3913-2018-10707



8. *Glagolev M. V., Sabrekov A. F.* On a problems related to a concept of soil thermal diffusivity and estimation of its dependence on soil moisture // *Environmental Dynamics and Global Climate Change*. 2019. Vol. 10, iss. 2. P. 68–85. doi: 10.17816/edgcc21202

9. *Onwuka B. M.* Effects of soil temperature on some soil properties and plant growth // *Scholarly Journal of Agricultural Science*. 2016. Vol. 6, iss. 3. P. 89–93.

10. *Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Kleptsova I. E., Machida T., Maksyutov S. S.* Methane emission from mires of the West Siberian taiga // *Eur. Soil Sci.* 2013. Vol. 46. P. 1182–1193. doi: 10.1134/S1064229314010098

11. *Sierra C. A., Trumbore S. E., Davidson E. A., Vicca S., Janssens I.* Sensitivity of decomposition rates of soil organic matter with respect to simultaneous changes in temperature and moisture // *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2015. Vol. 7. P. 335–356. doi: 10.1002/2014MS000358

12. *Zhu X., Zhuang Q., Qin Z., Glagolev M., Song L.* Estimating wetland methane emissions from the northern high latitudes from 1990 to 2009 using artificial neural networks // *Global Biogeochem. Cycles*. 2013. Vol. 27. P. 592–604. doi: 10.1002/gbc.20052

## REFERENCES

1. *Arkhangel'skaya T. A.* Temperature regime of complex soil cover. Moscow: GEOC; 2012. 282 p. (In Russ.)

2. *Zaika Yu. V., Bakhmet O. N.* Boundary value problem of CO<sub>2</sub> transport in sandy forest soils. *Trudy Kareli'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2020;7:34–45. doi: 10.17076/mat1244 (In Russ.)

3. *Zommerfel'd A.* Differential equations in partial derivatives in physics. Moscow: IL; 1950. 457 p. (In Russ.)

4. *Sivukhin D. V.* The general physics course: A textbook. Vol. II. Thermodynamics and molecular physics. 5<sup>th</sup> ed., rev. Moscow: Fizmatlit; 2005. 544 p. (In Russ.)

5. *Tarasov P. A., Baksheeva E. O., Ivanov V. A.* Research of the clear cut mulching influence on the soil temperature. *Vestnik KrasGAU*. 2015;8:75–80. (In Russ.)

6. *Shein E. V.* A course of soil physics. Moscow: MSU; 2005. 432 p. (In Russ.)

7. *Shein E. V., Bolotov A. G., Mazirov M. A., Martinov A. I.* Determination of the profile distribution of soil temperature based on its surface temperature. *Agriculture*. 2018;7:26–29. doi: 10.24411/0044-3913-2018-10707 (In Russ.)

8. *Glagolev M. V., Sabrekov A. F.* On a problems related to a concept of soil thermal diffusivity and estimation of its dependence on soil moisture. *Environmental Dynamics and Global Climate Change*. 2019;10(2):68–85. doi: 10.17816/edgcc21202

9. *Onwuka B. M.* Effects of soil temperature on some soil properties and plant growth. *Scholarly Journal of Agricultural Science*. 2016;6(3):89–93.

10. *Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Kleptsova I. E., Machida T., Maksyutov S. S.* Methane emission from mires of the West Siberian taiga. *Eur. Soil Sci.* 2013;46:1182–1193. doi: 10.1134/S1064229314010098

11. *Sierra C. A., Trumbore S. E., Davidson E. A., Vicca S., Janssens I.* Sensitivity of decomposition rates of soil organic matter with respect to simultaneous changes in temperature and moisture. *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2015;7:335–356. doi: 10.1002/2014MS000358

12. *Zhu X., Zhuang Q., Qin Z., Glagolev M., Song L.* Estimating wetland methane emissions from the northern high latitudes from 1990 to 2009 using artificial neural networks. *Global Biogeochem. Cycles*. 2013;27:592–604. doi: 10.1002/gbc.20052

Поступила в редакцию / received: 02.05.2023; принята к публикации / accepted: 07.06.2023.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Грудова Ксения Васильевна**  
аспирант, младший научный сотрудник

e-mail: [grudova@krc.karelia.ru](mailto:grudova@krc.karelia.ru)

## CONTRIBUTOR:

**Grudova, Kseniya**  
Graduate Student, Junior Researcher

УДК 515.12

## О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НИЖНЕЙ ЕМКОСТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**А. В. Иванов**

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Для емкостных размерностей (верхней и нижней) рассматривается классический вопрос теории размерности о промежуточных значениях: верно ли, что в метрическом компакте  $X$  емкостной размерности  $\alpha$  (верхней или нижней) для любого неотрицательного числа  $\beta$ , не превосходящего  $\alpha$ , существует замкнутое подмножество  $F$ , соответствующая емкостная размерность которого равна  $\beta$ ? Для верхней емкостной размерности положительный ответ на этот вопрос получен в совместной работе автора и О. В. Фомкиной. Однако для нижней емкостной размерности в общем случае аналогичное утверждение неверно. При этом известно, что в широком классе метрических компактов существуют замкнутые подмножества с нижними емкостными размерностями всех промежуточных значений. В статье получено достаточное условие, обеспечивающее принадлежность фиксированного числа  $r$  шкале промежуточных значений нижней емкостной размерности. А именно, доказано, что если в  $X$  существует замкнутое подмножество  $F$ , верхняя емкостная размерность которого меньше  $r$  и при этом нижняя емкостная размерность любого замкнутого  $\varepsilon$ -шара  $F$  больше  $r$ , то в  $X$  найдется замкнутое подмножество, нижняя емкостная размерность которого равна  $r$ . Доказанное утверждение позволяет усилить известные результаты о промежуточных значениях нижней емкостной размерности.

**Ключевые слова:** метрический компакт; емкостная размерность; теорема о промежуточных значениях емкостной размерности;  $\varepsilon$ -разделенное множество

**Для цитирования:** Иванов А. В. О промежуточных значениях нижней емкостной размерности // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 31–35. doi: 10.17076/mat1759

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### **A. V. Ivanov. ON INTERMEDIATE VALUES OF THE LOWER BOX DIMENSION**

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

For box dimensions (upper and lower), we consider the classical intermediate value question of the dimension theory: is it true that in a metric compact space  $X$  of the

box dimension  $\alpha$  (upper or lower) for any non-negative number  $\beta$  not exceeding  $\alpha$ , there exists a closed subset  $F$  whose corresponding box dimension is equal to  $\beta$ ? For the upper box dimension, a positive answer to this question was obtained in the joint work of the author and O. V. Fomkina. However, this statement is not true in the general case for the lower box dimension. Moreover, it is known that in a wide class of metric compact spaces there exist closed subsets with lower box dimensions of all intermediate values. In this paper, a sufficient condition is obtained that ensures that a fixed number  $r$  belongs to the scale of intermediate values of the lower box dimension. Namely, it is proved that if in  $X$  there exists a closed subset  $F$  whose upper box dimension is less than  $r$  and the lower box dimension of any closed  $\varepsilon$ -ball  $F$  is greater than  $r$ , then there is a closed subset in  $X$  whose lower box dimension is equal to  $r$ . The proved assertion makes it possible to strengthen the known results on intermediate values of the lower box dimension.

**Key words:** metric compact space; box dimension; intermediate value theorem for box dimensions;  $\varepsilon$ -separated set

**For citation:** Ivanov A. V. On intermediate values of the lower box dimension. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2023;4:31–35. doi: 10.17076/mat1759

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

В топологической теории компактов известен вопрос о промежуточных размерностях, который формулируется следующим образом. Пусть компакт  $X$  имеет лебегову размерность  $\dim X = n$ . Верно ли, что для любого  $k \in n$  в  $X$  существует замкнутое подмножество  $F$  размерности  $\dim F = k$ ? В метризуемом случае ответ на этот вопрос положительный, поскольку для метрических компактов размерность  $\dim$  совпадает с индуктивными размерностями  $\text{ind}$  и  $\text{Ind}$ . Но для неметризуемых компактов это, вообще говоря, не так. В. В. Федорчук [3] построил пример  $n$ -мерного компакта, любое замкнутое подмножество которого имеет размерность либо  $n$ , либо 0.

Емкостные размерности метрических компактов (верхняя  $\overline{\dim}_B$  и нижняя  $\underline{\dim}_B$ ) могут принимать любое неотрицательное вещественное значение, и вопрос о промежуточных значениях для этих размерностей имеет следующую формулировку:

*Пусть емкостная размерность (верхняя или нижняя) метрического компакта  $X$  равна  $\alpha \in (0, \infty]$ . Верно ли, что для любого  $\beta \in [0, \alpha)$  в  $X$  существует замкнутое подмножество, соответствующая емкостная размерность которого равна  $\beta$ ?*

Для верхней емкостной размерности положительный ответ на этот вопрос дан в [5]. Недавно автор показал, что для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение в общем случае неверно<sup>1</sup>. В то же вре-

мя известно, что для многих метрических компактов вопрос о промежуточных значениях нижней емкостной размерности решается положительно. Например, в монографии Я. Б. Песина [2] это утверждение доказано для отрезка  $[0, 1]$  числовой прямой, причем в существенно более сильной форме (см. [2, глава 2, пример 6.1]). В связи с этим представляют интерес достаточные условия, обеспечивающие существование в компакте  $X$  замкнутого подмножества фиксированной нижней емкостной размерности  $r \in (0, \underline{\dim}_B X)$ .

Основным результатом настоящей публикации является следующая теорема, при доказательстве которой используется техника, развитая в [5]:

*Пусть в метрическом компакте  $X$  существует замкнутое подмножество  $F$  такое, что  $\overline{\dim}_B F < r$  и  $\underline{\dim}_B B(F, \varepsilon) > r$  для любого  $\varepsilon > 0$ , где  $B(F, \varepsilon)$  – замкнутый  $\varepsilon$ -шар множества  $F$ . Тогда в  $X$  существует замкнутое подмножество  $A$  размерности  $\underline{\dim}_B A = r$ .*

Из этой теоремы вытекает следствие, для формулировки которого необходимы дополнительные определения. Для замкнутого подмножества  $A \subset X$  положим

$$\underline{\dim}_B(A, X) = \inf\{\underline{\dim}_B B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

и рассмотрим следующую размерностную характеристику метрического компакта  $X$ :

$$\underline{\dim}_B X = \sup\{\underline{\dim}_B(A, X) : A = \overline{A} \subset X, \overline{\dim}_B A = 0\}. \quad (1)$$

<sup>1</sup> Публикация этого результата ожидается в «Сибирском математическом журнале».

Из сформулированной выше теоремы следует, что для любого  $r \in [0, z\dim_B X)$  в  $X$  существует замкнутое подмножество  $A$  размерности  $\dim_B A = r$ .

Если в формуле (1) в качестве  $A$  рассматривать одноточечные подмножества, мы получим локальную нижнюю емкостную размерность  $l\dim_B X$ , которая рассматривалась в [5]. Очевидно, что всегда  $l\dim_B X \leq z\dim_B X$ , причем неравенство может быть строгим. Таким образом, из основного результата статьи вытекает усиление теоремы о промежуточных значениях  $\dim_B$  из [5], где эта теорема была доказана для  $r \in (0, l\dim_B X)$ .

Напомним необходимые обозначения и определения. Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт,  $x \in X$ ,  $A \subset X$  и  $\varepsilon > 0$ . Мы используем следующие стандартные обозначения:

$$B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\},$$

$$B(A, \varepsilon) = \{y : \rho(y, A) \leq \varepsilon\}.$$

Подмножество  $A$  называется  $\varepsilon$ -сетью в  $X$ , если  $B(A, \varepsilon) = X$ . Говорят, что  $A$  является  $\varepsilon$ -разделенным, если  $\rho(x, y) > \varepsilon$  для любых двух различных точек  $x, y \in A$ .

Для метрического компакта  $(X, \rho)$  и числа  $\varepsilon > 0$  через  $N(X, \varepsilon)$  обозначается наименьшее число точек в  $\varepsilon$ -сети  $X$ . Максимальное (по включению)  $\varepsilon$ -разделенное подмножество метрического компакта является его  $\varepsilon$ -сетью. Таким образом, справедливо следующее

**Предложение 1.** *В метрическом компакте  $X$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -разделенное подмножество  $A$  мощности  $N(X, \varepsilon)$ .*

**Предложение 2.** *Если  $A$  –  $\varepsilon$ -разделенное подмножество  $X$ , то  $N(X, \varepsilon/2) \geq |A|$ .*

*Доказательство.* Пусть  $D$  –  $(\varepsilon/2)$ -сеть в  $X$ . Тогда

$$X = B(D, \varepsilon/2) = \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon/2),$$

и каждое множество  $B(x, \varepsilon/2)$  содержит не более одной точки  $\varepsilon$ -разделенного множества  $A$ . Следовательно,  $|D| \geq |A|$ .  $\square$

Верхняя и нижняя емкостные размерности метрического компакта  $X$  определяются (соответственно) по формулам (см. [2, глава 2]):

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Очевидно, что всегда  $\overline{\dim}_B X \geq \underline{\dim}_B X$ . Если имеет место равенство  $\overline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$ , то используют обозначение  $\dim_B X$ .

Для замкнутого подмножества  $F$  метрического компакта  $X$  можно рассматривать  $\varepsilon$ -сети, лежащие в  $X$ , и определить число

$$N(F, \varepsilon, X) = \min\{|A| : A \subset X, F \subset B(A, \varepsilon)\}.$$

Простые примеры показывают, что  $N(F, \varepsilon)$  может быть больше  $N(F, \varepsilon, X)$ . Однако (как отмечено в [1]) это различие не влияет на величину емкостных размерностей  $F$ , при определении которых можно заменить  $N(F, \varepsilon)$  на  $N(F, \varepsilon, X)$ . В дальнейшем мы будем использовать упрощенное обозначение  $N(F, \varepsilon)$  и в тех случаях, когда речь идет о  $\varepsilon$ -сетях для  $F$ , лежащих в  $X$ .

Следующее предложение доказано в [4, теорема 2]:

**Предложение 3.** *Пусть  $\varepsilon_n$  – монотонно убывающая последовательность, предел которой равен 0. Если существует константа  $c > 0$  такая, что  $\varepsilon_{n+1} > c\varepsilon_n$  для любого  $n$ , то*

$$\overline{\dim}_B X = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(X, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n},$$

$$\underline{\dim}_B X = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(X, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

**Теорема 1.** *Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт,  $F$  – замкнутое подмножество  $X$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\overline{\dim}_B F < r$  и  $\underline{\dim}_B B(F, \varepsilon) > r$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Тогда в  $X$  существует замкнутое подмножество  $A$  размерности  $\dim_B A = r$ .*

*Доказательство.* Из неравенства  $\overline{\dim}_B F < r$  следует, что при малых  $\varepsilon$  имеет место неравенство

$$N(F, \varepsilon) < \varepsilon^{-r}. \quad (2)$$

Аналогично в силу неравенства  $\underline{\dim}_B X > r$  получаем, что при малых  $\varepsilon$

$$N(X, 2\varepsilon) > \varepsilon^{-r}. \quad (3)$$

Выберем число  $\varepsilon_0 > 0$  так, чтобы для любого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  выполнялись неравенства (2) и (3). Для  $n \in \mathbb{N}$  положим  $\varepsilon_n = \varepsilon_0 2^{-n}$ .

Пусть  $\delta_0 = \text{diam} X$ . Для  $n \in \mathbb{N}$  определим величину

$$\delta_n = \sup\{\delta : N(B(F, \delta), 2\varepsilon_n) \leq \varepsilon_n^{-r}\}.$$

Легко проверить, что  $\varepsilon$ -сеть для  $F$  является  $2\varepsilon$ -сетью для  $B(F, \varepsilon)$ . Следовательно,  $N(B(F, \varepsilon), 2\varepsilon) \leq N(F, \varepsilon)$ . Откуда в силу (2) получаем, что  $\delta_n \geq \varepsilon_n$  для любого  $n$ . При этом в силу неравенства (3)  $\delta_n \leq \delta_0$ .

Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . Предположим противное. Тогда для некоторого числа  $\delta > 0$  множество  $S = \{n : \delta_n > \delta\}$  бесконечно. Поскольку по условию теоремы  $\underline{\dim}_B B(F, \delta) > r$ , при малых  $\varepsilon$

$$N(B(F, \delta), 2\varepsilon) > \varepsilon^{-r}.$$

Таким образом, существует  $k \in S$ , для которого

$$N(B(F, \delta), 2\varepsilon_k) > \varepsilon_k^{-r}.$$

Откуда из определения  $\delta_n$  следует, что  $\delta_k \leq \delta -$  получено противоречие.

Определим теперь числа  $\delta'_n$ . Если  $\delta_n = \delta_0$ , то  $\delta'_n = \delta_n$ . При  $\delta_n < \delta_0$  положим

$$\delta'_n = \frac{1}{2}(\delta_n + \min\{\delta_i : \delta_i > \delta_n, i < n\}).$$

Поскольку  $\delta'_n > \delta_n$  или  $\delta'_n = \delta_0$ , из определения чисел  $\delta_n$  следует выполнение неравенства

$$N(B(F, \delta'_n), 2\varepsilon_n) > \varepsilon_n^{-r} \quad (4)$$

для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Кроме того, очевидно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta'_n = 0$ .

В силу неравенства (4) и предложения 1 для каждого  $n \in \mathbb{N}$  в множестве  $B(F, \delta'_n)$  можно выделить  $2\varepsilon_n$ -разделенное подмножество  $E_n$  мощности  $|E_n| = \lceil \varepsilon_n^{-r} \rceil$ . Положим

$$A = F \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Легко проверить, что  $A$  – замкнутое подмножество компакта  $X$ .

Покажем, что  $\underline{\dim}_B A = r$ . В силу предложения 2 для любого  $n \in \mathbb{N}$

$$N(A, \varepsilon_n) \geq |E_n|. \quad (5)$$

Из неравенства (5) и предложения 3 следует, что

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \lceil \varepsilon_n^{-r} \rceil}{-\log \varepsilon_n} = r. \end{aligned}$$

Для доказательства обратного неравенства  $\underline{\dim}_B A \leq r$  рассмотрим множество

$$M = \{n : \delta_i < \delta_n \text{ для любого } i > n\}.$$

Легко показать, что  $M$  бесконечно. Занумеруем точки  $M$  в порядке возрастания:

$$M = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  положим

$$\xi_k = \max\{\delta'_i : i > n_k\}.$$

Из определения чисел  $\delta'_n$  следует, что  $\xi_k < \delta_{n_k}$  для любого  $k$ . Следовательно, имеет место неравенство

$$N(B(F, \xi_k), 2\varepsilon_{n_k}) \leq \varepsilon_{n_k}^{-r}.$$

Таким образом, в множестве  $B(F, \xi_k)$  можно выделить подмножество  $C_k$  мощности  $|C_k| \leq \varepsilon_{n_k}^{-r}$ , которое является  $2\varepsilon_{n_k}$ -сетью для  $B(F, \xi_k)$ . Положим

$$G_k = C_k \cup \bigcup_{i \leq n_k} E_i.$$

По построению множеств  $E_i$  и определению  $\xi_k$  при  $i > n_k$

$$E_i \subset B(F, \delta'_i) \subset B(F, \xi_k).$$

Следовательно,  $G_k$  является  $2\varepsilon_{n_k}$ -сетью для  $A$ .

Оценим мощность  $G_k$ :

$$\begin{aligned} |G_k| &\leq |C_k| + \sum_{i \leq n_k} |E_i| \leq \varepsilon_{n_k}^{-r} \\ &\quad + \sum_{i \leq n_k} \lceil \varepsilon_i^{-r} \rceil \leq 2 \sum_{i \leq n_k} \varepsilon_i^{-r} \\ &= 2\varepsilon_0^{-r} \sum_{i \leq n_k} 2^{ir} = 2\varepsilon_0^{-r} 2^r \frac{2^{n_k r} - 1}{2^r - 1}. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что

$$N(A, 2\varepsilon_{n_k}) \leq 2\varepsilon_0^{-r} 2^r \frac{2^{n_k r} - 1}{2^r - 1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B A &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(A, 2\varepsilon_{n_k})}{-\log 2\varepsilon_{n_k}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2\varepsilon_0^{-r} 2^r \frac{2^{n_k r} - 1}{2^r - 1}}{-\log 2\varepsilon_{n_k}} = r. \end{aligned}$$

□

Напомним, что для замкнутого подмножества  $A \subset X$

$$\underline{\dim}_B(A, X) = \inf\{\underline{\dim}_B B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

и

$$z\underline{\dim}_B X = \sup\{\underline{\dim}_B(A, X) : A = \bar{A} \subset X,$$

$$\underline{\dim}_B A = 0\}.$$

**Следствие 1.** Для любого  $r \in [0, z\underline{\dim}_B X)$  в компакте  $X$  существует замкнутое подмножество  $A \subset X$  размерности  $\underline{\dim}_B A = r$ .



*Доказательство.* Для  $r = 0$  утверждение очевидно. Пусть  $r \in (0, z\dim_B X)$ . Тогда по определению  $z\dim_B X$  в  $X$  существует замкнутое подмножество  $F$ , для которого  $\bar{\dim}_B F = 0 < r$  и  $\underline{\dim}_B(F, X) > r$ .  $\square$

В [5] было введено понятие локальной нижней емкостной размерности метрического компакта  $X$ :

$$l\underline{\dim}_B X = \sup\{\underline{\dim}_B(\{x\}, X) : x \in X\}.$$

Очевидно, что всегда

$$l\underline{\dim}_B X \leq z\underline{\dim}_B X,$$

причем существуют компакты, для которых это неравенство является строгим. Примером такого компакта может служить построенное в [2, глава 2, пример 6.2] пространство  $X$ , которое является объединением двух счетных замкнутых непересекающихся подмножеств числовой прямой. Как отмечено в [5, пример 5.3],  $l\underline{\dim}_B X < \underline{\dim}_B X$ . При этом множество предельных точек компакта  $X$  состоит из двух элементов, поэтому  $z\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$ . Таким образом, следствие 1 является усилением теоремы 5.5 из [5], в которой установлено существование замкнутых подмножеств  $A \subset X$  размерности  $\underline{\dim}_B A = r$  для всех  $r \in [0, l\underline{\dim}_B X)$  при некоторых дополнительных ограничениях на метрику компакта  $X$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. В., Фомкина О. В. О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1034

Поступила в редакцию / received: 18.03.2023; принята к публикации / accepted: 20.04.2023.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Иванов Александр Владимирович**  
д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник

e-mail: [avlivanov@krc.karelia.ru](mailto:avlivanov@krc.karelia.ru)

2. Песин Я. Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.

3. Федорчук В. В. Бикомпакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 795–797.

4. Ivanov A. V. On metric order in spaces of the form  $F(X)$  // Topol. Its Appl. 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

5. Ivanov A. V. On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topol. Its Appl. 2022. Vol. 306, no. 1. Art. 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

#### REFERENCES

1. Ivanov A. V., Fomkina O. V. On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2019;7:5–14. doi: 10.17076/mat1034 (In Russ.)

2. Pesin Y. B. Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications. Chicago: The Univ. of Chicago Press; 1997. 397 p.

3. Fedorchuk V. V. Bicomacta with no intermediate dimensions. *Dokl. Acad. Nauk SSSR = Proceedings AS of the USSR.* 1973;213(4):795–797. (In Russ.)

4. Ivanov A. V. On metric order in spaces of the form  $F(X)$ . *Topol. Its Appl.* 2017;221:107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

5. Ivanov A. V. On quantization dimensions of idempotent probability measures. *Topol. Its Appl.* 2022;306(1):107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

#### CONTRIBUTOR:

**Ivanov, Alexander**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher

УДК 517.91

## МОДЕЛЬ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА» С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов\*

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910), \*sazon-tb@mail.ru*

В статье рассмотрена задача моделирования динамики популяций типа «хищник–жертва» с внутривидовой конкуренцией жертв. Модель представляет собой гибридную систему (систему с переключениями). Переключения происходят между режимом взаимодействия и режимом «убежища» (Refuge-regime), при котором число доступных жертв настолько мало, что хищники не могут их обнаружить и это приводит к отсутствию взаимодействия популяций. Проведен анализ режимов скольжения на линии переключения по методу Филиппова. Получены условия существования равновесия и псевдоравновесия в построенной гибридной системе, доказана их глобальная устойчивость.

**Ключевые слова:** динамические системы; динамика популяций; гибридные системы; скользящий режим

Для цитирования: Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Модель «хищник–жертва» с переменной структурой взаимодействия // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 36–40. doi: 10.17076/mat1767

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств Российского научного фонда (грант № 23–21–00092).

### **A. N. Kirillov, A. M. Sazonov\*. PREDATOR-PREY MODEL WITH A VARIABLE STRUCTURE OF INTERACTIONS**

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), \*sazon-tb@mail.ru*

The paper studies the problem of modeling the “predator-prey” population dynamics with intraspecific competition among the prey. The model has the form of a hybrid system (system with switching). The switching is between the interaction regime and the refuge regime, where the accessible prey numbers are so small that the predators cannot find the prey and there is no interaction between the populations. The sliding modes on the switching line were analyzed using the Filippov approach. The conditions for the existence of equilibrium and pseudo-equilibrium are derived, their global stability is proved.

**Key words:** dynamic systems; population dynamics; hybrid systems; sliding mode



## ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена математическому моделированию динамики популяций хищника и жертвы посредством гибридной динамической системы, учитывающей внутривидовую конкуренцию жертв. В работе [1] представлена система, описывающая динамику взаимодействия популяций хищника и жертв, учитывающая внутривидовую конкуренцию жертв вследствие ограниченности ресурсов, основанная на классической модели Лотки–Вольтерры. Указанная модификация модели Лотки–Вольтерры позволяет стабилизировать систему, получив затухающие колебания численностей популяций [1].

Рассмотрим модель динамики популяций типа «хищник–жертва» с внутривидовой конкуренцией жертв

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by - cx) = f_1(x, y), \\ \dot{y} = y(kbx - m) = f_2(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x, y$  – количественные характеристики популяций жертв и хищников соответственно,  $a > 0$  – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников,  $b > 0$  – коэффициент истребления хищником жертв,  $m > 0$  – коэффициент естественной смертности хищников,  $0 < k < 1$  – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство,  $c > 0$  описывает внутривидовую конкуренцию. Система (1) имеет единственное нетривиальное равновесие  $P = (x^*, y^*)$ , где  $x^* = \frac{m}{kb}$ ,  $y^* = \frac{akb - cm}{kb^2}$ . Как можно видеть, необходимым условием положительности  $y^*$  и, как следствие, существования этого равновесия является

$$\frac{m}{kb} < \frac{a}{c}. \quad (2)$$

Линеаризуя систему (1) в окрестности равновесия  $P$ , нетрудно установить, что равновесие  $P$  асимптотически устойчиво. При этом если  $cm(c + 4kb) < 4a(kb)^2$ , то  $P = (x^*, y^*)$  – фокус, а если  $cm(c + 4kb) > 4a(kb)^2$ , то  $P = (x^*, y^*)$  – узел.

В настоящей статье будет представлено развитие модели (1) посредством введения

так называемого режима «убежища» (Refuge-regime), при котором число доступных жертв слишком мало и хищники практически не могут их обнаружить, поэтому отсутствует взаимодействие между хищниками и жертвами. Один из примеров гибридной модели динамики популяций с режимом «убежища» представлен в работе [3]. Режим «убежища» описывается системой вида

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cx) = g_1(x, y), \\ \dot{y} = -my = g_2(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

Для моделирования изменения режимов будем использовать гибридную динамическую систему, под которой будем понимать систему с переключениями.

## МОДЕЛЬ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА» С ВНУТРИВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИЕЙ И РЕЖИМОМ «УБЕЖИЩА»

Рассмотрим модель динамики популяций хищника и жертв с внутривидовой конкуренцией и режимом убежища в виде следующей гибридной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cx) - \varphi(x, y), \\ \dot{y} = -my + k\varphi(x, y), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} bxy, & \frac{x}{y} > \lambda, \\ 0, & \frac{x}{y} < \lambda, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\lambda > 0$  – заданная пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое хищнику в единицу времени для поддержания всех жизненных функций. Как можно видеть, линией переключения для гибридной системы (4), (5) является луч  $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x = \lambda y\}$ , который разбивает  $\mathbb{R}_+^2$  на два множества  $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x < \lambda y\}$  и  $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > \lambda y\}$ . В  $E_1$  действует система (3), в  $E_2$  – (1).

Главные изоклины системы (1) в  $\mathbb{R}_+^2$  имеют вид:

- $\dot{x} = 0$ :  $cx + by = a$ ,
- $\dot{y} = 0$ :  $x = \frac{m}{bk}$ .

Вертикальная изоклина системы (3) в  $\mathbb{R}_+^2$ :

- $\dot{x} = 0$ :  $x = \frac{a}{c}$ .

Найдем точки пересечения изоклин (1), (3) с лучом  $l$ :

- $R_1 = (x_1, y_1) = \{cx + by = a\} \cap l = \left(\frac{\lambda a}{b+c\lambda}, \frac{a}{b+c\lambda}\right)$ ,
- $R_2 = (x_2, y_2) = \{x = \frac{m}{bk}\} \cap l = \left(\frac{m}{bk}, \frac{m}{\lambda bk}\right)$ ,
- $R_3 = (x_3, y_3) = \{x = \frac{a}{c}\} \cap l = \left(\frac{a}{c}, \frac{a}{\lambda c}\right)$ .

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем исследовать скольжение на луче  $l$ , используя метод Филишова [2].

**Лемма 1.** На луче  $l$  имеем следующие режимы переключения:

- прошивание из  $E_1$  в  $E_2$  при  $y < \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$ ,
- устойчивое скольжение при  $\frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)} < y < \frac{a+m}{c\lambda}$ ,
- прошивание из  $E_2$  в  $E_1$  при  $y > \frac{a+m}{c\lambda}$ .

При этом векторное поле скольжения имеет вид  $v(z) = yS(y)(\lambda i + j)$ , где  $S(y) = \frac{(ak\lambda - m - kc\lambda^2 y)}{1+k\lambda}$ ,  $z \in l$ ,  $i, j$  – соответствующие орты.

*Доказательство.* Обозначим  $e = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(\lambda, 1)$  – направляющий вектор  $l$ ,  $\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-1, \lambda)$  – нормаль к  $l$ . Следуя [2], найдем проекции  $f_\tau, g_\tau$  векторных полей  $f = (f_1, f_2)$ ,  $g = (g_1, g_2)$  в точках луча  $l$  на нормаль  $\tau$  соответственно. Имеем

$$f_\tau = \frac{\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2}}((c\lambda + kb\lambda + b)y - a - m), \quad (6)$$

$$g_\tau = \frac{-\lambda y}{\sqrt{1+\lambda^2}}(a + m - c\lambda y). \quad (7)$$

Из (6), (7) имеем  $f_\tau > 0$  при  $y > \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$ ,  $g_\tau > 0$  при  $y > \frac{a+m}{c\lambda}$ . Тогда, согласно [2], получаем прошивание из  $E_1$  в  $E_2$  при  $y < \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$ , из  $E_2$  в  $E_1$  при  $y > \frac{a+m}{c\lambda}$ , устойчивое скольжение при  $\frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)} < y < \frac{a+m}{c\lambda}$ .

Векторное поле скольжения  $v(z)$  для  $z \in l$  имеет вид

$$v(z) = \alpha f + (1 - \alpha)g,$$

где

$$\alpha = \frac{g_\tau}{g_\tau - f_\tau} = \frac{a + m - c\lambda y}{b(1 + k\lambda)y}.$$

Итак,

$$v(z) = \lambda y(a - (\alpha b + c\lambda)y)i + y(\alpha kb\lambda y - m)j \quad (8) \\ = yS(y)(\lambda i + j),$$

где  $S(y) = \frac{(ak\lambda - m - kc\lambda^2 y)}{1+k\lambda}$ ,  $z \in l$ ,  $i, j$  – соответствующие орты.  $\square$

Найдем координаты точек касания луча переключения  $l$  к положительным полутраекториям системы (1), (3). Из (6) получаем единственную точку касания  $Q = (x_q, y_q)$  к положительным полутраекториям системы (1), где  $x_q = \frac{(a+m)\lambda}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$ ,  $y_q = \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$ . Из (7) получаем единственную точку касания  $\tilde{Q} = (\tilde{x}_q, \tilde{y}_q)$  к положительным полутраекториям системы (3), где  $\tilde{x}_q = \frac{a+m}{c}$ ,  $\tilde{y}_q = \frac{a+m}{c\lambda}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda > \frac{m}{ak}$ . Тогда существует  $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}_+^2$  такая, что  $v(\tilde{P}) = 0$ .

*Доказательство.* Из (8)  $\tilde{x} = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2}$ ,  $\tilde{y} = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2}$ . Очевидно,  $\tilde{x} > 0$ ,  $\tilde{y} > 0$  тогда и только тогда, когда  $\lambda > \frac{m}{ak}$ .  $\square$

При этом

$$\begin{cases} S(y) > 0, & y < \tilde{y} \\ S(y) < 0, & y > \tilde{y}. \end{cases}$$

Возможны два случая. При  $0 < \lambda < \frac{mb}{akb - cm}$  равновесие  $P \in E_2$ , при  $\lambda > \frac{mb}{akb - cm}$  равновесие  $P \in E_1$ . Несложно показать, что  $\frac{m}{ak} < \frac{mb}{akb - cm}$ .

Исследуем взаимное расположение точек  $Q, \tilde{Q}, P, \tilde{P}, R_1, R_2, R_3$ .

Из условия (2) следует, что  $x_3 > x_2$ . Поскольку  $\lambda, a, b, c > 0$ , имеем  $\frac{\lambda a}{b+c\lambda} > \frac{\lambda a}{c\lambda} = \frac{a}{c}$ , то  $x_1 < x_3$ . Несложно показать, что  $x_1 < x_2$ , если  $0 < \lambda < \frac{mb}{akb - cm}$ .

**Лемма 3.** Точка касания  $Q \in [R_1R_2]$ , где  $[R_1R_2] = \{(x, y) \in l : \frac{\lambda a}{b+c\lambda} \leq x \leq \frac{m}{bk}\}$  при  $\lambda \in \left(0, \frac{mb}{akb - cm}\right)$ ,  $Q \in [R_2R_1]$ , где  $[R_2R_1] = \{(x, y) \in l : \frac{m}{bk} \leq x \leq \frac{\lambda a}{b+c\lambda}\}$  при  $\lambda > \frac{mb}{akb - cm}$ . Точка касания  $\tilde{Q} \in (R_3\infty) = \{(x, y) \in l : x > \frac{a}{c}\}$ .

*Доказательство.* Сравним ординаты точек  $Q, R_1$ .

$$y_q - y_1 = \frac{mb + m\lambda - akb\lambda}{(b + c\lambda)(c\lambda + b + bk\lambda)}.$$

Сравним ординаты точек  $Q, R_2$ .

$$y_q - y_2 = \frac{akb\lambda - mb - m\lambda}{\lambda bk(c\lambda + b + bk\lambda)}.$$

Очевидно, при условии (2), если  $0 < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$ , то  $y_1 < y_q < y_2$ , а если  $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ , то  $y_2 < y_q < y_1$ .

Поскольку  $\tilde{Q} = (\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{\lambda c})$ ,  $R_3 = (\frac{a}{c}, \frac{a}{\lambda c})$ , то, очевидно,  $\tilde{Q} \in (R_3\infty)$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $\lambda > \frac{m}{ak}$ . Тогда  $\tilde{P} \in (0R_1)$  тогда и только тогда, когда  $\frac{m}{ak} < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$ ,  $\tilde{P} \in (QR_3)$  тогда и только тогда, когда  $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ .

*Доказательство.* Сравним ординаты точек  $\tilde{P}$ ,  $R_1$ .

$$\tilde{y} - y_1 = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} - \frac{a}{b+c\lambda} = \frac{ak\lambda b - m\lambda c - mb}{kc\lambda^2(b+c\lambda)}.$$

Учитывая условие (2), имеем  $\tilde{y} < y_1$ , если  $\lambda < \frac{mb}{akb-cm}$ . А так как  $\tilde{y} > 0$  при  $\lambda > \frac{m}{ak}$ , то получим  $\tilde{P} \in (0R_1)$ .

Сравним ординаты точек  $\tilde{P}$ ,  $Q$ .

$$\begin{aligned} \tilde{y} - y_q &= \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} - \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)} \\ &= \frac{(k\lambda + 1)((akb - m\lambda c) - mb)}{kc\lambda^2(c\lambda + b(1+k\lambda))}. \end{aligned}$$

Учитывая условие (2), получим:

$$\tilde{y} > y_q \Leftrightarrow \lambda > \frac{mb}{akb - cm}.$$

Сравним ординаты точек  $\tilde{P}$ ,  $R_3$ .

$$\tilde{y} - y_3 = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} - \frac{a}{c\lambda} = \frac{-m\lambda c}{kc^2\lambda^3} < 0.$$

Таким образом, получаем  $\tilde{P} \in (QR_3)$ , если  $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ .  $\square$

Из Леммы 4 следует, что при  $\frac{m}{ak} < \lambda < \frac{mb}{akb-cm}$  точка  $\tilde{P}$  находится на интервале луча  $l$ , в котором происходит прошивание в область  $E_2$ , а при  $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$  – на интервале луча  $l$ , в котором происходит скольжение.

## ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

В [1] указано, что равновесие  $P$  глобально устойчиво для системы (1), рассматриваемой в  $\mathbb{R}_+^2$ . Будем исследовать влияние введенных переключений на устойчивость равновесия.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda \in (0, \frac{mb}{akb-cm})$ . Тогда равновесие  $P$  глобально устойчиво в  $\mathbb{R}_+^2$  для гибридной системы (4), (5).

*Доказательство.* Для исследования устойчивости необходимо изучить поведение траекторий на луче переключения  $l$ , который разбивается точками касания  $Q$ ,  $\tilde{Q}$  на промежутки

- $(0Q) = \{(x, y) \in l : y < \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)}\}$ ,
- $(Q\tilde{Q}) = \{(x, y) \in l : \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)} < y < \frac{a+m}{c\lambda}\}$ ,
- $(\tilde{Q}\infty) = \{(x, y) \in l : y > \frac{a+m}{c\lambda}\}$ .

Рассмотрим промежуток  $(0Q)$ . По Лемме 1, для любой точки  $z_0 = (x_0, y_0) \in (0Q)$  имеем прошивание из  $E_1$  в  $E_2$ . Следовательно, дальнейшее движение в  $E_2$  происходит по положительной полутраектории  $\gamma(z_0)$  системы (1). Возможны два случая. Если  $\gamma(z_0) \cap l = \emptyset$ , то переключений далее не происходит и, согласно [1],  $P$  асимптотически устойчиво. Рассмотрим теперь случай, когда  $\gamma(z_0) \cap l = z_1 = (x_1, y_1)$ . Покажем, что  $z_1 \in (Q\tilde{Q})$ . Поскольку  $Q$  – точка касания, то, в силу невозможности пересечения траекторий,  $y_1 > y_q$ .

Рассмотрим промежуток  $(\tilde{Q}\infty)$ . По Лемме 1, для любой точки  $z_0 = (x_0, y_0) \in (\tilde{Q}\infty)$  имеем прошивание из  $E_2$  в  $E_1$ . Поскольку  $\tilde{Q}$  – точка касания,  $\{x = \frac{a}{c}\}$  – положительная полутраектория системы (3), то, в силу невозможности пересечения траекторий,  $\rho(z_0) \cap l = z_1 = (x_1, y_1)$  и  $\frac{a}{\lambda c} < y_1 < \tilde{y}_q$ . При этом  $y_q < \frac{a}{\lambda c}$ .

Таким образом, осталось исследовать поведение траекторий на промежутке  $(Q\tilde{Q})$ . По Лемме 1, для любой точки  $z_0 = (x_0, y_0) \in (Q\tilde{Q})$  имеем устойчивое скольжение вдоль  $l$ . При этом векторное поле скольжения  $v(z_0) = (v_1, v_2)$  такое, что  $v_1 < 0$ ,  $v_2 < 0$ . Следовательно, на  $(Q\tilde{Q})$  происходит скольжение к точке  $Q$ , из которой дальнейшее движение происходит по положительной полутраектории  $\gamma(Q)$  системы (1), для которой  $P$  асимптотически устойчиво [1].  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda > \frac{mb}{akb-cm}$ . Тогда точка  $\tilde{P}$  является глобально устойчивым псевдоравновесием для гибридной системы (4), (5).

*Доказательство.* Аналогично доказательству Теоремы 1 будем исследовать поведение траекторий на промежутках  $(0Q)$ ,  $(Q\tilde{Q})$ ,  $(\tilde{Q}\infty)$  луча переключения  $l$ . Отметим, что поведение траекторий на промежутке  $(\tilde{Q}\infty)$  такое же, как в случае  $\lambda \in (\frac{m}{ak}, \frac{mb}{akb-cm})$ .

На промежутке  $(0Q)$  так же, как и в случае  $\lambda \in (\frac{m}{ak}, \frac{mb}{akb-cm})$ , имеем прошивание из  $E_1$

в  $E_2$ . Однако при  $\lambda > \frac{mb}{akb - cm}$  равновесие  $P \in E_1$ , где действует система (3). Следовательно, приближение положительных полутраекторий системы (1) к  $P$  невозможно, поскольку все они лежат в  $E_2$ , то есть нарушается устойчивость равновесия  $P$ . Исходя из вышесказанного, для любой точки  $z_0 = (x_0, y_0) \in (0Q)$  имеем  $\gamma(z_0) \cap l = z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_1 \in (Q\tilde{Q})$ .

Таким образом, аналогично доказательству Теоремы 1 необходимо исследовать поведение траекторий на промежутке  $(Q\tilde{Q})$ . По Лемме 4, при  $\lambda > \frac{mb}{akb - cm}$  точка (псевдоравновесие)  $\tilde{P} \in (QR_3) \subset (Q\tilde{Q})$ . При этом для любой точки  $z \in (Q\tilde{P})$  векторное поле скольжения  $v(z) = (v_1, v_2)$  такое, что  $v_1 > 0, v_2 > 0$ , а если  $z \in (\tilde{P}\tilde{Q})$ , то  $v_1 < 0, v_2 < 0$ . Таким образом, получаем скольжение к  $\tilde{P}$ , для которой  $v(\tilde{P}) = (0, 0)$ , то есть  $\tilde{P}$  глобально устойчиво.  $\square$

**Замечание 1.** Равенства  $cm(c + 4kb) = 4a(kb)^2$  и  $\lambda = \frac{mb}{akb - cm}$  задают поверхности размерности 1 соответственно в 5- и 6-мерных арифметических пространствах параметров. Соответствующие множества параметров имеют лебегову меру ноль. В статье же рассматриваются случаи общего положения, что естественно при анализе процессов на основе конкретных математических моделей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено развитие модели динамики популяций типа «хищник–жертва» с учетом внутривидовой конкуренции жертв, что позволяет оказать стабилизирующий эффект. Данная система имеет единственное глобально устойчивое равновесие. Рассмотрена задача качественного исследования гибридной системы, в которой система типа «хищ-

ник–жертва» переключается на режим «убежища» (Refuge-regime), когда число доступных жертв настолько мало, что хищники не могут их обнаружить и прекращается взаимодействие популяций. Согласно анализу режимов скольжения на линии переключения по методу Филиппова, поведение гибридной системы является более сложным. Показано, что возможно возникновение псевдоравновесия, получены условия, при которых это происходит. Для обоих случаев доказана глобальная устойчивость равновесия и псевдоравновесия. Таким образом, можно сделать вывод, что введение переключений к режиму «убежища» может вызывать качественное изменение поведения системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
3. *Chen X., Huang L.* A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model // *J. Math. Anal. Appl.* 2015. No. 428. P. 817–837. doi: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045

## REFERENCES

1. *Svirizhev Yu. M., Logofet D. O.* Resilience of biological communities. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. (In Russ.)
2. *Filippov A. F.* Differential equations with a discontinuous right-hand side. Moscow: Nauka; 1985. 225 p. (In Russ.)
3. *Chen X., Huang L.* A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model. *J. Math. Anal. Appl.* 2015;428:817–837. doi: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045

Поступила в редакцию / received: 11.04.2023; принята к публикации / accepted: 30.05.2023.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Кириллов Александр Николаевич**  
д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник

e-mail: krlv1812@yandex.ru

**Сазонов Александр Михайлович**  
канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник

e-mail: sazon-tb@mail.ru

## CONTRIBUTORS:

**Kirillov, Alexander**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Leading Researcher

**Sazonov, Alexander**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Researcher

УДК 004.01:006.72 (470.22)

## ПРОВЕРКА ВЫПОЛНИМОСТИ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ С ПОМОЩЬЮ КВАНТОВОГО ОТЖИГА

М. А. Мальцева, А. С. Румянцев\*

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910), \*ar0@krc.karelia.ru*

Проверка выполнимости булевых формул (SAT) широко применяется при решении современных задач автоматизации проектирования микроэлектроники. Важным приложением такой задачи является проектирование логических цепей с заданными характеристиками из заданного набора логических вентилях. Для решения SAT-задачи можно применять как стандартные решатели, так и современные оптимизационные инструменты, в том числе относительно новый инструмент аппаратного решения задачи квантового отжига. Решение данной задачи может выполняться на системе квантового отжига с помощью построения по особым правилам так называемой булевой сети и выбора соответствующей целевой функции. В статье рассматривается практическое применение квантового отжига к построению коротких логических цепей с помощью решения SAT-задачи на основе предложенных в литературе методов, а также проводится анализ практических аспектов применения таких методов к построению квантовых цепей.

Ключевые слова: задача выполнимости булевых формул; квантовый отжиг; логические цепи; квантовые цепи; бинарное представление

Для цитирования: Мальцева М. А., Румянцев А. С. Проверка выполнимости булевых формул с помощью квантового отжига // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 41–49. doi: 10.17076/mat1783

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств Российского научного фонда (грант № 21–71–10135).

### **M. A. Maltseva, A. S. Rumyantsev\*. BOOLEAN SATISFIABILITY VERIFICATION BY QUANTUM ANNEALING**

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), \*ar0@krc.karelia.ru*

The Boolean satisfiability problem (SAT) is widely applied in modern tasks of microelectronics design automation. An important application of such a task is the design of logic circuits with specified characteristics from a given set of logic gates. To solve an SAT problem, both standard solvers and modern optimization tools can be used, including a relatively new hardware tool for solving the quantum



annealing problem. The solution of this problem can be performed on a quantum annealing system by constructing a so-called Boolean network according to special rules and selecting an appropriate objective function. The article discusses the practical application of quantum annealing to the construction of short logic circuits by solving an SAT problem based on the methods proposed in the literature, and also analyzes the practical aspects of applying such methods to the construction of quantum circuits.

**Key words:** Boolean satisfiability problem; quantum annealing; logical circuits; quantum circuits; binary representation

**For citation:** Maltseva M. A., Rumyantsev A. S. Boolean satisfiability verification by quantum annealing. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2023;4:41–49. doi: 10.17076/mat1783

**Funding.** The study was funded under Russian Science Foundation (project # 21–71–10135).

## ВВЕДЕНИЕ

Проверка выполнимости булевых формул (Boolean satisfiability problem, SAT-задача) широко применяется при решении современных задач автоматизации проектирования микроэлектроники [2, 9, 21, 24] и при проектировании классических логических цепей [3]. В общем случае SAT-задача относится к классу так называемых NP-полных [5] (задач, для которых не доказано существование алгоритма, решающего их за полиномиальное относительно размера входных данных время). В связи с быстрым ростом сложности таких задач относительно размера исходных данных широко применяются методы ускорения расчетов с помощью распределенных [1] и параллельных [14] вычислений. В этой связи перспективным является применение квантовых вычислительных систем, для которых известны алгоритмы, превосходящие алгоритмы на классических системах с точки зрения вычислительной сложности (например, алгоритм Шора [17]).

Среди разработанных прототипов квантовых вычислителей следует выделить системы, работающие по принципу квантового отжига (КО). Такие системы позволяют выполнять решение задач оптимизации (в частности, при квадратичной целевой функции, бинарных переменных и отсутствии ограничений – задачи QUBO) и не являются универсальными (не позволяют выполнять произвольные вычисления) [12, 20], однако обладают большей вычислительной мощностью в сравнении с универсальными квантовыми процессорами (например, система, основанная на КО, D-Wave 2000Q имеет 2048 кубитов (квантовых битов, вычислительных единиц системы) [6], в

то время как универсальный квантовый процессор IBM Osprey имеет 433 кубита [11]). В то же время возможностей КО достаточно для решения SAT-задачи, что объясняет интерес исследователей к построению алгоритмов для указанного класса задач на системах типа КО [4, 18, 19].

Важным приложением SAT-задачи является проектирование логических цепей с заданными характеристиками из заданного набора логических вентилях (кодирование с помощью SAT-задачи функционала логической цепи [3]). Решение данной задачи может выполняться на системе КО с помощью построения по особым правилам так называемой булевой сети и выбора соответствующей целевой функции [18]. Предполагается, что такой метод может применяться и для построения некоторых классов квантовых цепей [3, 13, 16, 22], т. е. цепей из так называемых квантовых вентилях (эта модель квантовых вычислений является универсальной [15]). Однако при этом необходимо обеспечить бинарное представление всех возможных промежуточных состояний квантовой цепи, что является открытым вопросом [3]. Целью данной статьи является практическое применение КО к построению коротких логических цепей с помощью решения SAT-задачи на основе методов, предложенных в [4, 18], а также анализ практических аспектов применения метода к построению квантовых цепей.

В работе выполнена экспериментальная проверка метода кодирования логической цепи и решения SAT-задачи на ее основе с помощью симулятора машины D-Wave и рассмотрены особенности применения данного метода к кодированию квантовых цепей.



## КОДИРОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ КВАНТОВОГО ОТЖИГА

КО – эмпирический метод решения задач оптимизации, который позволяет найти глобальный минимум заданной целевой функции [7]. КО является вариантом широко применяемого эмпирического оптимизационного алгоритма имитации отжига [12]. В отличие от последнего КО использует так называемое квантовое туннелирование (квантовые флуктуации) для преодоления локальных минимумов целевой функции при осуществлении поиска решения [20, 23], что отличает КО от большинства алгоритмов, основанных на так называемом восхождении к вершине (generalized hill climbing). Реализация КО возможна как на традиционной вычислительной архитектуре (в режиме имитации), так и (физически) на специализированных квантовых вычислительных системах, таких как системы D-Wave. Особенности расчета на физических системах заключаются в необходимости учета топологии графа возможных связей (так называемой квантовой запутанности) между парами кубитов, а также в ограниченности числа кубитов.

Одним из видов задач оптимизации, решаемых с помощью КО, является поиск конфигурации так называемых спинов, минимизирующей энергию в модели Изинга, т. е. минимизация целевой функции

$$\mathcal{E}(\underline{z}) = \sum_{i \in V} h_i z_i + \sum_{(i,j) \in E} J_{ij} z_i z_j, \quad (1)$$

где

- $G = (V, E)$  – неориентированный граф возможных взаимодействий между кубитами (подграф топологии квантовой системы),
- $\underline{z} = \{-1, 1\}^{|V|}$  – конфигурация спинов, значения которых указывают энергетическое состояние соответствующих кубитов,
- симметричная матрица  $J = \|J_{ij}\|_{(i,j) \in E}$  задает энергию взаимодействия пар кубитов,
- вектор  $h = \|h_i\|_{i \in V}$  задает внешнее поле, воздействующее на отдельные кубиты.

В системах D-Wave имеются следующие ограничения на используемые коэффициенты целевой функции:  $h_i \in [-2, 2]$ ,  $J_{ij} \in [-1, 1]$  [18]. Заметим, что задачу минимизации  $\mathcal{E}(\underline{z})$  в эквивалентной форме в булевом базисе

$\{0, 1\}^{|V|}$  принято называть задачей квадратичной неограниченной (безусловной) бинарной оптимизации (двоичной оптимизации в виде квадратической функции с неограниченным диапазоном значений, quadratic unconstrained binary optimization, QUBO) [18]. Обе указанные формы задачи могут быть решены с помощью эвристики КО, для чего требуется задать матрицу  $J$  и вектор  $h$ .

Напомним, что SAT-задача заключается в поиске такого набора значений  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  булевой формулы  $F$ , при котором формула является выполнимой, т. е.  $F$  истинна [8].

**Пример 1.** Рассмотрим булеву формулу с двумя переменными  $F = x_1 \wedge x_2$ , где  $\wedge$  – операция логического «И». Она выполнима, так как при  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 1$   $F$  истинна.

В общем случае решение SAT-задачи сводится к перебору всех возможных значений переменных, входящих в заданную булеву формулу, для поиска набора, выполняющего формулу, либо доказательства отсутствия такового.

Подход к решению SAT-задач с помощью КО предложен в работах [4, 18, 19]. Суть подхода состоит в следующих этапах:

1. Представление булевой формулы в виде логической цепи с соответствующими логическими операциями;
2. Построение элементов матрицы  $J$  и вектора  $h$  для функции  $\mathcal{E}$  с помощью решения специальным образом построенной задачи линейного программирования (ЛП) в отдельности для каждой логической операции, входящей в цепь;
3. Иерархическое построение итоговых матрицы  $J$  и вектора  $h$  путем объединения логических операций цепи, связанных отношением предшествования (если выходное значение логической операции является входным значением другой операции) по особым правилам;
4. Добавление выходной переменной цепи (например,  $z_n$ ) с присвоением максимального (положительного) коэффициента  $h_n$  и максимального по модулю отрицательного веса соответствующей дуги.

Таким образом, на этапах 1–3 фактически выполняется кодирование логической цепи с помощью матрицы  $J$  и вектора  $h$ , а на заключительном этапе 4 – постановка SAT-задачи. Рассмотрим далее указанные этапы более подробно.

Для экономии обозначений положим здесь, что цепь состоит из одной логической операции с  $n$  операндами. Согласно [18], для заданной логической операции следует таким образом подобрать коэффициенты матрицы  $J$  и вектора  $h$ , чтобы обеспечить достижение минимального значения энергии (1) на наборах  $\underline{z} \in C$ , входящих в таблицу истинности  $C$  указанной операции (это значение энергии обозначим  $l$ ). При этом для значений  $\underline{z} \in \{-1, 1\}^n \setminus C$  обеспечивается энергетический штраф не менее  $g > 0$ , причем необходимо максимизировать указанный штраф. Таким образом, решается следующая задача линейного программирования [18]:

$$\begin{aligned} g &\rightarrow \max \\ \mathcal{E}(\underline{z}) &= l, & \underline{z} &\in C, \\ \mathcal{E}(\underline{z}) &\geq g + l, & \underline{z} &\in \{-1, 1\}^n \setminus C, \\ -2 &\leq h_i \leq 2, & i &\in V, \\ -1 &\leq J_{ij} \leq 1, & (i, j) &\in E, \\ g &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что  $l$  есть энергия системы в так называемом основном состоянии (состоянии с минимальной энергией), а величина  $g$  представляет собой промежуток, который отделяет основное состояние от остальных (возбужденных) состояний. Чем больше  $g$ , тем больше вероятность получить основное состояние в результате выполнения КО и меньше время, требуемое для выполнения КО. Таким образом, если указанная задача (2) имеет решение, то результатом выполнения КО с соответствующей целевой функцией (1) при  $h, J$ , являющихся решением (2), будет с большой вероятностью один из элементов таблицы истинности  $C$ . Заметим, что, в связи со спиновым представлением энергии (1), значения булевых переменных кодируются следующим образом: «-1» – ИСТИНА, «1» – ЛОЖЬ.

Поясним кодирование одиночной логической операции (этап 2) на следующем примере.

**Пример 2.** Рассмотрим в качестве примера логическую операцию ИЛИ-НЕ (NOR), соответствующую булевой формуле  $F = \neg(x_0 \vee x_1)$ . Обозначим  $x_2$  выходное значение логической операции NOR, имеющей на входе значения  $x_0, x_1$ . Таблица истинности для соответствующей логической операции представлена в таблице 1. Таким образом, для логической операции ИЛИ-НЕ множество троек  $C$ , соответствующих таблице истинности, в задаче оптимизации (2) имеет вид

$$C = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1)\}.$$

Таблица 1. Таблица истинности операции ИЛИ-НЕ  $F = \neg(z_0 \vee z_1)$  в спиновой форме записи  
Table 1. Truth table of the NOR operation  $F = \neg(z_0 \vee z_1)$  in spin notation

$z_0$	$z_1$	$z_2$
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	1

Таким образом, нужно решить задачу ЛП (2) с переменными  $h_0, h_1, h_2, J_{01}, J_{02}, J_{12}, l, g$ . Для решения задачи ЛП воспользуемся пакетом **highs** для среды вычислений R. Решение имеет вид:  $h = (-0.5, -0.5, -1)$ ,  $J_{01} = 0.5, J_{02} = 1, J_{12} = 1, g = 2, l = -1.5$ . На рис. 1 представлено полученное решение в виде графа, где соответствующие веса  $h_i$  указаны для вершин  $i = 0, 1, 2$ , а веса  $J_{ij}$  указаны для ребер  $(i, j), i, j = 0, 1, 2$  (отметим, что граф полносвязный). Как показывает экспериментальная проверка на симуляторе машины D-Wave, решение задачи минимизации энергии (1) с помощью КО для полученных вектора  $h$  и матрицы  $J$  возвращает конфигурации спинов, которые составляют таблицу истинности (табл. 1).

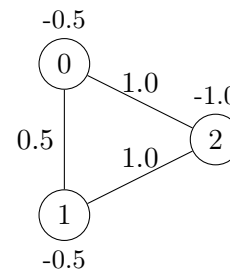


Рис. 1. Граф с весовыми коэффициентами, полученными путем решения задачи ЛП (2) для операции ИЛИ-НЕ

Fig. 1. Graph with weight coefficients obtained by solving the LP problem (2) for the NOR operation

Заметим, что задача (2) может не иметь решений. В этом случае может потребоваться добавление дополнительных вспомогательных переменных [4], однако обсуждение этой техники лежит за рамками данной статьи.

Для построения цепи из нескольких логических операций в [18] предлагается получить соответствующие коэффициенты для отдельных операций, а затем обеспечить, чтобы переменные в связанных логических операциях (например, выходная переменная одной операции, являющаяся входной для другой операции) принимали одно и то же значение. Для

этого устанавливается наибольший по модулю отрицательный весовой коэффициент  $J_{ij} = -1$  для всех пар  $i, j$  переменных, для которых требуется обеспечить равенство  $z_i = z_j$  (действительно, в этом случае  $J_{ij}z_i z_j$  принимает наименьшее значение).

Приведем пример объединения двух логических операций в логическую цепь (этап 3).

**Пример 3.** Рассмотрим булеву формулу  $F_2 = \neg(\neg(z_0 \vee z_1) \vee z_4)$ . Такая формула эквивалентна системе логических операций

$$\begin{cases} z_2 = \neg(z_0 \vee z_1), \\ z_5 = \neg(z_3 \vee z_4), \\ z_3 = z_2. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, логическая цепь строится на основе полученных в Примере 2 логических операций ИЛИ-НЕ путем добавления ребра с весовым коэффициентом  $J_{23} = -1$  между выходной переменной  $z_2$  первого логического элемента и входной переменной  $z_3$  второго логического элемента. Граф логической цепи для формулы  $F_2$ , построенный путем объединения графов, представлен на рис. 2.

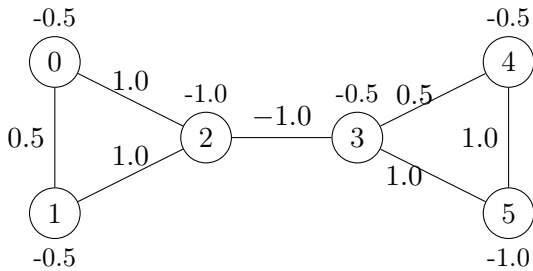


Рис. 2. Граф с весовыми коэффициентами, полученными путем решения задачи ЛП (2) и применения правил этапа 3 для булевой формулы  $F_2$   
Fig. 2. Graph with weights obtained by solving the LP problem (2) and applying the rules of stage 3 for the Boolean formula  $F_2$

Наконец, покажем пример постановки SAT-задачи (этап 4) на примере булевой формулы  $F_2$ , кодирование которой выполнено в Примере 3.

**Пример 4.** Для получения конфигурации спинов, при которой  $F_2$  истинна, следует добавить переменную  $z_6$ , эквивалентную выходной переменной  $z_5$  формулы  $F_2$ . Для того чтобы обеспечить минимизацию энергии при  $z_6 = -1$ , коэффициент  $h_6$  следует выбрать максимальным, т. е.  $h_6 = 2$  (для машины D-Wave). Наконец, аналогично этапу 3,

для обеспечения равенства  $z_5 = z_6$  выбираем  $J_{56} = -1$ . Граф логической цепи для SAT-задачи на основе формулы  $F_2$  представлен на рис. 3. Экспериментальная проверка на симуляторе машины D-Wave показывает, что решение задачи КО возвращает конфигурации переменных, которые составляют те строки таблицы истинности формулы  $F_2$  в форме (3) (табл. 2), при которых  $F_2$  истинно ( $F_2 = -1$ ). При 100 запусках КО возвращает конфигурацию  $\{-1, -1, 1, 1, 1, -1, -1\}$  30 раз,  $\{1, -1, 1, 1, 1, -1, -1\}$  – 34 раза,  $\{-1, 1, 1, 1, 1, -1, -1\}$  – 36 раз.

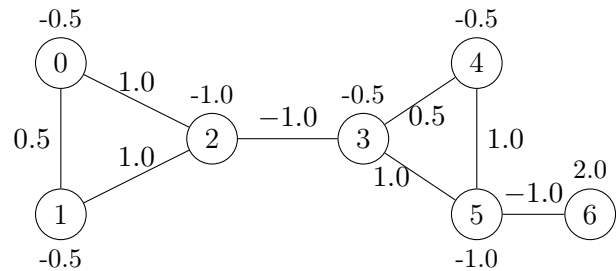


Рис. 3. Граф логической цепи для SAT-задачи на основе формулы  $F_2$   
Fig. 3. Logical circuit graph for SAT-problem based on formula  $F_2$

Таблица 2. Таблица истинности логической цепи, записанной в виде системы (3)  
Table 2. Truth table of a logical chain written as a system (3)

$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$
1	1	-1	-1	1	1
-1	1	1	1	1	-1
-1	-1	1	1	1	-1
-1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1
-1	1	1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	1

### ОСОБЕННОСТИ КОДИРОВАНИЯ ЦЕПИ ИЗ КВАНТОВЫХ ВЕНТИЛЕЙ

В отличие от классических логических цепей квантовые цепи состоят из квантовых вентилях, оперирующих на кубитах. Помимо базисных значений, традиционно обозначаемых  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , одиночные кубиты могут находиться в смешанном состоянии  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  – комплексные коэффициенты, такие что  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  (т. е. множество возможных значений кубита непрерывно). Кроме того,

несколько кубитов могут находиться в так называемом запутанном состоянии, т. е. состоянии, при котором значения кубитов при измерении являются зависимыми. Для таких цепей непосредственное применение метода кодирования, предложенного в [18], представляет ряд сложностей. В то же время такое кодирование позволило бы обеспечить решение задачи построения квантовой цепи минимальной длины, реализующей заданную функцию, например, с помощью метода, предложенного в работе [10]. Однако решение такой задачи потребует создания бинарного представления для всех возможных промежуточных значений кубитов квантовой цепи, что является открытой проблемой [3].

В данном разделе рассмотрим применение метода, представленного в разделе «Кодирование логических цепей с помощью квантового отжига», к кодированию простой квантовой цепи с бинарным входом и квантовыми вентилями, выходные значения которых также являются бинарными при бинарных входных значениях. В качестве таких вентилях выберем вентиль отрицания NOT и вентиль контролируемого отрицания CNOT. Заметим, что вентиль CNOT широко применяется в квантовых цепях и в так называемой обратимой логике. Вентиль имеет два входа и два выхода, при этом значение первого входа копируется на первый выход, а значение второго входа инвертируется (т. е. вместо  $|0\rangle$  на выход поступает  $|1\rangle$  и наоборот) в случае, если первый вход имеет значение истина, т. е. первый кубит находится в состоянии  $|1\rangle$ , в противном случае (если первый кубит равен  $|0\rangle$ ) второй выход копирует второй вход. Таблица истинности вентиля CNOT представлена в таблице 3.

Таблица 3. Таблица истинности вентиля CNOT с входными битами  $z_0, z_1$ , выходными битами  $z_2, z_3$  и дополнительным битом  $z_4 = z_0 \wedge z_1 \wedge z_2$

Table 3. Truth table of a CNOT gate with input bits  $z_0, z_1$ , output bits  $z_2, z_3$  and an extra bit  $z_4 = z_0 \wedge z_1 \wedge z_2$

$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1

В следующем примере выполним кодирование квантовой цепи с двумя кубитами, состоящей из последовательного применения вентиля CNOT с контрольным первым кубитом, а затем – применения вентиля отрицания NOT к первому кубиту. Поскольку рассматриваемая

цепь при бинарном входе имеет бинарный выход, удобно представить ее значения в виде таблицы истинности, представленной в таблице 4. Заметим, что нумерация входных и выходных кубитов в таблице 4 выполнена в соответствии с Примером 5.

Таблица 4. Таблица истинности цепи, состоящей из последовательного применения вентиля CNOT с контрольным первым кубитом, а затем применения вентиля отрицания NOT к первому кубиту

Table 4. Truth table of a chain consisting of successively applying a CNOT gate to the control first qubit, and then applying a NOT gate to the first qubit

$z_0$	$z_1$	$z_6$	$z_3$
1	1	-1	1
1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1
-1	-1	1	1

**Пример 5.** Выполним кодирование вентиля CNOT с двумя входами. Для значений кубитов примем следующие соглашения. Обозначим  $z_0 = 1$ , если первый входной кубит находится в состоянии  $|0\rangle$ , и  $z_0 = -1$ , если иначе. Аналогично закодируем значение второго входного и выходных кубитов. Заметим, что соответствующая задача ЛП (2) не имеет решения для переменных  $z_0, \dots, z_3$  и требует введения дополнительной переменной  $z_4 = z_0 \wedge z_1 \wedge z_2$ , полученной путем перемножения трех первых битов (о данном методе подробнее см. [4]). Решение (2) имеет следующий вид:

$$h = (0.75, 0.5, 0.75, -0.5, -2.0), \quad g = 1, \quad l = -4,$$

$$J = \begin{bmatrix} 0.25 & -1 & 0.5 & -1 \\ & 0.25 & -0.5 & -1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

(Для матрицы  $J$  указаны только значения верхнетреугольной подматрицы вследствие симметричности.) Экспериментальная проверка на 100 запусках КО показала, что значение  $\{-1, -1, -1, 1, -1\}$  было получено 21 раз,  $\{-1, 1, -1, -1, 1\}$  – 32 раза,  $\{1, -1, 1, -1, 1\}$  – 19 раз,  $\{1, 1, 1, 1, 1\}$  – 28 раз, т. е. кодирование вентиля выполнено верно.

Аналогично выполним кодирование операции NOT с входным кубитом  $z_5$  и выходным  $z_6$ . Решая задачу ЛП (2), получаем, что  $h_5 = h_6 = 0, J_{56} = 1, g = 2, l = -1$ .

Наконец, для кодирования цепи, состоящей из последовательных вентилях CNOT с контрольным первым кубитом и NOT, примененным к первому кубиту, приравняем первый



выходной кубит CNOT,  $z_2$ , и первый входной кубит,  $z_5$ , для чего, в соответствии с этапом 3 метода, представленного в разделе «Кодирование логических цепей с помощью квантового отжига», положим  $J_{25} = -1$ . Выходными кубитами квантовой цепи при этом будут кубиты  $z_3$  и  $z_6$ .

Используем полученные коэффициенты  $h, J$  для запуска КО. В результате 100 запусков КО значение  $\{1, -1, 1, -1, 1, 1, -1\}$  встречается 35 раз,  $\{-1, -1, -1, 1, -1, -1, 1\} - 27$  раз,  $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, -1\} - 21$  раз,  $\{-1, 1, -1, -1, 1, -1, 1\} - 17$  раз. Как можно убедиться, указанные значения соответствуют таблице истинности квантовой цепи, представленной в таблице 4. Таким образом, выполнено кодирование искомой квантовой цепи с бинарными входными и бинарным выходными значениями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены подходы к кодированию функциональности логических цепей и SAT-задач на их основе в виде соответствующих коэффициентов в модели Изинга и дальнейшего поиска решения с помощью КО. Экспериментально показано, что указанный подход может быть адаптирован для квантовых цепей с бинарным входным и бинарным выходным значением в случае, если все промежуточные состояния цепи также являются бинарными. Для обобщения данного подхода на универсальные квантовые цепи необходимо обеспечить конечность возможных промежуточных состояний цепи, однако такая возможность требует дальнейших исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Заикин О. С., Семенов А. А., Посыпкин М. А. Процедуры построения декомпозиционных множеств для распределенного решения SAT-задач в проекте добровольных вычислений SAT@HOME // Управление большими системами. 2013. Вып. 43. С. 138–156.
2. Заплетина М. А., Жуков Д. В., Гаврилов С. В. Методы анализа выполнимости булевых формул для современных задач систем автоматизации проектирования в микроэлектронике // Изв. вузов. Электроника. 2020. Т. 25, № 6. С. 525–538. doi: 10.24151/1561-5405-2020-25-6-525-538
3. Berent L., Burgholzer L., Wille R. Towards a SAT encoding for quantum circuits: A journey from classical circuits to Clifford circuits and beyond // Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik. 2022. Vol. 236. P. 1–17. doi: 10.4230/LIPICS.SAT.2022.18
4. Bian Z., Chudak F., Macready W., Aidan R., Sebastiani R., Varotti S. Solving SAT and MaxSAT with a quantum annealer: Foundations, encodings, and preliminary results // Inf. Comput. 2018. Vol. 275. Art. 104609. doi: 10.1016/j.ic.2020.104609
5. Cook S. A. The complexity of theorem-proving procedures // STOC'71: Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing. Association for Computing Machinery, New York, USA. 1971. P. 151–158. doi: 10.1145/800157.805047
6. D-Wave upgrades quantum chip to 2,000 qubits, gets first customer for its \$15 million machine // ZME Science [Электронный ресурс]. URL: <https://www.zmescience.com/science/news-science/d-wave-quantum-chip/> (дата обращения: 14.05.2023).
7. de Falco D., Apolloni B., Cesa-Bianchi N. A numerical implementation of quantum annealing // Conference: Stochastic Processes, Physics and Geometry. July 1988.
8. Formal logic [Электронный ресурс]. URL: [https://en.wikibooks.org/wiki/Formal\\_Logic](https://en.wikibooks.org/wiki/Formal_Logic) (дата обращения: 14.05.2023).
9. Goldberg E. I., Prasad M. R., Brayton R. K. Using SAT for combinational equivalence checking // Proceedings Design, Automation and Test in Europe. Conference and Exhibition 2001, Munich, Germany. 2001. P. 114–121. doi: 10.1109/DATE.2001.915010
10. Große D., Chen X., Dueck G., Drechsler R. Exact sat-based toffoli network synthesis // Proceedings of the 17th ACM Great Lakes Symposium on VLSI 2007, Stresa, Lago Maggiore, Italy. Association for Computing Machinery, New York, USA. 2007. P. 96–101. doi: 10.1145/1228784.1228812
11. IBM Unveils 400 Qubit-Plus Quantum Processor and Next-Generation IBM Quantum System Two // IBM Newsroom [Электронный ресурс]. URL: <https://newsroom.ibm.com/2022-11-09-IBM-Unveils-400-Qubit-Plus-Quantum-Processor-and-Next-Generation-IBM-Quantum-System-Two> (дата обращения: 14.05.2023).
12. McGeoch C. C. Adiabatic quantum computation and quantum annealing: Theory and practice // Synthesis Lectures on Quantum Computing. 2014. Vol. 5, no. 2. P. 1–93. doi: 10.1007/978-3-031-02518-1
13. Meuli G., Soeken M., De Micheli G. SAT-based {CNOT, T} Quantum circuit synthesis // Lecture Notes in Computer Science / Eds. J. Kari, I. Ulidowski. Vol. 11106. Cham: Springer Int. Publ., 2018. P. 175–188. doi: 10.1007/978-3-319-99498-7\_12
14. Nabeshima H., Inoue K. Reproducible efficient parallel SAT solving // SAT 2020: Theory and Applications of Satisfiability Testing. 2020. Vol. 12178. P. 123–138. doi: 10.1007/978-3-030-51825-7\_10



15. Nielsen M., Chuang I. Quantum computation and quantum information. 10th Anniversary Edition. New York: Cambridge Univ. Press, 2010. 704 p.

16. Schneider S., Burgholzer L., Wille R. A SAT Encoding for optimal Clifford circuit synthesis // ASPDAC'23: Proceedings of the 28th Asia and South Pacific Design Automation Conference. Association for Computing Machinery, New York, USA. 2023. P. 190–195. doi: 10.1145/3566097.3567929

17. Shor P. W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring // Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, USA. 1994. P. 124–134. doi: 10.1109/SFCS.1994.365700

18. Su J. Towards quantum computing: Solving satisfiability problem by quantum annealing // UCLA [Электронный ресурс]. 2018. URL: <https://escholarship.org/uc/item/8qp5200s> (дата обращения: 14.05.2023).

19. Su J., Tu T., He L. A quantum annealing approach for boolean satisfiability problem // DAC'16: Proceedings of the 53rd Annual Design Automation Conference. New York, 2016. Art. 148. doi: 10.1145/2897937.2897973

20. Venegas-Andraca S. E., Cruz-Santos W., McGeoch C., Lanzagorta M. A cross-disciplinary introduction to quantum annealing-based algorithms // Contemp. Phys. 2018. Vol. 59, no. 2. P. 174–197. doi: 10.1080/00107514.2018.1450720

21. Vizel Y., Weissenbacher G., Malik S. Boolean satisfiability solvers and their applications in model checking // Proceedings of the IEEE. 2015. Vol. 103, no. 11. P. 2021–2035. doi: 10.1109/JPROC.2015.2455034

22. Wille R., Przigoda N., Drechsler R. A compact and efficient SAT encoding for quantum circuits // 2013 Africon Pointe-Aux-Piments, Mauritius: IEEE. 2013. P. 1–6. doi: 10.1109/AFRCON.2013.6757630

23. Yarkoni S., Raponi E., Bäck T., Schmitt S. Quantum annealing for industry applications: Introduction and review // Reports on Progress in Physics. 2022. Vol. 85, no. 10. Art. 104001. doi: 10.1088/1361-6633/ac8c54

24. Zhang S., Malik S., McGeer R. Verification of computer switching networks: An overview // Automated Technology for Verification and Analysis - 10th International Symposium, ATVA 2012, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2012. Vol. 7561. P. 1–16. doi: 10.1007/978-3-642-33386-6\_1

## REFERENCES

1. Zaikin O. S., Semenov A. A., Posypkin M. A. Constructing decomposition sets for distributed solution of SAT problems in volunteer computing

project SAT@HOME. *Upravlenie bolshimi sistemami = Large-Scale Systems Control*. 2013;43:138–156. (In Russ.)

2. Zapletina M. A., Zhukov D. V., Gavrilov S. V. Boolean satisfiability methods for modern computer-aided design problems in microelectronics. *Izvestia vuzov. Elektronika = Proceedings of Universities. Electronics*. 2020;25(6):525–538. doi: 10.24151/1561-5405-2020-25-6-525-538 (In Russ.)

3. Berent L., Burgholzer L., Wille R. Towards a SAT encoding for quantum circuits: A journey from classical circuits to Clifford circuits and beyond. *Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik*. 2022;236:1–17. doi: 10.4230/LIPICS.SAT.2022.18

4. Bian Z., Chudak F., Macready W., Aidan R., Sebastiani R., Varotti S. Solving SAT and MaxSAT with a quantum annealer: Foundations, encodings, and preliminary results. *Inf. Comput.* 2018;275:104609. doi: 10.1016/j.ic.2020.104609

5. Cook S. A. The complexity of theorem-proving procedures. *STOC'71: Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*. Association for Computing Machinery, New York, USA. 1971. P. 151–158. doi: 10.1145/800157.805047

6. D-Wave upgrades quantum chip to 2,000 qubits, gets first customer for its \$15 million machine // ZME Science. URL: <https://www.zmescience.com/science/news-science/d-wave-quantum-chip/> (accessed: 14.05.2023).

7. de Falco D., Apolloni B., Cesa-Bianchi N. A numerical implementation of quantum annealing. *Conference: Stochastic Processes, Physics and Geometry*. July 1988.

8. Formal logic. URL: [https://en.wikibooks.org/wiki/Formal\\_Logic](https://en.wikibooks.org/wiki/Formal_Logic) (accessed: 14.05.2023).

9. Goldberg E. I., Prasad M. R., Brayton R. K. Using SAT for combinational equivalence checking. *Proceedings Design, Automation and Test in Europe. Conference and Exhibition 2001, Munich, Germany*. 2001;114–121. doi: 10.1109/DATE.2001.915010

10. Große D., Chen X., Dueck G., Drechsler R. Exact sat-based toffoli network synthesis // Proceedings of the 17th ACM Great Lakes Symposium on VLSI 2007, Stresa, Lago Maggiore, Italy. Association for Computing Machinery, New York, USA. 2007. P. 96–101. doi: 10.1145/1228784.1228812

11. IBM Unveils 400 Qubit-Plus Quantum Processor and Next-Generation IBM Quantum System Two // IBM Newsroom. URL: <https://newsroom.ibm.com/2022-11-09-IBM-Unveils-400-Qubit-Plus-Quantum-Processor-and-Next-Generation-IBM-Quantum-System-Two> (accessed: 14.05.2023).

12. McGeoch C. C. Adiabatic quantum computation and quantum annealing: Theory and practice. *Synthesis Lectures on Quantum Computing*. 2014;5(2):1–93. doi: 10.1007/978-3-031-02518-1

13. Meuli G., Soeken M., De Micheli G. SAT-based CNOT, T Quantum circuit synthesis. *Kari J., Ulidowski I. (eds.). Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 11106. Cham: Springer International Publishing, 2018. P. 175–188. doi: 10.1007/978-3-319-99498-7\_12
14. Nabeshima H., Inoue K. Reproducible efficient parallel SAT solving. *SAT 2020: Theory and Applications of Satisfiability Testing*. 2020;12178: 123–138. doi: 10.1007/978-3-030-51825-7\_10
15. Nielsen M., Chuang I. Quantum computation and quantum information. 10th Anniversary Edition. New York: Cambridge Univ. Press; 2010. 704 p.
16. Schneider S., Burgholzer L., Wille R. A SAT Encoding for optimal Clifford circuit synthesis. *ASPAC'23: Proceedings of the 28th Asia and South Pacific Design Automation Conference*. Association for Computing Machinery, New York, USA. 2023. P. 190–195. doi: 10.1145/3566097.3567929
17. Shor P. W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring // *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Santa Fe, USA. 1994. P. 124–134. doi: 10.1109/SFCS.1994.365700
18. Su J. Towards quantum computing: Solving satisfiability problem by quantum annealing. *UCLA*. 2018. URL: <https://escholarship.org/uc/item/8qp5200s> (accessed: 14.05.2023).
19. Su J., Tu T., He L. A quantum annealing approach for boolean satisfiability problem. *DAC'16: Proceedings of the 53rd Annual Design Automation Conference*. New York; 2016. Art. 148. doi: 10.1145/2897937.2897973
20. Venegas-Andraca S. E., Cruz-Santos W., McGeoch C., Lanzagorta M. A cross-disciplinary introduction to quantum annealing-based algorithms. *Contemp. Phys.* 2018;59(2):174–197. doi: 10.1080/00107514.2018.1450720
21. Vizek Y., Weissenbacher G., Malik S. Boolean satisfiability solvers and their applications in model checking. *Proceedings of the IEEE*. 2015;103(11): 2021–2035. doi: 10.1109/JPROC.2015.2455034
22. Wille R., Przigoda N., Drechsler R. A compact and efficient SAT encoding for quantum circuits. *2013 Africon Pointe-Aux-Piments, Mauritius: IEEE*. 2013. P. 1–6. doi: 10.1109/AFRCON.2013.6757630
23. Yarkoni S., Raponi E., Bäck T., Schmitt S. Quantum Annealing for Industry Applications: Introduction and Review // *Reports on Progress in Physics*. 2022;85(10):104001. doi: 10.1088/1361-6633/ac8c54
24. Zhang S., Malik S., McGeer R. Verification of computer switching networks: An overview. *Automated Technology for Verification and Analysis - 10th International Symposium, ATVA 2012, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2012;7561:1–16. doi: 10.1007/978-3-642-33386-6\_1

Поступила в редакцию / received: 15.05.2023; принята к публикации / accepted: 14.06.2023.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Мальцева Мария Алексеевна**  
младший научный сотрудник

*e-mail: masha.mariam.maltseva@mail.ru*

**Румянцев Александр Сергеевич**  
д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

*e-mail: ar0@krc.karelia.ru*

## CONTRIBUTORS:

**Maltseva, Mariya**  
Junior Researcher

**Rumyantsev, Alexander**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher

УДК 519.212.2+519.179.4

## О ГЛОБАЛЬНОМ КЛАСТЕРНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ИНТЕРНЕТ-ГРАФА

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматривается конфигурационный граф с  $N$  вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по степенному закону, зависящему от медленно меняющейся функции. Конфигурационные графы широко используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет. Параметр степенного распределения обычно выбирается так, что распределение степеней имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. Важной характеристикой топологии случайного графа является глобальный кластерный коэффициент. Он измеряет, в какой степени соседи вершин сами могут быть соседями друг другу. При  $N \rightarrow \infty$  доказана предельная теорема для кластерного коэффициента.

**Ключевые слова:** случайный конфигурационный граф; кластерный коэффициент; предельная теорема

Для цитирования: Павлов Ю. Л. О глобальном кластерном коэффициенте Интернет-графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 50–53. doi: 10.17076/mat1765

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### Yu. L. Pavlov. ON THE INTERNET-GRAPH CLUSTERING COEFFICIENT

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

We consider a configuration graph with  $N$  vertices whose degrees are independent and identically distributed according to the power law depending on a slowly varying function. Configuration graphs are widely used for modeling complex communication networks such as the Internet. The parameter of the power-law distribution is usually selected so that the vertex degree distribution has a finite expectation and infinite variance. An important characteristic of the topology of a configuration graph is the global clustering coefficient. Clustering measures the extent to which neighbours of vertices are also each other's neighbours. We prove the limit theorem for the clustering coefficient as  $N$  tends to infinity.

**Key words:** random configuration graph; clustering coefficient; limit theorem

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Конфигурационные графы часто используются в качестве моделей современных сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, системы мобильной связи, социальные сети и т. п. В таких графах предполагается, что степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Обозначим  $\xi$  случайную величину, равную степени любой вершины. Будем предполагать, что эта случайная величина имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k)}{k^\tau}, \quad (1)$$

где  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\tau > 1$ , а  $h(x)$  – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Допустим также, что функция  $h(x)$  локально ограничена, начиная с некоторого  $X > 0$ , т. е. при  $x \in [X, \infty)$ . Напомним, что функция называется локально ограниченной на некотором множестве, если она ограничена на любом компакте из этого множества [4].

Наблюдения за реальными сетями показали (см., например, [5]), что в большинстве случаев  $\tau \in (2, 3)$ , в том числе это верно и для сети Интернет, поэтому иногда такие модели называют Интернет-графами (например, в [3]). Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее занумерованных полуребер. Ребра графа образуются путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом. Сумма степеней вершин графа должна быть четной, поэтому в случае необходимости в граф вводится дополнительная вершина единичной степени, что не влияет на асимптотическое поведение основных числовых характеристик, если число вершин стремится к бесконечности. Очевидно, что такая конструкция графа допускает появление кратных ребер и петель.

В современной литературе, посвященной случайным графам, значительное внимание уделяется изучению их структуры (см. книгу [5] и библиографию в ней). Важными характеристиками структуры служат, в частности, различные кластерные коэффициенты. Обычно выделяют глобальный, локальный и средний кластерные коэффициенты [6, 7]. Рассмотрим

конфигурационный граф  $G = G(V, E)$ , в котором множество  $V$  состоит из  $N$  вершин, а  $E$  – множество ребер. В статье [1] при  $N \rightarrow \infty$  изучалось предельное поведение глобального кластерного коэффициента графа  $G$ , в котором распределение случайной величины  $\xi$  задавалось так, что при  $k \rightarrow \infty$

$$h(k) \sim (\ln k)^{-\alpha}, \quad (2)$$

где  $\alpha \geq 0$ . Легко видеть, что распределение со свойством (2) является частным случаем (1). В настоящей статье будет найдена асимптотика кластерного коэффициента в общем случае распределения (1), в котором  $\tau \in (2, 3)$ .

Дадим определение глобального кластерного коэффициента, следуя [5]. Обозначим  $i, j, t$  три разные вершины графа и будем отождествлять вершины с их номерами. Обозначим  $S(i, j, t)$  событие, состоящее в том, что в  $E$  присутствуют ребра, соединяющие  $i$  с  $j$  и  $j$  с  $t$ . Тогда эти два ребра являются смежными и имеют общую вершину  $j$ . Пусть  $W_G$  означает число всех таких пар смежных ребер. Обозначим  $I(U)$  индикатор события  $U$ . Тогда

$$\begin{aligned} W_G &= \sum_{1 \leq i, j, t \leq N} I(S(i, j, t)) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j < t \leq N} I(S(i, j, t)). \end{aligned}$$

Пусть  $T(i, j, t)$  – событие, состоящее в том, что произошло событие  $S(i, j, t)$  и, кроме того, в  $E$  есть ребро, соединяющее  $i$  и  $t$ . Понятно, что событие  $T(i, j, t)$  означает, что вершины  $i, j, t$  образуют треугольник. Тогда число треугольников в графе равно

$$\begin{aligned} \Delta_G &= \sum_{1 \leq i, j, t \leq N} I(T(i, j, t)) \\ &= 6 \sum_{1 \leq i < j < t \leq N} I(T(i, j, t)). \end{aligned}$$

Глобальным кластерным коэффициентом  $C_G$  графа  $G$  называется отношение утроенного числа различных треугольников к числу различных пар смежных ребер. Следовательно,

$$C_G = \frac{\Delta_G}{W_G}. \quad (3)$$

Это равенство позволяет рассматривать кластерный коэффициент как вероятность того, что если ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ , смежно с ребром, соединяющим  $j$  и  $t$ , то вершины  $i$  и  $t$  тоже соединены ребром. Заметим, что число треугольников, образованных тремя выбранными вершинами, может быть больше одного, если ребра между вершинами окажутся кратными. Это число равно произведению кратностей всех ребер треугольника.

В следующем разделе будет доказана предельная теорема о поведении кластерного коэффициента при  $N \rightarrow \infty$ . В последнем разделе статьи обсуждается следствие этой теоремы.

### АСИМПТОТИКА ГЛОБАЛЬНОГО КЛАСТЕРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

В дальнейшем нам потребуется знать предельное распределение максимальной степени вершины. Обозначим  $\xi_1, \dots, \xi_N$  случайные величины, равные степеням вершин  $1, \dots, N$  соответственно, и пусть

$$\xi_{(N)} = \max_{1 \leq i \leq N} \xi_i. \quad (4)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $z$  – фиксированное положительное число, а  $u$  – решение уравнения

$$u = h \left( \left( \frac{Nu}{(\tau-1)z} \right)^{\frac{1}{\tau-1}} \right). \quad (5)$$

Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_{(N)} < \left( \frac{Nu}{(\tau-1)z} \right)^{\frac{1}{\tau-1}} \right\} \rightarrow e^{-z}.$$

*Доказательство.* Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} < x\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < x, \dots, \xi_{(N)} < x\} = (1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\})^N. \quad (6)$$

Из (1) и [2, гл. VIII, § 9, теорема 1, а] следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\} = \frac{h(x)}{(\tau-1)x^{\tau-1}}(1 + o(1)). \quad (7)$$

Из (5) и (6) следует утверждение леммы, если в (7) положить

$$x = \left( \frac{Nu}{(\tau-1)z} \right)^{\frac{1}{\tau-1}}.$$

□

Поскольку  $\tau \in (2, 3)$ , очевидно, что распределение (1) имеет конечное математическое ожидание:

$$m = \mathbf{E}\xi. \quad (8)$$

Пусть в графе  $G$  существует ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$ ,  $i \neq j$ . Степень вершины  $i$  задается случайной величиной  $\xi_i$  с распределением (1). Предположим, что степень вершины  $j$  равна  $k+1$ , при этом как минимум одно ребро соединяет  $i$  с  $j$ . Поскольку это ребро может быть образовано любым из  $k+1$ -го полуребра вершины  $j$ , в [7] доказано, с учетом (4) и (8), что распределение степени вершины  $j$  без учета этого ребра имеет вид:

$$q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{m}, \quad k = 0, 1, \dots, \xi_{(N)} - 1. \quad (9)$$

Далее заметим, что если вершины  $i$  и  $j$  имеют степени  $k_i$  и  $k_j$  соответственно, то число способов образовать соединяющие их ребра равно  $k_i k_j$ . Опираясь на это свойство, в [7] удалось доказать, что кластерный коэффициент (3) можно выразить следующим образом:

$$C_G = \frac{(\sum_{k=1}^{\xi_{(N)}-1} kq_k)^2}{Nm}. \quad (10)$$

Теперь мы можем доказать основной результат статьи, который сформулирован ниже в виде теоремы. В ней учтено, что, как следует из леммы, максимальная степень вершины в графе  $G$  пропорциональна  $(Nu)^{1/(\tau-1)}$ .

**Теорема.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $\tau \in (2, 3)$ ,  $\xi_{(N)} = v(Nu)^{1/(\tau-1)}$ ,  $0 < v < \infty$ . Тогда

$$C_G \sim \left( \frac{(vu^{\frac{1}{\tau-1}})^{3-\tau} h(v(Nu)^{\frac{1}{\tau-1}})}{3-\tau} \right)^2 \frac{N^{\frac{7-3\tau}{\tau-1}}}{m^3}.$$

*Доказательство.* Из (1), (9) следует, что при достаточно большом  $A > 0$

$$\sum_{k=1}^{\xi_{(N)}-1} kq_k = C + \frac{1 + o(1)}{m} \sum_{k=A}^{\xi_{(N)}-1} \frac{h(k)}{k^{\tau-2}}, \quad (11)$$

где  $C$  – некоторая положительная постоянная. Из [4, утверждение 1.5.8] следует, что

$$\sum_{k=A}^{\xi_{(N)}-1} \frac{h(k)}{k^{\tau-2}} \sim \frac{(\xi_{(N)})^{3-\tau} h(\xi_{(N)})}{3-\tau}. \quad (12)$$

Хорошо известно свойство медленно меняющихся функций, состоящее в том, что при достаточно больших  $x$  и любом  $\delta > 0$

$$x^{-\delta} < h(x) < x^{\delta}.$$

Используя это свойство, из (5) нетрудно получить, что для любого  $\delta > 0$  существует  $\theta = \theta(\delta)$  такое, что  $-\delta < \theta < \delta$  и

$$u = N^{\theta}. \quad (13)$$



Поскольку  $\xi_{(N)} = v(Nu)^{1/(\tau-1)}$ , из (12), (13) видим, что при  $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=A}^{\xi_{(N)}-1} \frac{h(k)}{k^{\tau-2}} \rightarrow \infty,$$

поэтому из (10) и (11) получаем утверждение теоремы.  $\square$

### Следствие теоремы

Сравнивая доказанную в предыдущем разделе теорему с утверждением 4 теоремы из статьи [1], приходим к выводу, что кластерный коэффициент  $C_G$  в графе с распределением (1) степеней вершин ведет себя аналогично кластерному коэффициенту графа, в котором медленно меняющаяся функция удовлетворяет соотношению (2). Это значит, что если  $\tau > 7/3$ , то  $C_G \rightarrow 0$ , а если  $\tau < 7/3$ , то  $C_G \rightarrow \infty$ . Эта особенность объясняется тем, что при малых значениях  $\tau$  в графе образуется много кратных ребер и, следовательно, появится много дополнительных треугольников. Из доказанного следует, что поведение  $C_G$  зависит от медленно меняющейся функции  $h(x)$  и, как в [1], для каждой  $h(x)$  существует такое значение  $\tau$ , при котором кластерный коэффициент стремится к константе. По-видимому, впервые такие свойства глобального кластерного коэффициента конфигурационного графа были замечены в [7], где распределение (1) степени любой вершины задавалось простейшим образом путем замены медленно меняющейся функции  $h(x)$  на нормирующую константу  $1/\zeta(\tau)$ , где  $\zeta(\tau)$  – значение дзета-функции Римана в точке  $\tau$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Ю. Л. Об асимптотике кластерного коэффициента конфигурационного графа с неизвестным распределением степеней вершин // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, вып. 3. С. 9–13. doi: 10.14357/19922264190302
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

3. *Alvares-Hamelin J. I., Dall'Astra L., Barrat A., Vespignani A.* K-core decomposition of Internet-graphs: hierarchies, self-similarity and measurement biases // *Networks and heterogeneous media*. 2008. Vol. 3, iss. 2. P. 371–393. doi: 10.3934/nhm.2008.3.371

4. *Bingman N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 513 p. doi: 10.1017/CBO9780511721434

5. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

6. *Newman M. E. J.* Networks. An Introduction. Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. 772 p. doi: 10.1162/artl\_r\_00062

7. *Newman M. E. J.* The structure and function of complex networks // *SIAM Rev.* 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

### REFERENCES

1. *Pavlov Yu. L.* On the asymptotics of clustering coefficient in a configuration graph with unknown distribution of vertex degrees. *Informatika i ee primeneniya = Informatics and applications*. 2019;13(3):9–13. doi: 10.14357/19922264190302 (In Russ.)
2. *Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2. New York: John Wiley; 1991. 704 p.
3. *Alvares-Hamelin J. I., Dall'Astra L., Barrat A., Vespignani A.* K-core decomposition of Internet-graphs: hierarchies, self-similarity and measurement biases. *Networks and heterogeneous media*. 2008;3(2):371–393. doi: 10.3934/nhm.2008.3.371
4. *Bingman N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1987. 513 p. doi: 10.1017/CBO9780511721434
5. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
6. *Newman M. E. J.* Networks. An Introduction. Oxford: Oxford Univ. Press; 2010. 772 p. doi: 10.1162/artl\_r\_00062
7. *Newman M. E. J.* The structure and function of complex networks. *SIAM Review*. 2003;45(2): 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

Поступила в редакцию / received: 09.04.2023; принята к публикации / accepted: 12.05.2023.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Павлов Юрий Леонидович**  
д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

### CONTRIBUTOR:

**Pavlov, Yury**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher

УДК 004.4 : 656 (1-21) (470.22-25)

## ВЕБ-СЕРВИС ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДОРОЖНОЙ СЕТИ ГОРОДА ПЕТРОЗАВОДСКА

В. А. Хитрая, А. В. Хитрый\*

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910), \*andrey.khitryy@gmail.com*

В работе приведено описание программного комплекса, позволяющего визуализировать информацию о состоянии транспортной сети города Петрозаводска. Описана архитектура системы, приведен список источников открытых данных, использованных для построения модели.

Ключевые слова: веб-сервис; программный комплекс; транспортная сеть

Для цитирования: Хитрая В. А., Хитрый А. В. Веб-сервис для визуализации дорожной сети города Петрозаводска // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 54–63. doi: 10.17076/mat1780

Финансирование. Исследование проводилось совместно с органами власти Республики Карелия, при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22–11–20015) и Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия.

### V. A. Khitraya, A. V. Khitryy\*. WEB SERVICE FOR THE PETROZAVODSK ROAD NETWORK VISUALIZATION

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian  
Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia),  
\*andrey.khitryy@gmail.com*

The paper describes a software that allows to visualize information about the state of the transport network of the city of Petrozavodsk. The architecture of the system is described and the list of open data sources used to build the model is provided.

Keywords: web service; software; transport network

For citation: Khitraya V. A., Khitryy A. V. Web service for the Petrozavodsk road network visualization. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2023;4:54–63. doi: 10.17076/mat1780

Funding. The study was carried out in collaboration with the Republic of Karelia authorities with financial support from the Russian Science Foundation (grant # 22–11–20015) and the Venture Investment Fund of the Republic of Karelia.

### ВВЕДЕНИЕ

Состояние транспортной системы города крайне важно для его социально-экономического развития, поскольку транс-

портная инфраструктура напрямую влияет на качество жизни каждого жителя. Анализ состояния транспортной системы является решающим этапом для выявления существующих

щих проблем, а также прогнозирования возможных проблем в будущем. Такой анализ может быть существенно упрощен при обеспечении достаточного уровня наглядности, что позволит легко и быстро оценивать текущее состояние системы.

Однако информация о состоянии транспортной системы (например, города Петрозаводска) представлена в не связанных между собой источниках, а иногда практически недоступна без дополнительной обработки. В связи с этим возникает необходимость создания системы, способной объединить в себе данные о структуре транспортной сети, распределении жителей и организаций, характеристиках дорог, а также оценки загруженности транспортной сети, основанные на построении матрицы корреспонденций и мерах центральности. Результаты построения матрицы корреспонденций для г. Петрозаводска представлены в работе [7].

В данной работе представлено описание программного продукта для автоматизированной генерации графа транспортной сети и моделирования транспортных процессов на примере города Петрозаводска, в котором необходимые вычисления могут быть встроены в итерационное построение модели и не требуют ручного вмешательства. Разработанный программный комплекс позволяет повысить качество и эффективность анализа транспортной сети города.

## АРХИТЕКТУРА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Наибольший интерес для разработки представляет система, которая могла бы в автоматическом режиме обновлять дорожный граф при изменении любого набора входных данных, а также осуществлять анализ модели после каждого ее изменения.

Чтобы предоставить возможность вносить изменения в процесс построения графа и визуализировать дорожную сеть на любом этапе, система разделена на несколько независимых модулей:

1. Модуль дорожного графа обновляет информацию о дорожной сети.
2. Модули обновления данных насыщают граф необходимой информацией (параметры ребер и вершин).
3. Вычислительные модули выполняют расчет характеристик графа.
4. Модуль визуализации отображает граф со всеми его характеристиками и позво-

ляет просматривать параметры отдельных элементов графа.

На рис. 1 представлена высокоуровневая архитектура решения.

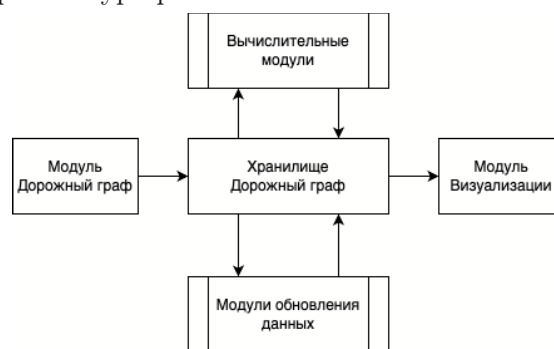


Рис. 1. Высокоуровневая архитектура системы  
Fig. 1. High-level system architecture

Стоит отметить, что визуализация возможна на любом из этапов работы модели, начиная от получения исходного графа и далее на каждом этапе работы конкретного модуля. Это позволяет итерационно оценивать результаты работы.

Модули 1–3 являются вычислительным ядром системы и написаны на языке программирования Python. Модуль 4 является веб-сервисом и написан на языке программирования JavaScript.

Для удобства работы в различных пакетах программ информация о графе хранится в формате GEXF. Существует множество библиотек для различных языков программирования, позволяющих обрабатывать данный формат. Кроме того, он позволяет хранить не только структуру графа, но и дополнительные данные о вершинах и ребрах.

## МОДУЛЬ ДОРОЖНОГО ГРАФА

Множество сервисов предоставляют актуальные и точные карты (Яндекс.Карты, 2GIS и др.), но их невозможно получить в виде набора данных для построения графа, т. к. это не предусмотрено лицензиями на использование сервиса, а применение автоматизированных сборщиков данных является нарушением пользовательского соглашения.

В то же время существуют проекты открытых данных, которые собирают и актуализируют информацию, в том числе о дорожных сетях. Одним из наиболее известных проектов является Open Street Map, некоммерческий проект, цель которого – создание географической карты с помощью интернет-пользователей.

В работе [6] представлен автоматизированный способ построения графа для дальнейшей работы с ним при помощи пакета NetworkX [9]. Разработанная авторами библиотека позволяет получить ориентированный граф для любого географического объекта с необходимым типом дорог.

В данной работе при построении модели транспортной сети города Петрозаводска построен граф, ребра которого соответствуют дорогам с возможностью движения автомобильного транспорта, вершины графа соответствуют перекресткам автомобильных дорог (листинг 1).

*Листинг 1.* Получение дорожного графа из OpenStreetMap

```
og = graph_from_place(
    query = 'Petrozavodsk, Russia',
    network_type='drive'
)
ogn = og.nodes(data=True)
oge = og.edges(data=True)
```

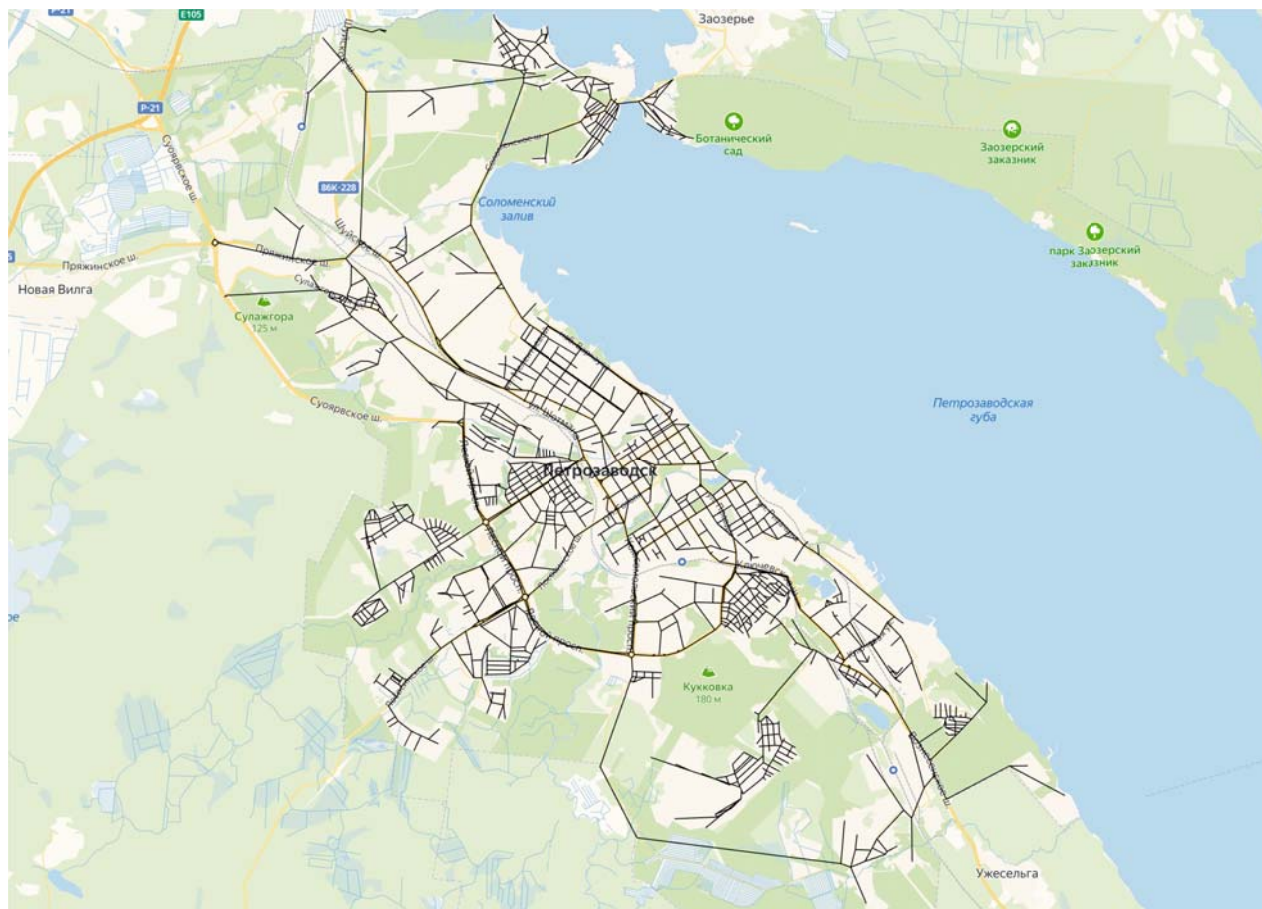
Поскольку дальнейшие вычисления предполагают работу с неориентированным гра-

фом, полученный ориентированный граф был преобразован с помощью объединения параллельных ребер. Данные о вершинах содержат географическую широту и долготу, что позволяет соотносить дополнительные данные, имеющие географическую привязку, с вершинами и ребрами графа (листинг 2).

*Листинг 2.* Преобразование графа к неориентированному виду

```
g = nx.Graph()
nodes = [(n[0], {
    'lon': n[1]['x'],
    'lat': n[1]['y'],
}) for n in ogn]
edges = [(e[0], e[1], {
    'id': f'{e[0]}_{e[1]}',
    'name': str(e[2].get('name', None)),
}) for e in oge]
```

Результат работы модуля дорожного графа представлен на рис. 2. Граф дорожной сети города Петрозаводска содержит 1531 вершину и 2081 ребро.



*Рис. 2.* Дорожный граф города Петрозаводска  
*Fig. 2.* Road graph of the city of Petrozavodsk



## Модули обновления данных

### Данные о жителях города

При моделировании транспортной системы критически важным является понимание распределения транспортных потоков между узлами транспортной сети. Для построения модели перемещения жителей по транспортной сети необходимо вычислить вектор исходящих коммуникаций, описывающий число жителей, маршруты которых начинаются в вершинах графа. Согласно переписи населения РФ за 2021 год [2], население Петрозаводского городского округа составляет 234 897 человек. Однако достоверной информации о распределении жителей по адресам проживания нет в открытом доступе.

На портале Реформа ЖКХ [1] представлена информация о домах Республики Карелия, которая раскрывается в рамках Постановления Правительства РФ от 23 сентября 2010 года № 731 «Об утверждении стандарта раскрытия информации организациями, осуществляющими деятельность в сфере управления многоквартирными домами». По каждому дому выгрузка содержит адрес в соответствии с ФИАС, а также технические характеристики здания. Если принять за допустимое приближение, что в среднем в жилом помещении проживает равное число человек, то такие данные можно использовать для приближенной оценки плотности населения в конкретной части города.

При обработке данных, представленных на портале Реформа ЖКХ (листинг 3), используются следующие поля: `id` (идентификатор здания), `city` (город), `street` (улица), `house` (номер дома), `building` (номер строения), `block` (корпус), `letter` (литера), `address` (строка адреса), `quarters_count` (число помещений), `living_quarters_count` (число жилых помещений).

*Листинг 3.* Обработка данных о количестве жилых помещений

```
CITY = 'Петрозаводск'

f = open(HOUSES_DATA, 'r', newline='')
r = csv.reader(f, delimiter=";")
header = next(r)

houses = filter(
    is_valid_house,
    map(lambda row: {
        'id': str(row[0]),
        'city': row[10],
        'street': row[12],
        'house': row[13],
```

```
        'building': row[14],
        'block': row[15],
        'letter': row[16],
        'address': row[17],
        'quarters_count': row[31],
        'living_quarters_count': row[32]
    },
    [row for row in r if row[10] == CITY])
)
```

Пусть  $q_i$  – число помещений в здании, общее число жилых помещений  $Q = \sum q_i$ , а общее число жителей в Петрозаводске равно  $C$ , тогда число жителей в помещении  $c_i$ :

$$c_i = \frac{C}{Q} \cdot q_i.$$

Для привязки данных о жителях к вершинам моделируемого графа координаты зданий, находящихся на территории Петрозаводского городского округа, были определены с помощью сервисов обратного геокодирования, где по текстовому адресу возвращаются координаты. Далее на основе кратчайшего расстояния каждое здание было привязано к вершине графа. Число жителей, проживающих в непосредственной близости от вершины графа, интерпретируется как вес вершины.

На рис. 3 представлена тепловая карта распределения жителей. Большой размер вершины соответствует большему весу.

### Данные об организациях

Для построения вектора входящих коммуникаций необходима информация о точках интереса – объектах, в которые направляются участники движения. В простейшем случае в качестве таких объектов могут выступать места работы и учебы жителей.

Сведения об организациях города могут быть получены из открытых данных, которые предоставляют налоговые службы. Но эти сведения не могут быть использованы в модели по следующим причинам:

1. Юридический адрес организации может не совпадать с физическим адресом офиса, предприятия, торговой точки.
2. Отсутствует информация об учреждениях образования и здравоохранения и других подобных организациях.
3. Большое количество данных об ИП, которые могут иметь адрес в жилых домах.
4. Неочевидно влияние организаций на дорожный трафик жителей города.



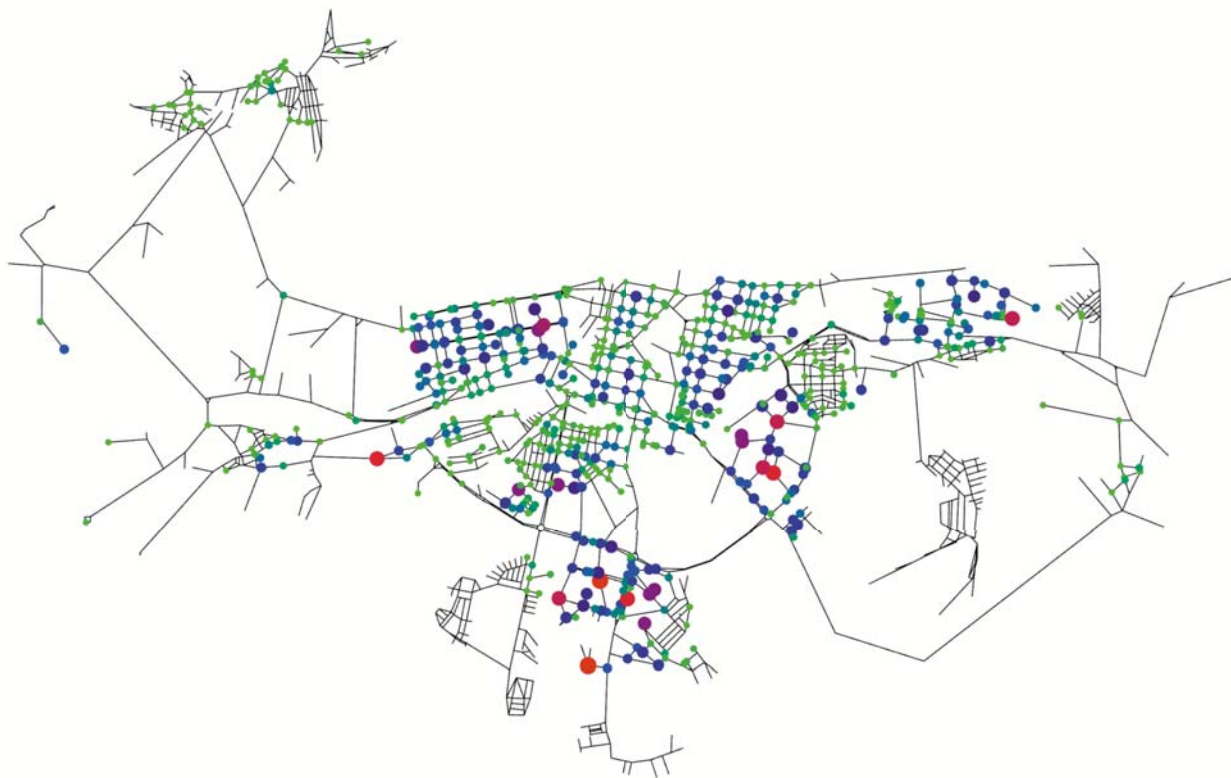


Рис. 3. Тепловая карта распределения жителей  
 Fig. 3. Heatmap of population distribution

В сервисе OpenStreetMap, который был использован ранее для построения дорожного графа, также присутствует информация об организациях. Она может быть неполной, т. к. заполняется исключительно силами сообщества, но имеет несколько важных параметров, которые позволяют включить ее в модель:

1. Для каждой организации на карте можно определить тип и подтип (например, тип медицина, подтип ветеринарная клиника). Это позволяет задать вес каждой организации в городе в соответствии с предполагаемым количеством людей, которые посещают данную организацию.
2. Имеются данные о географическом положении.
3. Возможно получение данных о более широком классе объектов, таких как заправки, почтовые отделения и прочие места, посещаемые жителями в течение дня.

Для получения этих данных использован сервис Overpass API [5], который позволяет выполнять запросы к OpenStreetMap при помощи языка запросов Overpass. Для модели использованы поля `name` (имя объекта), `tags`

(параметры объекта, включая его тип и подтип), а также географическая широта и долгота. Как и в случае с жилыми домами, на основании географических координат объектов была произведена привязка организаций к узлам графа.

Были выбраны все объекты, описание которых содержало такие значения, как, например, офис, образовательное учреждение, торговый центр и т. п. (листинг 4). Для каждого типа объектов был выбран вес, основанный как на приблизительном количестве сотрудников, обычно работающих в организациях такого типа, так и на привлекательности подобных организаций для посетителей. Так, количество сотрудников и поток посетителей в городскую поликлинику или школу будет превышать аналогичные показатели для торговой организации. Значение веса выбиралось из полуинтервала  $(0, 1]$ . Каждому узлу была поставлена в соответствие дополнительная характеристика «вес организаций», которая представляет собой взвешенную по типам сумму числа организаций, привязанных к данному узлу.

Для построения запроса к Overpass API в качестве области поиска выбран город Петрозаводск, выбраны все вершины, ребра и отно-

шения в этой области, которые имеют необходимые типы.

Листинг 4. Запрос к Overpass API для получения объектов необходимого типа

```
[out:json];
area[place=city]
[name = "Петрозаводск"]->.a;
nwr["{feature}"="{filter}"]
(area.a);
out center meta;
```

Пример структуры данных объекта «Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук», полученной в резуль-

тате выполнения запроса, приведен ниже (листинг 5).

Листинг 5. Пример ответа Overpass API

```
{
  "lat": 61.7911192,
  "lon": 34.3793148,
  "name": "КарНЦ_РАН",
  "feature_name": "amenity",
  "feature_value": "research_institute",
  "weight": "1"
},
```

На рис. 4 представлена тепловая карта распределения организаций по вершинам графа. Большой размер узла соответствует большому значению взвешенной суммы организаций.



Рис. 4. Тепловая карта распределения организаций  
Fig. 4. Organization distribution heatmap

### Дополнительные данные о дорогах

Разрабатываемая модель должна включать в себя некоторые характеристики дорог, такие как число полос, протяженность отрезка дороги, соответствующего ребру графа, максимально разрешенная скорость, время проезда по пустой дороге, а также пропускная способность отрезка дороги. На рис. 5 представлен пример вывода информации о ребре графа.

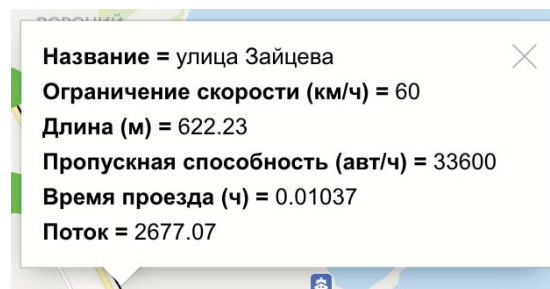


Рис. 5. Параметры ребра  
Fig. 5. Edge parameters

Физические характеристики дорог, а также максимально разрешенная скорость движения по участкам дорог были получены на первом этапе при построении графа с помощью OpenStreetMap. Информация о числе полос содержится в поле `lanes`, протяженность участков дороги – в поле `length`, для определения, является ли дорога односторонней, использовался флаг `oneway`.

Значение максимальной скорости может быть представлено как в числовом виде, так и в виде строк `RU:urban`, `RU:rural`, `RU:default`, которые для дорог Российской Федерации определяют скорость соответственно 60, 90 и 60. Ассоциативный массив `ms` представлен в листинге 6.

*Листинг 6.* Сопоставление строчного и числового представлений скорости

```
ms = {
    'RU:urban': 60,
    'RU:rural': 90,
    'RU:default': 60
}
```

Поле со значением `maxspeed` может содержать несколько значений, поэтому для определения числового значения скорости необходимо выполнить простое преобразование (листинг 7).

*Листинг 7.* Определение числового значения максимальной скорости

```
raw = e.get('maxspeed', 'RU:default')
speed_limit = 0
if(isinstance(raw, list)):
    for limit in raw:
        if(limit.isdigit()):
            speed_limit = int(limit)
            break
    else:
        speed_limit = ms.get(raw)
elif raw.isdigit():
    speed_limit = int(raw)
else:
    speed_limit = ms.get(raw)
```

Приоритетным считается значение скорости, заданное в числовом виде; если же оно не может быть получено, используется предопределенное значение, соответствующее полученной строке.

Время проезда по пустой дороге вычисляется как  $t_{min} = l/s_{max}$ , где  $l$  – это длина ребра, а  $s_{max}$  – максимально допустимая скорость на этом участке.

Для оценки пропускной способности дорог использованы методические рекомендации Федерального дорожного агентства (Росавтодор). Однако эти рекомендации учитывают

большое число параметров, таких как продольный уклон или радиус кривой в плане. Поскольку подобные данные недоступны, было принято решение упростить формулу для расчета, основываясь на доступных характеристиках дорог г. Петрозаводска. Пропускная способность на ребре графа вычислялась по формуле

$$P = nP_{max}f_v,$$

где  $n$  – число полос в одном направлении,  $P_{max}$  – величина максимальной практической пропускной способности, связанная с числом полос и наличием разделительной полосы,  $f_v$  – коэффициент, учитывающий ограничение скорости.

## Вычислительные модули

В архитектуру программного комплекса могут быть включены вычислительные модули, принимающие в качестве входных данных граф со всеми его характеристиками. В результате работы модуля граф обогащается дополнительными параметрами. В качестве примера можно привести модуль расчета меры центральности вершин графа, основанного на методе PageRank [10] (листинг 8). Для вычисления значений центральности вершин значения весов ребер выбираются равными величинам, обратным длинам соответствующих участков дорог.

*Листинг 8.* Пример реализации вычислительного модуля

```
for e in G.edges(data=True):
    e[2]['li'] = 1.0 / e[2]['length']
pr_w = nx.pagerank(g, weight='li')

nodes = g.nodes(data=True)
for (i, n) in enumerate(nodes):
    n[1]['pr'] = pr_w[i]
```

На рис. 6 представлено распределение значений центральности вершин графа дорожной сети города Петрозаводска. Большой размер вершины соответствует большему значению PageRank.

Поскольку программный комплекс имеет модульную структуру, возможно подключить любой вычислительный модуль, который будет выполнять необходимое преобразование графа и сохранять его в хранилище. Для визуализации полученных результатов достаточно добавить идентификатор нужного значения в список доступных отображений.



Рис. 6. Распределение значений центральности по методу PageRank  
 Fig. 6. Distribution of centrality values according to the PageRank method

### Модуль визуализации

Модуль визуализации позволяет отображать результаты работы программного комплекса и представляет собой веб-сервис, который выполняет функции отображения всех параметров графа с использованием наглядных цветовых схем. Кроме того, модуль предоставляет возможность настройки параметров отображения и выбора необходимого слоя (рис. 7).

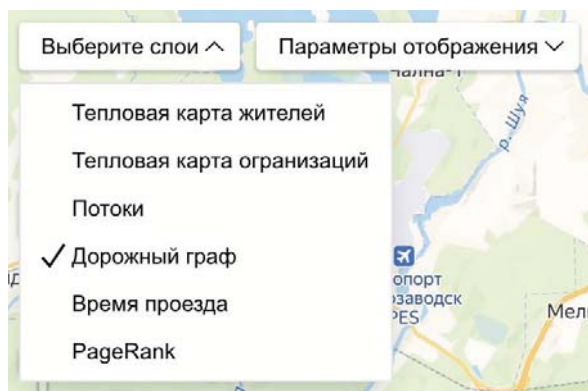


Рис. 7. Параметры отображения  
 Fig. 7. Mapping parameters

Также он позволяет просматривать значения параметров для отдельных ребер и вер-

шин дорожного графа. На рис. 8 приведен пример отображения параметров вершины, соответствующей перекрестку улицы Антикайнена и проспекта Ленина.

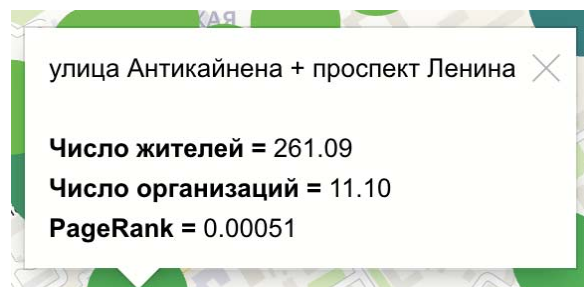


Рис. 8. Параметры вершины  
 Fig. 8. Vertex parameters

Модуль написан на языке программирования JavaScript с использованием библиотеки React [4]. В качестве основы использована библиотека API Яндекс Карт [3] сервиса Яндекс.Карты, с помощью которой реализован функционал по отображению ребер и вершин графа, их стилизации по цвету и размеру. Работа со структурой графа реализована при помощи библиотеки Graphology [8], которая в том числе позволяет загружать графы в формате GEXF.



Для визуализации вершин графа используется тепловая карта. Для каждого слоя задается параметр вершины, например, число организаций или жителей, и на основе его положения относительно максимального и минимального значения этого параметра формируется размер и цвет вершины. В листинге 9: *c* – подпись для всплывающего окна, *v* – значение параметра, *mv* – максимальное значение параметра.

Листинг 9. Построение элемента тепловой карты

```
createCircle(lat, lon, c, v, mv) {
  const color = gradientArray[
    Math.ceil((maxGrad / mv) * v)
  ];
  return new window.ymaps.Circle(
    [
      [lat, lon],
      minSize + (maxSize / mv) * v
    ],
    {
      balloonContentBody: c
    },
    {
      draggable: false,
      fillColor: color,
      strokeColor: "#000000",
      strokeWidth: 0,
    }
  );
}
```

Программно задаются градиент и разброс радиуса (листинг 10).

Листинг 10. Градиент и радиус элемента тепловой карты

```
const maxSize = 80;
const minSize = 50;
const maxGrad = 19.0;
const gradientArray = new Gradient()
  .setColorGradient(
    "#00FF00",
    "#0000FF",
    "#FF0000"
  )
  .setMidpoint(20)
  .getColors();
```

Аналогичный процесс определения цвета производится и для ребер, но ширина линии ребра всегда одинакова и задается программно.

Библиотека React в совокупности с использованием Яндекс.Карт позволяет заранее создавать объекты отображения (коллекции геообъектов) и отображать их при необходимости. Это позволяет избежать повторного создания объектов, даже при пересоздании самой карты. Компонент для отображения (листинг 11) является универсальным и может быть использован для любого параметра.

Листинг 11. Компонент для отображения тепловых карт

```
export const DistributionLayout = ({
  map,
  graph,
  parameter,
  enabled
}) => {
  const [dst, setDst] = useState(null);
  useEffect(() => {
    setDst(buildDst(graph, parameter));
  }, []);

  useEffect(() => {
    if (dst && enabled) {
      map.geoObjects.add(dst);
    } else {
      map.geoObjects.remove(dst);
    }
  }, [dst, map, enabled]);
  return null;
};
```

При использовании компонента (листинг 12) достаточно задать параметр вершины/ребра и передать флаг выбора слоя.

Листинг 12. Использование компонента для отображения тепловых карт

```
<DistributionLayout
  map={ymaps}
  graph={graph}
  parameter={"weight"}
  enabled={true}
/>
```

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведено описание программного комплекса, позволяющего визуализировать данные о состоянии транспортной сети города Петрозаводска. Были обработаны сведения, представленные в различных открытых источниках, что позволило создать адекватную модель городской транспортной сети. Входные данные обрабатываются атомарно и итерационно, что обеспечивает консистентность модели.

На каждом этапе обновления данных возможна визуализация структуры графа с привязкой к карте местности и отображение количественных и качественных характеристик вершин и ребер графа.

Благодаря использованию формата хранения GEXF подключение новых вычислительных модулей и модулей обновления данных легко реализуемо.

Вэб-сервис визуализации графа транспортной сети города Петрозаводска доступен по адресу: <https://transport-graph-web.vercel.app/>.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Национальный проект «Жилье и городская среда» [Электронный ресурс]. URL: <https://фрт.рф/new/reformagkh.ru/opendata?gid=2348078> (дата обращения: 02.02.2023).
2. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. URL: [https://rosstat.gov.ru/vpn\\_popul](https://rosstat.gov.ru/vpn_popul) (дата обращения: 02.02.2023).
3. API Яндекс Карты [Электронный ресурс]. URL: <https://yandex.ru/dev/maps/> (дата обращения: 02.02.2023).
4. React JavaScript-библиотека для создания пользовательских интерфейсов [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.legacy.reactjs.org> (дата обращения: 02.02.2023).
5. A database engine to query the OpenStreetMap data [Электронный ресурс]. URL: [https://wiki.openstreetmap.org/wiki/Overpass\\_API](https://wiki.openstreetmap.org/wiki/Overpass_API) (дата обращения: 02.02.2023).
6. *Boeing G.* OSMnx: New methods for acquiring, constructing, analyzing, and visualizing complex street networks // *Computers, Environment and Urban Systems*. 2017. Vol. 65. P. 126–139. doi: 10.1016/j.compenvurbsys.2017.05.004
7. *Ermolin N. A., Khitraya V. A., Khitryi A. V., Mazalov V. V., Nikitina N. N.* Modeling of the city's transport network using game-theoretic methods on the example of Petrozavodsk // *Contributions to Game Theory and Management*. 2022. Vol. 15. P. 18–31. doi: 10.21638/11701/spbu31.2022.02
8. Graphology [Электронный ресурс]. URL: <https://graphology.github.io/> (дата обращения: 02.02.2023).
9. *Hagberg A., Schult D., Swart P.* Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX // *Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008), Pasadena, CA USA*. 2008. P. 11–15.
10. *Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T.* The pagerank citation ranking: Bringing order to the Web // *Proceedings of the 7th International World*

Wide Web Conference, Brisbane, Australia. 1998. P. 161–172.

## REFERENCES

1. National project ‘Housing and urban environment’. URL: <https://фрт.рф/new/reformagkh.ru/opendata?gid=2348078> (accessed: 02.02.2023). (In Russ.)
2. Federal State Statistics Service. URL: [https://rosstat.gov.ru/vpn\\_popul](https://rosstat.gov.ru/vpn_popul) (accessed: 02.02.2023). (In Russ.)
3. API Yandex Maps. URL: <https://yandex.ru/dev/maps/> (accessed: 02.02.2023). (In Russ.)
4. React JavaScript-library for creating user interfaces. URL: <https://ru.legacy.reactjs.org> (accessed: 02.02.2023). (In Russ.)
5. A database engine to query the OpenStreetMap data. URL: [https://wiki.openstreetmap.org/wiki/Overpass\\_API](https://wiki.openstreetmap.org/wiki/Overpass_API) (accessed: 02.02.2023).
6. *Boeing G.* OSMnx: New methods for acquiring, constructing, analyzing, and visualizing complex street networks. *Computers, Environment and Urban Systems*. 2017;65:126–139. doi: 10.1016/j.compenvurbsys.2017.05.004
7. *Ermolin N. A., Khitraya V. A., Khitryi A. V., Mazalov V. V., Nikitina N. N.* Modeling of the city's transport network using game-theoretic methods on the example of Petrozavodsk. *Contributions to Game Theory and Management*. 2022;15:18–31. doi: 10.21638/11701/spbu31.2022.02
8. Graphology. URL: <https://graphology.github.io/> (accessed: 02.02.2023).
9. *Hagberg A., Schult D., Swart P.* Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. *Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008), Pasadena, CA USA*. 2008. P. 11–15.
10. *Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T.* The pagerank citation ranking: Bringing order to the Web. *Proceedings of the 7th International World Wide Web Conference, Brisbane, Australia*. 1998. P. 161–172.

Поступила в редакцию / received: 05.05.2023; принята к публикации / accepted: 25.05.2023.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Хитрая Виталия Андреевна**  
аспирант

*e-mail: dobvitalia@yandex.ru*

**Хитрый Андрей Владимирович**  
аспирант

*e-mail: andrey.khitryy@gmail.com*

## CONTRIBUTORS:

**Khitraya, Vitalia**  
Graduate Student

**Khitryy, Andrey**  
Graduate Student

УДК 519.115:519.2

## КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПОДСТАНОВОК С ЦИКЛАМИ ЗАДАНЫХ РАЗМЕРОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

В данной схеме решаются все задачи перечислительной комбинаторики, включающие в себя построение процедуры перечисления ее исходов, определение их числа, нахождение их вероятностного распределения и решение задачи нумерации в прямой и обратной постановках, на основании результатов которой предлагается проводить универсальное моделирование ее исходов.

Ключевые слова: схема подстановок; цикловая структура подстановки; составы циклов; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы подстановок с циклами заданных размеров // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 64–70. doi: 10.17076/mat1730

### N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A SUBSTITUTION SCHEME WITH CYCLES OF GIVEN SIZES

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of  
Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

In this scheme, all tasks of enumerative combinatorics are solved, which include the construction of a procedure for listing its outcomes, determining their number, finding their probability distribution, and solving the numbering task in direct and reverse formulations. It is suggested that the results are used as the basis for universal modeling of its outcomes.

Keywords: substitution scheme; cyclic structure of substitution; cycle formulations; numbering task; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of a substitution scheme with cycles of given sizes. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2023;4:64–70. doi: 10.17076/mat1730

### ВВЕДЕНИЕ

Введем параметры схемы:  $n$  – размер подстановки,  $k$  – число ее циклов,  $\mu_i$  – число циклов размера  $i$ , где  $i = \overline{1, n}$ ,  $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ,

при  $\sum_{i=1}^n \mu_i = k$ ,  $\sum_{i=1}^n i\mu_i = n$ , или  $\mu_{i_r}$  – число циклов размера  $i_r$ , где  $r = \overline{1, s}$ ,  $s$  – число разных размеров заданных циклов,  $\bar{\mu}_{i_r} = (\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_s})$ , все  $\mu_{i_r} > 0$  при  $\sum_{r=1}^s \mu_{i_r} = k$ ,

$\sum_{r=1}^s i_r \mu_{i_r} = n$  – две формы записи заданной цикловой структуры подстановки, которую иногда удобно задавать еще в виде вариационного ряда заданных размеров циклов  $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ ,  $N$  – число исходов схемы.

Здесь и в дальнейшем номера элементов перестановки для краткости будем называть элементами.

Отображения в циклах будем задавать перестановками элементов в них с замыканием (последний элемент отображается в первый), поэтому начальный элемент перестановки для заданного состава цикла несущественен и будет для удобства сравнения исходов схемы задаваться минимальным из элементов цикла.

Составы циклов в исходе подстановки можно перечислять в любом порядке, поэтому для удобства сравнения исходов схемы будем перечислять в порядке роста их размеров, а при их совпадающих размерах – в порядке роста их минимальных элементов.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем кратко результаты анализа основных используемых здесь схем в принятых для них обозначениях.

### 1.1. Перечислительный метод (ПМ)

В основе доасимптотического анализа рассматриваемой схемы лежит ПМ (см. [2]), суть которого состоит в организации получения качественной информации об исходах схемы и переводе ее в количественную – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ), состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), состоящая в установлении взаимно-однозначного соответствия между видами и номерами исходов схемы, и универсальное моделирование исходов (УМ), состоящее в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению задачи нумерации. Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

Перечислим используемые здесь результаты (со своими обозначениями) ранее изученных схем по решению задачи нумерации (ЗН).

### 1.2. Схема последовательных действий (ПД)

Схема  $k$  ПД с результатом анализа в [1] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Если  $i$ -е действие ( $i = \overline{1, k}$ ) совершается  $d_i$  числом способов, то число исходов схемы  $N = \prod_{i=1}^k d_i$ .

Вид исхода после совершения  $i$  действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые соответственно обозначаются через  $R_{ij_i}$ , где  $i$  – номер действия, а  $j_i$  – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид  $R_{ij_i}$  определяется характером действия. Исход совершения  $r$  действий ( $r \leq k$ ) обозначен в виде  $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{rj_r}\}$ . Тогда окончательный исход схемы получен при  $r = k$ .

**Теорема 1. Прямая ЗН.** Пусть в схеме с параметрами  $d_1, \dots, d_k$  дан номер  $N^{(k)}$  ее исхода. Тогда вид исхода  $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$ , определяемый номерами  $(j_1, \dots, j_k)$  исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при  $i = \overline{1, k}$  находится по формуле  $j_i = t_i + I(t_i)d_i$ , где  $t_i = N^{(i)} \bmod d_i$ ;  $I(Z) = 0$  при  $Z \neq 0$  и  $I(Z) = 1$  при  $Z = 0$ ;

$$N^{(i-1)} = \left[ \frac{N^{(i)} + d_i - 1}{d_i} \right],$$

где  $[Z]$  – целая часть числа  $Z$  и  $i = k, k-1, \dots, 1$ ;  $N^{(0)} = 1$ .

**Теорема 2. Обратная ЗН.** Пусть в схеме с параметрами  $d_1, \dots, d_k$  дан вид ее исхода  $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$ , определяющий номера  $(j_1, \dots, j_k)$  исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при  $i = \overline{1, k}$ . Тогда его номер вычисляется по формуле

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^k d_i + j_k.$$

### 1.3. Схема сочетаний

В [1] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы сочетаний из  $n$  элементов по  $r$  с числом исходов  $C_n^r$ . Номера элементов в каждом исходе схемы  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$  упорядочены по возрастанию, и значение  $n_m$  ( $m = \overline{1, r}$ ) определяет величина  $l_m$  – порядковый номер  $n_m$  по возрастанию среди значений от  $(n_{m-1} + 1)$  до  $n$ .

**Теорема 3. Прямая ЗН.** Дан номер  $N$  исхода схемы сочетаний. Тогда в его исходе в виде  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$  значение  $l_m$  ( $m = \overline{1, r}$ ) при  $j_0 = 1, n_0 = 0, C_0^0 = 1$  есть

$$l_m = \min j_m :$$

$$\left\{ N \leq \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{s_i=n_{i-1}+J(i-1)}^{l_{m-1}} C_{n-s_i}^{r-i} + \sum_{s_m=n_{m-1}}^{j_m} C_{n-s_m}^{r-m} \right\},$$

где  $J(Z) = 1$  при  $Z = 0$  и  $J(Z) = 0$  при  $Z > 0$ .

**Теорема 4. Обратная ЗН.** Дан исход  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$ . Тогда его номер  $N$  находится (при  $n_0 = 0$ ) по формуле

$$N = \sum_{i=1}^r \sum_{s_i=n_{i-1}+1}^{n_i-1} C_{n-s_i}^{r-i} + 1.$$

#### 1.4. Схема перестановок

Схема состоит в установлении всех взаимных порядков  $n$  различных элементов между собой.

Решена задача нумерации в прямой и обратной постановках (см. [1]), представленных в виде теорем. Приведем их, например, для перечисления исходов схемы методом графов. (При перечислении исходов схемы методом графов каждый следующий добавляемый элемент ставится до, между и после всех ранее установленных элементов).

**Прямая задача нумерации** решена следующей теоремой.

**Теорема 5.** Дан номер  $N = N_r$  перестановки  $R$  размера  $r$ . Тогда определяющие исход  $R$  значения числа  $M_i$  (порядковый номер места элемента  $i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) среди элементов перестановки от 1 до  $i$  (слева направо) в данном исходе  $R$ ) находятся по формуле

$$M_i = 1 + (N_i - 1) \bmod i,$$

где  $N_i$  – номер перестановки длины  $i$  в процедуре перечисления исходов схемы, порождающей искомую перестановку длины  $r$  с данным номером  $N = N_r$ .

**Обратная задача нумерации** решена следующей теоремой.

**Теорема 6.** Дана перестановка размера  $r$  или соответствующий ей исход  $R$ . Тогда его номер  $N$  определяется формулой

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + M_r,$$

где  $M_i$  – порядковый номер места элемента  $i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) среди элементов перестановки от 1 до  $i$  (слева направо) в данном исходе  $R$ .

#### 1.5. Схема перестановок с повторением

Классическая схема перестановок с повторением (см. [1]) возникает при делении  $n$  различных элементов на  $k$  различных частей (групп) (в данном ниже порядке перечисления их размеров) численностями  $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ , что соответствует схеме размещений  $n$  различных частиц по  $k$  различным ячейкам с заданными уровнями их заполнения:  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , ( $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ).

Наряду с этой схемой рассматривается аналогичная схема, отличная от первой неразличимостью порядка частей при делении элементов или неразличимостью ячеек при размещении частиц. Указанные отличия схем и означают укрупнение состояний второй схемы по сравнению с первой. Для краткости называем первую схему схемой  $A$ , а вторую – схемой  $B$ .

Число  $N_A$  исходов схемы  $A$  известно, а число исходов схемы  $B$  легко вычисляется: введем обозначение  $w = \prod_{i=1}^t (\mu_i!)$ , где  $t = \max\{n_k\}$ , а  $\mu_i$  – число частей деления в схеме  $A$  размером  $i$ . Тогда общее число исходов схемы  $B$   $N_B$  (в силу неразличимости порядков частей деления совокупности) вычисляется по формуле

$$N_B = \frac{N_A}{w}.$$

Предлагается две процедуры перечисления исходов схемы  $A$ , использующих перебор исходов схемы перестановок или схем сочетаний, следующих из известной формулы для  $N_A$ . Перечисление исходов схемы  $B$ , частично объединяющих исходы схемы  $A$ , производится из их перечисления путем перезаписи в форме исходов схемы  $B$  с отбрасыванием повторяющихся.

**Прямая и обратная задачи нумерации** в схеме  $A$  решены следующими теоремами.

**Теорема 7.** Пусть в схеме с параметрами  $k, \bar{n}$  дан номер  $N$  исхода. Тогда его вид  $R = (R_1, \dots, R_k)$ , где  $R_1, \dots, R_k$  – исходы  $k$  схем сочетаний, составляющих изучаемую схему, определяемые номерами исходов в этих схемах  $N_1, \dots, N_k$  по результатам решения прямой задачи нумерации в них и находятся по рекуррентным формулам

$$N_i = t_i + d_i I(t_i), \quad i = \overline{1, k},$$

где  $d_i$  – размер пучка на  $i$ -й итерации, содержащего траекторию  $T$  в графе перечисления исходов схемы от ее начального исхода к искомому на  $k$ -й итерации (т. е. число исходов



$i$ -й схемы сочетаний – одной из составляющих схему);  $I(Z) = 1$  при  $Z = 0$  и  $I(Z) = 0$  при  $Z \neq 0$ ;  $s_i$  – номер исхода в  $T$  на  $i$ -й итерации;  $t_i = s_i \bmod d_i$ ;

$$s_{i-1} = \left\lfloor \frac{s_i + d_i - 1}{d_i} \right\rfloor.$$

**Теорема 8.** Пусть в схеме с параметрами  $k, \bar{n}$  дан вид исхода  $R = R_1, \dots, R_k$ , компоненты которого по результатам обратной задачи нумерации в схеме сочетаний из п. 1.3 определяют их номера в этой схеме  $N_1, \dots, N_k$ . Тогда номер  $N$  исхода данного вида изучаемой схемы  $A$  вычисляется по формуле

$$N = \sum_{i=1}^{k-1} (N_i - 1) \prod_{l=i}^k d_{l+1} + N_k.$$

При установленном равновероятном распределении исходов схемы  $A$  с использованием результата ЗН можно проводить быстрое моделирование ее исходов.

## 2. Вид исходов схемы и их прямое перечисление

Исходы схемы зависят только от составов циклов и последовательностей отображений в них, поэтому исход схемы будем записывать в виде перечисления составов (в круглых скобках) со всеми отображениями – перестановками в них в порядке, описанном во Введении.

Предлагается прямое перечисление исходов (без отбраковки исходов более общей схемы – перестановки с повторением), состоящее из объединения каждого с каждым результатами трех следующих этапов по схеме ПД:

1) деления  $n$  различных элементов на суммарные группы элементов совпадающих по размеру заданных частей-циклов – схема  $S_1$  с числом исходов  $N^{(1)}$ , перечисляемых в порядке роста этих исходных частей;

2) деления каждой суммарной группы элементов на части одинаковых размеров без учета их порядка – схема  $S_2$  с числом исходов  $N^{(2)}$ ;

3) перечисления перестановками всех порядков отображений с замыканием (последнего в первый) в каждом из исходов п. 2) – схема  $S_3$  с числом исходов  $N^{(3)}$  (например, с минимальным первым элементом в каждой перестановке).

Изучаемая схема представляет собой три ПД данных выше трех этапов перечисления ее исходов. Тогда ЗН для схемы решена по формулам п. 1.2, если известны численности исходов этих трех этапов, являющиеся размерами

пучков соответствующих трех итераций этого перечисления, и решена ЗН для каждого из этапов.

С этих позиций будем рассматривать схемы  $S_1, S_2, S_3$ .

### 2.1. Анализ схемы $S_1$

Схема  $S_1$  представляет собой известную из [1] схему перестановок с повторением с числом исходов при  $n_0 = 0$

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= \prod_{i=1}^k C_{n - \sum_{j=0}^{i-1} n_j}^{n_i} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \\ &= \frac{n!}{\prod_{r=1}^s (i_r!)^{\mu_{i_r}}}. \end{aligned} \quad (1)$$

ЗН в схеме решена в [1] с результатами анализа в п. 1.5, как в схеме ПД (п. 1.2) схем сочетаний из данного представления числа  $N^{(1)}$ .

### 2.2. Анализ схемы $S_2$

Схема  $S_2$  представляет собой схему ПД (см. [1]) схем  $C_{i_r}$  – деления каждой группы циклов-частей  $i_r \mu_{i_r}$  на  $\mu_{i_r}$  частей одинаковых размеров по  $i_r$  элементов без учета их порядка или в одном заранее установленном порядке, например, в порядке роста содержащихся в них минимальных элементов. Таким образом, анализ второго этапа перечисления сводится к изучению схемы  $C_{i_r}$ , которую исследуем отдельно.

#### Анализ схемы $C_{i_r}$

Схема  $C_{i_r}$  состоит из последовательных шагов выбора растущих минимальных элементов в этих равных частях с доббором  $(i_r - 1)$  элементов к нему из остальных элементов до заданного размера  $i_r$  части по соответствующей схеме сочетаний, так что в следующей части минимальным элементом берется наименьший из не вошедших в предыдущую.

При заданном размере  $i_r$  частей деления совокупности различных  $i_r \mu_{i_r}$  элементов будем записывать исход в виде наборов элементов каждой части деления через запятую в круглых скобках в порядке роста минимальных номеров входящих в них элементов.

С учетом этой формы записи исходов прямое их перечисление будем конструировать последовательным перебором номеров элементов в круглых скобках. Тогда элементы в первых круглых скобках должны начинаться с 1, а остальные  $(i_r - 1)$  элементов могут быть набраны  $C_{i_r \mu_{i_r} - 1}^{i_r - 1}$  способами по схеме сочетаний, для которой из п. 1.3 известна процедура их перечисления. Элементы во вторых круглых скобках должны начинаться с минимального из элементов, не вошедших в первую скобку,



а остальные  $(i_r - 1)$  элементов могут быть набраны  $C_{(\mu_{i_r}-1)i_r-1}^{i_r-1}$  способами и т. д. Аналогично получаем, что элементы  $(\mu_{i_r} - 1)$ -й круглой скобки начинаются с минимального элемента, не вошедшего в предыдущие круглые скобки, а остальные  $(i_r - 1)$  элементов могут быть набраны  $C_{2i_r-1}^{i_r-1}$  способами, в последнюю  $\mu_{i_r}$ -ю круглую скобку войдут оставшиеся  $i_r$  элементов одним способом. Тогда полученные числа исходов набора частей есть размеры одинаковых пучков схемы ПД, составляющих схему  $C_{i_r}$ , для которой в п. 1.2 приведено решение ЗН.

Из процедуры перечисления исходов схемы  $C_{i_r}$  следует явная формула их числа  $N_{C_{i_r}}$ :

$$N_{C_{i_r}} = \prod_{j=0}^{\mu_{i_r}-1} C_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}^{i_r-1} \quad (2)$$

$$= \frac{(i_r \mu_{i_r} - 1)!}{((i_r - 1)!)^{\mu_{i_r}} i_r^{\mu_{i_r}-1} (\mu_{i_r} - 1)!}.$$

**Замечание 1.** Число исходов в схеме  $C_{i_r}$ , очевидно, можно получить и из числа исходов с теми же параметрами в схеме перестановок с повторением (см. п. 1.5), уменьшив его в  $(\mu_{i_r})!$  раз, т. е.

$$N_{C_{i_r}} = (i_r \mu_{i_r})! / (i_r!)^{\mu_{i_r}} \mu_{i_r}!, \quad (3)$$

что получается и непосредственным преобразованием, и из формулы (2) для  $N_{C_{i_r}}$  домножением числителя и знаменателя на  $i_r \mu_{i_r}$ .

Приведем примеры перечисления МГ исходов схемы  $C_{i_r}$  с просчетом для сравнения числа исходов схемы и по формулам (1) и (2). Пусть  $M = (M_1, \dots, M_s)$  – растущие минимальные элементы в циклах (всегда  $M_1 = 1$ ).

**Пример 1.** А. Пусть  $i_r \mu_{i_r} = 6$ ,  $i_r = 3$ ,  $\mu_{i_r} = 2$ . Число вариантов первой части деления  $C_5^2 = 10$ , которая однозначно определяет вторую часть деления, т. к. частей – две. Тогда будем перебирать исходы, добавляемые к 1 при формировании первой части, а остальные элементы отнесем ко второй части и сразу выпишем все 10 исходов схемы:

$$\begin{aligned} & \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}, \{(1, 2, 4), (3, 5, 6)\}, \\ & \{(1, 2, 5), (3, 4, 6)\}, \{(1, 2, 6), (3, 4, 5)\}, \\ & \{(1, 3, 4), (2, 5, 6)\}, \{(1, 3, 5), (2, 4, 6)\}, \\ & \{(1, 3, 6), (2, 4, 5)\}, \{(1, 4, 5), (2, 3, 6)\}, \\ & \{(1, 4, 6), (2, 3, 5)\}, \{(1, 5, 6), (2, 3, 4)\}. \end{aligned}$$

Вычислим для сравнения число исходов схемы по формулам (1) и (2):  $N_{C_{i_r}} = 5! / (2!)^2 \cdot 3^1 \cdot 1! = 10$  и  $N_{C_{i_r}} = 6! / (3!)^2 \cdot 2! = 10$ , что совпало по формулам с прямым перечислением.

В. Пусть  $i_r \mu_{i_r} = 6$ ,  $i_r = 2$ ,  $\mu_{i_r} = 3$ .  $M_1 = 1$ , а число вариантов набора первой части деления  $C_5^1 = 5$  – это исходы  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(1, 6)$ , которые однозначно определяют минимальные элементы второй части, как минимальные из оставшихся, и которые с добавлением к ним любого другого из оставшихся дают по 3 варианта наборов вторых частей, соответствующие каждой первой части:  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 5)$ . Теперь составы третьих частей определяются первыми двумя однозначно и есть соответственно  $(5, 6)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(3, 4)$ .

Вычислим для сравнения число исходов схемы по формулам (2) и (3):  $N_{C_{i_r}} = 5! / (1!)^3 \cdot 2^2 \cdot 2! = 15$  и  $N_{C_{i_r}} = 6! / (2!)^3 \cdot 3! = 15$ , что совпало по формулам и с прямым перечислением.

ЗН в схеме  $C_{i_r}$  решена по п. 1.5 с полученной здесь пучковой структурой перечисления ее исходов с размерами пучков чисел исходов соответствующих схем сочетаний из представления формулы (2)  $C_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}^{i_r-1}$  при  $r = \overline{1, s}$ , для каждой из которых в п. 1.3 решена ЗН.

**Вернемся к анализу схемы  $S_2$ .**

По схеме ПД схем  $C_{i_r}$  общее число исходов схемы  $S_2$  есть

$$N^{(2)} = \prod_{r=1}^s N_{C_{i_r}} = \prod_{r=1}^s (i_r \mu_{i_r})! / (i_r!)^{\mu_{i_r}} \mu_{i_r}!, \quad (4)$$

а это означает, что каждый исход схемы  $S_2$  соответствует  $\prod_{r=1}^s (\mu_{i_r})!$  равновероятным исходам схемы  $S_1$ , откуда исходы схемы  $S_2$  соответственно имеют вероятности  $\prod_{r=1}^s \mu_{i_r}! / N^{(1)}$ .

**Замечание 2.** С учетом очевидных равенств

$$\prod_{r=1}^s (i_r!)^{\mu_{i_r}} = \prod_{j=1}^k n_j!; \quad \prod_{r=1}^s \mu_{i_r}! = \prod_{j=1}^k \mu_j! \quad (5)$$

из (4) следует, что

$$N^{(1)} N^{(2)} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i! \prod_{j=1}^t \mu_j!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^k n_j! \mu_j!},$$

а это дает формулу числа делений совокупности  $n$  различных элементов на  $k$  частей заданных размеров  $\bar{n}$  без учета их порядка, что совпадает с формулой для  $N_B$  из п. 1.5.

ЗН в схеме  $S_2$  (как схемы ПД схем  $C_{i_r}$ ) проводится при известной пучковой структуре перечисления ее исходов с размером пучков на  $(j + 1)$ -й итерации ( $j = 0, k - 1$ ) равной

$C_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}^{i_r-1}$  в соответствии с п. 1.2 по решенной ЗН для схем  $C_{i_r}$ .

### 2.3. Анализ схемы $S_3$

Схема  $S_3$  представляет собой схему ПД схем перестановок элементов как порядка отображений в циклах с замыканием из элементов каждой части деления в каждом исходе схемы  $S_2$  известной численностью по  $(i_r - 1)!$ , соответствующей числу перестановок элементов части с фиксированным в начале минимальным элементом. Тогда общее число исходов схемы

$$N^{(3)} = \prod_{r=1}^s ((i_r - 1)!)^{\mu_{i_r}}. \quad (6)$$

### 3. Число исходов схемы $N$ и их вероятностное распределение

Число исходов всей схемы  $N$  как схемы ПД определяется как произведение численностей трех этапов перечисления ее исходов  $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ , описанных в начале п. 2, откуда из (1), (4), (6) с учетом равенств (5) с добавлением очевидного равенства  $\prod_{r=1}^s ((i_r - 1)!)^{\mu_{i_r}} = \prod_{j=1}^k (n_j - 1)!$  получаем формулу

$$\begin{aligned} N &= N^{(1)}N^{(2)}N^{(3)} = n! \prod_{r=1}^s \frac{((i_r - 1)!)^{\mu_{i_r}}}{(i_r)^{\mu_{i_r}} \mu_{i_r}!} \\ &= n! \prod_{j=1}^k \frac{(n_j - 1)!}{n_j! \mu_j!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^k n_j \mu_j!}. \end{aligned} \quad (7)$$

Приведем примеры вычислений числа  $N$  с наглядной визуальной проверкой.

#### Пример 2.

А. Пусть  $n = 5, k = 3, \bar{n} = (1, 1, 3)$  или  $\bar{\mu} = (2, 0, 1, 0, 0)$ .

Тогда по (7)  $N = 5!/1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2! = 20$ . По данной в п. 1 процедуре перечисления исходов легко получаем следующие 10 исходов составов циклов схемы:

$\{(1)(2)(3, 4, 5)\}; \{(1)(3)(2, 4, 5)\}; \{(1)(4)(2, 3, 5)\};$   
 $\{(1)(5)(2, 3, 4)\}; \{(2)(3)(1, 4, 5)\}; \{(2)(4)(1, 3, 5)\};$   
 $\{(2)(5)(1, 3, 4)\}; \{(3)(4)(1, 2, 5)\}; \{(3)(5)(1, 2, 4)\};$   
 $\{(4)(5)(1, 2, 3)\}$ , а с учетом того, что в последнем цикле каждого исхода имеем по два разных отображения, получаем общее число исходов равно 20, что совпадает с теоретическим результатом по формуле (7).

В. Пусть  $n = 6, k = 3, \bar{n} = (2, 2, 2)$  или  $\bar{\mu} = (0, 3, 0, 0, 0, 0)$ .

Тогда по (4)  $N = 6!/2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 15$ . По данной в п. 2 процедуре перечисления

исходов легко получаем следующие 15 исходов составов циклов схемы:  $(1,6)(2,5)(3,4);$   
 $(1,5)(2,6)(3,4); (1,6)(2,4)(3,5); (1,4)(2,6)(3,5);$   
 $(1,5)(2,4)(3,6); (1,4)(2,5)(3,6); (1,6)(2,3)(4,5);$   
 $(1,3)(2,6)(4,5); (1,5)(2,3)(4,6); (1,3)(2,5)(4,6);$   
 $(1,4)(2,3)(5,6); (1,3)(2,4)(5,6); (1,2)(3,6)(4,5);$   
 $(1,2)(3,5)(4,6); (1,2)(3,4)(5,6)$ , а с учетом того, что в каждом цикле каждого исхода имеем по одному отображению, получаем общее число исходов равно 15, что совпадает с теоретическим результатом по формуле (7).

С. Пусть  $n = 6, k = 2, \bar{n} = (3, 3)$  или  $\bar{\mu} = (0, 0, 2, 0, 0, 0)$ .

Тогда по (7)  $N = 6!/3 \cdot 3 \cdot 2! = 40$ . По данной в п. 2 процедуре перечисления исходов легко получаем следующие 10 исходов составов циклов схемы:

$(1,3,4)(2,5,6); (1,3,5)(2,4,6); (1,3,6)(2,4,5);$   
 $(1,4,5)(2,3,6); (1,4,6)(2,3,5); (1,5,6)(2,3,4);$   
 $(1,2,6)(3,4,5); (1,2,5)(3,4,6); (1,2,4)(3,5,6);$   
 $(1,2,3)(4,5,6)$ ; а с учетом того, что в каждом

из двух циклов каждого исхода имеем по два отображения, получаем общее число исходов равно 40, что совпадает с теоретическим результатом по формуле (7).

В завершение дадим пример без визуальной проверки из-за ее громоздкости, но более общего вида и вычислим число исходов схемы только по формуле (7).

Д. Пусть  $n = 12, k = 5, \bar{n} = (2, 2, 2, 3, 3)$  или  $\bar{\mu} = (0, 0, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

Тогда по (7)  $N = 12!/2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3! \cdot 2! = 554400$ .

### 4. Вероятностное распределение исходов схемы

**Теорема 9.** *Исходы нашей схемы равновероятны с вероятностью каждого исхода*

$$p = 1/N = \frac{\prod_{j=1}^k n_j \mu_j!}{n!}. \quad (8)$$

*Доказательство.* Все исходы нашей схемы отличаются от всех исходов схемы перестановки с повторением неразличимостью взаимных порядков среди частей деления совпадающих размеров в количестве  $\prod_{j=1}^k \mu_j!$  и различимостью порядков элементов в частях деления, начинающихся с фиксированного (например, минимального) элемента в количестве  $\prod_{j=1}^k (n_j - 1)!$ . А это приводит к пересчету вероятностей исходов нашей схемы из соответствующей вероятности исхода схемы перестановки с повторением  $p^* = \prod_{j=1}^k n_j! / n!$  (при равномерном распределении ее исходов) умножением  $p^*$  на  $\prod_{j=1}^k \mu_j!$  и делением на  $\prod_{j=1}^k (n_j - 1)!$ , откуда получаем (8).  $\square$

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Будем проводить его общим приемом, названным в п. 1.1 УМ – универсальным методом в перечислительном методе (ПМ) доасимптотического анализа нашей схемы, на основе установленного в п. 4 вероятностного распределения пронумерованных исходов схемы и обоснованного решения для них прямой задачи нумерации (ЗН) по теореме 1 п. 1.2 в схеме ПД с изученной в п. 2 структурой графа перечисления исходов. Тогда конкретный вид каждого смоделированного исхода будем получать из его соответствия (по прямой ЗН) с разграниченным по полученному вероятностному распределению номером.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения парамет-

ров // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750

2. Энатская Н. Ю. Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

### REFERENCES

1. *Enatskaya N. Yu.* Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:117–133. doi: 10.17076/mat750 (In Russ.)

2. *Enatskaya N. Yu.* Probabilistic models of combinatorial schemes. *Bulletin of the South Urals State University. Ser. Mat. Model. Progr.* 2020;13(3):103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 07.12.2022; принята к публикации / accepted: 13.04.2023.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**

канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента  
прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

### CONTRIBUTOR:

**Enatskaya Natalia**

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

УДК 519.115:519.2

## СХЕМА ПЕРЕСТАНОВОК С ВЕРХНИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ИНТОВ ДЛЯ ЕЕ ФИКСИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

Для предложенной схемы решаются задачи перечислительной комбинаторики, т. е. находится число ее исходов, строится их прямое перечисление, решается задача нумерации, устанавливается вероятностное распределение исходов схемы и предлагается процедура их моделирования.

Ключевые слова: схема перестановок; набор интов перестановки; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Схема перестановок с верхним ограничением интов для ее фиксированных элементов // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 71–76. doi: 10.17076/mat1733

### N. Yu. Enatskaya. PERMUTATION SCHEME WITH AN UPPER LIMITATION OF INTS FOR ITS FIXED ELEMENTS

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

Problems of enumerative combinatorics are solved for the proposed scheme, i. e. the number of its outcomes is determined, their direct listing is constructed, the numbering problem is solved, the probability distribution of the scheme outcomes is found, and a procedure for their modeling is proposed.

Keywords: permutation scheme; set of permutation ints; numbering task; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Permutation scheme with an upper limitation of ints for its fixed elements. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2023;4:71–76. doi: 10.17076/mat1733

### ВВЕДЕНИЕ

Для любой пары элементов перестановки введем понятие *инта* как числа ее элементов между ними.

Рассматривается схема  $n$ -размерных перестановок с нумерацией элементов от 1 с  $n$  и, например, с номерами фиксированных элементов от 1 до  $t$ , для каждой пары которых инты соседних в перестановке ограничены числом  $k$ .

Для данной схемы будем решать перечисленные в аннотации задачи на основе перечисления всех ее исходов.

Такая схема может возникать при составлении разного рода расписаний при соответствующем ограничении.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Кратко приведем используемые здесь результаты ранее опубликованных статей в принятых там обозначениях.

### 1.1. Перечислительный метод (ПМ)

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ (см. [2]), суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ) [2], состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между видами исходов и их номерами, и универсальное моделирование (УМ) исходов по [2], дающее его единый прием, состоящее в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению задачи нумерации, учитывающему специфику схемы. (В более ранних публикациях УМ называлось также БМ – быстрое моделирование.) Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

### 1.2. Схема перестановок

Схема перестановок (см. [1]) состоит в установлении всех взаимных порядков  $n$  различных элементов между собой.

Решена задача нумерации в прямой и обратной постановках (см. [1]), представленных в виде теорем. Приведем их, например, для перечисления исходов схемы методом графов. (При перечислении исходов схемы методом графов каждый следующий добавляемый элемент ставится до, между и после всех ранее установленных элементов.)

**Прямая задача нумерации (ПЗН)** решена теоремой 1.

**Теорема 1.** Дан номер  $N = N_r$  перестановки  $R$  размера  $r$ . Тогда определяющие исход  $R$  значения числа  $M_i$  (порядковый номер места элемента  $i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) среди элементов перестановки от 1 до  $i$  (слева направо) в данном исходе  $R$ ) находятся по формуле

$$M_i = 1 + (N_i - 1) \bmod i,$$

где  $N_i$  – номер перестановки длины  $i$  в процедуре перечисления исходов схемы, порождающей искомого перестановку длины  $r$  с данным номером  $N = N_r$ .

**Обратная задача нумерации (ОЗН)** решена теоремой 2.

**Теорема 2.** Дана перестановка размера  $r$  или соответствующий ей исход  $R$ . Тогда его номер  $N$  определяется формулой

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1) \frac{r!}{i!} + M_r,$$

где  $M_i$  – порядковый номер места элемента  $i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) среди элементов перестановки от 1 до  $i$  (слева направо) в данном исходе  $R$ .

### 1.3. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД)

Схема  $k$  ОПД (см. [1]) возникает, когда исходы каждого следующего действия (итерации) зависят от характера действия и вида предшествующего исхода. Результатом этого являются неодинаковые размеры  $N^{(i)}$  пучков в графе перечисления исходов схемы каждой  $i$ -й итерации ( $i = \overline{1, k}$ ).

Анализ схемы приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится  $k$  последовательных действий,  $i$ -е из которых ( $i = \overline{1, k}$ ) на  $i$ -м шаге совершается  $N^{(i)}$  способами. Тогда число исходов этих  $k$  действий складывается из  $N^{(k-1)}$  пучков размерами  $\bar{n}^{(i)} = (n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \dots, n_{N^{(k-1)}}^{(i)})$ , т. е. общее число  $N = N^{(k)}$  исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при  $i = k$  и  $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} n_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения  $i$  действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через  $R_{ij}$ , где  $i$  – номер действия, а  $j$  – номер исхода в результате его совершения.

**ПЗН и ОЗН** решены следующими теоремами 3 и 4.



**Теорема 3.** Пусть совершается  $k$  действий и задан номер исхода  $N_*^{(k)}$ . Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории  $\Gamma$  в содержащих их пучках  $\{j_i\}$  от первой до  $k$ -й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для  $j_i$  ( $i = \overline{1, k}$ )

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} n_l^{(i)},$$

где все пучковые структуры действий  $\bar{n}^{(i)}$  заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t : \left( \sum_{l=1}^t n_l^{(k)} = A_k \leq N_*^{(k)} \right),$$

где  $\delta = 0$  при  $A_k = N_*^{(k)}$  и  $\delta = 1$  при  $A_k < N_*^{(k)}$ ; заменяя  $k$  на  $i$ , доходим по рекурренте до первого шага.

По решенной задаче нумерации для всех действий находим из  $\{j_i\}$  виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода  $R_*^{(k)}$ .

**Теорема 4.** Пусть совершается  $k$  действий и задан вид исхода  $R_*^{(k)} = \{j_1, \dots, j_k\}$ . Тогда его номер  $N_*^{(k)}$  определяется по рекуррентной формуле при  $i = k, i = \overline{1, k}$

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} n_l^{(i)} + j_i$$

начиная с  $i = 1$  при  $N_*^{(1)} = j_1$ .

### 1.5. Схема сочетаний с ограниченными степенями

Исходы схемы сочетания представляют собой наборы  $t$  значений выбранных элементов в возрастающем порядке:  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_t)$  из  $n$ . В изучаемой схеме (см. [3]) вводится верхнее ограничение на абсолютные разности соседних элементов в исходах схемы сочетаний, называемые далее *степенями*, обозначаемые вектором  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_{t-1})$ , где  $s_i = |n_{i+1} - n_i|$ ,  $\max_{i=1, t-1} s_i = S = k + 1$ .

Прямое перечисление исходов нашей схемы производится процессом поединичного выбора его элементов в возрастающем порядке в последовательно зависимых диапазонах, задающих размеры пучков в графе перечисления исходов схемы (под пучковой структурой графа понимаются последовательные численности исходов из состояний каждого этапа в состояния следующего этапа) и обеспечивающих их возрастание, возможность выбора

остальных элементов и заданную ограниченность степеней в исходе схемы по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} 1 &\leq n_1 \leq (n - t + 1); \\ n_1 + 1 &\leq n_2 \leq \min(n - t + 2, n_1 + S); \\ n_2 + 1 &\leq n_3 \leq \min(n - t + 3, n_2 + S) \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$n_{i-1} + 1 \leq n_i \leq \min(n - t + i, n_{i-1} + S) \quad i = \overline{2, t}, \quad (1)$$

где на  $i$ -м шаге добавляется элемент  $n_i$ ,  $i = \overline{2, t}$ .

Конкретное значение  $n_i$  зависит от выбора  $n_{i-1}$ .

Размеры пучков на  $i$ -м шаге процесса перечисления  $a_i(n_{i-1})$  зависят от последнего  $n_{i-1}$ -го добавленного элемента.  $a_1(n_0) = a_1 = n - t + 1$  при  $n_0 = 0$ , а для  $i = 2, 3, \dots, t$  — вычисляются по формуле

$$a_i(n_{i-1}) = \min(n - t + i, n_{i-1} + S) - n_{i-1}. \quad (2)$$

Число исходов схемы  $M$  вычисляется суммой размеров пучков предпоследней итерации в графе перечисления исходов схемы.

### 1.6. Процедура перечисления значений интов при заданном $k$ , их влияние на вид исхода схемы

**Лемма 1.** Диапазон возможных значений  $k$  зависит от параметров схемы и определяется соотношением

$$0 \leq k \leq (n - t). \quad (3)$$

*Доказательство.* Оно следует из того, что  $k$  принимает наименьшее значение 0, когда фиксированные  $t$  элементов перестановки стоят подряд, а наибольшее, равное  $(n - t)$  — когда остальные  $(n - t)$  элементов перестановки стоят подряд на местах перестановки, исключая первое и последнее.

Прямое перечисление возможных наборов интов (с проверкой (3)) при заданном значении  $k$  производится по изученной в [3] схеме сочетаний с ограниченными степенями по результатам приведенных рекуррентных соотношений (1) п. 1.5 для них при  $S = k + 1$ .  $\square$

## 2. Вид исхода схемы, прямое перечисление ее исходов и их число

Вид исхода схемы представляем последовательностью  $n$  номеров элементов в получаемом порядке.

Прямое перечисление исходов схемы будет состоять из объединения каждого с каждым результатов трех этапов по схеме ОПД (см. п. 1.3):

1) перестановок  $t$  фиксированных элементов числом способов  $t!$ ;

2) перестановок всех остальных  $(n - t)$  элементов числом способов  $(n - t)!$ ;

3) выбор всех допустимых наборов номеров  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_t)$  мест  $t$  фиксированных элементов в перестановке (по схеме сочетаний с ограниченными степями  $\leq k + 1$  (см. [3] и формулы (1), (2) п. 1.5)).

Процедуру прямого перечисления исходов схемы можно представить в виде графа (см. [1, 2]) последовательной реализации описанных этапов перечисления с пучковой структурой, определяемой числами способов их проведения.

Нумерацию исходов проводим в порядке их реализации.

**Теорема 5.** Число  $N$  исходов схемы вычисляется по формуле

$$N = t!(n - t)! \sum_j d_j, \quad (4)$$

где  $\{d_j\}$  – последовательные размеры пучков предпоследней итерации, т. е. чисел возможных значений в выборе мест последнего из  $t$  фиксированных элементов в исходах схемы при заданных перестановках среди фиксированных и среди остальных элементов.

*Доказательство.* Оно следует из предложенной процедуры 3-этапного перечисления исходов схемы, где первые два сомножителя дают числа независимых перечислений среди фиксированных и среди остальных элементов перестановки, их произведение – число их совместных порядков, а сумма в (4) – сумма чисел допустимых (по заданному значению  $k$ ) взаимных позиций элементов перестановок фиксированных и остальных элементов, зависящих от наборов  $\bar{n}$  по рекурренте (1), где  $S = k + 1$ .  $\square$

Приведем числовой пример проведения прямого перечисления исходов схемы и определения их числа  $N$ .

**Пример 1.** Пусть  $n = 5$ ,  $t = 3$ ,  $k = 1$  (проверка задания значения  $k = 1$ :  $0 \leq k \leq (5 - 3) = 2$ ).

В силу большого объема исходов схемы (даже при данных небольших значениях параметров схемы) опишем получение фрагмента перечисления всех исходов схемы для первой перестановки из  $t!$  по вышеописанным остальным этапам. По (4) число  $N$  всех исходов схемы по числу исходов фрагмента примера 1 получим умножением его на  $t! = 6$ . Сравним его с непосредственно вычисленным по (4).

В соответствии с приведенной последовательностью трех этапов перечисления получим результаты:

1)  $3! = 6$  для фиксированных элементов 1,2,3 дают перестановки между собой (321), (231), (213), (312), (132), (123) – 1-я итерация;

2)  $2! = 2$  для остальных элементов 4,5 дают перестановки между собой (54), (45) – 2-я итерация;

3) по (4) п. 1.5 определяем диапазоны возможных значений мест  $(n_1, n_2, n_3)$  фиксированных элементов 1,2,3 этого этапа в заданном на первом этапе порядке среди  $n = 5$  мест перестановки, разбивая его на три итерации выбора мест для трех из них на итерациях 3,4,5 при исходе второго этапа (итерации) (5,4):

на 3-й итерации

$1 \leq n_1 \leq 3$ , откуда по (4) с пучком 2-й итерации размера 3;

на 4-й итерации с пучками 3-й итерации размеров (2,2,1):

при  $n_1 = 1$  получаем  $2 \leq n_2 \leq \min(4, 3) = 3$  с пучком размера 2;

при  $n_1 = 2$  получаем  $3 \leq n_2 \leq \min(4, 4) = 4$  с пучком размера 2;

при  $n_1 = 3$  получаем  $4 \leq n_2 \leq \min(4, 5) = 4$  с пучком размера 1;

на 5-й итерации с пучками 4-й итерации размеров (2,2,2,1,1):

при  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$  получаем  $3 \leq n_3 \leq \min(5, 4) = 4$  с пучком размера 2;

при  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 3$  получаем  $4 \leq n_3 \leq \min(5, 5) = 5$  с пучком размера 2;

при  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$  получаем  $4 \leq n_3 \leq \min(5, 5) = 5$  с пучком размера 2;

при  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 4$  получаем  $5 \leq n_3 \leq \min(5, 6) = 5$  с пучком размера 1;

при  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  получаем  $5 \leq n_3 \leq \min(5, 6) = 5$  с пучком размера 1.

Результаты п. 3 дают все взаимные расположения фиксированных  $t = 3$  и остальных  $(n - t) = 2$  элементов их перестановок (каждая в одном порядке) (см. рис. 1) с пучковой структурой по приведенным здесь итерациям: (3), (2,2,1), (2,2,2,1,1).

Аналогично при исходе второй итерации (4,5) получаем ту же цикловую структуру второго участка фрагмента графа.

Приведенный фрагмент графа перечисления исходов схемы на рисунке 1 учитывает и перестановки нефиксированных элементов, т. е. представляет первую  $(1/3! = 1/6)$  часть всего графа исходов схемы с числом исходов, равным сумме размеров пучков предпоследней итерации. Тогда общее число исходов схемы  $N = 2(2 + 2 + 2 + 1 + 1) \cdot 6 = 96$ .

По (4):  $N = 3!2!(2 + 2 + 2 + 1 + 1) = 96$ . Результаты для числа  $N$  совпали.

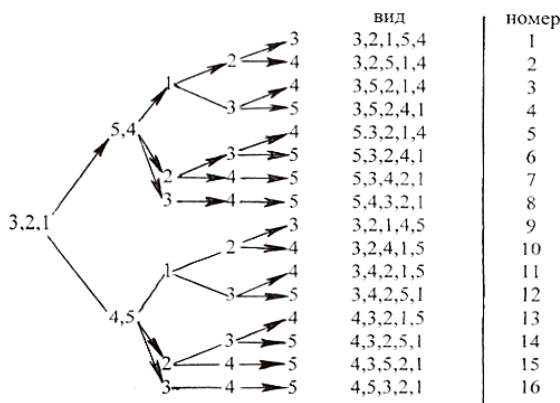


Рис. 1. Фрагмент графа перечисления исходов схемы примера 1

Fig. 1. Fragment of the graph of outcomes enumeration of the scheme in example 1

### 3. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ (ЗН) ДЛЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Рассматриваемая схема представляет собой схему с решенной ЗН в схеме ОПД для трех последовательных действий, которыми являются приведенные выше три этапа перечисления ее исходов, для каждого из которых ЗН решена с результатами соответственно по п. 1.3, или в [1] и [3], и пучковая структура графа перечисления исходов нашей схемы получена. Приведем решение ЗН на числовом примере.

**Пример 2.** В условиях примера 1 ( $n = 5$ ,  $t = 3$ ,  $k = 1$ ) решим прямую и обратную ЗН.

Приведем начальный фрагмент графа перечисления исходов схемы с первым порядком взаимного расположения фиксированных элементов.

**ПЗН.** Пусть дан номер исхода схемы  $N_* = 14$ , найти его вид  $R_*$ .

По рисунку 1  $R_* = 43251$ . Найдем его по теореме 3 п. 1.3:

$$N_* = N_*^{(5)} = 14, N_*^{(4)} = 8, N_*^{(3)} = 5, N_*^{(2)} = 2,$$

$$N_*^{(1)} = 1;$$

$$j_5 = 2, j_4 = 1, j_3 = 2, j_2 = 2, j_1 = 1.$$

Теперь по этапам перечисления исходов схемы:

1. При  $j_1 = 1$  перестановка трех фиксированных элементов: 321;

2. При  $j_2 = 2$  перестановка двух остальных элементов: 45;

3. По итерациям 3), 4), 5) находим последовательные места  $n_1, n_2, n_3$  элементов 3, 2, 1 в перестановке, обозначая не заполненные пока места звездочками в искомом  $R_*$ :

при  $j_3 = 2$  для  $1 \leq n_1 \leq 3$  получаем второе значение места  $n_1 = 2$  элемента 3, т. е.  $R_* = *3**$ ;

при  $j_4 = 1$  для  $n_1 = 2, 3 \leq n_2 \leq 4$  получаем первое значение места  $n_2 = 3$  элемента 2, т. е.  $R_* = *32**$ ;

при  $j_5 = 2$  для  $n_1 = 2, n_2 = 3, 4 \leq n_3 \leq 5$  получаем второе значение места  $n_1 = 2$  элемента 1, т. е.  $R_* = *32*1$ ;

теперь для нахождения  $R_*$  достаточно в последнем результате для него заменить звездочки на 4 и 5 в этом порядке – получим вид исхода  $R_* = 43251$ , что совпадает с результатом по рисунку 1.

**ОЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R^* = 43251$ , найти его номер  $N_*$ .

По рисунку 1  $N_* = N_*^{(5)} = 14$ . Найдем его по теореме 4 п. 1.3.

Для этого сначала из данного вида  $R^* = 43251$  выпишем номера последовательных мест фиксированных элементов в данном порядке 3,2,1:  $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5$ , откуда их номера в своих пучках (см. решение примера 1)  $j_3 = 2, j_4 = 1, j_5 = 2$ .

Зная пучковую структуру фрагмента графа перечисления исходов схемы с одной перестановкой фиксированных элементов (см. п. 2 примера 1), расширим ее на две перестановки остальных ее элементов, повторив их дважды, – получим ее для первых 16 исходов схемы, что даст пучковую структуру графа перечисления всех исходов ее  $3! = 6$ -кратным повтором. Будем последовательно по рекурренте теоремы 4 п. 1.3 определять номера исходов траектории, ведущей в графе их перечисления от начала к исходу данного вида, используя начальные участки полученной пучковой структуры графа и номера исходов траектории в своих пучках итераций  $j_3 = 2, j_4 = 1, j_5 = 2$ , откуда:  $N_*^{(1)} = 1, N_*^{(2)} = 2, N_*^{(3)} = 3 + 2 = 5, N_*^{(4)} = 2 + 2 + 1 + 2 = 8, N_*^{(5)} = N^* = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 14$ , что совпадает с результатом по графу на рисунке 1.

### 4. ВЕРОЯТНОСТЬ ИСХОДОВ СХЕМЫ СРЕДИ ИСХОДОВ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК И ИХ ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

При равновероятности всех исходов схемы перестановок размера  $n$  следует, что вероятность появления исходов нашей схемы среди всех исходов перестановки есть  $P = N/n!$ , а при любом другом заданном распределении исходов схемы перестановок равна сумме вероятностей исходов нашей схемы среди исходов схемы перестановок.

Вероятностное распределение исходов схемы по ПМ рассчитывается из графа перечисления исходов схемы перестановок размера  $n$  с их заданным распределением путем удаления

траекторий, не ведущих к исходам нашей схемы с пересчетом вероятностей итерационных переходов в каждом пучке каждой итерации делением на сумму прежних итерационных вероятностей оставшихся в пучке переходов, из которых по траекториям вычисляются вероятности исходов схемы.

**Пример 3.** Пусть  $n = 4$ ,  $t = 2$ ,  $k = 1$ . Приведем полный граф перечисления исходов схемы перестановки размера 4.

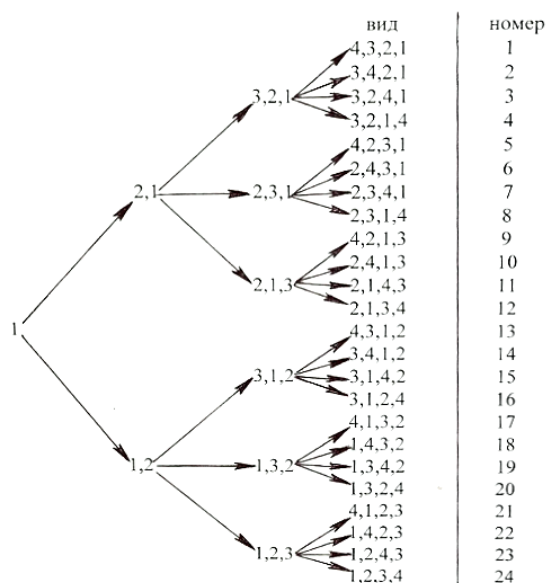


Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы перестановок ( $n = 4$ )

Fig. 2. The graph of outcomes enumeration of the permutation scheme ( $n = 4$ )

При равновероятном распределении исходов схемы перестановок размера 4 (см. граф перечисления на рис. 2) приведем перерасчет распределения исходов нашей схемы. В результате удаления не удовлетворяющих ограничениям схемы исходов, получаемых по пучкам итераций в графе перечисления всех исходов схемы перестановок размера 4 (см. рис. 2): на 3-й итерации во 2-м пучке – это исходы (2431) и (2341), в 5-м – (1432) и (1342), получаем вероятности оставшихся в этих пучках итоговых исходов по их траекториям по  $(1/2)(1/3)(1/2) = 1/12$ , а вероятности осталь-

ных исходов – по  $(1/2)(1/3)(1/4) = 1/24$ . Проверку на распределение производим сравнением с 1 суммы их итоговых вероятностей:  $4(1/12) + 16(1/24) = 1$ .

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДА СХЕМЫ

Универсальное моделирование каждого исхода нашей схемы можно производить по результату решения ПЗН для ее исходов или по результату решения ПЗН в схеме перестановок [1]. Тогда разыгрывание номера исхода одним случайным числом производится соответственно среди номеров нашей схемы с их вероятностным распределением, или – среди номеров исходов перестановки с добавлением к этому же распределению нулевых вероятностей переходов в недопустимые в нашей схеме состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750
2. Энатская Н. Ю. Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312
3. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченными шагами // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 134–139. doi: 10.17076/mat747

## REFERENCES

1. Enatskaya N. Yu. Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:117–133. doi: 10.17076/mat750 (In Russ.)
2. Enatskaya N. Yu. Probabilistic models of combinatorial schemes. *Bulletin of the South Urals State University. Ser. Mat. Model. Progr.* 2020;13(3): 103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)
3. Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of a combination scheme with restricted steps. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:134–139. doi: 10.17076/mat747 (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 08.12.2022; принята к публикации / accepted: 23.03.2023.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**  
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента  
прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

## CONTRIBUTOR:

**Enatskaya Natalia**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor



**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ» –  
INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL OPTIMIZATION  
THEORY AND OPERATIONS RESEARCH, MOTOR 2022**

(Петрозаводск, 2–6 июля 2022 г.)

В июле 2022 года недалеко от г. Петрозаводска, на территории базы отдыха «Калевала» состоялась очередная Международная конференция «Математическая теория оптимизации и исследование операций» (International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research, MOTOR 2022). Это четвертая международная конференция, объединяющая известные российские и международные научные мероприятия, которые долгое время проводились на Урале, в Сибири и на Дальнем Востоке:

- Байкальский международный трехгодичный школьный семинар по методам оптимизации и их применению;
- Математическое программирование и прикладные программы;
- Дискретная оптимизация и исследование операций;
- Задачи оптимизации и их приложения.

В 2022 году конференция впервые состоялась на Северо-Западе РФ. Принимающей стороной выступил Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. Конференция организована при поддержке:

- Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН;
- Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН;
- Института систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН;
- Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского;

- Новосибирского государственного университета;
- Математического центра в Академгородке;
- Высшей школы экономики – Нижний Новгород.

Конференция проводилась под эгидой Ассоциации европейских обществ исследований операций и Российского общества исследования операций.

В состав Программного комитета вошли ведущие российские и зарубежные ученые, в том числе почетный председатель П. Пардалос (Университет Флориды, США), председатель В. В. Мазалов (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск), сопредседатели Ю. А. Кочетов (ИМ СО РАН, Новосибирск), М. Ю. Хачай (ИММ УрО РАН, Екатеринбург), А. В. Еремеев (ОмГУ, Омск), О. В. Хамисов (ИСЭМ СО РАН, Иркутск). Организационный комитет включал А. Н. Реттиеву, Ю. В. Чиркову, А. А. Ивашко, Н. Н. Никитину.

В качестве авторов докладов в работе конференции приняли участие около 250 человек. Мероприятие проходило в смешанном формате: примерно сто участников непосредственно собрались в Карелии, остальные присутствовали в онлайн-режиме. География участников охватила несколько континентов. Российские ученые приехали из Москвы, Санкт-Петербурга, Владивостока, Иркутска, Новосибирска, Екатеринбурга, Омска и других городов. Онлайн к ним присоединились коллеги из Италии, Канады, Германии, Франции, Сербии, Чили, Монголии и Азербайджана.

В числе приглашенных докладчиков – Жорж Заккур (HEC Montréal, Канада), Владимир Иванович Марьянов (Instituto Sistemas



Complejos de Ingeniería, Чили), Ярослав Дмитриевич Сергеев (University of Calabria, Италия), Рентсен Энхбат (Mongolian Academy of Sciences, Монголия), Александр Нестеров (НИУ ВШЭ, Санкт-Петербург), Сергей Васильевич Севастьянов (ИМ СО РАН).

Тематика конференции MOTOR 2022 была посвящена современным проблемам оптимизации и исследования операций, в частности, теории математической оптимизации, целочисленному программированию и комбинаторной оптимизации, глобальной оптимизации, стохастическому целочисленному про-

граммированию, многоцелевому программированию, вычислительной сложности задач комбинаторной оптимизации, аппроксимационным алгоритмам и схемам, эвристикам и метаэвристикам для принятия решений и искусственного интеллекта, теории игр, математической экономике и многоуровневому программированию, оптимизации в области машинного обучения и анализа данных, прикладным задачам исследования операций (задачи составления расписаний, маршрутизации, расположения объектов, упаковки и раскроя, управления производством).



На конференции были представлены 7 пленарных докладов, 2 обзорные лекции (tutorials) и 107 секционных докладов (30 в онлайн-формате). Работа конференции проводилась по направлениям: теория игр (Game Theory), целочисленное программирование и комбинаторная оптимизация (Integer Programming and Combinatorial Optimization), непрерывная оптимизация (Continuous Optimization), задачи размещения (Location Problems), оптимизация и приложения (Optimization and Applications), оптимальное управление (Optimal Control) и приложения исследования операций (Operational Research Applications). Представленные на конференции доклады вызвали большой интерес у участников, что нашло свое отражение в оживленных дискуссиях.

Кроме того, были организованы «круглые столы», посвященные актуальным прикладным проблемам и бизнес-приложениям. Такие заседания традиционно вызывают большой интерес со стороны как ученых, так и

представителей бизнеса, которые принимают в них участие. На конференции MOTOR 2022 на круглых столах выступали представители «Газпромнефти», фирмы Huawei, компании VIA-Technologies.

К началу конференции издательством Springer был издан первый том сборника трудов MOTOR 2022 в серии Lecture Notes in Computer Science, а уже после завершения опубликован второй том в серии Communications in Computer and Information Science. По результатам работы конференции были приняты следующие решения: очередную конференцию MOTOR 2023 провести в г. Екатеринбурге, опубликовать избранные результаты, представленные на конференции, в выпусках научных журналов «Математическая теория игр и ее приложения», «The Yugoslav Journal of Operations Research», «Известия Иркутского государственного университета» серия «Математика», «Optimization Methods and Software».

*А. Н. Петтуева*

**ТРЕТИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР ПО СТОХАСТИЧЕСКОМУ  
МОДЕЛИРОВАНИЮ И ПРИКЛАДНЫМ ИССЛЕДОВАНИЯМ  
В ТЕХНОЛОГИЯХ – THE THIRD INTERNATIONAL WORKSHOP  
ON STOCHASTIC MODELING AND APPLIED RESEARCH  
OF TECHNOLOGY, SMARTY 2022**

(Петрозаводск, 21–25 августа 2022 г.)



В августе минувшего года в Петрозаводске, в Карельском научном центре РАН состоялся Третий международный семинар по стохастическому моделированию и прикладным исследованиям в технологиях (The Third International Workshop on Stochastic Modeling and Applied Research of Technology, SMARTY 2022). Семинар был организован при поддержке Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН; Петрозаводского государственного университета; CMS College Kottayam, Керала, Индия; Института проблем передачи информации им. А. А. Хар-

кевича РАН; Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН (ФИЦ ИУ РАН), а также Российской секции IEEE и Communications Society Chapter (COM19).

Программный комитет состоял из отечественных и зарубежных специалистов, оргкомитет включал Е. В. Морозова, А. Ю. Вертенникова, А. С. Румянцева, А. В. Бородину, И. В. Пешкову, К. А. Жукову, Л. А. Мейханаджян, Н. Н. Никитину, Т. Е. Морозову, О. В. Лукашенко, Р. В. Разумчика, Р. С. Некрасову.

Мероприятие проходило в смешанном формате: участники присутствовали в зале заседаний, а также подключались к работе online. Семинар собрал представителей зарубежных стран и отечественных исследователей. Доклады представлялись на английском языке (за исключением специальной сессии памяти профессора В. В. Калашникова).

Семинар SMARTY 2022 проводился в формате пленарного и секционных заседаний, на которых рассмотрен широкий круг проблем, охватывающий наиболее актуальные направления научных исследований в области информационно-телекоммуникационных технологий. Пленарные доклады, средней длительностью 1 час 15 минут, представляли собой обзор современного состояния заявленной в названии области теоретико-вероятностных исследований. Сведения о 15-минутных секционных докладах приводятся в хронике мероприятия, представленной ниже.

## 22.08.2022

Пленарные доклады: Агаси Зарбали оглы Меликов (Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана, Азербайджан) «Новые политики пополнения запасов в системах обслуживания-запасания с двойными источниками»; Василий Никитич Колокольцов (Факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия) «Квантовые игры».

### Секция 1. Bandits in Forests (Бандиты в лесах)

1. Сергей Гарбарь (Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Россия) «Стохастические дифференциальные уравнения для предельного описания правила УСВ для гауссовских многоруких бандитов». В докладе рассмотрена стратегия верхней доверительной границы для гауссовских многоруких бандитов с известными размерами горизонта управления  $N$  и построено ее предельное описание с помощью системы стохастических дифференциальных уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Максим Ершов, Александр Колногоров, Альберт Ворошилов (Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Россия) «Адаптация УСВ-стратегии Ауэра–Чеза-Бьянки–Фишера для гауссовского двурукого бандита». Рассмотрена задача двурукого бандита применительно к обработке данных, если существуют два альтернативных метода обработки с разными априорно неизвестными показателями эффективности. Использована пакетная версия стратегии УСВ,

впервые представленная П. Ауэром, Н. Чеза-Бьянки и П. Фишером. Для разных подходов к решению задачи представлены результаты численных экспериментов.

3. Марина Лери (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия) «Расстояние в графах степенной конфигурации». Рассмотрены конфигурационные графы, состоящие из нескольких узлов со случайными одинаково распределенными по степенному закону степенями узлов. Введено расстояние в таких графах и поставлена цель определить зависимость расстояния от параметра распределения. С помощью имитационного моделирования с последующей статистической обработкой (и применением алгоритма Дейкстры) показано, что в асимптотическом и доасимптотическом диапазоне характеристики расстояния различны.

4. Юрий Павлов, Ирина Чеплюкова (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия) «Графы конфигурации и случайные леса». Рассмотрен однородный критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона  $G$ , начинающийся с  $N$  частиц. При некоторых предположениях о распределении числа потомков частиц рассматривается подмножество траекторий  $G$ , содержащих  $N + n$  частиц, т. е. случайный лес, состоящий из  $N$  корневых деревьев и содержащий  $n$  некорневых вершин. Доказаны предельные теоремы для максимального размера дерева и для числа деревьев заданного размера при различных соотношениях между  $N$  и  $n$  при их стремлении к бесконечности.

5. Ирина Чеплюкова (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия) «О максимальной степени вершин в условных конфигурационных графах». Рассмотрен конфигурационный граф, в котором степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с заданным асимптотическим поведением хвостов распределений. Исследовано предельное поведение этого графа при бесконечном увеличении числа вершин.

6. Георгий Сафонов, Анна Ивашко (Институт математики и информационных технологий Петрозаводского государственного университета, Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия) «Применение машинного обучения для определения оптимальной стратегии онлайн-аукциона по аренде вычислительных ресурсов». Исследованы вопросы оптимизации использования арендуемых вычислительных ресурсов на ос-



нове изучения статистики использования сервиса Amazon EC2.

## **Секция 2. Theory and Applications (Теория и приложения)**

1. Наталья Маркович (Институт проблем управления РАН, Россия) «Экстремальные свойства эволюционирующих сетей». Доклад об исследовании поведения ряда характеристик случайных эволюционирующих сетей – таких как хвостовой индекс и экстремальный индекс вновь добавленных узлов и др. Обсуждены проблемы и перспективы данного направления исследований.

2. Елена Карачанская (Дальневосточный государственный университет путей сообщения, Россия) «Моделирование случайных процессов с инвариантными функциями». Доклад посвящен методу численного моделирования случайных процессов с различными характеристиками, например, с сильными случайными возмущениями или с инвариантными функциями. Метод хорошо адаптирован к применению на современных ЭВМ.

3. Александр Иванов (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия) «О теореме о промежуточном значении для размерностей квантования». В докладе обсуждаются вопросы квантования для метрических компактов с заданной вероятностной мерой. Доказано существование меры с заданными свойствами на некоторых метрических компактах.

4. Александр Щеголев (Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Россия) «О предельных теоремах для однородных нелинейных цепей Маркова с дискретным временем». В докладе представлены некоторые результаты о законе больших чисел и центральной предельной теореме для некоторого класса нелинейных цепей Маркова. Эти результаты можно рассматривать как некоторые свойства устойчивости.

5. Алексей Тихомиров (Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Россия) «О простом марковском алгоритме однородного случайного поиска экстремума». Представленный в докладе алгоритм позволяет решать достаточно широкий класс задач нахождения глобального экстремума целевой функции с высокой точностью.

6. Андрей Печников (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия), Энтони Нвохири (Университет Лагоса, Нигерия) «Динамика графа цитирования math-net.ru». В докладе представлено исследование

динамики цитирования материалов, представленных на сайте math-net.ru, авторами сделан ряд полезных для пользователей выводов.

**23.08.2022**

Пленарные доклады: Абхиджит Датта Банник (Индийский технологический институт Бхубанешвар, Индия) «Анализ многоканальных систем обслуживания с пакетным поступлением заявок и входным процессом восстановления / марковским входным потоком, одноканальных систем с входным процессом восстановления и марковским пакетным обслуживанием с использованием корней характеристического уравнения»; Ачьюта Кришнамурти (CMS Колледж Котгаям, Индия) «Очереди с взаимозависимостью между первичным поступлением, обслуживанием и повторным обращением к орбитальным клиентам – новый подход».

## **Секция 3. Queues (Теория очередей)**

1. Юрий Хохлов, Оксана Сидорова, Лев Сулов (Факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, Тверской государственный университет, Россия) «Асимптотические верхние границы вероятности переполнения буфера телекоммуникационной системы». В докладе рассмотрена система, входной поток которой представляет собой сумму некоторой средней нагрузки и суммы независимого дробного броуновского движения и устойчивого движения Леви, с одним обслуживающим устройством с постоянной интенсивностью обслуживания. В стационарном случае предложены некоторые верхние асимптотические оценки вероятности переполнения буфера системы.

2. Таисия Морозова (Уппсальский университет, Швеция) «О приближении среднего поля и устойчивости в восходящей сотовой сети». В докладе исследуется модель восходящей сотовой сети в дискретном времени, с допущением повторной передачи сигнала в случае сбоя. Введено приближение интерференции среднего поля и исследована его точность с помощью стохастического моделирования.

3. Адам Тот, Янош Штрик (Факультет информатики Дебреценского университета, Венгрия) «Моделирование систем массового обслуживания с двусторонней связью, повторными вызовами, ненадежным сервером и нетерпеливыми клиентами на орбите». Рассмотрена система двусторонней связи с ненадежным сервером, где первичные клиенты могут покинуть систему после пребывания на ор-

бите в течение определенного времени. Выход из строя сервисного блока может произойти как во время его работы, так и в состоянии простоя. Одной из важных характеристик модели является то, что сервер генерирует запросы к клиентам из бесконечного источника в состоянии простоя. Проведен анализ чувствительности некоторых основных показателей производительности рассматриваемой системы к распределениям времени отказа.

4. Галина Зверкина (Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Россия) «О полиномиальной скорости сходимости распределения одной нерегенерирующей системы надежности с запаздыванием переключения». Для одной нерегенерирующей системы надежности с запаздыванием переключения предложен алгоритм получения оценки сверху для скорости сходимости распределения.

5. Руслана Некрасова (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия) «Подход на основе цепей Маркова для анализа устойчивости двухклассовых моделей массового обслуживания с повторными вызовами». В докладе рассмотрена модель обслуживания с повторными вызовами двух классов и пуассоновским входным потоком. Заявка, поступившая при занятом сервере, присоединяется к орбите соответствующего класса и через экспоненциально распределенный интервал времени вновь пытается получить обслуживание. Интенсивность потоков с орбит определяется номером класса и остается постоянной вне зависимости от числа орбитальных заявок. Рассматриваемая модель успешно описывается двумерной марковской цепью, что позволяет при исследовании устойчивости использовать известные теоретические результаты по эргодичности цепей Маркова. Данный подход был применен как к простой системе с повторными вызовами, так и к более сложной модели с ненадежным сервером, в которой поступающая заявка сначала отправляется на орбиту соответствующего класса и только потом пытается захватить сервер.

#### Секция 4. МАММ (Матрично-аналитические модели)

1. Нараянан Вишванатх (Факультет математики Государственного инженерного колледжа г. Триссура, Индия) «Анализ в переходном режиме системы М/М/1 с повторными вызовами с помощью метода гомотопических возмущений» (приглашенный доклад). Известны исследования систем обслуживания с повторными вызовами; обычно при этом применялось преобразование Лапласа, кото-

рое сложно обращать. Поэтому аналитические выражения для показателей производительности таких систем в переходном режиме получаются редко. Для исследования такого рода характеристик в докладе применен метод гомотопических возмущений. Этот метод имеет некоторые трудности в применении, но его универсальность полезна в приложениях.

2. А. Кришнамурти (СМС Колледж Коттаям, Индия), М. Дж. Джейкоб, К. Расми (Кафедра математики Национального технологического института Каликута, Индия) «Многосерверная система обслуживания-запасания с адресными повторными попытками с общей орбиты». Многосерверная система обслуживания с адресными повторными вызовами в докладе обобщена на случай модели обслуживания-запасания. Первичное прибытие клиентов регулируется маркированным марковским входящим процессом. Если клиент попадает в свободный узел с доступным товаром, он получает услугу за экспоненциально распределенное время. В противном случае он уходит на орбиту и повторяет попытку с экспоненциальной задержкой. Для этой системы матрично-аналитическими методами получены условие устойчивости, стационарные вероятности и ряд других характеристик.

3. Джозеф Гришма (Центр математических исследований, СМС Колледж Коттаям, Индия), Джейкоб Варгис (Кафедра математики Государственного колледжа Коттаям, Индия) и Ачьюта Кришнамурти (Центр математических исследований, СМС Колледж Коттаям, Индия) «Сравнительное исследование систем массового обслуживания с вариантами времени активации и нетерпеливыми клиентами при  $N$ -политике». В докладе рассмотрены очереди М/М/1 при  $N$ -политике с нетерпеливыми клиентами и различными стратегиями активации сервера. Входящий поток пуассоновский, время обслуживания и время активации распределены по экспоненциальному закону, и все они независимы друг от друга. Стационарное распределение процесса обслуживания получено с использованием матричного геометрического метода. Рассчитаны показатели производительности соответствующих систем. Также эти модели проанализированы численно, определено оптимальное значение  $N$ .

4. М. Нимиша, М. Манохаран (Департамент статистики Каликутского университета, Индия), А. Кришнамурти (Центр исследований в области математики, СМС Колледж Коттаям, Индия) «Модель опроса транспортных развязок». Рассмотрена модель поллинга для минимизации времени ожидания на светофорах.



Для этого регулируется время разрешающего сигнала светофора с помощью таймера случайной длительности, стартующего в момент опустошения очереди. Длительность таймера стохастически меньше, чем остаточное время до окончания разрешающего сигнала. Если во время ОН этих часов нет поступления машин на обслуживание, сигнал становится запрещающим в тот момент, когда часы срабатывают. Затем сигнал переключается в циклическом порядке. Это значительно сокращает пробки на перекрестках. Система проанализирована как цепь Маркова с непрерывным временем. Для анализа используются матричные аналитические методы. Рассчитаны несколько показателей производительности.

5. В. Абдул Роф (Департамент математики, Женский колледж мемориального единства им. Корамбаила Ахаммеда Хаджи, Индия), А. Кришнамурти (Центр исследований в области математики, SMS Колледж Коттаям, Индия) «Система обслуживания-запасания со снижением продажной цены и старением». Пусть цена реализации товара может снижаться по мере увеличения возраста товара. Решение о сохранении цены реализации на прежнем уровне либо о снижении цены принимается на конечном числе этапов. Товары с минимальной ценой продаются по цене брака, если они есть на складе. Поступление покупателей – пуассоновский процесс, интенсивность которого растет при снижении цены, обслуживание покупателей экспоненциальное. Система исследована с помощью цепи Маркова с непрерывным временем. Товарные запасы пополняются в соответствии с некой политикой. Вычислено стационарное распределение этой цепи Маркова и представлены различные показатели производительности. Функция стоимости построена для расчета оптимального объема пополнения запаса и уровня повторного заказа.

6. Александр Румянцев (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия), Ростислав Разумчик (Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, Россия), Рама Мурти Гаримелла (Департамент компьютерных наук, Центральная инженерная школа, Университет Махиндра, Индия) «Анализ переходных процессов маломасштабной модели суперкомпьютера с помощью фазового расщепления». В докладе продемонстрирован редко используемый метод разделения фаз для явного анализа модели небольшого суперкомпьютера (многосерверная модель с одновременным обслуживанием / система с многосерверными заявками).

24.08.2022

## Заседание, посвященное памяти В. В. Калашникова (1942–2001)

Большинство выступлений было на русском языке. Авторы докладов поделились воспоминаниями о В. В. Калашникове, рассказали о некоторых его достижениях и о нынешних результатах применения предложенных В. В. Калашниковым методов и подходов к решению ряда задач в теории случайных процессов.

1. Николай Кузнецов (Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия). Воспоминания.
2. Евсей Морозов (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия). Воспоминания.
3. Виктор Королев (Факультет ВМК, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия) «Асимптотические свойства геометрических и некоторых других смешанных пуассоновских случайных сумм».
4. Владимир Рыков (Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, Россия) «О разложимых полурегенерирующих процессах и их приложении к системе  $k$ -из- $n$ ».
5. Гурами Цициашвили (Лаборатория вероятностных методов и системного анализа ИПМ ДВО РАН, ДВФУ, Россия) «Мой Учитель В. В. Калашников», «Альтернативные конструкции систем массового обслуживания с высокой нагрузкой и малой очередью».
6. Александр Веретенников (Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Россия) «О некоторых методах проверки возвратности».
7. Михаил Чебунин (Кафедра высшей математики физического факультета НГУ, Россия), Сергей Фосс (Университет Хериота Уотта, Великобритания) «Эргодичность по Харрису протокола управления раздельной передачей данных».
8. Екатерина Булинская (Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия) «О проблемах устойчивости для прикладных вероятностных моделей».
9. Херманн Ториссон (Школа инженерии и естественных наук Исландского университета, Исландия) «Классический метод каплинга и теорема восстановления Блэквелла».
10. Лев Клебанов (Карлов университет, Прага, Чехия), Юлия Куваева (Уральский государственный экономический университет, Россия)

«Распределения с тяжелыми хвостами в социальных науках».

11. Александр Зейфман (Вологодский государственный университет, Россия) «Эргодичность, возмущение и границы усечения для неоднородных цепей и моделей Маркова с непрерывным временем, исследования с использованием прямых уравнений Колмогорова».

12. Юрий Хохлов (Факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия) «Об одном семействе многомерных распределений с тяжелыми хвостами».

13. Ирина Пешкова (Петрозаводский государственный университет, Россия) «О максимумах времени ожидания в очередях со смешанным временем обслуживания».



25.08.2022

### Молодежная школа

В рамках молодежной школы состоялся пленарный доклад профессора Василия Колокольцова (Факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия) «Квантовые вычисления» и прошел tutorial Александра Румянцева (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Россия) «От стохастической модели к веб-приложению». В секционной части было представлено 7 докладов молодых ученых (некоторые доклады подготовлены в соавторстве с научными руководителями):

1. Рама Мурти Гаримелла (Факультет компьютерных наук, Университет Махиндра, Хайдарабад, Индия), Александр Румянцев (Институт прикладных математических ис-

следований КарНЦ РАН, Россия), Баса Чандранейл (Индийский технологический институт, Мадрас, Индия) «Цепи Маркова без отказов: уравнения для матричного/степенного ряда». В работе рассмотрены широко применяющиеся в приложениях системы массового обслуживания типа  $G/M/1$  и  $M/G/1$ . Нахождение стационарного распределения подобных систем требует решения уравнений для матричного степенного ряда. Авторы показали, что с помощью теоремы Гамильтона–Кэли и используя сопровождающую матрицу можно свести подобное уравнение к матричному уравнению для полинома.

2. П. С. Арья, Р. Маникандан, А. Кришнамурти (Центральный университет Кералы, Касарагод, Индия) «Система “Надежность – Очередь – Инвентаризация” с пополнением запасов и ремонтом отказавших компонентов».

В докладе рассмотрена система типа  $k$ -из- $n$ , состоящая из одинаковых и независимо работающих компонентов с экспоненциально распределенными временами жизни и восстановления. Предполагается, что отказавшие компоненты помещаются в очередь для ремонта, который начинается только при достижении определенного порога числа отказавших приборов. Для рассматриваемой модели получено явное решение для вероятностей состояний и найдены важные показатели эффективности.

3. П. У. Шаджиб (Факультет математики, Государственный университет Виктории, Паллаккад, Индия), Р. Маникандан, А. Кришнамурти (Центральный университет Кералы, Касарагод, Индия) «Процесс группового обслуживания с доступной партией применительно к системе общественного транспорта». В докладе рассмотрена задача моделирования системы городского пассажирского транспорта, курсирующего между организациями/офисами и центральной точкой (центральным узлом) города. Время перемещения транспортного средства между остановками, располагающимися на пути от офисов к центральному узлу, имеет экспоненциальное распределение. При этом заявки могут перемещаться группами, каждая из которых не превосходит некоторого заданного порога  $b$ . Найдено условие устойчивости данной системы, также вычислены некоторые характеристики состояния системы, на основе которых определена функция затрат.

4. Сергей Астафьев (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) «Алгоритмическое построение генераторной матрицы для многосерверной модели обслуживания». В докладе рассказано об алгоритмическом построении генераторной матрицы для модели вычислительного кластера с политикой случайного переключения скорости обслуживания. Данный подход позволяет построить матрицу для системы любого размера, на практике ограниченного лишь размером оперативной памяти компьютера. Приведены примеры расчета стационарного распределения на основе матрицы, полученной с помощью предложенного алгоритма.

5. Антон Ковин (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) «Использование резервуарных вычислений для классификации проблем в Github». Доклад об автоматической классификации заданий по устранению проблем в программном обеспечении с открытым исходным кодом с помощью нейронной сети LogNet и javascript-фреймворка Cypress.

6. Екатерина Потапова (Петрозаводский государственный университет), Олег Лукашенко (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) «Вариационный вывод для скрытой клеточной модели Поттса». При анализе данных с некоторой пространственной конфигурацией широко используются марковские случайные поля. Особенно актуальны такие модели при анализе изображений, оценке роста злокачественных опухолей и т. д. В данном исследовании рассмотрено применение скрытой модели Поттса для оценки степени поражения тканей злокачественными клетками. Для решения описанной выше задачи авторы применили так называемое приближение среднего поля. Проведено несколько экспериментов на синтетических данных. продемонстрирована эффективность предложенного подхода с точки зрения точности предсказаний, т. е. доли правильно идентифицированных типов клеток.

7. Кирилл Мосиевич (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) «О достаточных условиях транзиентности решения стохастических дифференциальных уравнений с переключениями». В работе установлены достаточные условия транзиентности процесса для марковской диффузионной модели с переключением и двумя режимами: переходным и эргодическим и при строго отделимых от нуля интенсивностях. Также найдены ограничения на условия экспоненциальной эргодичности при заданных переключениях.

*Г. А. Зверкина, Э. Ю. Калимуллина*

*Авторы обзора выражают глубокую признательность А. С. Румянцеву за неоцененную помощь в подготовке этой публикации.*



## ТАМАРА ПЕТРОВНА ТИХОМИРОВА (к 75-летию со дня рождения)



Тамара Петровна Тихомирова родилась 6 ноября 1948 г. в пос. Ладва Прионежского района Карельской АССР в семье военнослужащего. После окончания средней школы № 9 г. Петрозаводска поступила на физико-математический факультет Петрозаводского государственного университета, который окончила в 1971 году по специальности «математика». По распределению приступила к работе в Карельском филиале Академии наук СССР (в настоящее время Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук» (КарНЦ РАН)), в котором проработала 50 лет.

Т. П. Тихомирова имеет ученую степень кандидата технических наук (с 2003 г.), ученое звание доцента по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (с 2005 г.).

Руководителем лаборатории, в которой начала свой трудовой путь Тамара Петровна, был уже известный в то время ученый, инженер-энергетик Г. А. Борисов, выпускник Ленинградского политехнического института. Он активно развивал новое перспективное направление исследований по разработке и совершенствованию систем автоматизированного проектирования (САПР), имеющих приоритетное значение для Карелии. Молодой специалист Т. П. Тихомирова со свойственным тому времени энтузиазмом погрузилась в научно-технические проблемы по применению математических методов и ЭВМ в области лесотранспортного и лесомелиоративного проектирования. На основе математических методов (вариационного исчисления, теории оптимизации и нелинейного программирования) были построены оригинальные модели, эффективные методы и технологии автоматизированного проектирования с помощью ЭВМ. Алгоритмы решения соответствующих экстремальных задач были доведены до востребованного отраслью комплекса программ и практической реализации.

Тамара Петровна участвовала в создании семи САПР, являясь ответственным исполнителем, техническим руководителем, руководителем раздела. Эти системы были внедрены и эксплуатировались более чем в десяти проектных организациях страны. САПР, руководителем которой была Т. П. Тихомирова, награждена серебряной медалью ВДНХ.

В начале 1990-х Т. П. Тихомирова вместе с Г. А. Борисовым занялись математическим моделированием актуальных проблем региональной энергетики. А проблем накопилось немало. Возникла острая необ-



ходимость разработки, внедрения в производство и деятельность на перспективу органов власти математического и информационного обеспечения. Результаты расчетов топливно-энергетического баланса вошли в итоговые материалы совместного Российско-Финляндского проекта «Энергетический мастер-план Республики Карелия». Кроме того, результаты исследований использовались в международных проектах ТАСИС ERUS, в российско-скандинавском проекте по разработке сценариев устойчивого развития топливно-энергетического комплекса Северного экономического района РФ, в других международных программах. В 2005 г. Т. П. Тихомирова была ответственным исполнителем хоздоговорной работы с Костомукшским ГОКом по исследованию и прогнозу путей энергообеспечения Костомукшского промышленного района на период до 2020 года. Созданная гипертекстовая система по топливно-энергетическому комплексу использовалась при проведении ряда исследований по проблемам энергетики, в том числе в Концепции социально-экономического развития Республики Карелия на период до 2010 г.

Результаты этой научной деятельности докладывались на всероссийских и международных конференциях и симпозиумах, опубликовано более 70 научных работ.

Почти два десятилетия, с 2002 по 2020 г., Т. П. Тихомирова работала в должности ученого секретаря Института прикладных математических исследований (ИПМИ) КарНЦ РАН. Она обеспечивала подготовку планов научных исследований и государственных заданий, организовывала контроль за выполнением планов и обеспечивала подготовку отчетов о деятельности института, организовывала работу Ученого совета, курировала в институте работу по обучению в аспирантуре, готовила материалы по аккредитации направлений подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре, организовывала контроль за выполнением учебных планов и представлением отчетных материалов. Аспиранты многих поколений с большой теплотой вспоминают неизменную активную поддержку в разрешении их «неразрешимых» организационных проблем. Тамара Петровна была поистине Заслуженным ученым секретарем ИПМИ.

Кроме того, Т. П. Тихомирова являлась секретарем Ученого совета института, членом

редакционной коллегии и ответственным секретарем серии «Математическое моделирование и информационные технологии» журнала «Труды Карельского научного центра РАН».

Научную и административную работу Тамара Петровна успешно сочетала с педагогической деятельностью. Она читала курсы лекций («Математические основы информатики», «Компьютерные сети» и др.) в Петрозаводском государственном университете и в Карельской государственной педагогической академии (КГПА), руководила курсовыми и дипломными работами. Прошла дополнительную профессиональную подготовку (в 2006 и 2008 гг.) по программе Intel «Обучение для будущего». Неоднократно являлась членом Государственной аттестационной комиссии КГПА.

За успехи в научной и научно-организационной деятельности Т. П. Тихомирова награждена Почетной грамотой Президиума РАН и Профсоюза работников РАН (1999 г.), Почетной грамотой РАН (2009 г.), Почетной грамотой Республики Карелия (2013 г.), Почетной грамотой Минобрнауки РФ (2019 г.).

Тамара Петровна является тонким ценителем классической музыки, особенно фортепианной, старается не пропускать концерты признанных мастеров оперного пения. Интересуется живописью, неизменно посещая выставки в Эрмитаже, Третьяковской галерее, не забывая и наш родной Музей изобразительных искусств. Это определяло неизменную элегантность и ровный деловой стиль общения с коллегами: корректность, доброжелательность, порядочность. Не только определяло, но и определяет, поскольку Тамара Петровна продолжает активно интересоваться жизнью коллектива, оказывает неизменную консультационную и организационную поддержку с высоты своего опыта, продолжает активную работу в качестве высококвалифицированного рецензента статей в «Труды Карельского научного центра РАН» в соответствии со своей научной специальностью.

Коллектив ИПМИ сердечно поздравляет коллегу с текущим юбилеем, отмечая ее многогранный вклад в становление и развитие института и желая Тамаре Петровне здоровья и неиссякаемой энергии!

*Зам. генерального директора КарНЦ РАН  
по научно-организационной работе  
д. ф.-м. н., проф. Ю. В. Заика*

## ПАМЯТИ ВЛАДИМИРА ВАСИЛЬЕВИЧА АКСЕНОВА (1930–2023)



11 апреля 2023 г. на 93-м году жизни скончался высококвалифицированный специалист в области программных средств и математического обеспечения ЭВМ различных классов (типов) Владимир Васильевич Аксенов.

Он родился 15 декабря 1930 г. в Пудоже Карельской АССР, там же окончил 9 классов средней школы и поступил на 3-й курс Педагогического училища в г. Петрозаводске. После окончания училища был направлен в г. Беломорск, где преподавал математику.

В 1950 г. он окончил десятый класс вечерней школы и в 1951 г. поступил учиться на физико-математический факультет Карело-Финского госуниверситета в группу математиков. После окончания госуниверситета в 1956 г. он был направлен в Ругозеро (Карелия), где проработал учителем до 1963 г. Осенью того же года его приняли в отдел энергетики и автоматики Карельского филиала АН СССР на должность старшего лаборанта.

Работа в области программирования началась с изучения кода машины М-3, сходной с системой команд ЭВМ «Минск-1», работавшей в отделе энергетики и автоматики. В 1963 г. проблемами автоматизации программирования в СССР занималось малое количество специалистов, в основном в Москве, Новосибирске, Киеве и Минске. Сложности ручного программирования на машинном языке вызвали появление алгоритмических языков и трансляторов. Формальное описание языка Алгол-60 получено в Новосибирске, где уже в 1963 г. был создан Альфа-транслятор, вписанный в ЭВМ. Руководитель отдела энергетики и автоматики выдвинул идею сконструировать транслятор с Алгола на ЭВМ «Минск-1». В составе группы из шести человек В. В. Аксенов принимал активное участие в разработке транслятора Суб-Алгола, являющегося подмножеством Алгол-60. Алгоритмы программ были разработаны Н. Г. Зайцевым, а другие участники проекта переводили их на машинный язык. В 1964 г. первый вариант программ заработал, но после анализа было принято решение усовершенствовать его. Доводку усовершенствованного варианта транслятора поручили В. В. Аксенову, и с этой работой он справился на отлично. В том же 1964 г. был

подготовлен подробный отчет по транслятору на Суб-Алголе для ЭВМ «Минск-1», наиболее массовой в те годы в СССР. Широкую известность транслятор получил на Всесоюзной конференции по программированию в Минске в 1965 г., где Владимир Васильевич сделал доклад о практике использования транслятора. Дубли транслятора на перфоленте получили много пользователей. Акты внедрения В. В. Аксеновым были получены из Петрозаводского университета и академии имени Можайского (г. Ленинград), а позднее – еще 5 актов внедрения в организациях Севастополя, Одессы, Луганска. В 1968 г. разработчики транслятора получили Всесоюзную премию.

После завершения работы над Суб-Алголом началась разработка транслятора уже с Алгола-60 на «Минск-1», в которой В. В. Аксенов отвечал за операторы перехода, стандартные подпрограммы и программу компоновки. Разработка была успешно завершена, контрольная задача от теоретика автоматизации программирования М. Р. Шуры-Буры прошла без сбоев. В 1967 г. вышла статья «Транслятор с языка Алгол-60 для ЭВМ «Минск-1» в журнале вычислительной математики и математической физики.

В период с 1968 по 1975 г. В. В. Аксенов работал в вычислительном центре Карельского научно-исследовательского института лесной промышленности (КарНИИЛП), где руководил группой программистов и операторов. В задачу группы входила перфорация программ, отладка и их решение. Программистский опыт Владимира Васильевича помог эффективно организовать вычислительный процесс на ЭВМ «Минск-22» и «Минск-32». Разработанная в этот период в КарНИИЛПе АСУ (автоматизированная система управления) была одной из первых в лесной промышленности. Так как ее создание осуществлялось на основе «сыровой» системы программ «Кунцево», для эксплуатации АСУ разработали пакет документов. В «Кареллеспроме» предполагалось создать собственный вычислительный центр, однако руководство отказалось от этой идеи. С эксплуатацией АСУ на базе КарНИИЛПа возникли проблемы, в результате руководитель вычислительного центра Г. А. Борисов и его основные сотрудники, включая В. В. Аксенова, перешли в КФ АН СССР.

В 1975 г. В. В. Аксенов был избран по конкурсу на должность заведующего лабораторией математического обеспечения в отделе математических методов автоматизации научных исследований и проектирования (ОММАНИП). Более 17 лет он возглавлял эту лабораторию и успешно решал задачи по подготовке данных для ввода в ЭВМ «Минск-32» и ЕС-1052, сопровождению работы программ пользователей КФ АН СССР операторами, проводил анализ проблем, возникающих при обработке, находил ошибки пользователей и операторов. В сущности, им была организована технология от поступления заявки от исследователей до выдачи результатов решения в печатном виде. В процессе решения возникающих проблем им была также создана специальная программа, которая постоянно проводила тестирование всех устройств ЭВМ и тем самым обеспечивала загрузку ЭВМ до нормативного уровня – 10 часов постоянной работы ежедневно. С 1993 по 1997 г. включительно он в должности научного сотрудника работал в лаборатории геоинформационных систем. Параллельно занимался вопросами обучения аспирантов основам информатики и вычислительной техники.

Владимир Васильевич до конца своей жизни общался со школьными друзьями из Пудожья, с однокурсниками по университету, а также с выпускниками Ругозерской школы. Последние регулярно звонили ему с поздравлениями в день рождения, а года за три до своей кончины он ездил с сыном в Ругозеро на встречу с выпускниками школы. Его отличало трудолюбие, высокая ответственность, чувство справедливости, готовность оказать помощь своим друзьям и коллегам. Он любил писать короткие эпиграммы к юбилеям сотрудников, собирал и исполнял частушки, с удовольствием посещал библиотеку КарНЦ РАН. В коллективных походах по Онежскому озеру в трудные моменты его частушки помогали всем обрести уверенность, справиться с возникающими проблемами. Светлая память о Владимире Васильевиче надолго сохранится в сердцах знавших его людей.

*Редакционная коллегия серии  
«Математическое моделирование  
и информационные технологии»*

# ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

## Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации  
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, утраты науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учётом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редколлегия серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляет за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил её оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы анкеты и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия анкеты и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее чем через месяц после получения рецензии. Перед опубликованием авторам высылаются электронная версия статьи, которую авторы вычитывают и заверяют.

Журнал имеет систему электронной редакции на базе Open Journal System (OJS), позволяющую вести представление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегиями серий и рецензентами в электронном формате и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Содержание выпусков Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные версии статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru/>; <http://journals.krc.karelia.ru/>

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

### ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Объём рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объём рисунков не должен превышать 1/4 объёма статьи. Рукописи большего объёма (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

При оформлении рукописи применяется полуторный межстрочный интервал, шрифт Times New Roman, кегль 12, выравнивание по обоим краям. Размер полей страницы – 2,5 см со всех сторон. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в правом нижнем углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

Рукописи подаются в электронном виде в систему электронной редакции на сайте <http://journals.krc.karelia.ru> либо высылаются на e-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru), или же представляются в редакцию лично (г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, каб. 502).

**Для публикации в выпусках серии «Математическое моделирование и информационные технологии» рукописи принимаются в формате .tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу: <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>. Статья в файле с расширением .pdf загружается на сайт журнала <http://journals.krc.karelia.ru>. Исходный файл с расширением .tex и необходимые рисунки загружаются на 4-м шаге «Загрузка дополнительных файлов».**



**Обязательные элементы рукописи располагаются в следующем порядке:**

УДК курсивом в левом верхнем углу первой страницы; заглавие статьи на русском языке полужирным шрифтом; инициалы и фамилии авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название и полный почтовый адрес организации – места работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов аффилированным организациям; автора, ответственного за переписку, следует отметить звездочкой и указать в аффилиации его электронный адрес); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; указание источников финансирования выполненных исследований на русском языке.

Далее располагаются все вышеуказанные элементы на английском языке.

Текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: **Введение. Материалы и методы. Результаты и обсуждение. Выводы** либо **Заключение**); благодарности; списки литературы на языке оригинала (**Литература**) и на английском языке (**References**); таблицы на русском и английском языках (на отдельных листах); рисунки (на отдельных листах); подписи к рисункам на русском и английском языках (на отдельном листе).

На отдельном листе дополнительные сведения об авторах: фамилии, имена, отчества всех авторов полностью на русском и английском языке; должности, ученые звания, ученые степени авторов; адрес электронной почты каждого автора; можно указать телефон для контакта редакции с авторами статьи.

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать ее содержание и состоять из 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, создавать возможно полное представление о содержании статьи и иметь объем не менее 200 слов. Рукопись с недостаточно раскрывающей содержание аннотацией может быть отклонена.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ (как правило, не менее пяти). Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце точка не ставится.

Раздел «Материалы и методы» должен содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

Изложение результатов должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. На табличный и иллюстративный материал следует ссылаться так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т.д.), фотографии, помещаемые на клейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой в разделе «Заключение» основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во «Введении». Ссылки на литературу в работах **серии «Математическое моделирование и информационные технологии»** даются цифрами.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Заголовки таблиц, заголовки и содержание столбцов, строк, а также примечания приводятся на русском и английском языках. Диаграммы и графики не должны дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, поясняются в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

РИСУНКИ представляются отдельными файлами с расширением TIFF (\*.TIF) или JPG. При первичной подаче материала в редакцию рисунок вставляется в общий текстовый файл. При сдаче материала, принятого в печать, все рисунки должны быть представлены в виде отдельных файлов в вышеуказанном формате. Графические материалы могут быть снабжены указанием желательного размера рисунка, пожеланиями и требованиями к конкретным иллюстрациям. На каждый рисунок должна быть как минимум одна ссылка в тексте.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ приводятся на русском и английском языках, должны содержать достаточную информацию для того, чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях, детали на рисунках следует обозначать цифрами или буквами, значение которых также приводится в подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все прочие сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. Располагаются после основного текста статьи отдельным абзацем, в котором авторы выражают признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и организациям, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи.

ИНФОРМАЦИЯ О КОНФЛИКТЕ ИНТЕРЕСОВ. При подаче статьи авторы должны раскрыть потенциальные конфликты интересов, которые могут быть восприняты как оказавшие влияние на результаты или выводы, представленные в работе. Если конфликт интересов отсутствует, следует об этом сообщить в отдельной формулировке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ оформляется по ГОСТ Р 7.0.5-2008. Источники располагаются в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами авторов ставится пробел.

REFERENCES. Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Библиографические записи источников оформляются согласно стилю Vancouver (см. примеры в ГОСТ Р 7.0.7–2021 и образцы ниже). Заголовки русскоязычных работ приводятся на английском языке; для журналов и сборников, в которых размещены цитируемые работы, указывается параллельное английское наименование (при его наличии) либо русскоязычное наименование приводится в латинской транслитерации (вариант BSI) с переводом на английский язык. Прочие элементы библиографической записи приводятся на английском языке (русскоязычное название издательства транслитерируется). При наличии переводной версии источника в References желательно указать ее. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала.

Для каждого источника обязательно указание DOI при его наличии; если приводится адрес интернет-страницы источника (URL), нужно указать дату обращения к ней.

**Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences**  
**No. 4, 2023**  
**“MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES” Series**

**TABLE OF CONTENTS**

ORIGINAL ARTICLES

B. Z. Belashev. SPECTRAL ANALYSIS OF GEOPHYSICAL MONITORING DATA . . . . .	5
F. Yu. Bykov, A. A. Krizhanovsky. SEARCH FOR NEARDUPLICATE TEXTS IN THE LINGUISTIC CORPUS VEPKAR . . . . .	16
K. V. Grudova. MODELING OF DAILY TEMPERATURE FLUCTUATIONS IN THE ROOT LAYER OF SANDY FOREST SOILS . . . . .	24
A. V. Ivanov. ON INTERMEDIATE VALUES OF THE LOWER BOX DIMENSION . . . . .	31
A. N. Kirillov, A. M. Sazonov. PREDATOR-PREY MODEL WITH A VARIABLE STRUCTURE OF INTERACTIONS . . . . .	36
M. A. Maltseva, A. S. Rummyantsev. BOOLEAN SATISFIABILITY VERIFICATION BY QUANTUM ANNEALING . . . . .	41
Yu. L. Pavlov. ON THE INTERNET-GRAPH CLUSTERING COEFFICIENT . . . . .	50
V. A. Khitraya, A. V. Khitryy. WEB SERVICE FOR THE PETROZAVODSK ROAD NETWORK VISUALIZATION . . . . .	54
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORAL ANALYSIS OF A SUBSTITUTION SCHEME WITH CYCLES OF GIVEN SIZES . . . . .	64
N. Yu. Enatskaya. PERMUTATION SCHEME WITH AN UPPER LIMITATION OF INTS FOR ITS FIXED ELEMENTS . . . . .	71

CHRONICLE

A. N. Rettieva. International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research, MOTOR 2022 (Petrozavodsk, July 2–6, 2022) . . . . .	77
G. A. Zverkina, E. Yu. Kalimulina. The Third International Workshop on Stochastic Modeling and Applied Research of Technology, SMARTY 2022 (Petrozavodsk, August 21–25, 2022) . . . . .	79

DATES AND ANNIVERSARIES

Yu. V. Zaika. Tamara P. Tikhomirova (on the 75th anniversary) . . . . .	86
---	----

BEREAVEMENTS

In memory of Vladimir V. Aksenov (1930–2023) . . . . .	88
--	----

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS . . . . .	90
------------------------------------	----

Научный журнал

**Труды Карельского научного центра  
Российской академии наук**  
№ 4, 2023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению Ученого совета  
Федерального исследовательского центра  
«Карельский научный центр Российской академии наук»*

Выходит 8 раз в год

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
Регистрационная запись ПИ № ФС 77-72429 от 28.02.2018 г.

Редактор А. И. Мокеева  
Компьютерная верстка Л. Э. Бюркланд

Подписано в печать 23.06.2023. Дата выхода 30.06.2023. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,7. Усл. печ. л. 10,9.  
Тираж 100 экз. Заказ 766. Цена свободная

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»  
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН  
185030, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50