

Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр  
Российской академии наук»

# **ТРУДЫ**

## **КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

№ 4, 2022

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Петрозаводск  
2022

Главный редактор

А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; О. Н. БАХМЕТ (зам. главного редактора), член-корр. РАН, д. б. н.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; И. В. ДРОБЫШЕВ, доктор биологии (Швеция – Канада); Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; Х. ЙООСТЕН, доктор биологии, проф. (Германия); А. М. КРЫШЕНЬ, д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; О. Л. КУЗНЕЦОВ, д. б. н.; Н. В. ЛУКИНА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; О. ОВАСКАЙНЕН, доктор математики, проф. (Финляндия); О. Н. ПУГАЧЕВ, академик РАН, д. б. н.; С. А. СУББОТИН, доктор биологии (США); Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; Т. Э. ХАНГ, доктор географии (Эстония); П. ХЁЛЬТТЯ, доктор геологии, проф. (Финляндия); К. ШАЕВСКИЙ, доктор математики, проф. (Польша); В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Редакционная коллегия серии

«Математическое моделирование и информационные технологии»

В. А. ВАТУТИН, д. ф.-м. н., проф.; Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент; О. В. ЛУКАШЕНКО (ответственный секретарь), к. ф.-м. н.; В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.

*Издается с января 2009 г.*

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Тел. (8142)762018; факс (8142)769600

E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

© ФИЦ «Карельский научный центр РАН», 2022

© Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, 2022

Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences

# **TRANSACTIONS**

**of the KARELIAN RESEARCH CENTRE  
of the RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES**

No. 4, 2022

**MATHEMATICAL MODELING  
AND INFORMATION TECHNOLOGIES**

Petrozavodsk  
2022

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; O. N. BAKHMET (Deputy Editor-in-Chief), RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); I. V. DROBYSHEV, PhD (Biol.) (Sweden – Canada); N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; T. E. HANG, PhD (Geog.) (Estonia); P. HÖLTTÄ, PhD (Geol.), Prof. (Finland); E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; H. JOOSTEN, Dr. (Biol.), Prof. (Germany); A. M. KRYSHEN', DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; O. L. KUZNETSOV, DSc (Biol.); N. V. LUKINA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; O. OVASKAINEN, PhD (Math.), Prof. (Finland); O. N. PUGACHYOV, RAS Academician, DSc (Biol.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; S. A. SUBBOTIN, PhD (Biol.) (USA); D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); K. SZAJEWSKI, PhD (Math.), Prof. (Poland); A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Editorial Board of the

«Mathematical Modeling and Information Technologies» Series

A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; O. V. LUKASHENKO (Executive Secretary), PhD (Phys.-Math.); V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; V. A. VATUTIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.

*Published since January 2009*

*8 issues a year*

Editorial Office address: 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia  
Tel. (8142)762018; fax (8142)769600  
E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)  
Full-text electronic version: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

© Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences, 2022  
© Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences, 2022

УДК 001.891.573(0.75.8), 004.65, 577.359

## ЛУННЫЕ ЦИКЛЫ ГЕОМАГНИТНОЙ АКТИВНОСТИ И ВЫЗОВОВ СКОРОЙ МЕДИЦИНСКОЙ ПОМОЩИ

Б. З. Белашев

*Институт геологии КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН»  
(ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Представлена картина распределений уровней геомагнитной активности и числа вызовов бригад скорой медицинской помощи по дням лунного синодического месяца. Исследование выполнено на базе данных Кр-индекса и обезличенного каталога вызовов скорой помощи БСМП г. Петрозаводска 2015–2017 гг. При обработке данных использованы метод наложенных эпох, алгоритмы кластеризации и выделения трендов. Высокие суточные Кр-индексы группируются в основном вблизи новолуния, низкие Кр-индексы – вблизи полнолуния. Распределения числа вызовов скорой помощи по сердечно-сосудистым, психическим и нервным заболеваниям имеют специфические особенности. Обсуждаются возможные причины лунафазного эффекта геомагнитной активности и особенности распределений экстренных вызовов медицинской помощи.

**Ключевые слова:** геомагнитная активность; Кр-индекс; число вызовов скорой помощи; лунный синодический месяц; инфаркт миокарда; шизофрения; эпилепсия

**Для цитирования:** Белашев Б. З. Лунные циклы геомагнитной активности и вызовов скорой медицинской помощи // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 5–13. doi: 10.17076/mat1566

**Финансирование.** Исследование выполнено в рамках государственного задания КарНЦ РАН (Институт геологии КарНЦ РАН, темы АААА-А18-118020290086-1, АААА-А18-118020290231-1).

### **B. Z. Belashev. LUNAR CYCLES OF GEOMAGNETIC ACTIVITY AND EMERGENCY AMBULANCE CALLS**

*Institute of Geology, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences  
(11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The distributions of geomagnetic activity levels and the number of emergency ambulance calls by days of the lunar (synodic) month were mapped. The input for the study was Kp index data and the anonymized catalog of ambulance calls to the Petrozavodsk Emergency Care Hospital in 2015–2017. The data were processed using the superposed epochs method and the clustering and trend isolation algorithms. High daily Kp indexes are mainly grouped around new moon while low Kp indexes – near full moon. The distributions of the number of emergency calls for cardiovascular diseases, mental disorders, and neuropathies have their specific features. Possible causes of lunar cycle-related effects of geomagnetic activity and the peculiarities of emergency ambulance calls distributions are discussed.

Key words: geomagnetic activity; Kp index; number of emergency ambulance calls; synodic lunar month; myocardial infarction; schizophrenia; epilepsy

For citation: Belashev B. Z. Lunar cycles of geomagnetic activity and emergency ambulance calls. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:5–13. doi: 10.17076/mat1566

Funding. The study was carried out under state assignment to KarRC RAS (Institute of Geology KarRC RAS, research themes AAAA-A18-118020290086-1, AAAA-A18-118020290231-1).

## ВВЕДЕНИЕ

Доказать действие на человека геофизических и погодных условий, сопровождающих смену фаз лунного цикла, на фоне индивидуальных реакций людей непросто [6]. Влияние внешнего фактора изучают, исследуя корреляционные связи изменчивости фактора и медико-биологических показателей, пытаясь обнаружить в них характерную для фактора периодичность.

Выраженную периодичность приливов используют в концепции «биологического прилива» [20], полагая, что модулируемое Луной гравитационное поле влияет на структуру воды, работу клеточных мембран, нервной и эндокринной систем [11], поступление в кровь метаболитов кишечной палочки E-coli [4].

Отрицание гравитационного влияния Луны на биологические объекты строится на оценке его действия порядка  $10^{-7}$  г по сравнению с эффектами, фиксируемыми в экспериментах, не менее  $10^{-4}$  г [3]. Достижение нужной чувствительности требует остановки сердца и отключения дыхания у испытуемых.

На возмущения геофизической среды реагирует магнитное поле Земли, циклические изменения которого могут выполнять роль планетарного синхронизатора процессов. Хотя влияние геомагнитных вариаций на человека и высших животных нельзя считать окончательно установленным, результаты экспериментов в сильных и слабых электромагнитных полях [8, 9, 12, 21] свидетельствуют в его пользу, как и исследования, связывающие геомагнитную активность и вызовы скорой медицинской помощи [14, 22, 24].

В медико-экологических исследованиях каталог вызовов скорой медицинской помощи является чувствительным инструментом, позволяющим охватить большое число пациентов и диагнозов заболеваний. Стандартная форма каталога упрощает обработку данных, а привязка вызовов по месту и времени способствует поиску причинных связей.

В работе рассматриваются согласованные временные ряды индексов геомагнитной ак-

тивности и количества вызовов скорой медицинской помощи в г. Петрозаводске. Ее цель – проанализировать по дням лунного синодического месяца распределения Кр-индексов геомагнитной активности и числа вызовов скорой медицинской помощи по поводу заболеваний инфаркт миокарда, шизофрения, эпилепсия. В задачи исследования входят кластеризация суточных геомагнитных Кр-индексов, построение лунафазных кластерных распределений дней с Кр-индексами, Кр-индексов и числа вызовов скорой помощи с указанными диагнозами, выделение участков распределений, отличающихся трендами, сравнение полученных результатов с известными данными.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В качестве исходных данных использованы сведения о новолуниях [10], согласованные временные ряды Кр-индекса геомагнитной активности [19] и обезличенного каталога вызовов скорой помощи БСМП г. Петрозаводска за 2015–2017 гг. [14]. Квазилогарифмическим Кр-индексом в диапазоне от 0 до 9 описывают отклонения планетарного геомагнитного поля от нормы за 3-часовой период. Значения индекса от 5 до 9 соответствуют магнитным бурям.

Каталог вызовов скорой помощи – это таблица, строки которой соответствуют вызовам, а столбцы – их атрибутам: населенный пункт, адрес, возраст, пол пациента, дата, время вызова, диагноз заболевания согласно классификации МКБ-10. Число вызовов за период 1.01.2015–19.12.2017 составило 352641. Анализировали вызовы с фиксацией диагноза заболевания.

По данным [19] рассчитывали среднесуточные значения и среднеквадратичные отклонения Кр-индексов, которые использовали при кластеризации алгоритмом «К-средних» [18]. Для каждого кластера и их суммы по дням лунного синодического месяца методом наложенных эпох [23] строили распределения числа дней с Кр-индексами, Кр-индексов и количества вызовов скорой помощи с заданными

диагнозами. Первый отсчет распределений соответствовал новолунию, остальные отсчеты – последовательным дням синодического месяца. С учетом длительности месяца 29,5 суток число отсчетов равнялось 30. Полных лунных циклов за исследуемый период было 35.

Распределения для  $k$  событий получали, подсчитывая число  $f_k(x)$  от переменной  $x$  по формуле

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) + \delta_k(x), \quad (1)$$

$k = 1, 2, \dots, N$ ;  $f_0(x) = 0$ ;  $\delta_k(x) = 1$ , если  $h < x < h + \Delta h$ , и  $\delta_k(x) = 0$ , если  $x < h$  или  $x > h + \Delta h$ , где  $k$  – число вызовов,  $h$  и  $\Delta h$  – отсчет и шаг гистограммы соответственно.

Отличающиеся трендами участки распределений выделяли с помощью В-алгоритма [15]. Чтобы отслеживать тренды в распределениях небольшой размерности, параметры алгоритма выбирали следующим образом:  $\rho$  – в диапазоне 0,18–0,24, уровень доверия  $\alpha$  – равным 0,05, диапазон варьирования границ участков – 1–2 отсчета, число итераций – равным 10. Нелинейные тренды временных

рядов суточных значений Кр-индексов и числа вызовов скорой помощи с заданными диагнозами получали, используя регрессионную модель на основе полинома 10-й степени. При сравнении средних значений выборок данных использован критерий Стьюдента.

Все алгоритмы обработки данных реализованы в системе компьютерной математики «MATLAB».

## РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 показаны временное распределение и тренд суточного Кр-индекса (а), результаты его кластеризации пятью кластерами (б), распределения по дням лунного синодического месяца числа дней с низкими, средними (в) и высокими (г) суточными Кр-индексами. Белым цветом отображены тренд суточного Кр-индекса и распределение дней для суммы кластеров.

Рис. 2 и 3 демонстрируют лунафазные распределения суточных Кр-индексов, вызовов скорой помощи по поводу инфаркта миокарда, их кластерных компонент, результаты выделения трендов В-алгоритмом.

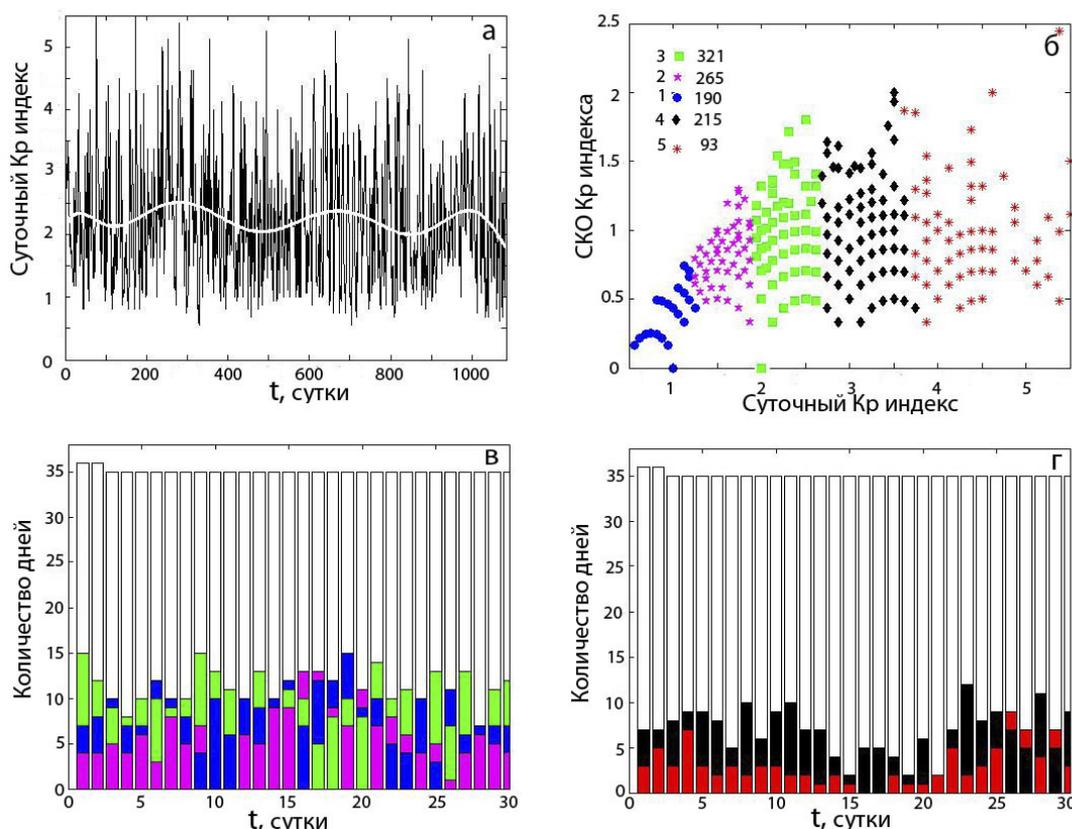


Рис. 1. Временной ход и тренд суточного Кр-индекса (а), результат кластеризации суточных Кр-индексов (б), распределения по дням лунного цикла числа дней с низкими (1, 2) и средними (3) (в) и высокими (4, 5) (г) Кр-индексами

Fig. 1. The time course and trend of the daily Kp index (a), the result of clustering of the daily Kp indices (б), the distribution by days of the lunar cycle of the number of days with low (1, 2) and medium (3) (в) and high (4, 5) (г) Kp indices

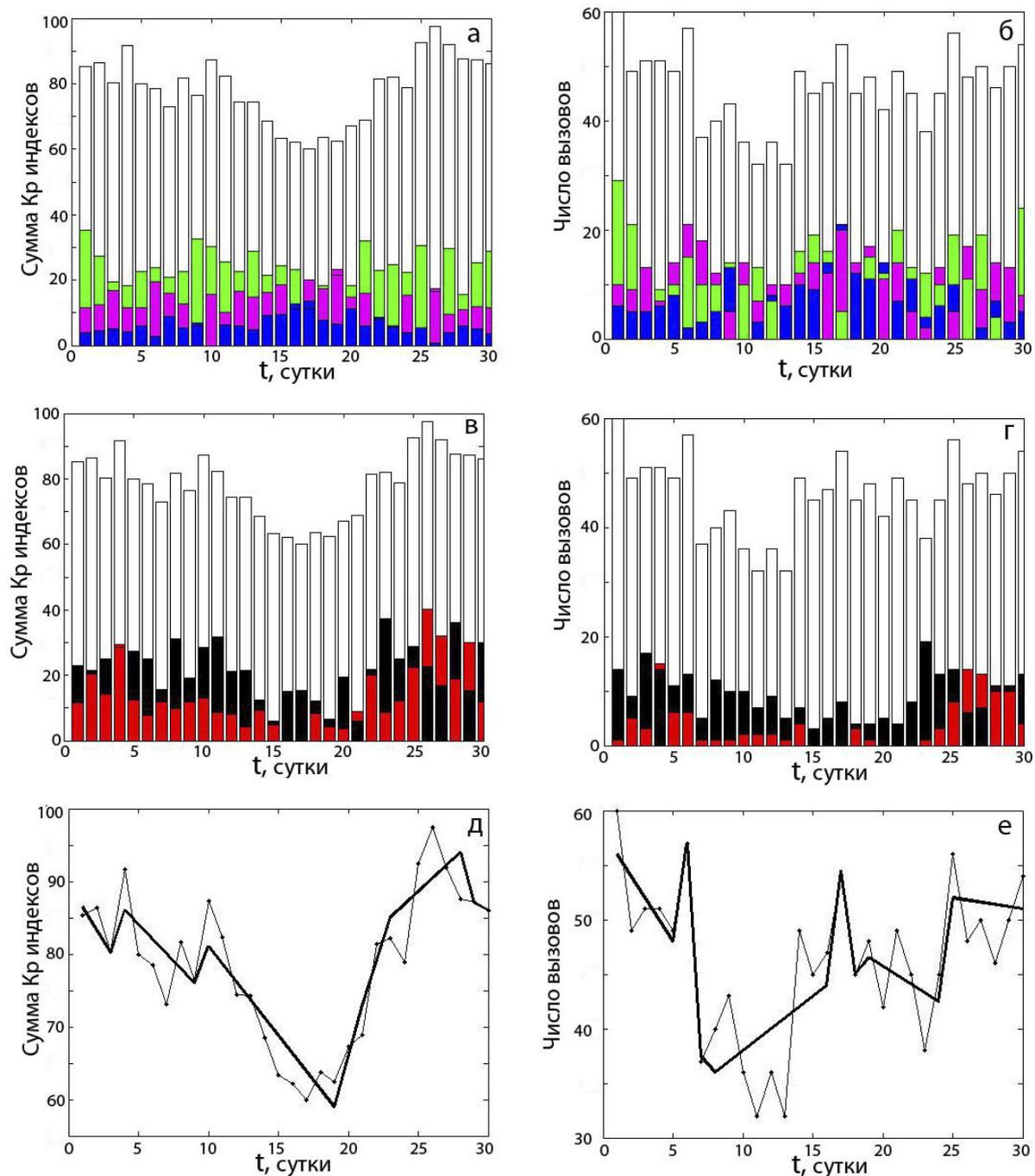


Рис. 2. Полные и кластерные распределения Кр-индексов (а, в, д) и числа вызовов скорой медицинской помощи при диагнозе инфаркт миокарда (б, г, е) по дням лунного синодического месяца для низких (1, 2), средних (3) (а, б) и высоких (4, 5) (в, г) значений Кр-индексов с выделенными линейными трендами полных распределений (д, е)

Fig. 2. Full and cluster distributions of Kp indices (а, в, д) and the number of emergency medical calls diagnosed with myocardial infarction (б, г, е) on the days of the lunar synodic month for low (1, 2), medium (3) (а, б) and high (4, 5) (в, г) values of Kp indices with highlighted linear trends of full distributions (д, е)

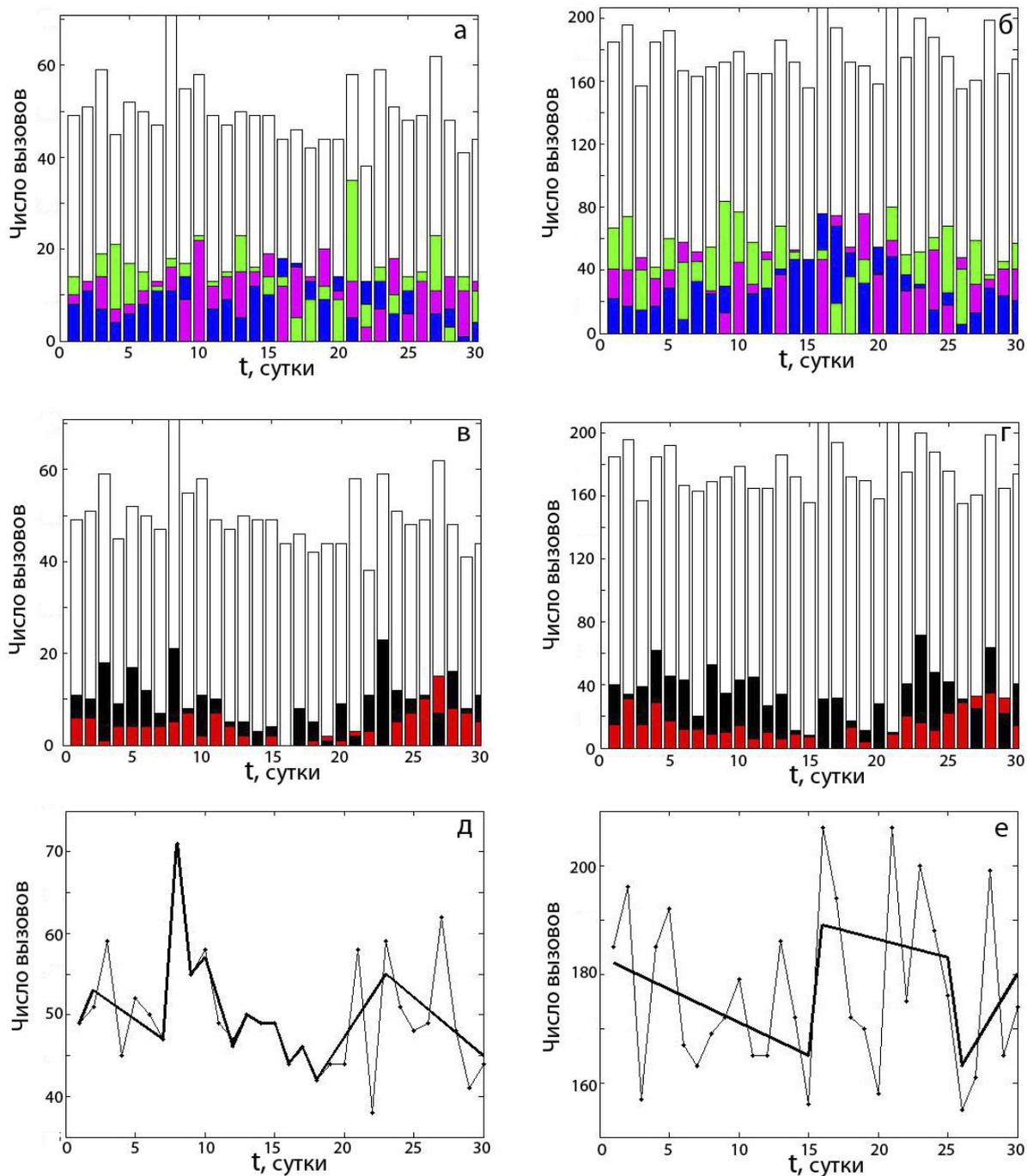


Рис. 3. Полные и кластерные распределения числа вызовов скорой медицинской помощи при диагнозах шизофрения (а, в, д) и эпилепсия (б, г, е) по дням лунного синодического месяца для низких (1, 2), средних (3) (а, б) и высоких (4, 5) (в, г) значений Кр-индексов с выделенными линейными трендами полных распределений (д, е)

Fig. 3. Full and cluster distributions of the number of ambulance calls with the diagnoses of schizophrenia (a, в, д) and epilepsy (б, г, е) on the days of the lunar synodic month for low (1, 2), medium (3) (а, б) and high (4, 5) (в, г) values of the Kp indices with selected linear trends of complete distributions (д, е)

В распределении среднесуточного Кр-индекса по дням лунного синодического месяца минимум в полнолуние (рис. 2) определяют компоненты высоких значений Кр-индексов, группирующиеся вблизи новолуния. Низкие значения Кр-индексов максимально проявлены в полнолуние, минимально – вблизи новолуния. У аналогичных распределений, касающихся инфаркта миокарда (рис. 2), большие числа вызовов скорой помощи связаны с новолунием и полнолунием, и соответственно, с высокими и низкими значениями Кр-индексов. Число вызовов скорой помощи по диагнозу шизофрения максимально на 8-й день, а вызовы по поводу эпилепсии преобладают во второй половине лунного цикла (рис. 3). Линейные тренды распределений на рис. 2 и 3 выявлены на 4–6 участках.

Помимо интервального выделения трендов сравнивали средние значения выборок Кр-индекса и числа вызовов скорой медицинской помощи в отдельные дни лунного синодического месяца. Так, для отсчетов распределения Кр-индекса на рис. 2 с номерами 4 и 17 соответствующие средние значения 2,60 и 1,80 различаются с уровнем доверия  $\alpha < 0,01$ . Различия выявлены у отсчетов с номерами 16 и 26 с соответствующими средними значениями 1,87 и 2,74. Средние значения 1,54 и 2,25 ежедневных вызовов скорой помощи выборок в 10-й и 17-й дни лунного цикла распределения (рис. 3) различаются с уровнем доверия  $\alpha < 0,05$ . Сравнение средних суточных значений числа вызовов скорой помощи по поводу эпилепсии, проведенное для последовательных дней с уровнем доверия  $\alpha < 0,05$ , показало различия у отсчетов с номерами 15, 16 и 20, 21. У распределений числа вызовов скорой помощи по диагнозам инфаркт миокарда и шизофрения значимых различий в среднесуточных числах вызовов при уровне доверия  $\alpha < 0,05$  не обнаружено. Среднесуточное число вызовов скорой медицинской помощи по поводу шизофрении в контрастные 7-й и 8-й дни распределения составило соответственно 1,34 и 2,03 (рис. 3). Для выборок, соответствующих трем кластерам с низкими Кр-индексами и двум кластерам с высокими Кр-индексами, с вероятностью  $> 0,95$  различия средних не выявлено.

## ОБСУЖДЕНИЕ

Минимум в распределении Кр-индексов (рис. 2) в полнолуние является результатом взвешивания по-разному сгруппированных по дням лунного синодического месяца распределений дней с высокими и низкими значения-

ми Кр-индексов, отличающихся кластерными значениями Кр-индексов. У аналогичных распределений вызовов скорой помощи близость среднесуточного числа вызовов делает взвешивание неэффективным, способствует проявлению в распределениях специфических особенностей.

Основной вклад в геомагнитную активность вносит «солнечный ветер», от которого Землю защищает магнитосфера характерной вытянутой формы. С дневной стороны ее размер 10–15 радиусов Земли (RE) определяет давление «солнечного ветра». С ночной стороны протяженность магнитосферы превышает 200 RE. Орбита Луны радиусом около 60 RE пересекает магнитосферу в стороне, противоположной Солнцу. Вблизи новолуния движущаяся с дневной стороны Луна искажает конфигурацию «солнечного ветра», усиливая геомагнитные вариации. В фазе полнолуния находящаяся с ночной стороны Луна перекрывает поток частиц хвоста магнитосферы к Земле, ослабляя тем самым интенсивность геомагнитных вариаций. Цикличность геомагнитной активности также связывают с модулирующим поток плазмы вращением Солнца с периодом  $28 \pm 2$  суток, синхронизированным с лунным синодическим месяцем [3], особенностями гравитационного воздействия Луны и Солнца на геосферу в разных фазах лунного цикла, проявляющимися в генерации геомагнитного поля [2].

Рост числа вызовов скорой помощи с постановкой диагноза инфаркт миокарда (рис. 2) вблизи новолуния и полнолуния согласуется с данными [7]. Его можно объяснить действием геомагнитного поля, вызывающим снижение скорости кровотока, повышение риска образования тромбов и обострения сердечно-сосудистых патологий в условиях магнитных бурь и спокойной космической погоды [5].

Сведения о влиянии Луны на психическое состояние человека противоречивы. В ряде работ анализ частоты посещений отделений психиатрической помощи, учет проявлений симптомов психических расстройств в разных фазах лунного цикла не выявил значимых различий [17]. С другой стороны, многолетние наблюдения на базе специализированной психиатрической больницы Харькова (Украина) свидетельствуют, что большое число госпитализаций больных с шизофренией имеет место при слабо возмущенных ( $A_k = 20-29$ ) и умеренно возмущенных ( $A_k = 30-49$ ) геомагнитных полях, а больных с параноидальной формой – при очень слабых возмущениях ( $A_k = 8-14$ ) [13]. В отдельные дни число поступлений

превышает среднемесячное более чем в два раза. Высокую чувствительность пациенты проявляли к смене отрицательного знака сектора межпланетного магнитного поля на положительный. Пик числа вызовов скорой медицинской помощи на 8-й день лунного синодического месяца (рис. 3), по-видимому, также связан со сменой «режима» геомагнитной активности. Синхронные изменения рядов солнечной активности и госпитализаций в психиатрические заведения Москвы и Казани отмечены в [1]. Увеличение среднего числа вызовов скорой медицинской помощи по поводу эпилепсии во второй половине лунного цикла, характерное для эпилепсии (рис. 3), подтверждает вывод о повышении судорожной активности пациентов в полнолуние и в последней четверти лунного цикла [16].

*Автор благодарит бывшего главного врача БСМП г. Петрозаводска Алексея Ильича Хейфеца за предоставленную возможность работы с обезличенным каталогом вызовов скорой медицинской помощи.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Антикаева О. И., Гамбурцев А. Г., Мартюшов А. Н. Структура временных рядов числа экстренных госпитализаций в психиатрические стационары Казани и Москвы (общие тенденции и различия) // Геофизические процессы и биосфера. 2012. Т. 11, № 2. С. 40–53.
2. Баркин Ю. В. Объяснение эндогенной активности планет и спутников и ее цикличности // Изв. РАЕН. Секция наук о Земле. Декабрь 2002. ВИНТИ. № 9. С. 45–97.
3. Владимирский Б. М., Конрадов А. А. Трудные вопросы солнечно-биосферных связей // Ученые записки Национального Таврического университета им. В. И. Вернадского. 2005. Т. 18(57), № 1. С. 105–115.
4. Воробейчиков В. М., Трошичев О. А., Горшков Э. С., Степанов В. В. Влияние гравитационных возмущений на поведение человека и высших животных // Проблемы Арктики и Антарктики. 2008. № 2. С. 125–132.
5. Гурфинкель Ю. И. Физиологические и патофизиологические аспекты влияния космической погоды на человеческий организм // Влияние космической погоды на человека в космосе и на Земле: Сб. тез. докл. междунар. конф. М., 2012. С. 38–39.
6. Дубров А. П. Лунные ритмы у человека. Краткий очерк по селеномедицине. М.: Медицина, 1990. 160 с.
7. Карпушина Т. В. Влияние лунных ритмов на сердечно-сосудистую систему // Успехи современного естествознания. 2013. № 9. С. 47–48.
8. Крылов В. В. Биологические эффекты геомагнитной активности: наблюдения, эксперименты и возможные механизмы // Труды ИБВВ РАН. 2018. Т. 84(87). С. 7–38.
9. Куранова М. Л., Павлов А. Е., Спивак И. М., Сурма С. В., Шеголев В. Ф., Кузнецов П. А., Стефанов В. Е. Воздействие гипомагнитного поля на живые организмы // Вестник СПбГУ. Сер. 3. 2010. № 4. С. 99–107.
10. Лунный календарь на 2017 год. <https://mirkosmosa.ru/lunar-calendar/phase-moon/2017> (дата обращения: 01.04.2022).
11. Находкин С. С., Гончаров Н. П., Кацця Г. В., Барашков Г. А., Кононова С. К., Терютин Ф. М., Соловьев А. В., Пшеничкова В. Г., Федорова С. А. Анализ лунафазной зависимости основных гормонов эндокринной системы человека // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова. 2014. Т. 11, № 2. С. 29–35.
12. Птицына Н. Г., Вилорези Дж., Копытенко Ю. А., Тясто М. И. Магнитные поля электро-транспорта и экология человека. СПб.: Нестор-История, 2010. 120 с.
13. Рудавина Л. В. Использование гелиогеофизических данных для повышения эффективности лечения больных шизофренией // Шизофрения: новые подходы к терапии. Сборник научных работ УкрНИИ клинической и экспериментальной неврологии и психиатрии и Харьковской городской клинической больницы № 15 / Под ред. И. И. Кутько, Т. Т. Петрюка. Харьков, 1995. Т. 2. С. 96–98.
14. Belashev B. Z., Krutskikh N. V., Gerasimova A. A. Magnetic storms and an emergency ambulance calls pattern in Petrozavodsk // WSEAS Transactions on Environment and Development. 2019. Vol. 15. Art. 59. P. 560–569.
15. Belashev B. Z. Process “regime” shift recognition algorithm // International Journal of Computer Science and Information Security. 2019. Vol. 17, no. 9. P. 20–28.
16. Benbadis S. R., Chang S., Hunter J., Wang W. The influence of the full moon on seizure frequency: myth or reality? // Epilepsy and Behavior. 2004. Vol. 5(4). P. 596–597. doi: 10.1016/j.yebeh.2004.04.001
17. Culver R., Rotton J., Kelly I. W. Geophysical variables and behavior: XLIX. Moon mechanisms and myths: A critical appraisal of explanations of purported lunar effects on human behavior // Psychological Reports. 1988. Vol. 62(3). P. 683–710. doi: 10.2466/pr0.1988.62.3.683
18. Hamerly G., Elkan Ch. Learning the k-means // Neural Information Processing System. 2003. Vol. 16. P. 281–288.

19. Laboratory of X-ray Solar Astronomy FIAN, Official Website. [http://tesis.lebedev.ru/en/magnetic\\_storms.html](http://tesis.lebedev.ru/en/magnetic_storms.html) (дата обращения: 01.04.2022).
20. Lieber A. L., Sherin C. R. Homicides and the lunar cycle: toward a theory of lunar influence on human emotional disturbance // American Journal of Psychiatry. 1972. Vol. 129(1). P. 69–74. doi: 10.1176/ajp.129.1.69
21. Polk C. Biological effects of low frequency electric and magnetic fields // IEEE Transaction on Education. 1991. Vol. 34. P. 243–249. doi: 10.1109/13.85082
22. Shaposhnikov D., Revich B., Gurfinkel Yu., Naumova E. The influence of meteorological and geomagnetic factors on acute myocardial infarction and drain stroke in Moscow, Russia // International Journal of Biometeorology. 2014. Vol. 58(6). P. 799–808. doi: 10.1007/s00484-013-0660-0
23. Singh Y. P., Budruddin. Statistical consideration in superposed epoch and its application in space research // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2006. Vol. 68. P. 803–813. doi: 10.1016/j.jastp.2006.01.007
24. Vencloviene J., Babarskiene R., Dobožinskas P., Siurkaite V. Effects of weather conditions on emergency ambulance calls for acute coronary syndromes // International Journal of Biometeorology. 2014. Vol. 59(8). P. 1083–1093. doi: 10.1007/s00484-014-0921-6
5. Gurfinkel Yu. I. Physiological and pathophysiological aspects of the space weather impact on the human body. *Vliyanie kosmicheskoi pogody na cheloveka v kosmose i na Zemle = The impact of space weather on humans in space and on the Earth*. Moscow; 2012. P. 38–39. (In Russ.)
6. Dubrov A. P. Lunar rhythms in humans. A brief essay on selenomedicine. Moscow: Meditsina; 1990. 160 p. (In Russ.)
7. Karpushina T. V. The impact of lunar rhythms on the cardiovascular system. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya = Advances in Current Natural Sciences*. 2013;9:47–48. (In Russ.)
8. Krylov V. V. Biological effects of geomagnetic activity: observations, experiments and possible mechanisms. *Trudy IBVV RAN = Transactions of Papanin Institute for Biology of Inland Waters RAS*. 2018;84(87):7–38. (In Russ.)
9. Kuranova M. L., Pavlov A. E., Spivak I. M., Surma S. V., Shchegolev V. F., Kuznetsov P. A., Stefanov V. E. The impact of the magnetic field on living organisms. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta = Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 3*. 2010;4:99–107. (In Russ.)
10. Lunar calendar for 2017. (In Russ.) URL: <https://mirkosmosa.rulunar-calendarphase-moon2017> (accessed: 01.04.2022).
11. Nakhodkin S. S., Goncharov N. P., Katsiya G. V., Barashkov G. A., Kononova S. K., Teryutin F. M., Solov'ev A. V., Pshennikova V. G., Fedorova S. A. Analysis of the moon-phase dependence of the main hormones of the human endocrine system. *Vestnik of North-Eastern Federal University*. 2014;11(2):29–35. (In Russ.)
12. Ptitsyna N. G., Villoresi G., Kopytenko Yu. A., Tyasto M. I. Magnetic fields of electric transport and human ecology. St. Peterburg: Nestor-Istoriya; 2010. 120 p. (In Russ.)
13. Rudavina L. V. Use of heliogeophysical data to improve the efficiency of treatment of patients with schizophrenia. *Shizofreniya. Novye podkhody k terapii: Sb. nauch. rabot Ukr. NII klinicheskoi i eksperimentalnoi nevrologii i psikiatrii i Khar'kovskoi gorodskoi klinicheskoi bolnitsy 15 = Schizophrenia. New approaches to therapy: Proceedings Ukrainian Research Institute of Clinical and Experimental Neurology and Psychiatry and Kharkiv City Clinical Hospital #15*. Vol. 2. Khar'kov; 1995. P. 96–98. (In Russ.)
14. Belashev B. Z., Krutskikh N. V., Gerasimova A. A. Magnetic storms and an emergency ambulance calls pattern in Petrozavodsk. *WSEAS Transactions on Environment and Development*. 2019;15:560–569.
15. Belashev B. Z. Process “regime” shift recognition algorithm. *International Journal of Computer Science and Information Security*. 2019;17(9):20–28.

## REFERENCES

1. Aptikaeva O. I., Gamburtsev A. G., Martyushov A. N. Patterns of time series of numbers of emergency hospitalizations in mental hospitals in Moscow and Kazan (common features and differences). *Geofizicheskie protsessy i biosfera = Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2012;11(2):40–53. (In Russ.)
2. Barkin Yu. B. Explanation of endogenous activity of planets and satellites and its cyclicality. *Izvestiya Sektsii nauk o Zemle Rossiiskoi akademii estestvennykh nauk = Proceedings of the Earth Sciences Section of the Russian Academy of Natural Sciences*. Iss. 9. Moscow: VINITI; 2002. P. 45–97. (In Russ.)
3. Vladimirovskii B. M., Konradov A. A. Cruxes of solar-biospheric relations. *Uchenye zapiski Tavricheskogo natsionalnogo universiteta im. V. I. Vernadskogo = Proceedings of the V. I. Vernadsky Taurida National University*. 2005;18-57(1):105–115. (In Russ.)
4. Vorobeichikov V. M., Troshichev O. A., Gorshkov Eh. S., Stepanov V. V. The influence of gravitational perturbations on the behavior of humans and higher animals. *Problemy Arktiki i Antarktiki = Arctic and Antarctic Research*. 2008;2:125–132. (In Russ.)

16. Benbadis S. R., Chang S., Hunter J., Wang W. The influence of the full moon on seizure frequency: myth or reality? *Epilepsy and Behavior*. 2004;5(4):596–597. doi: 10.1016/j.yebeh.2004.04.001
17. Culver R., Rotton J., Kelly I. W. Geophysical variables and behavior: XLIX. Moon mechanisms and myths: A critical appraisal of explanations of purported lunar effects on human behavior. *Psychological Reports*. 1988;62(3):683–710. doi: 10.2466/pr0.1988.62.3.683
18. Hamerly G., Elkan Ch. Learning the k-means. *Neural Information Processing System*. 2003;16:281–288.
19. Laboratory of X-ray Solar Astronomy FIAN, Official Website. URL: <http://tesis.lebedev.ru/en/magneticstorms.html> (accessed: 01.04.2022).
20. Lieber A. L., Sherin C. R. Homicides and the lunar cycle: toward a theory of lunar influence on human emotional disturbance. *Am. J. Psychiatry*. 1972;129(1):69–74. doi: 10.1176/ajp.129.1.69
21. Polk C. Biological effects of low frequency electric and magnetic fields. *IEEE Transaction on Education*. 1991;34:243–249. doi: 10.1109/13.85082
22. Shaposhnikov D., Revich B., Gurfinkel Yu., Naumova E. The influence of meteorological and geomagnetic factors on acute myocardial infarction and drain stroke in Moscow, Russia. *Int. J. Biometeorol*. 2014;58(6):799–808. doi: 10.1007/s00484-013-0660-0
23. Singh Y. P., Budruddin. Statistical consideration in superposed epoch and its application in space research. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2006;68:803–813. doi: 10.1016/j.jastp.2006.01.007
24. Vencloviene J., Babarskiene R., Doboziuskas P., Siurkaite V. Effects of weather conditions on emergency ambulance calls for acute coronary syndromes. *Int. J. Biometeorol*. 2014;59(8):1083–1093. doi: 10.1007/s00484-014-0921-6

Поступила в редакцию / received: 15.04.2022; принята к публикации / accepted: 26.04.2022.  
 Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Белашев Борис Залманович**  
 д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник  
*e-mail: belashev@krc.karelia.ru*

#### CONTRIBUTOR:

**Belashev, Boris**  
 Dr. Sci. (Tech.), Leading Researcher

УДК 519.6:539.2

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДВУХПИКОВОГО СПЕКТРА ТЕРМОДЕСОРБЦИИ ВОДОРОДА

Ю. В. Заика, Е. К. Костикова\*

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910), \*kostikova@krc.karelia.ru*

При исследовании спектров термодесорбции (ТДС-спектров) изотопов водорода из конструкционных материалов используются различные математические модели, в частности, в форме реакции первого порядка для усредненной по объему концентрации (в случае лимитирования диффузией), второго порядка (с учетом рекомбинации атомов водорода на поверхности в молекулы) и более детализированные модели, отражающие многостадийность переноса (диффузия в объеме, выход на поверхность, рекомбинация, десорбция). Интерес представляет анализ структуры спектра с целью выявления соответствующих каждому пику причин и «движущих сил» физико-химического характера. В статье приведен анализ некоторых упомянутых моделей для двухпиковых спектров и результаты численного моделирования.

Ключевые слова: термодесорбция водорода; численное моделирование

Для цитирования: Заика Ю. В., Костикова Е. К. Идентификация двухпикового спектра термодесорбции водорода // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 14–29. doi: 10.17076/mat1598

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (ИПМИ КарНЦ РАН).

### **Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova\*. IDENTIFICATION OF THE TWO-PEAK SPECTRUM OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION**

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian  
Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia),  
\*kostikova@krc.karelia.ru*

The spectra of thermal desorption (TDS spectra) of hydrogen isotopes from structural materials are investigated by various mathematical models, in particular, in the form of a first-order reaction for the volume-averaged concentration (in the case of limitation by diffusion), second-order models (taking into account the recombination of hydrogen atoms on the surface into molecules), and more detailed models reflecting multistage transport (diffusion in the bulk, migration to the surface, recombination, desorption). It is interesting to analyze the structure of the spectrum in order to identify the causes and «driving forces» of a physical and chemical nature corresponding to each peak. The article provides an analysis of some of the mentioned models for two-peak spectra and the results of numerical modeling.

Key words: hydrogen thermodesorption; numerical modeling

For citation: Zaika Yu. V., Kostikova E. K. Identification of the two-peak spectrum of hydrogen thermal desorption. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:14–29. doi: 10.17076/mat1598

Funding. The study was financially supported by the Russian federal budget for the government assignment of the KarRC RAS (Institute of Applied Mathematical Research).

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к взаимодействию изотопов водорода с различными материалами носит многоплановый характер [1–3, 5, 6]: защита конструкционных материалов от водородной коррозии, транспортировка углеводородного сырья, ракетостроение, водородная энергетика, перспективны термоядерного синтеза.

Одним из наиболее информативных методов исследования кинетики взаимодействия материалов с водородом является термодесорбционная спектроскопия (ТДС), позволяющая «сканировать» материал в широком диапазоне рабочих температур. Модели термодесорбции и водородопроницаемости с учетом различных стадий переноса и численные методы решения краевых задач, разрабатываемые авторами статьи, изложены в [14, 18–21].

Трудности анализа спектров типичны для некорректных обратных задач математической физики: неединственность решения, неоднозначность интерпретации и высокая чувствительность к погрешностям входных данных. На экспериментальном спектре наблюдается результат наложения множества процессов, подлежащих идентификации. Сначала необходима идентификация по физико-химическим процессам, а затем уже параметрическая идентификация в соответствии с принятой физически обоснованной моделью. К традиции разлагать спектр на сумму гауссианов (удобство и мощь математических пакетов несомненны) следует относиться с осторожностью. В математическом смысле алгоритмизирована проблема разложения по базису. Но базис должен быть физически обоснован и задан по смыслу задачи.

Статья содержит некоторые результаты численного моделирования, ориентированные на экспериментальные данные и теоретические положения кинетики взаимодействия изотопов водорода с различными материалами, изложенные в работах [5, 8–13, 15–17]. «Отправным» объектом моделирования послужили двухпиковые спектры термодесорбции из никеля и стали в статье [10].

## МОДЕЛЬ РЕАКЦИИ ПОРЯДКА $\alpha \in [1, 2]$

В качестве отправной точки рассуждений рассмотрим уравнение реакции первого порядка  $\dot{X}(t) = -K(T)X(t)$ , где  $X(t)$  – текущая усредненная концентрация водорода в образце,  $K(T) = K_0 \exp\{-Q/RT\}$  (аррениусовская зависимость кинетического коэффициента от температуры),  $T(t) = T_0 + \beta t$  (равномерный линейный нагрев с относительно невысокой скоростью  $\beta$ ,  $[\beta] = \text{K}/\text{c}$ ).

Для полноты изложения, чтобы пояснить смысл обобщения, приведем кратко схему вывода уравнения, когда десорбция лимитирована диффузией. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}c_t &= D(T(t))c_{xx}, & t > 0, & x \in (0, h), \\c &= c_0 > 0 \quad (t = 0), & c &= 0 \quad (t > 0, x = 0, h).\end{aligned}$$

Здесь  $c(t, x)$  – концентрация растворенного атомарного водорода ( $[c] = 1/\text{см}^3$ ) в образце толщины  $h$ ,  $x \in [0, h]$ ,  $D$  – коэффициент диффузии. В начальный момент диффузанта распределен равномерно. Затем вследствие вакуумирования мгновенно (в относительном масштабе времени) устанавливаются нулевые концентрации в подповерхностном объеме пластины. Перейдем к безразмерным переменным, используя естественные для данной задачи нормировки  $x' = x/h$ ,  $c' = c/c_0$ ,  $t' = \int_0^t D(T(\eta)) d\eta/h^2$ . Значение  $h^2/D$  интерпретируется как характерное время диффузионного выравнивания концентрации [4]. Получаем формально  $D = 1$ ,  $h = 1$ ,  $c_0 = 1$  (в текущих промежуточных выкладках оставляем прежние обозначения, не усложняя их штрихами). Тогда для усредненной переменной  $\bar{c}(t) = \int_0^1 c(t, x) dx$  (см., например, [7, с. 27]) справедливо представление в форме ряда:

$$\bar{c}(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{8}{\pi^2 n^2} \exp\left\{-\frac{n^2 t}{\tau}\right\}, \quad \tau \equiv \frac{1}{\pi^2}.$$

При анализе ТДС-спектров нас интересует производная  $d\bar{c}/dt$ , которая при  $t = 0$

не определяется почленным дифференцированием ряда. Это естественное следствие несогласованности при  $t = 0$  начального и граничного условий. Строго говоря, ряд представляет так называемое обобщенное решение краевой задачи. Спустя непродолжительное время можно ограничиться первым слагаемым:  $\bar{c}(t) \approx 8 \exp\{-t/\tau\}/\pi^2$  ( $t > t_0 > 0$ ), где параметр  $\tau$  приобретает смысл «времени релаксации» (уменьшения в  $e$  раз). Чтобы компенсировать отброшенные слагаемые и ретроспективно «вписаться» в начальные данные  $\bar{c}(0) = c_0 = 1$ , увеличим коэффициент в первом слагаемом ряда с  $8/\pi^2$  до 1. Теперь для приближения  $X(t) \approx \bar{c}(t)$  ( $t \geq 0$ ) примем модель  $\dot{X}(t) = -X(t)/\tau$ ,  $X(0) = X_0 = 1$ , и возвратимся к исходным переменным  $(t, x)$ :

$$\dot{X}(t) = -K(T)X(t), \quad X_0 = 1, \quad K = \pi^2 h^{-2} D(T).$$

Здесь мы оставили нормировку  $\bar{c}(t) = \int_0^h c(t, x) dx/h \mapsto \bar{c}(t)/c_0$ , т. е. теперь  $X(t) \in (0, 1)$  – усредненная доля (от исходной равномерной концентрации водорода  $c_0$ ), оставшаяся в образце к моменту времени  $t > 0$ . Модель работоспособна, когда в приложениях нас интересует интегральный поток десорбции без детализации последовательности физико-химических процессов. Интерпретация  $K(T)$  позволяет для пористых и порошкообразных материалов говорить обобщенно об эффективных характеристиках переноса: коэффициенте диффузии  $D$  и характерном диффузионном пробеге  $h$ . В принципе можно не связывать  $K(T)$  с диффузией, ограничившись выводом уравнения на уровне «скорость десорбции пропорциональна текущей усредненной концентрации». В любом случае постулируется аррениусовская зависимость  $K(T) = K_0 \exp\{-Q/RT\}$  с предэкспонентой (частотным множителем  $K_0$ ) и энергией активации  $Q$ .

С другой стороны, в теории адсорбции-десорбции используется уравнение Поляни – Вигнера  $\dot{\theta}(t) = -M(T)\theta^n(t)$ , где  $\theta$  – степень заполнения поверхности. В частности, если речь идет о термодесорбции диссоциативно хемосорбированного двухатомного газа, то  $n = 2$ . Модель можно адаптировать и для усредненной по объему концентрации, используя понятие эффективного коэффициента рекомбинации [6]. Для этого уравнение  $d\bar{c}/dt = -b(T)\bar{c}^2$  разделим на  $c_0$  и получим  $\dot{X} = -K(T)X^2$ , где  $K = b(T)c_0$ . Концентрация  $c_0$  определяется начальным насыщением образца. При этом с ростом давления насыщения из газовой фазы температура максимума модельного потока десорбции будет уменьшаться.

Преимущественно адсорбция водорода характерна при относительно низких температурах, а описанное выше лимитирование диффузией – при высоких. В реальности диффузия и десорбция с поверхности взаимосвязаны (динамика процессов на поверхности диктует граничные условия для уравнения диффузии). Такие более детализированные модели уже требуют разработки специализированного математического обеспечения [19, 21].

Обобщая приведенные рассуждения, рассмотрим усредненную модель (для равномерного нагрева):

$$\frac{dX}{dT} = -\beta^{-1} K(T)X^\alpha(T), \quad X(T_0) = 1, \quad \alpha \in [1, 2],$$

$$K(T) = K_0 \exp\{-Q[RT]^{-1}\}, \quad T \in [T_0, T_*],$$

$$T(t) = T_0 + \beta t, \quad dT = \beta dt.$$

Здесь  $T_0$  – начальная температура (обычно комнатная), когда десорбция водорода практически отсутствует;  $T_*$  – конечная температура (когда десорбция уже пренебрежимо мала на фоне максимума потока); безразмерная переменная  $X(T)$  имеет смысл доли усредненной по объему образца концентрации  $\bar{c}$  от концентрации равномерного начального насыщения  $c_0$ . В силу  $t \leftrightarrow T$  можно записать  $X(T) = \bar{c}(T)/c_0$ . Кинетический коэффициент  $K(T)$  ( $[K] = 1/c$ ) заранее не связываем явной формулой с коэффициентом диффузии  $D(T)$  или коэффициентом рекомбинации  $b(T)$ . Если обрабатываем данные с различными условиями равномерного насыщения, то целесообразно явно выделить зависимость от  $c_0$  в форме  $K = K_c c_0^{\alpha-1}$ ,  $K_c = K_c(T)$ .

Параметр  $\alpha \in [1, 2]$  позволяет учитывать степень участия в процессе насыщения ассоциативной хемосорбции, растворения в объеме с последующей рекомбинацией атомов водорода в молекулы при термодесорбции. Иными словами, применяем усреднение не только по концентрации, но также по лимитирующим (во взаимодействии) процессам диффузии и рекомбинации. Что касается самой «дробности», то в математической физике теория уравнений диффузии с дробными производными разработана. Усредненные по концентрации модели (если нас интересует общий поток без детализации) хорошо аппроксимируют основную часть изолированного всплеска на ТДС-спектре (когда росту  $K(T)$  активно «противодействует» уменьшение  $X(T)$ , что и формирует пик). Начальные и конечные участки графика термодесорбции (когда поток относительно мал и измеряется с меньшей точностью) малоинформативны.

## СВОЙСТВА МОДЕЛЬНОГО ТДС-ПИКА

### Унимодальность и метод Киссинджера

Нас интересует зависимость

$$w(T) \stackrel{\text{def}}{=} -dX/dT = K(T)X^\alpha(T)/\beta$$

– нормированный поток термодесорбции (в долях  $X = \bar{c}/c_0$  на градус температуры). Если оперируем временем, то рассматриваем

$$v(t) \stackrel{\text{def}}{=} -\dot{X}(t) = K(T(t))X^\alpha(t).$$

При этом  $w(T) = v(T)/\beta$  с учетом  $t \leftrightarrow T = T_0 + \beta t$ . График  $w(T)$  представляет ТДС-спектр. Поскольку используется (безразмерная) нормировка  $X(T_0) = 1$ , то должно быть  $S \stackrel{\text{def}}{=} \int_{T_0}^{T_*} w(T) dT = 1$ . Строго говоря, нужно формально интегрировать на  $(0, +\infty)$ , но мы рассматриваем отрезок  $[T_0, T_*]$ , вне которого поток пренебрежимо мал. Итак, модельный ТДС-пик нормирован по площади. Регистрируемый поток нормируется интегралом (который равен  $c_0$ ). Говоря о потоках, слово «плотность» обычно опускаем по контексту.

Интегрируя уравнение  $dX/dT = -KX^\alpha/\beta$  в квадратурах, получаем:  $w(T) = -dX/dT$ ,

$$w(T) = \begin{cases} \beta^{-1}K(T) \exp\left\{-\beta^{-1}\int_{T_0}^T K(\tilde{T}) d\tilde{T}\right\}, \\ \beta^{-1}K(T) \left[1 + (\alpha-1)\beta^{-1}\int_{T_0}^T K d\tilde{T}\right]^{1-\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \end{cases}$$

где первая формула соответствует  $\alpha = 1$ , а вторая –  $\alpha \in (1, 2]$ . Представления согласованы: правосторонний предельный переход  $\alpha \rightarrow +1$  во второй формуле дает первую. Начальная температура  $T_0$  относительно низкая (обычно комнатная, когда  $K(T_0) \ll 1$  и поток еще пренебрежимо мал). С ростом температуры аррениусовский коэффициент  $K(T)$  монотонно выходит на горизонтальную асимптоту, а множитель с интегралом монотонно убывает. Это дает колоколообразный график  $w(T)$ .

Далее производную по  $T$  (в отличие от точки сверху для производной по времени  $t$ ) будем обозначать штрихом. Приведем результаты вычислений (с учетом  $K' = KQ/RT^2$ ):

$$w'(T) = w(T)\varphi(T), \quad \alpha \in [1, 2],$$

$$w''(T) = w(T)[\varphi^2(T) + \varphi'(T)],$$

$$w'''(T) = w(T)[\varphi^3(T) + 3\varphi(T)\varphi'(T) + \varphi''(T)].$$

Здесь приняты обозначения

$$\varphi(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{RT^2} - \alpha\beta^{-1}K(T)\hat{K}^{-1}(T),$$

$$\hat{K}(T; \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \left[1 + (\alpha - 1)\beta^{-1}\int_{T_0}^T K(\tilde{T}) d\tilde{T}\right].$$

В контексте обратной задачи параметрической идентификации отметим, что

$$\hat{K}(T; \alpha) = X^{1-\alpha}(T), \quad \hat{K}(T; 1) = 1.$$

Для поиска температуры  $T_m = T_{\max}$  экстремума (который является единственным, глобальным максимумом) запишем уравнение  $w'(T_m) = 0$ , откуда  $w' = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ ,

$$K(T_m) = \frac{\beta z}{\alpha T_m} \hat{K}(T_m; \alpha), \quad z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{RT_m}. \quad (1)$$

Выделение безразмерной переменной  $z$  в выкладках целесообразно, поскольку дробь вида  $-E/RT$  фигурирует в экспоненте закона Аррениуса. В дальнейшем рассмотрении потребуются следующие производные:

$$\begin{aligned} w''(T_m) &= w(T_m)\varphi'(T_m) \\ &= w(T_m)T_m^{-2}z[-\alpha^{-1}z - 2] < 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} w'''(T_m) &= w(T_m)\varphi''(T_m) \\ &= w(T_m)T_m^{-3}z[\alpha^{-2}(\alpha - 2)z^2 + 2z + 6]. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим сначала (1) как уравнение для  $T = T_m$ . Перепишем его в форме

$$f(T) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha T^2 K - (\alpha - 1)\frac{Q}{R}\int_{T_0}^T K d\tilde{T} = \frac{\beta Q}{R}. \quad (4)$$

Геометрически требуется найти пересечение графика функции  $f(T)$  с горизонтальной прямой, определяемой значением  $\beta Q/R$ . Поскольку из соотношений  $K(T) = K_0 \exp\{-Q/RT\}$ ,  $K'(T) = K(T)Q/[RT^2]$  следует неравенство  $f'(T) = K(T)[2\alpha T + Q/R] > 0$  (положительна и вторая производная), то решение единственно. Существование обеспечивается условием  $K(T_0) \ll 1$  (формально можно рассматривать  $T_0 = 0$  и  $T > 0$ ). Увеличение  $\beta$  (правой части уравнения (4)) смещает температуру максимума спектра ( $T_m$ ) вправо.

Уточним априорное ограничение на выбор предэкспоненты (частотного множителя)  $K_0$ , диктуемое уравнением (4). Значение  $T_0$  определено как температура (обычно комнатная), при которой поток еще незначителен на фоне предстоящего максимума при  $T = T_m > T_0$ .

Поэтому в рамках модели ТДС-пика должно быть выполнено неравенство  $f(T_0) < \beta Q/R$ , т. е.  $K_0 < \beta Q \exp\{Q/RT_0\}/[\alpha RT_0^2]$ .

На практике (при  $\alpha = 1$ ) для оценки параметров  $K_0$ ,  $Q$  используют зависимость регистрируемого значения  $T_m$  от скорости нагрева  $\beta$ . После чего полученные оценки сопоставляются с экспертными данными о параметрах возможных физико-химических процессов. Скорости нагрева известны, а  $T_m$  определяются по экспериментальному графику. Подчеркнем, что зависимость  $T_m(K_0, Q; \alpha, \beta)$  определяется алгоритмически численным решением уравнения (4), т. е. у переменной  $z = Q/RT_m$  числитель и знаменатель не являются независимыми при фиксированных  $K_0$ .

С учетом  $\hat{K}^{-1}(T_m; \alpha) = X^{\alpha-1}(T_m)$  «соотношение Киссинджера» для различных  $\alpha$  записывается как

$$\ln \frac{\beta^{1/\alpha}}{T_m^2} = -\frac{1}{\alpha RT_m} Q + \ln \left[ \frac{\alpha R}{Q} (K_0 w^{\alpha-1}(T_m))^{1/\alpha} \right].$$

Это соотношение следует из подстановки в формулу (1) усредненной текущей концентрации, определяемой выражением  $X = (w/[K/\beta])^{1/\alpha}$ , где нормированный поток  $w$  известен по результатам эксперимента. В координатах  $\{-1/[\alpha RT_m], \ln[\beta^{1/\alpha}/T_m^2]\}$  значение энергии активации есть угловой коэффициент линейной регрессии.

### Анализ симметрии ТДС-пика

Одной из общепринятых методик является разложение спектра на сумму гауссовских кривых (например, в пакете прикладных программ Origin). Более адекватным является разложение на сумму ТДС-пиков, генерируемых реакциями 1-2 порядков. Но они, строго говоря, несимметричны. Возникает задача поиска критериев симметричности и диапазонов параметров, где отклонения от гауссианов практически несущественны.

Качественное отличие ТДС-пика ( $\alpha \in [1, 2]$ ) от гауссовской кривой вида

$$G(T) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(T - T_m)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

лишь в возможной существенной (в широком диапазоне параметров) несимметричности относительно вертикали  $T = T_m$ . В этом случае унимодальный ТДС-спектр хорошо аппроксимируется склейкой двух гауссианов

$$G_1(T) = w(T_m) \exp \left\{ -\frac{(T - T_m)^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad T \leq T_m;$$

$$G_2(T) = w(T_m) \exp \left\{ -\frac{(T - T_m)^2}{2\sigma_2^2} \right\}, \quad T \geq T_m.$$

Численные эксперименты в широком диапазоне  $\{K_0, Q\}$  [5] показывают, что, за редким исключением, модельный спектр несимметричен. Это соответствует экспериментальным данным. Аппроксимация спектров гауссианами позволяет получать приближения параметров с последующим уточнением в рамках рассматриваемых моделей. Пик, соответствующий реакции первого порядка ( $\alpha = 1$ ), может быть практически симметричным. Возможен вариант «относительно крутой восходящий фронт и пологий нисходящий», но обычно пологий восходящий фронт сменяется крутым нисходящим. Для спектра реакции второго порядка ( $\alpha = 2$ ) характерен относительно крутой восходящий фронт и пологий нисходящий.

Перейдем к критерию симметричности графика  $w(T)$  относительно вертикали  $T = T_m$ . Для этого воспользуемся разложением

$$w(T_m + \Delta) = w(T_m) + w'(T_m)\Delta + \frac{1}{2} w''(T_m)\Delta^2 + \frac{1}{6} w'''(T_m)\Delta^3 + \frac{1}{24} w^{(4)}(T_m)\Delta^4 + o(\Delta^4).$$

Численные эксперименты подтверждают, что в физически реальном диапазоне  $T \in [T_m^-, T_m^+]$  пятую производную уже можно не учитывать. В экстремуме  $w'(T_m) = 0$ , а слагаемые с  $\Delta^2$  и  $\Delta^4$  дадут те же значения при замене  $\Delta$  на  $-\Delta$ . Следовательно, для оценки симметричности нужно оценить  $w'''(T_m)$  в сравнении с  $w''(T_m)$ . Критерий симметричности

$$|w''(T_m)| \gg \frac{|\Delta|}{3} |w'''(T_m)|, \quad \Delta \in [-2\sigma_1, 2\sigma_2],$$

$$T_m = T_m(K_0, Q; \alpha, \beta), \quad \sigma_i = \sigma_i(T_m, Q; \alpha, \beta),$$

преобразуется к виду ( $z \stackrel{\text{def}}{=} Q/RT_m$ )

$$\frac{|\Delta|}{3T_m} \cdot \frac{|6 + 2z - \alpha^{-2}(2 - \alpha)z^2|}{2 + z} \ll 1. \quad (5)$$

Отметим, что при  $\alpha = 2$  заведомо  $w'''(T_m) = w(T_m)(2z + 6)z/T_m^3 > 0$ , что объясняет выводы численных экспериментов о несимметричности ТДС-спектра реакции второго порядка (восходящий фронт ниже). Вопрос лишь в том, насколько это отклонение существенно в конкретной задаче. Для  $\alpha < 2$  спектры, близкие к симметричным, получаются при  $w'''(T_m) \approx 0$ , откуда  $z(\alpha) \approx \alpha^2 [1 + \sqrt{1 + 6\alpha^{-2}(2 - \alpha)}]/(2 - \alpha)$ . Формально  $z(\alpha) \rightarrow +\infty$  при  $\alpha \rightarrow 2^-$ , но гипотетическое превышение порога  $z > 20 - 30$  требует дополнительного физического обоснования.

В частности, для реакции первого порядка  $z \approx Q/[RT_m] = 1 + \sqrt{7}$  ( $\alpha = 1$ ), что соответствует относительно низким значениям энергии активации  $Q$ . Даже если выполняется равенство  $w'''(T_m) = 0$  ( $z^2 - 2z - 6 = 0$ ), то при соответствующем значении  $z$  выполняется  $w^{(5)}(T_m) = w(T_m)zT_m^{-5}p_4(z)$ ,  $p_4(z) \stackrel{\text{def}}{=} (z^2 - 2z - 6)(9z^2 + 20z - 42) - 60z - 132 < 0$ . Строго говоря, спектр всегда несимметричен. Поскольку третья производная  $w'''(T_m)$  может менять знак (в широком диапазоне параметров), то более пологий может оказаться как восходящая, так и нисходящая ветвь.

При фиксированном  $Q$  спектр второго порядка шире, значения  $w''(T_m)$  и  $w'''(T_m)$  больше при  $\alpha = 2$ , чем при  $\alpha = 1$ . Варьирование порядка реакции  $\alpha \in [1, 2]$  сопровождается сдвигом пиковой температуры. Изолированный пик, в котором пологий восходящий фронт сменяется резким нисходящим, не следует связывать с реакцией второго порядка.

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для сопоставления спектров используем экспериментальные графики, представленные в статье [10]. Образцы – ленты размером  $4 \times 0, 2 \times 0, 02$  см. Исследуется термодесорбция водорода из образцов при линейном нагреве со скоростью  $\beta = 0, 5 \text{ K/s}$  после экспозиции в водороде при температуре 770 К в течение 60 минут. Для определенности выберем данные по никелю (в [10] рис. 2, давление водорода  $p = 37, 4$  Торр) и стали 12Х18Н10Т (в [10] рис. 4,  $p = 20$  Торр). ТДС-спектры имеют двухпиковую структуру. Для одного материала максимальный поток достигается в низко-

температурном пике, для другого – в высокотемпературном.

Рассмотрим следующий сценарий. Исходим из предположения, что низкотемпературный пик обусловлен десорбцией с поверхности и подповерхностного слоя; затем при дальнейшем нагреве, когда у поверхности образовался большой градиент концентрации, активизируется диффузия, и второй высокотемпературный пик лимитируется именно диффузией. Выполним разложение экспериментальных спектров на элементарные реакции (для усредненной концентрации). Метод дает хорошие приближения и может быть эффективно использован для оценки порядков кинетических параметров в случае, когда пики относительно изолированы друг от друга. В разложении избегаем введения дополнительных слагаемых: двухпиковый спектр – две элементарные реакции. Нужны дополнительные экспериментальные данные и физическое обоснование наличия ловушек в объеме с различными энергиями связи.

Низкотемпературный пик связываем с реакцией второго порядка, а высокотемпературный – с реакцией первого порядка (см. рис. 1).

Далее фиксируем аррениусовские параметры кинетического коэффициента  $K$  (значения приведены на рис. 1) и проиллюстрируем влияние параметров в эксперименте: толщины образца, начальной равновесной концентрации, скорости нагрева (см. рис. 2–4).

При изменении толщины образца  $\ell$  (рис. 2) низкотемпературный пик, обусловленный десорбцией с поверхности и подповерхностного слоя, остается неизменным. Для высокотемпературного пика, когда лимитирует диффузия

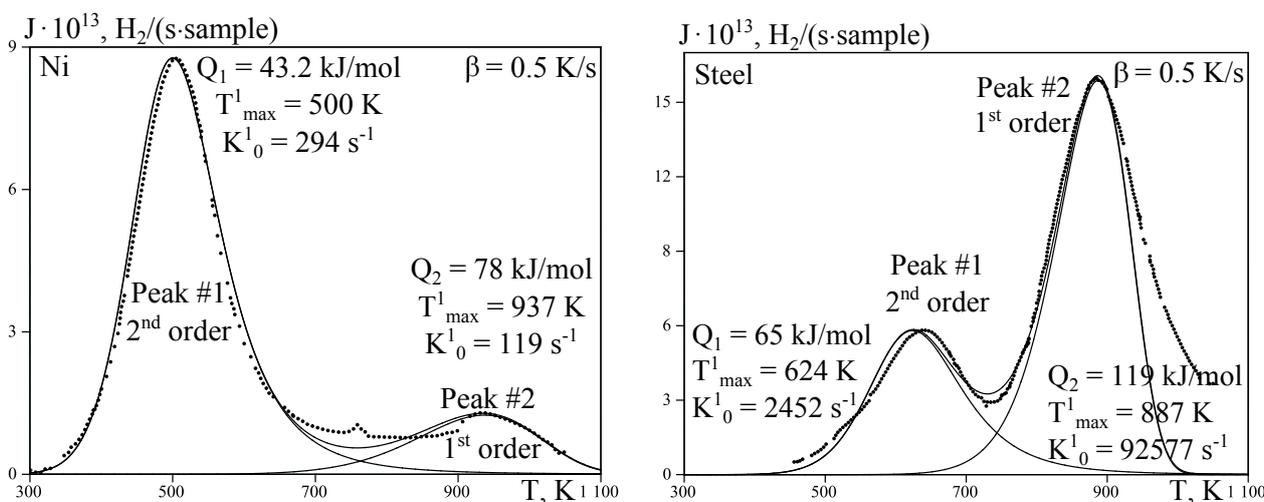


Рис. 1. Разложение экспериментального спектра (точечная кривая) на сумму реакций 1–2 порядка  
 Fig. 1. Decomposition of the experimental spectrum (point curve) into the sum of 1–2 order reactions

из объема, общее количество водорода, выделившееся в результате реакции первого порядка (начальные условия в обыкновенном дифференциальном уравнении (ОДУ)), изменяется пропорционально  $\ell$ , толщине образца. Температуры максимального значения потока для высокотемпературных пиков изменяются незначительно.

При варьировании начальной усредненной концентрации (рис. 3) меняются начальные условия в ОДУ для реакций и первого, и второго порядков. На графике видно, что качественные изменения одинаковые для обоих пиков. Варьирование усредненной концентрации насыщения при моделировании ТДС-дегазации суммой реакций 1–2 порядков не

позволяет идентифицировать десорбционные пики по физико-химическим процессам.

На рис. 4 показана чувствительность численного спектра (сумма реакций второго и первого порядков) к изменению скорости нагрева. С изменением  $\beta$  температуры максимумов пиков сдвигаются. На графиках для никеля и стали в координатах  $(T(t), J(T))$  наблюдается склейка восходящих фронтов для низкотемпературных пиков. Различия в площадях подграфиков объясняются разным временем эксперимента для разных  $\beta$ . В координатах  $(t, J(T(t)))$  площади подграфиков одинаковые. Общее количество водорода в начале эксперимента не меняется при варьировании скорости нагрева.

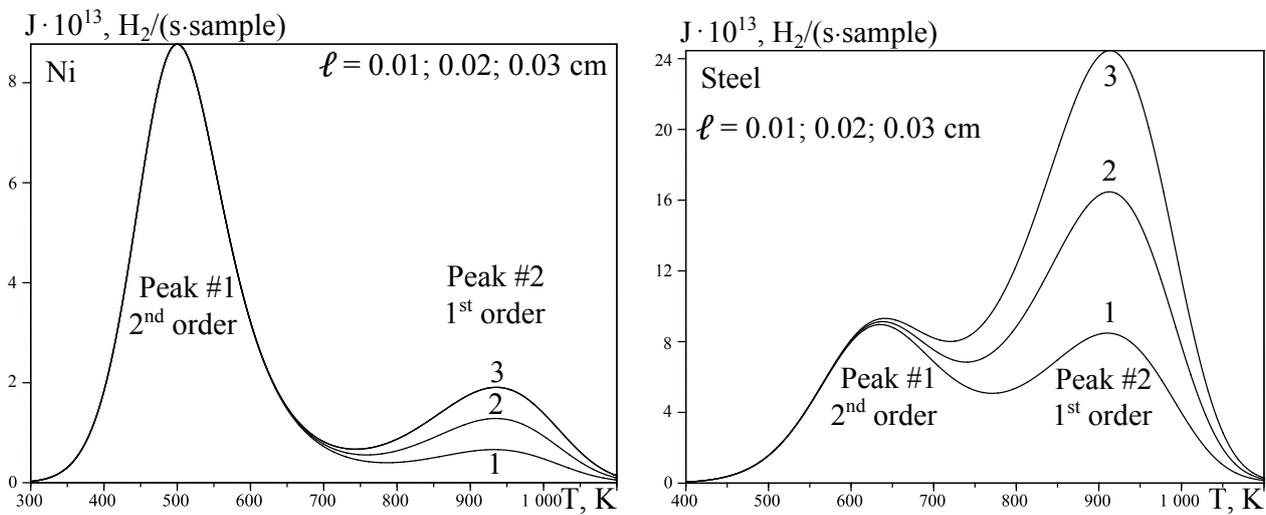


Рис. 2. Численный спектр, сумма реакций 2-го и 1-го порядков. Влияние толщины образца  
 Fig. 2. Numerical spectrum, the sum of 2nd and 1st order reactions. Impact of the sample thickness

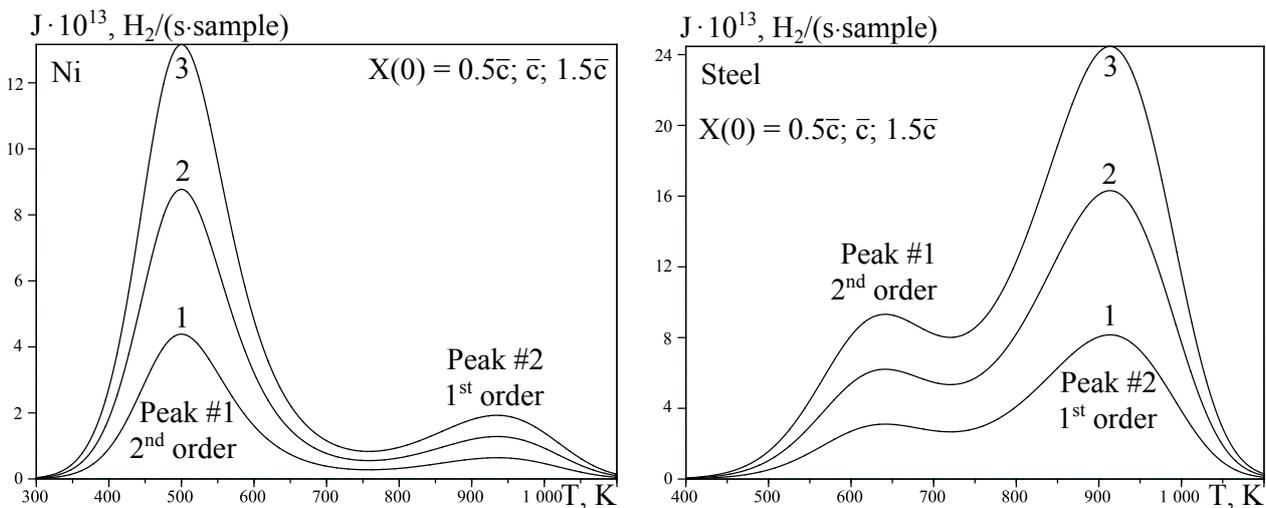


Рис. 3. Численный спектр, сумма реакций 2-го и 1-го порядков. Влияние начальной концентрации  
 Fig. 3. Numerical spectrum, the sum of 2nd and 1st order reactions. Impact of the initial concentration

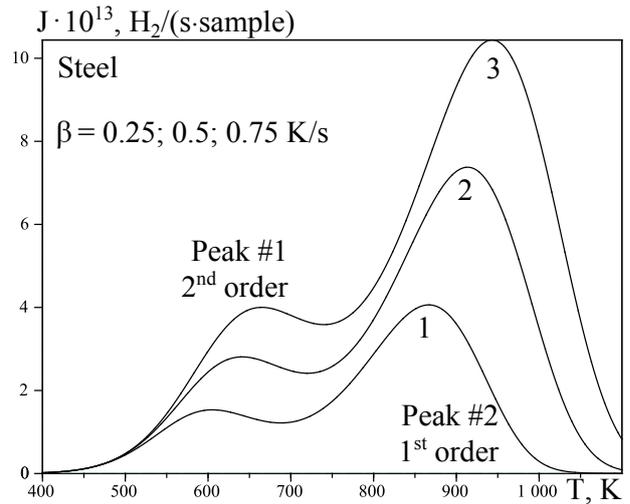
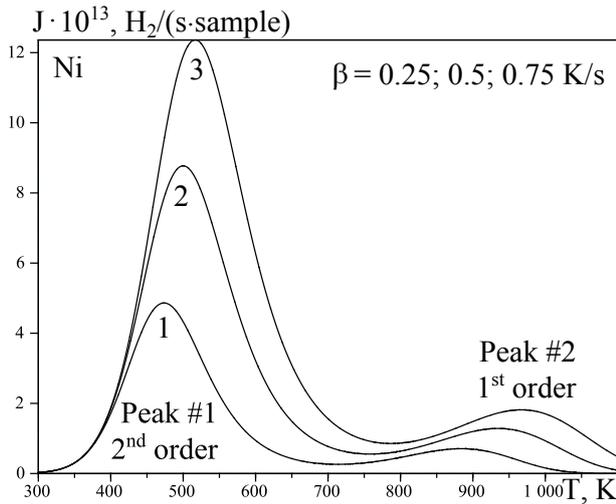


Рис. 4. Численный спектр, модель – сумма реакций 2-го и 1-го порядков. Влияние скорости нагрева  
 Fig. 4. Numerical spectrum, the model – the sum of 2nd and 1st order reactions. Impact of the heating rate

Рассмотрим альтернативный сценарий термодесорбции водорода из металлических материалов. В качестве экспериментальных графиков вновь используем двухпиковые ТДС-спектры по никелю и стали 12Х18Н10Т рис. 2, 4 [10]. Выполним разложение экспериментальных спектров на сумму двух реакций. Теперь будем считать, что оба пика обусловлены реакциями второго порядка. Не меняя параметры аппроксимации для низкотемпературных пиков, представленные на рис. 1, высокотемпературные пики приближаем реакциями второго порядка со следующими параметрами. Полагаем для никеля  $T_{\max} = 937 \text{ K}$ ,

$Q = 135 \text{ кДж/моль}$  ( $K_0 = 2,8 \times 10^5 \text{ c}^{-1}$ ), для стали  $T_{\max} = 890 \text{ K}$ ,  $Q = 130 \text{ кДж/моль}$  ( $K_0 = 3,8 \times 10^5 \text{ c}^{-1}$ ). Проиллюстрируем изменение численного спектра (сумма двух реакций второго порядка) при вариации начальной концентрации (рис. 5) и скорости нагрева (рис. 6). Качественно сдвиги ТДС-спектров аналогичны изменениям, представленным на рис. 3, 4. Отличие в порядке реакции для высокотемпературного пика, кинетические коэффициенты, как и прежде, аррениусовские. На рис. 5, 6 лишь наблюдаются более пологие нисходящие фронты для высокотемпературных пиков.

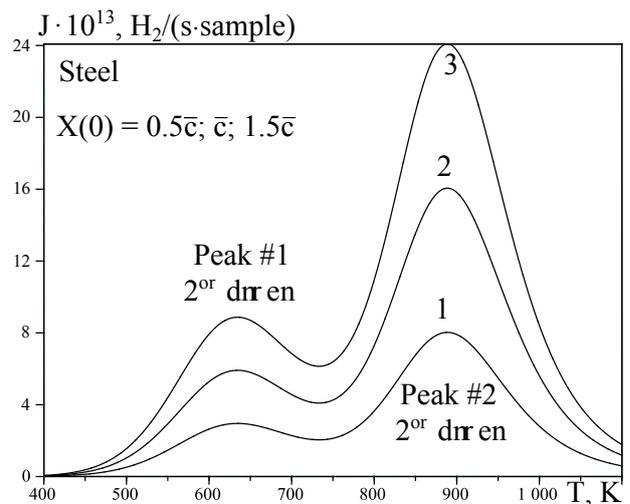
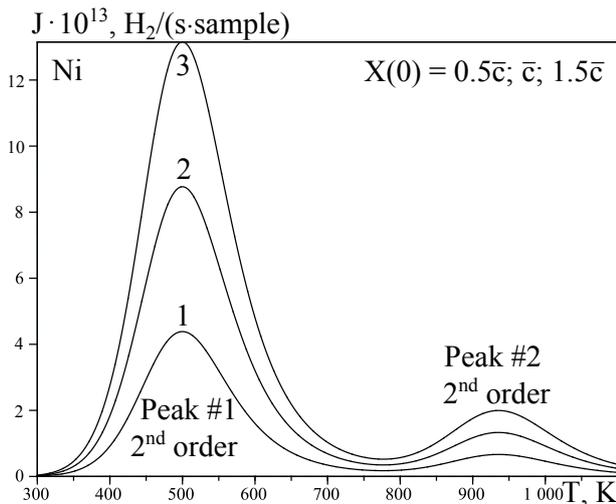


Рис. 5. Численный спектр, модель – сумма реакций 2-го порядка. Влияние начальной концентрации  
 Fig. 5. Numerical spectrum, the model – the sum of 2nd order reactions. Impact of the initial concentration

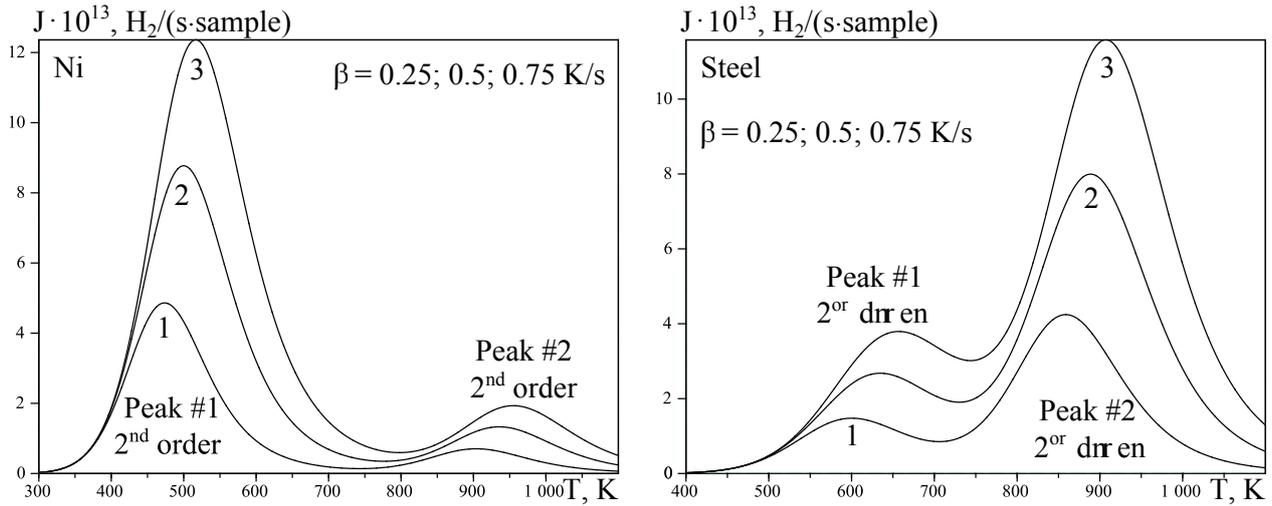


Рис. 6. Численный спектр, модель – сумма двух реакций 2-го порядка. Влияние скорости нагрева  
 Fig. 6. Numerical spectrum, the model – the sum of two 2nd order reactions. Impact of the heating rate

### МОДЕЛЬ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Выше рассмотрена модель динамики десорбции в терминах усредненной по объему образца концентрации. Рассмотрим более детализированную модель, явно разделяя объемные и поверхностные процессы (следуя работе [1, с. 177–206; Габис, Компаниец, Курдюмов]). Для тонкой пластины толщины  $\ell$  краевая задача ТДС-дегазации примет следующий вид:

$$c_t(t, x) = D(T)c_{xx}, \quad t \in (0, t_*), \quad x \in (0, \ell), \quad (6)$$

$$c(0, x) = c_0, \quad x \in [0, \ell], \quad c_{0,\ell}(t) = g(T)q(t),$$

$$\dot{q}(t) = \mu(T)s(T)p - b(T)q^2(t) + D(T)c_x(t, 0), \quad (7)$$

$$J(T) = b(T)q^2(t), \quad T(t) = T_0 + \beta t, \quad \beta > 0.$$

Здесь  $c(t, x)$  – концентрация растворенного атомарного водорода;  $q(t)$  – поверхностная концентрация;  $D$ ,  $b$ ,  $s$ ,  $g$  – (аррениусовские) коэффициенты диффузии, десорбции, прилипания водорода в газовой фазе к поверхности, быстрого растворения (квазиравновесия поверхностной и приповерхностной объемной концентрации);  $p$  – давление молекулярного водорода;  $\mu$  – кинетическая константа (для протия  $\mu(T) = 2,48 \times 10^{22}/\sqrt{T} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}\text{Торр}^{-1}$ );  $J(t) = J(T(t))$  – плотность десорбции (атомов, рекомбинировавших в молекулы).

Вакуумную систему считаем достаточно мощной, чтобы пренебречь потоком ресорбции ( $\mu sp \approx 0$ ) на этапе ТДС-дегазации. Поскольку подсчет концентраций и потоков проводится для атомов водорода, то можно было бы писать  $2\mu sp$ . Но можно двойку считать «частью» параметра  $s$ . На этапе предварительного насы-

щения образца водородом поток сорбции является определяющим.

Алгоритм решения краевых задач термодесорбции на основе разностных схем (включая учет обратимого захвата диффузанта различного рода ловушками) подробно описан в [18]. Аппроксимации в классе ODE представлены в [19, 21]. «Раздвоение» (бифуркация) спектра появляется при определенном соотношении энергий активации диффузии и десорбции, когда ни один из процессов не является строго лимитирующим и проявляется взаимозависимость их динамики. В «синтезированной» модели для усредненной концентрации использование параметра  $\alpha \in [1, 2]$  позволяет учитывать интегрально вклад (доли) диффузионных и поверхностных процессов. Возможен следующий сценарий возникновения двухпиковой структуры спектра. После десорбции с поверхности и из подповерхностного слоя поток локально падает. Затем поток начинает снова расти. Причина: дальнейший нагрев и образовавшийся большой градиент концентрации у поверхности (что активизирует диффузионную подкачку из объема). Таким образом, приписывание каждому экспериментальному локальному пику энергий связи «ловушек» в объеме требует дополнительного физического обоснования.

Один из способов добавления пиков в модельном спектре – учет возможных существенных дефектов в материале:

$$\begin{aligned} \partial_t c &= D \partial_x^2 c - \sum_{\nu=1}^m \left[ a_{\nu}^{-} [1 - Z_{\nu}] c - a_{\nu}^{+} z_{\nu} \right], \\ \partial_t z_{\nu} &= a_{\nu}^{-}(T) [1 - Z_{\nu}] c(t, x) - a_{\nu}^{+}(T) z_{\nu}(t, x). \end{aligned}$$

Здесь  $z_\nu(t, x)$  – концентрации атомов водорода, захваченного дефектами различных типов;  $a_\nu^\mp$  – коэффициенты поглощения и выделения  $H$  ловушками;  $Z_\nu \stackrel{\text{def}}{=} z_\nu(t, x)/z_{\max}^\nu$  – степень насыщения ( $z_{\max}^\nu = \max z_\nu$ ). Для практических целей захват учтен в простейшей «интегральной» форме, уточнение геометрии дефектов и их распределения существенно усложнило бы модель. Если дефект, например, не микрополости, а включения гидридной фазы, то на этапе дегазации соответствующий коэффициент  $a_j^-(T) \equiv 0$ , а значение  $a_j^+(T) > 0$  лишь после достижения критической температуры:  $T(t) \geq T_{\text{crit}}$ .

При численном моделировании неуниформного спектра методика разложения на элементарные реакции (в терминах усредненной объемной концентрации) может давать хорошие приближения, но не для «энергий связи» захваченного в объеме водорода, а для энергий активации физико-химических процессов десорбции, диффузии, разложения «гидридной фазы» (или оксида на поверхности при соответствующем увеличении эффективного коэффициента  $b$ ) в их динамическом взаимодействии.

В качестве «отправной» точки для численного анализа были взяты экспериментальные графики по никелю и стали из статьи [10]. В указанной работе представлены ТДС-спектры при различных значениях давления насыщения и времени сорбции. Поэтому уточним численное моделирование предварительного этапа насыщения пластины водородом. До этапа сорбции образец обезводорожен  $c(t, x) = 0$ . Насыщение проводится при относительно высокой температуре  $\bar{T}$  (для ускорения физико-химических процессов), при постоянном давлении  $\bar{p}$  в течение времени  $\bar{t}$ . В статье [10] исследуется термовыделение водорода из металлических лент толщиной 0,02 см в условиях сорбции:  $\bar{T} = 770$  К,  $\bar{p} \in [20, 37, 4]$  Торр,  $\bar{t} \in [3, 60]$  мин. В обозначениях, принятых в рассматриваемой краевой задаче, на подготовительном этапе насыщения имеем стандартное уравнение диффузии в объеме (6), где  $D = D(\bar{T}) = \text{const}$ ,  $t \in (0, \bar{t})$ , начальная концентрация нулевая. В граничном условии (7)  $T = \bar{T} = \text{const}$ ,  $p = \bar{p} = \text{const}$ ,  $D, b, s, g, \mu$  – постоянные. Определяющая роль у сорбционного потока  $\mu sp$ . Если время сорбции достаточно велико, в образце устанавливается равновесная концентрация  $\bar{c}$ , определяемая из соотношения  $\mu(\bar{T})s(\bar{T})\bar{p} = b(\bar{T})\bar{c}^2/g^2(\bar{T})$  (производные в (7) равны нулю), модель соответствует диапазону  $\bar{c} \propto \sqrt{\bar{p}}$ . Учет времени предварительного этапа сорбции и основного этапа

ТДС-дегазации ведем по отдельности. В начале эксперимента термодесорбции водорода из пластины  $t = 0$ ,  $T = T_0$ ,  $c(0, x) = c_0$ .

В дальнейшем при численном моделировании используем следующие значения параметров:  $\ell = 0,02$  см,  $\beta = 0,5$  К/с,  $T_0 = 293$  К,  $\bar{t} = 3600$  с,  $\bar{T} = 770$  К,  $[E] = \text{кДж/моль}$ . Никель:  $b_0 = 3,39 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup>/с,  $E_b = 43,2$ ,  $D_0 = 4,83 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с,  $E_D = 78$ ,  $g_0 = 20$  с<sup>-1</sup>,  $E_g = 0$ ,  $s_0 = 0,018$ ,  $E_s = 61,4$ ,  $\bar{p} = 37,4$  Торр,  $\bar{c} = 2,04 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>. Сталь 12Х10Н10Т:  $b_0 = 1,29 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup>/с,  $E_b = 55$ ,  $D_0 = 1,17 \cdot 10^{-1}$  см<sup>2</sup>/с,  $E_D = 96$ ,  $g_0 = 350$  с<sup>-1</sup>,  $E_g = 5$ ,  $s_0 = 6 \cdot 10^{-4}$ ,  $E_s = 110$ ,  $\bar{p} = 100$  Торр,  $\bar{c} = 4,45 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup>. Отметим, что в краевой задаче диффузия и процессы на поверхности не просто суммируются, а активно взаимодействуют, связь записана в форме динамических нелинейных граничных условий.

Распределение водорода на предварительном этапе насыщения представлено на рисунке 7. Задача по постановке симметричная, поэтому достаточно изобразить лишь половину профиля концентрации  $c(t, x)$ ,  $x \in [0, \ell/2]$ ,  $t \in [0, \bar{t}]$ . Концентрация растворенного водорода в образце представлена в относительном масштабе  $c/\bar{c} \in [0, 1]$ .

Отметим, что для никеля очень быстро достигается равновесная концентрация на поверхности и в подповерхностном слое (см. рис. 7), процесс сорбции лимитируется диффузией (DLR – diffusion limited regime). Забегая вперед, отметим, что этот же диффузионный режим сохраняется во всем широком температурном диапазоне последующей ТДС-дегазации водорода из никелевой пластины. Зафиксировав условия сорбции из статьи [10] для никеля, имеем  $\ell = 0,02$  см,  $\bar{T} = 770$  К,  $\bar{p} = 37,4$  Торр,  $\bar{t} = 3600$  с. В рамках описанной математической модели получаем к моменту завершения этапа сорбции концентрацию  $c_0$ , близкую к равновесной. Общее количество водорода в образце составляет примерно 91% от возможного равновесного значения.

Для стали (см. рис. 7), напротив, режим проникновения водорода лимитируется поверхностью (SLR – surface limited regime). Вновь забегая вперед, отметим, что для стали SLR сохраняется во всем температурном диапазоне ТДС-дегазации. Концентрация водорода в образце близка к равномерной. Однако в условиях насыщения ( $\ell = 0,02$  см,  $\bar{T} = 770$  К,  $\bar{p} = 100$  Торр,  $\bar{t} = 3600$  с) к моменту завершения этапа сорбции имеем концентрацию  $c_0$  заметно ниже равновесной. Интегрально общее количество водорода составляет примерно 63% от возможного равновесного значения.

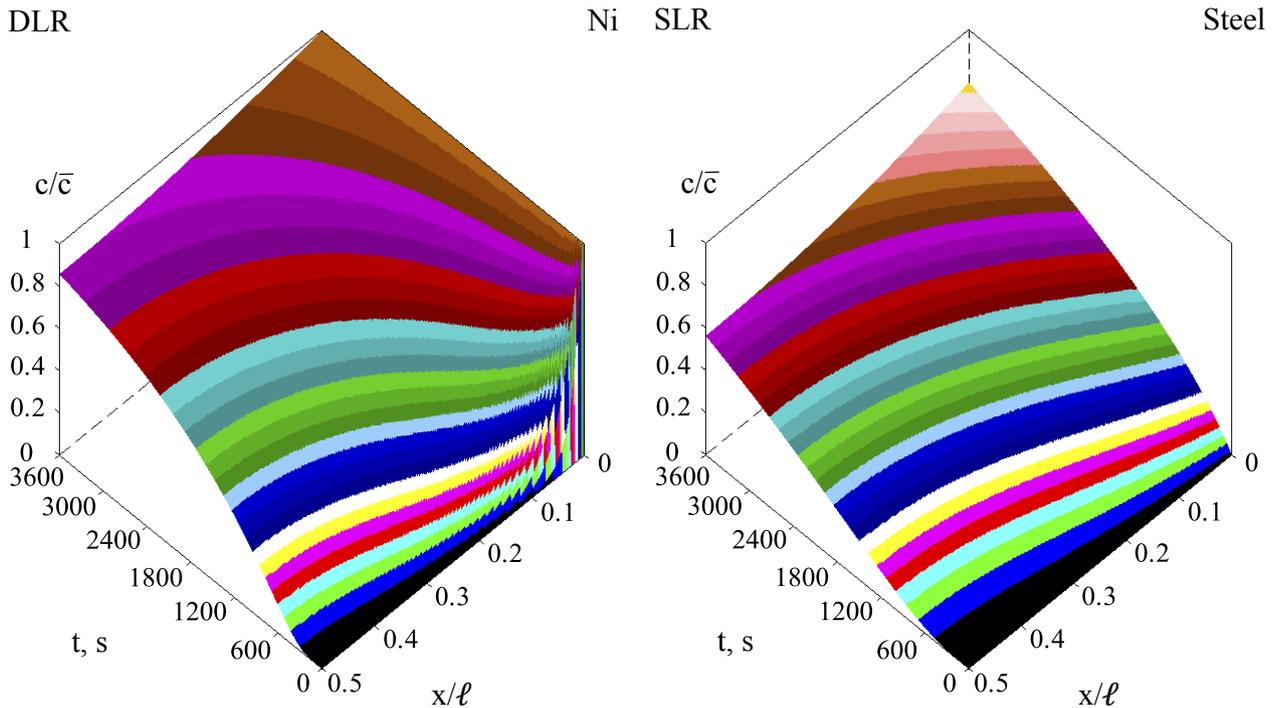


Рис. 7. Сорбция водорода (предварительное насыщение). Половина профиля концентрации  
 Fig. 7. Hydrogen sorption (pre-saturation). A half of the concentration profile

Проиллюстрируем влияние параметров модели, которые можно изменять в эксперименте. Согласно принятой модели заранее знаем лимитирующие факторы каждого пика, поэтому проследим различия в численных спектрах при вариациях параметров.

На рисунках 8–10 представлены численные ТДС-спектры при варьировании условий сорбции. Рисунок 8 иллюстрирует чувствительность спектров к температуре насыщения. Для никеля максимум потока достигается в низкотемпературном пике, обусловленном десорбцией с поверхности (поверхность заполнена, см. рис. 7). При снижении температуры сорбции до  $\bar{T} = 570$  К высокотемпературный пик не наблюдается: недостаточно температуры для активации диффузионного потока в объем, диффузионный пик незаметен в масштабе десорбционного пика. Для стали десорбционный поток заметно изменяется при небольшом изменении температуры насыщения. Исследуемый образец достаточно тонкий, пики сравнимы по размеру. Максимум потока может наблюдаться и при низкотемпературном пике (обусловленном десорбцией с поверхности), и при высокотемпературном (диффузионном) пике.

На рисунке 9 показано влияние давления насыщения на кривую ТДС-дегазации. Качественно вариации спектров аналогичны изменениям, представленным на рисунке 8. При насыщении сорбционный поток  $\mu(\bar{T})s(\bar{T})\bar{p}$  определяется произведением параметров.

На рисунке 10 иллюстрируются численные ТДС-спектры при изменении времени сорбции. Для никеля на графике наблюдаем два относительно изолированных пика. По рисунку 7 для никеля видим, что поверхность на этапе насыщения заполняется относительно быстро. При варьировании  $\bar{t}$  (рис. 10) низкотемпературный пик не изменяется, высокотемпературный пик становится более выраженным с ростом времени сорбции (увеличением концентрации растворенного в образце водорода). За время  $\bar{t} = 3600$  с в объеме устанавливается концентрация, близкая к равновесной (кривая 4). Увеличивая время сорбции еще на час, ТДС-спектр смещается незначительно (кривая 5).

Для стали на рисунке 10 видим двухпиковый спектр. Пики не изолированы друг от друга и с изменением  $\bar{t}$  изменяются соразмерно. Для сопоставления на графике пунктирной линией добавлен спектр, соответствующий равновесной начальной концентрации  $\bar{c}$ .

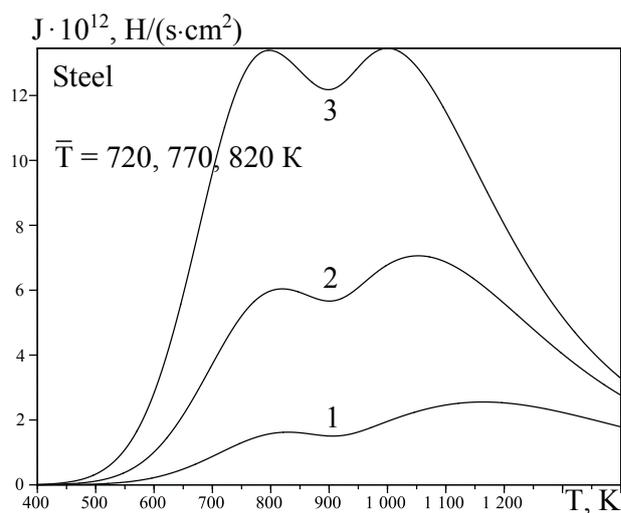
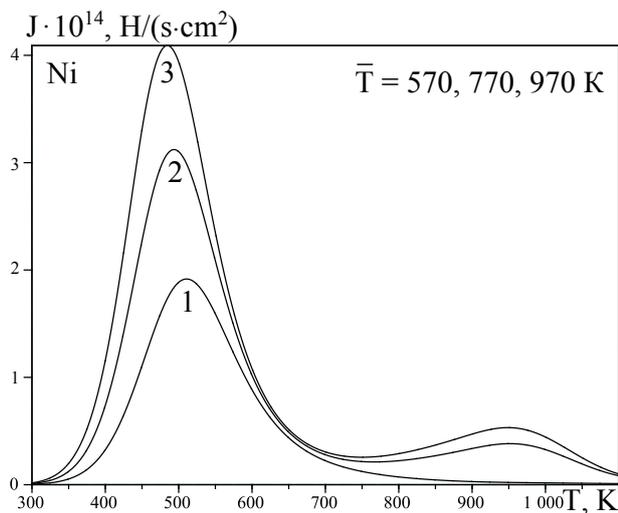


Рис. 8. Численный ТДС-спектр, распределенная модель. Влияние температуры насыщения  
 Fig. 8. Numerical TDS spectrum, a distributed model. Impact of the saturation temperature

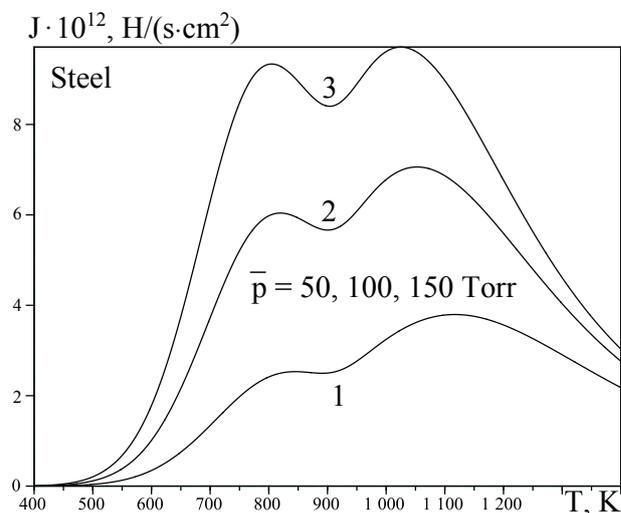
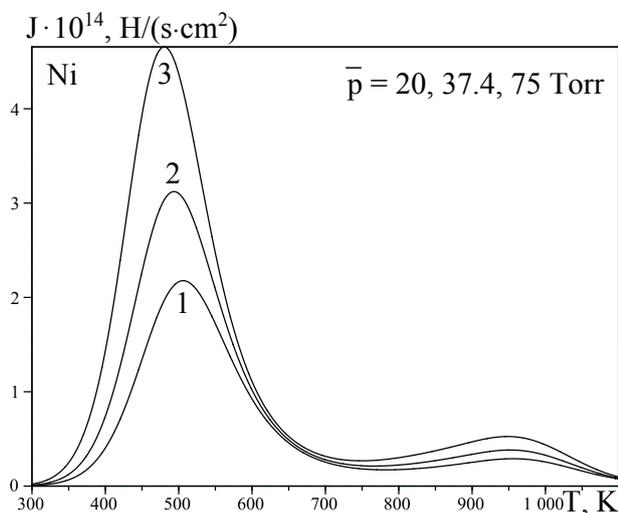


Рис. 9. Численный ТДС-спектр, распределенная модель. Влияние давления насыщения  
 Fig. 9. Numerical TDS spectrum, a distributed model. Impact of the saturation pressure

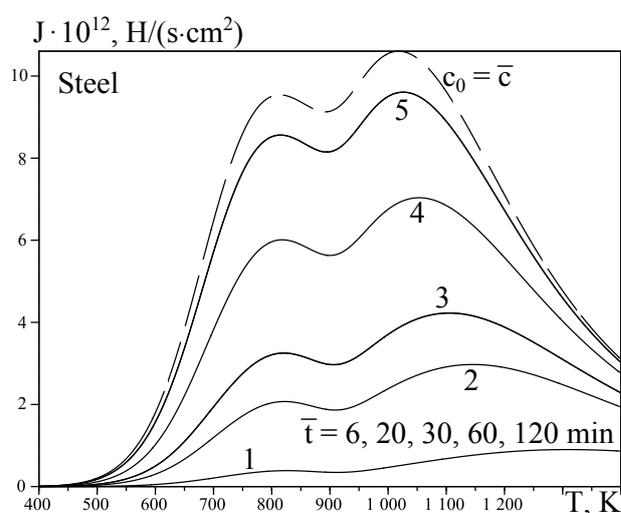
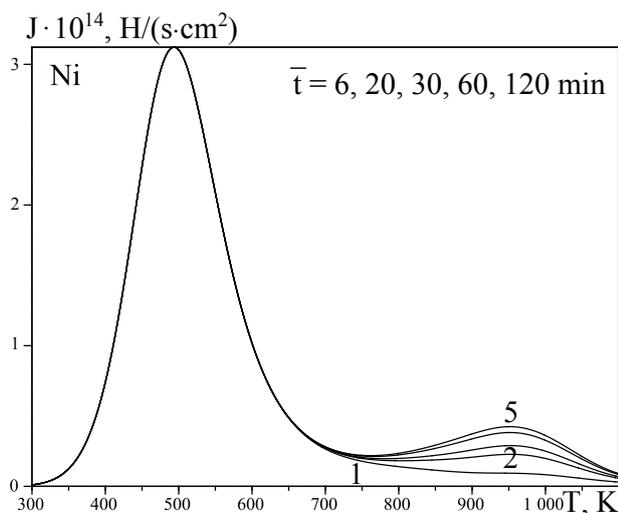


Рис. 10. Численный ТДС-спектр, распределенная модель. Влияние времени сорбции  
 Fig. 10. Numerical TDS spectrum, a distributed model. Impact of the sorption time

Рисунки 11 и 12 иллюстрируют влияние толщины образца на спектр дегазации. При изменении толщины образца  $\ell$  прослеживается различное поведение поверхностных и диффузионных пиков. На рисунке 11 представлены ТДС-спектры при концентрации  $c_0$ , определяемой диффузионной моделью и условиями сорбции. Очевидно, что за фиксированное время сорбции для тонких образцов удается достичь более высокой начальной концентрации водорода. С ростом толщины достигается в среднем меньшая концентрация растворенного водорода в объеме (для стали процесс лимитируется поверхностью), поэтому максимум высокотемпературного диффузионного пика может снижаться (см. рис. 11, сталь). Однако с уменьшением толщины пластины снижается и объем образца, что приво-

дит к невыраженности высокотемпературного пика (см. рис. 11, никель).

На рисунке 12 показаны ТДС-спектры при варьировании  $\ell$  в случае равновесной начальной концентрации. Для никеля пики относительно изолированы друг от друга. Низкотемпературный пик не реагирует на изменение толщины пластины (поверхность заполнена, см. рис. 7), десорбция с поверхности и подповерхностного слоя не меняется. Для диффузионных пиков наблюдается склейка восходящих фронтов с ростом толщины. Для стали высокотемпературный пик становится более выраженным с увеличением  $\ell$ . На рисунках 11 и 12 при уменьшении толщины температурные максимумы сближаются и ТДС-спектр приобретает однопиковый вид.

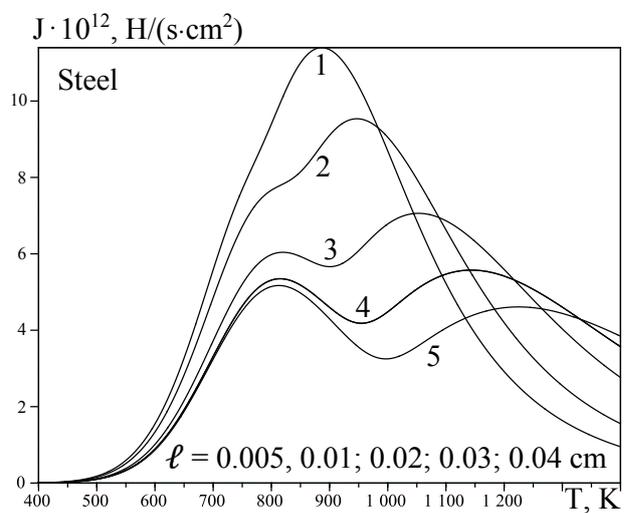
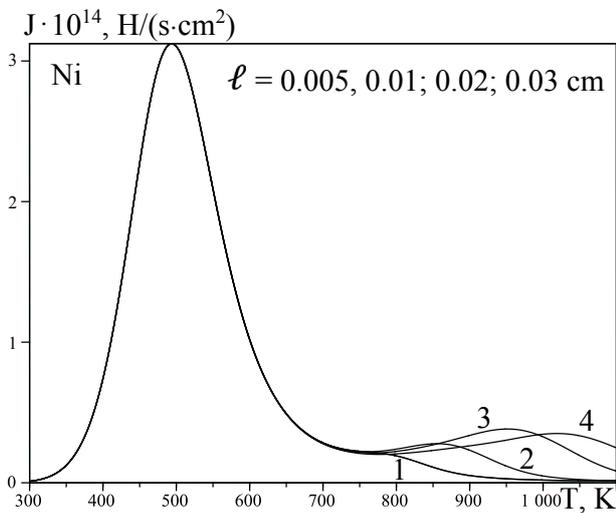


Рис. 11. Численный ТДС-спектр, распределенная модель. Влияние толщины образца  
Fig. 11. Numerical TDS spectrum, a distributed model. Impact of the sample thickness

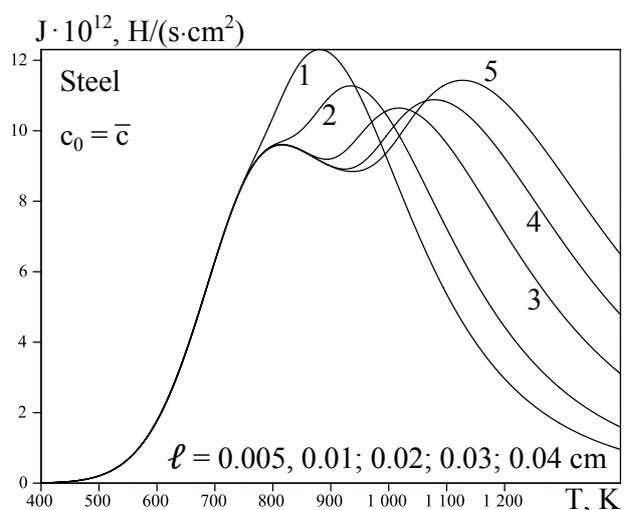
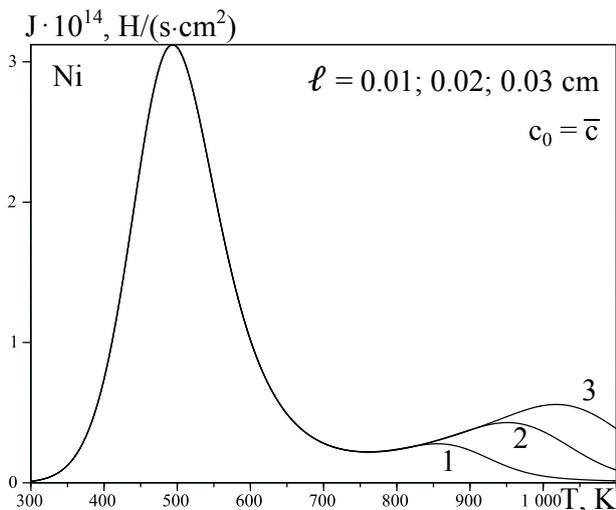


Рис. 12. Численный ТДС-спектр. Влияние толщины образца (начальная концентрация равновесная)  
Fig. 12. Numerical TDS spectrum. Impact of the sample thickness (initial concentration equilibrium)

Изменение численных ТДС-спектров (модель в форме краевой задачи) при варьировании скорости нагрева  $\beta$  показано на рисунке 13. В координатах  $(T, J)$  прослеживается склейка восходящих фронтов пика, обуслов-

ленного поверхностными процессами. Качественные изменения при варьировании  $\beta$  аналогичны модельным спектрам, наблюдаемым на рисунках 4, 6 для усредненной концентрации в форме реакции 1–2 порядка.

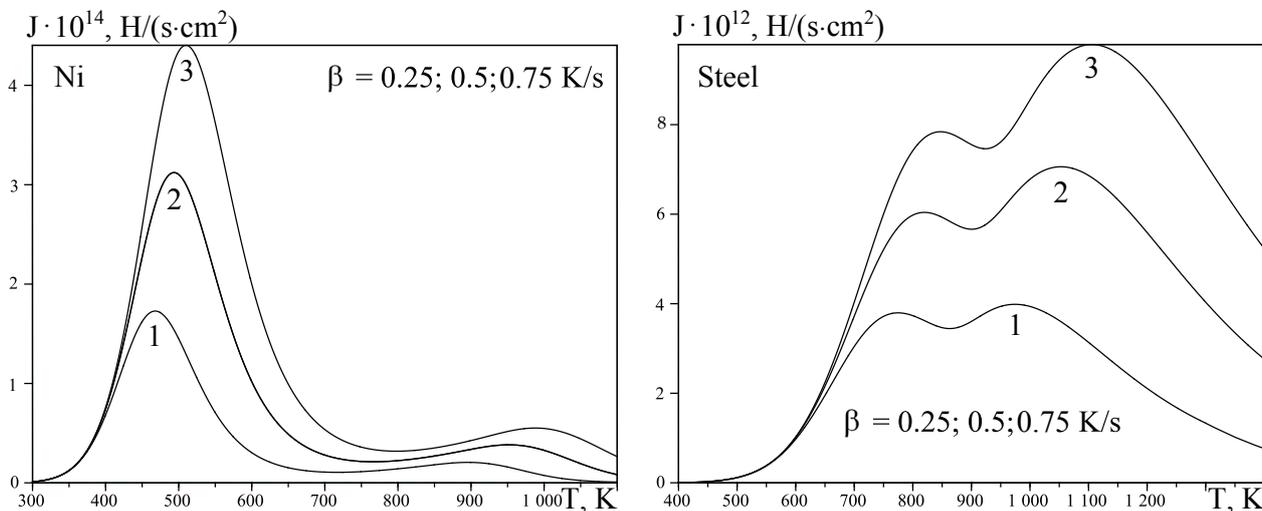


Рис. 13. Численный ТДС-спектр, распределенная модель. Влияние скорости нагрева  
Fig. 13. Numerical TDS spectrum, a distributed model. Impact of the heating rate

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное исследование двухпиковых спектров ТДС-дегазации на примере данных по хорошо изученным металлическим материалам, никелю и стали марки 12Х18Н10Т. Удалось рассмотреть различные варианты эксперимента:

- максимальный поток достигается в низкотемпературном и в высокотемпературном пиках;
- поверхностный и диффузионный пики смоделированы как в относительно изолированном друг от друга виде, так и при активном взаимодействии;
- ТДС-дегазация проводится в режиме, лимитированном поверхностью, и в диффузионном режиме;
- исследована сорбция водорода в поверхностном и диффузионном режимах;
- проведены эксперименты по ТДС-дегазации в условиях как равновесной начальной концентрации, так и существенно меньшей (соответствующей условиям сорбции в экспериментах).

Целесообразно провести дегазацию на пластинах разной толщины. Если пики остаются соизмеримыми по площади, то это аргумент в пользу моделей, оперирующих объемными характеристиками. Если первый пик практически не изменился, а последующий значительно возрос с увеличением толщины, то целесообразно взять за основу диффузионную модель в объеме с учетом поверхностных процессов (динамические граничные условия).

При обоснованной необходимости в уравнение диффузии можно добавить слагаемые обратимого захвата, что лишь технически усложнит численное моделирование. Характерные изменения спектра, полученные численным моделированием при варьировании параметров, позволяют более обоснованно судить о динамике различных физико-химических процессов при ТДС-дегазации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Взаимодействие водорода с металлами* / Ред. А. П. Захаров. М.: Наука, 1987. 296 с.
2. *Водород в металлах* / Ред. Г. Алефельд, И. Фелькль. М.: Мир, 1981. Т. 1, 2. 506, 430 с.
3. *Изотопы водорода. Фундаментальные и прикладные исследования* / Ред. А. А. Юхимчук. Саратов: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 697 с.

4. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: МГУ, 1965. 405 с.
5. Нечаев Ю. С. О природе, кинетике и предельных значениях сорбции водорода углеродными наноструктурами // Успехи физических наук. 2006. Т. 176(6). С. 581–610.
6. Писарев А. А., Цветков И. В., Маренков Е. Д., Ярков С. С. Проницаемость водорода через металлы. М.: МИФИ, 2008. 144 с.
7. Шьюмон П. Диффузия в твердых телах. М.: Металлургия, 1966.
8. Взаимодействие изотопов водорода с конструкционными материалами. IHISM-07 / Ред. А. А. Юхимчук, А. А. Курдюмов, И. Л. Малков. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2008. С. 100–138.
9. Взаимодействие изотопов водорода с конструкционными материалами. IHISM-08 Junior / Ред. А. А. Юхимчук. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. С. 223–252.
10. Денисов Е. А., Компаниец Т. Н., Юхимчук А. А., Бойцов И. Е., Малков И. Л. Водород и гелий в никеле и стали 12Х18Н10Т // Журнал технической физики. 2013. Т. 83, вып. 6. С. 3–10.
11. Atsumi H., Kondo Y. Retention and release of hydrogen isotopes in carbon materials priorly charged in gas phase // Fusion Eng. Des. 2018. Vol. 131. P. 49–53. doi: 10.1016/j.fusengdes.2018.04.039
12. Legrand E., Oudriss A., Savall C., Bouhattate J., Feaugas X. Towards a better understanding of hydrogen measurements obtained by thermal desorption spectroscopy using FEM modeling // Int. J. Hydrog. Energy. 2015. Vol. 40. P. 2871–2881. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.12.069
13. Nechaev Yu. S., Alexandrova N. M., Shurygina N. A., Cheretaeva A. O., Pisarev A. A. On the kinetic analysis of the hydrogen thermal desorption spectra for graphite and advanced carbon nanomaterials // Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. 2019. Vol. 28, iss. 2. P. 147–149. doi: 10.1080/1536383X.2019.1680982
14. Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V. Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface // Int. J. Hydrog. Energy. 2011. Vol. 36(1). P. 1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121
15. Vyazovkin S., Burnham A. K., Criado J. M., Perez-Maqueda L. A. ICTAC Kinetics Committee recommendations for performing kinetic computations on thermal analysis data // Thermochim. Acta. 2011. Vol. 520. P. 1–19. doi: 10.1016/j.tca.2011.03.034
16. Vyazovkin S., Chrissafis K., Di Lorenzo M. L., Koga N. ICTAC Kinetics Committee recommendations for collecting experimental thermal analysis data for kinetic computations // Thermochim. Acta. 2014. Vol. 590. P. 1–23. doi: 10.1016/j.tca.2014.05.036
17. Wei F.-G., Enomoto M., Tsuzaki K. Applicability of the Kissinger's formula and comparison with the McNabb–Foster model in simulation of thermal desorption spectrum // Comp. Mater. Sci. 2012. Vol. 51. P. 322–330. doi: 10.1016/j.commatsci.2011.07.009
18. Zaika Yu. V., Kostikova E. K. Computer simulation of hydrogen thermodesorption // Adv. Mater. Sci. Appl. 2014. Vol. 3, iss. 3. P. 120–129. doi: 10.5963/AMSA0303003
19. Zaika Yu. V., Kostikova E. K. Computer simulation of hydrogen thermal desorption by ODE-approximation // Int. J. Hydrog. Energy. 2017. Vol. 42(1). P. 405–415. doi: 10.1016/j.ijhydene.2016.10.104
20. Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I. Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding // Appl. Math. Modelling. 2009. Vol. 33. P. 3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018
21. Zaika Yu. V., Sidorov N. I., Fomkina O. V. Identification of hydrogen permeability parameters of membrane materials in an aggregated experiment // Int. J. Hydrog. Energy. 2020. Vol. 45. P. 7433–7443. doi: 10.1016/j.ijhydene.2019.04.098

## REFERENCES

- Zakharov F. P. (ed.). Interaction of hydrogen with metals. Moscow: Nauka; 1987. 296 p. (In Russ.)
- Alefel'd G., Fel'kl' I. (eds.). Hydrogen in metals. Moscow: Mir; 1981. Vol. 1, 2. 506, 430 p. (In Russ.)
- Yukhimchuk A. A. (ed.) Hydrogen isotopes. Fundamental and applied studies. Sarov: RFYaTs-VNIIEF; 2009. 697 p. (In Russ.)
- Landau L. D., Akhiezer A. I., Lifshits E. M. A course of general physics. Mechanics and molecular physics. Moscow: MSU; 1965. 405 p. (In Russ.)
- Nechaev Yu. S. On the nature, kinetics and limit values of hydrogen sorption by carbon nanostructures. *Advances in Physical Sci.* 2006;176(6):581–610.
- Pisarev A. A., Tsvetkov I. V., Marenkov E. D., Yarkov S. S. Hydrogen permeability through metals. Moscow: IIFI; 2008. 144 p. (In Russ.)
- Sh'yumon P. Diffusion in solids. Moscow: Metallurgiya; 1966. (In Russ.)
- Yukhimchuk A. A., Kurdyumov A. A., Malkov I. L. (eds.). Interaction between hydrogen isotopes and structural materials. IHISM-07. Sarov: RFYaTs-VNIIEF; 2008. P. 100–138. (In Russ.)
- Yukhimchuk A. A. (ed.). Interaction between hydrogen isotopes and structural materials. IHISM-08 Junior. Sarov: RFYaTs-VNIIEF; 2009. P. 223–252. (In Russ.)
- Denisov E. A., Kompaniets T. N., Yukhimchuk A. A., Boitsov I. E., Malkov I. L.

- Hydrogen and helium in nickel and 12X18H10T steel. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki = Technical Physics*. 2013;83(6):3–10. (In Russ.)
11. *Atsumi H., Kondo Y.* Retention and release of hydrogen isotopes in carbon materials priorly charged in gas phase. *Fusion Eng. Des.* 2018;131:49–53. doi: 10.1016/j.fusengdes.2018.04.039
  12. *Legrand E., Oudriss A., Savall C., Bouhattate J., Feaugas X.* Towards a better understanding of hydrogen measurements obtained by thermal desorption spectroscopy using FEM modeling. *Int. J. Hydrog. Energy.* 2015;40:2871–2881. doi: 10.1016/j.ijhydene.2014.12.069
  13. *Nechaev Yu. S., Alexandrova N. M., Shurygina N. A., Cheretaeva A. O., Pisarev A. A.* On the kinetic analysis of the hydrogen thermal desorption spectra for graphite and advanced carbon nanomaterials. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures.* 2019;28(2):147–149. doi: 10.1080/1536383X.2019.1680982
  14. *Rodchenkova N. I., Zaika Yu. V.* Numerical modelling of hydrogen desorption from cylindrical surface. *Int. J. Hydrog. Energy.* 2011;36(1):1239–1247. doi: 10.1016/j.ijhydene.2010.06.121
  15. *Vyazovkin S., Burnham A. K., Criado J. M., Perez-Maqueda L. A.* ICTAC Kinetics Committee recommendations for performing kinetic computations on thermal analysis data. *Thermochim. Acta.* 2011;520:1–19. doi: 10.1016/j.tca.2011.03.034
  16. *Vyazovkin S., Chrissafis K., Di Lorenzo M. L., Koga N.* ICTAC Kinetics Committee recommendations for collecting experimental thermal analysis data for kinetic computations. *Thermochim. Acta.* 2014;590:1–23. doi: 10.1016/j.tca.2014.05.036
  17. *Wei F.-G., Enomoto M., Tsuzaki K.* Applicability of the Kissinger's formula and comparison with the McNabb–Foster model in simulation of thermal desorption spectrum. *Comp. Mater. Sci.* 2012;51:322–330. doi: 10.1016/j.commatsci.2011.07.009
  18. *Zaika Yu. V., Kostikova E. K.* Computer simulation of hydrogen thermodesorption. *Adv. Mater. Sci. Appl.* 2014;3(3):120–129. doi: 10.5963/AMSA0303003
  19. *Zaika Yu. V., Kostikova E. K.* Computer simulation of hydrogen thermal desorption by ODE-approximation. *Int. J. Hydrog. Energy.* 2017; 42(1):405–415. doi: 10.1016/j.ijhydene.2016.10.104
  20. *Zaika Yu. V., Rodchenkova N. I.* Boundary-value problem with moving bounds and dynamic boundary conditions: diffusion peak of TDS-spectrum of dehydriding. *Appl. Math. Modelling.* 2009;33:3776–3791. doi: 10.1016/j.apm.2008.12.018
  21. *Zaika Yu. V., Sidorov N. I., Fomkina O. V.* Identification of hydrogen permeability parameters of membrane materials in an aggregated experiment. *Int. J. Hydrog. Energy.* 2020;45:7433–7443. doi: 10.1016/j.ijhydene.2019.04.098

Поступила в редакцию / received: 24.05.2022; принята к публикации / accepted: 20.06.2022.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

### **Заика Юрий Васильевич**

д-р физ.-мат. наук, профессор, руководитель лаборатории моделирования природно-технических систем

*e-mail:* zaika@krc.karelia.ru

### **Костикова Екатерина Константиновна**

канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

*e-mail:* kostikova@krc.karelia.ru

## CONTRIBUTORS:

### **Zaika, Yury**

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of Laboratory of Natural-Technical System Modelling

### **Kostikova, Ekaterina**

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher

УДК 519.21, 515.12

## О РАЗМЕРНОСТЯХ ФИНИТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ФУНКТОРАХ, СОХРАНЯЮЩИХ $\varepsilon$ -СЕТИ

**А. В. Иванов**

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Размерность финитной аппроксимации  $\dim_{\mathcal{F}} \xi$  определена для любой точки  $\xi$  пространства вида  $\mathcal{F}(X)$ , где  $\mathcal{F}$  – метризуемый полунормальный функтор, а  $X$  – метрический компакт. Такими точками могут быть замкнутые подмножества, вероятностные меры, максимальные сцепленные системы замкнутых множеств и т. д. Проведенные исследования показывают, что для многих функториальных конструкций общей топологии (функторов экспоненты, вероятностных мер, суперрасширения и др.) размерность финитной аппроксимации  $\dim_{\mathcal{F}} \xi$  не превосходит емкостной размерности  $\dim_B$  носителя  $\text{supp}(\xi)$  данной точки. В связи с этим естественно возникает задача описания класса функторов, для которых выполняется указанное ограничение на размерность финитной аппроксимации. В работе введено понятие метризуемого функтора, сохраняющего  $\varepsilon$ -сети. Условие сохранения  $\varepsilon$ -сетей функтором  $\mathcal{F}$  оказывается достаточным для выполнения неравенства  $\dim_{\mathcal{F}} \xi \leq \dim_B(\text{supp}(\xi))$  для любой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$ . Доказано, что ряд известных метризуемых функторов сохраняет  $\varepsilon$ -сети.

**Ключевые слова:** полунормальный функтор; метризуемый функтор; размерность финитной аппроксимации; емкостная размерность; размерность квантования

Для цитирования: Иванов А. В. О размерностях финитной аппроксимации и функторах, сохраняющих  $\varepsilon$ -сети // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 30–36. doi: 10.17076/mat1561

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### **A. V. Ivanov. ON DIMENSIONS OF FINITE APPROXIMATION AND FUNCTORS PRESERVING $\varepsilon$ -NETS**

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The dimension of finite approximation  $\dim_{\mathcal{F}} \xi$  is defined for any point  $\xi$  of the space  $\mathcal{F}(X)$ , where  $\mathcal{F}$  is a metrizable seminormal functor and  $X$  is a metric compactum. Such points can represent closed subsets, probability measures, maximal linked

systems of closed sets, etc. The analysis shows that for many functorial constructions of general topology (exponential functor, probability measures functor, superextension functor, etc.) the dimension of finite approximation  $\dim_{\mathcal{F}} \xi$  does not exceed the box dimension  $\dim_B$  of the support  $\text{supp}(\xi)$  of this point. In this connection, the problem naturally arises of how to describe the class of functors for which the indicated restriction on the dimensionality of the finite approximation holds. This paper introduces the notion of a metrizable functor that preserves  $\varepsilon$ -nets. The condition that  $\varepsilon$ -nets be preserved by the functor  $\mathcal{F}$  proved to be sufficient for the inequality  $\dim_{\mathcal{F}} \xi \leq \dim_B(\text{supp}(\xi))$  for any point  $\xi \in \mathcal{F}(X)$ . It is proved that a number of well-known metrizable functors preserve  $\varepsilon$ -nets.

**Keywords:** seminormal functor; metrizable functor; dimension of finite approximation; box dimension; quantization dimension

**For citation:** Ivanov A. V. On dimensions of finite approximation and functors preserving  $\varepsilon$ -nets. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:30–36. doi: 10.17076/mat1561

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Размерность финитной аппроксимации  $\dim_{\mathcal{F}} \xi$  определена для любой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$ , где  $\mathcal{F}$  – метризуемый полунормальный функтор в категории компактов и непрерывных отображений, а  $X$  – метрический компакт. Функтор  $\mathcal{F}$  называется полунормальным, если он сохраняет точку и пустое множество, монотонен, сохраняет пересечения и непрерывен в смысле Е. В. Щепина. Если  $\mathcal{F}$  – полунормальный функтор, то для любого замкнутого подмножества  $A$  компакта  $X$  пространство  $\mathcal{F}(A)$  естественно отождествляется с подпространством  $\mathcal{F}(X)$ , т. е. можно считать, что  $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$ . Для любой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  определен ее носитель  $\text{supp}(\xi)$  как наименьшее (по включению) замкнутое подмножество  $A \subset X$ , для которого  $\xi \in \mathcal{F}(A)$ . Для  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : |\text{supp}(\xi)| \leq n\}.$$

Известно, что  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$  всюду плотно в  $\mathcal{F}(X)$  и  $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$ . Доказательство всех этих фактов дано в работе [10].

Полунормальный функтор  $\mathcal{F}$  называется метризуемым (по В. В. Федорчуку [6]), если для любого метрического компакта  $(X, \rho)$  существует продолжение  $\rho_{\mathcal{F}}$  метрики  $\rho$  на  $\mathcal{F}(X)$  (сохраняющее диаметр  $X$ ), при котором под действием функтора  $\mathcal{F}$  сохраняются изометрические вложения. В дальнейшем речь идет только о функторах бесконечной степени, для которых  $\mathcal{F}_n(X) \neq \mathcal{F}(X)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  и любого бесконечного компакта  $X$ .

Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт. Для каждой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  положим

$$N(\xi, \varepsilon) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}. \quad (1)$$

Если  $\xi \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$ , то число  $N(\xi, \varepsilon)$  неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Скорость этого возрастания характеризует размерность финитной аппроксимации точки  $\xi$

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}. \quad (2)$$

Размерность  $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$  определяет «точку переключения» предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\xi, \varepsilon) \varepsilon^{\alpha}$$

– при  $\alpha < \dim_{\mathcal{F}}(\xi)$  этот предел равен бесконечности, а при  $\alpha > \dim_{\mathcal{F}}(\xi)$  он равен нулю.

Заметим, что предел в формуле (2) может не существовать. Тогда мы рассматриваем верхний или нижний пределы и получаем, соответственно, верхнюю  $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$  или нижнюю  $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$  размерности финитной аппроксимации точки  $\xi$ .

Определение размерности финитной аппроксимации позволяет установить общую функториальную природу таких известных математических понятий, как емкостная размерность  $\dim_B X$  метрического компакта  $X$  и размерность квантования  $D(\mu)$  вероятностной меры  $\mu$ . Оказывается, что емкостная размерность  $\dim_B F$  любого замкнутого подмножества  $F \subset X$  совпадает с размерностью финитной аппроксимации  $\dim_{\text{exp}}(F)$ , определенной для функтора экспоненты  $\text{exp}$  с метрикой Хаусдорфа, а размерность квантования вероятностной меры является размерностью финитной аппроксимации для функтора вероятностных мер  $P$  с метрикой Канторовича – Рубинштейна. Свойства емкостной размерно-

сти и размерности квантования подробно изучены (см. [5] и [11]). Размерности финитной аппроксимации для функторов суперрасширения и идемпотентных (вероятностных) мер рассматривались в работах [4] и [13] соответственно. Для всех указанных функторов выполняется общее неравенство

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) \leq \dim_B(\text{supp}(\xi)) \quad (3)$$

для любой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$ . В связи с этим встает вопрос о справедливости неравенства (3) для любого метризуемого функтора. Надо заметить, что определение метризуемости налагает весьма слабые ограничения на функтор, поэтому представляет интерес формулировка дополнительных требований на функтор  $\mathcal{F}$ , которые гарантируют выполнение неравенства (3).

В работе предложено условие сохранения  $\varepsilon$ -сетей, имеющее естественную формулировку: метризуемый функтор  $\mathcal{F}$  сохраняет  $\varepsilon$ -сети, если для любой  $\varepsilon$ -сети  $A$  подмножества  $B \subset X$  множество  $\mathcal{F}(A)$  является  $\varepsilon$ -сетью для  $\mathcal{F}(B)$ . Это условие можно ослабить, а именно, требовать, чтобы множество  $\mathcal{F}(A)$  было  $p\varepsilon$ -сетью для  $\mathcal{F}(B)$ , где  $p \geq 1$  – некоторая константа, зависящая от  $\mathcal{F}$ . Показано, что данное условие является достаточным для выполнения неравенства (3). Установлено, что все упомянутые выше функторы сохраняют  $\varepsilon$ -сети.

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Определение 1** (В. В. Федорчук [6]). Полунормальный функтор  $\mathcal{F}$  называется метризуемым, если для любого метрического компакта  $(X, \rho)$  может быть указана совместимая с топологией метрика  $\rho_{\mathcal{F}}$  на  $\mathcal{F}(X)$  так, что выполняются следующие условия:

1) для любого изометрического вложения  $i : (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$  отображение  $\mathcal{F}(i) : (\mathcal{F}(X_1), (\rho_1)_{\mathcal{F}}) \rightarrow (\mathcal{F}(X_2), (\rho_2)_{\mathcal{F}})$  также является изометрическим вложением;

2)  $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$ ;

3)  $\text{diam}(X) = \text{diam}(\mathcal{F}(X))$ .

При этом семейство метрик  $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$  по определению задает метризацию функтора  $\mathcal{F}$ .

Если  $\mathcal{F}$  – метризуемый функтор и  $(X, \rho)$  – метрический компакт, то согласно формуле (1) для любой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  и любого  $\varepsilon > 0$  определено число  $N(\xi, \varepsilon)$ .

**Определение 2** (см. [3] и [12]). Размерностями финитной аппроксимации (верхней  $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$  и нижней  $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ ) точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  называются следующие величины:

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}.$$

Очевидно, что всегда  $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) \geq \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ . В случае выполнения равенства  $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$  используется обозначение  $\dim_{\mathcal{F}}(\xi)$ .

Приведем необходимые сведения о конкретных функторах, которые рассматриваются в работе.

**Функтор  $\text{exp}$ .** Для компакта  $X$  через  $\text{exp } X$  обозначается пространство непустых замкнутых подмножеств  $X$  с топологией Вьеториса. Каждому непрерывному отображению компактов  $f : X \rightarrow Y$  соответствует непрерывное отображение  $\text{exp}(f) : \text{exp } X \rightarrow \text{exp } Y$ , действующее по правилу:  $\text{exp}(f)(A) = f(A)$ , где  $A \in \text{exp } X$ . Для метрического компакта  $(X, \rho)$  на  $\text{exp } X$  определена метрика Хаусдорфа  $\rho_H$ :

$$\rho_H(F, G) = \inf\{\varepsilon : F \subset B(G, \varepsilon), G \subset B(F, \varepsilon)\}, \quad (4)$$

где  $B(F, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$  – замкнутый  $\varepsilon$ -шар множества  $F$  (аналогично через  $B(x, \varepsilon)$  мы обозначаем замкнутый  $\varepsilon$ -шар точки  $x \in X$ ). Известно [5], что семейство метрик  $\{\rho_H\}$  задает метризацию функтора  $\text{exp}$ .

Напомним, что подмножество  $A \subset X$  метрического компакта называется  $\varepsilon$ -сетью для  $F \subset X$ , если  $B(A, \varepsilon) \supset F$ . Нетрудно показать, что для любого  $F \in \text{exp } X$  число  $N(F, \varepsilon)$  равно наименьшему количеству точек в  $\varepsilon$ -сети для  $F$ , откуда сразу следует [4] совпадение размерностей финитной аппроксимации для функтора  $\text{exp}$  с классическими емкостными размерностями:

$$\overline{\dim}_{\text{exp}}(F) = \overline{\dim}_B F, \quad \underline{\dim}_{\text{exp}}(F) = \underline{\dim}_B F.$$

Для любого  $F \in \text{exp } X$  носителем  $\text{supp}(F)$  является само множество  $F$ . Следовательно, для функтора  $\text{exp}$  неравенство (3) выполняется.

**Функтор вероятностных мер  $P$ .** Через  $P(X)$  обозначается множество вероятностных мер на компакте  $X$ , наделенное слабой\* топологией. Если вероятностную меру  $\mu$  отождествить (согласно теореме Рисса) с функционалом  $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , действующим на пространстве  $C(X)$  непрерывных функций на  $X$  по формуле  $\mu(g) = \int g d\mu$ , то для любого непрерывного отображения компактов  $f : X \rightarrow Y$  образ  $P(f)(\mu)$  меры  $\mu \in P(X)$  при отображении  $P(f) : P(X) \rightarrow P(Y)$  определяется по формуле:  $P(f)(\mu)(g) = \mu(g \circ f)$ , где  $g \in C(Y)$ . Для метрического компакта  $(X, \rho)$  на  $P(X)$  определена совместимая с топологией метрика Канторовича – Рубинштейна  $\rho_P$ :

$$\rho_P(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(g) - \nu(g)| : g \in \text{Lip}_1(X)\},$$

где  $\text{Lip}_c(X)$  – множество вещественных функций на  $X$ , удовлетворяющих условию Липшица с константой  $c$ . Известно [6], что семейство метрик  $\{\rho_P\}$  определяет метризацию функтора  $P$ . В [3] показано, что размерность финитной аппроксимации  $\text{dim}_P(\mu)$  меры  $\mu$  совпадает с размерностью квантования  $D(\mu)$ , определенной в рамках теории квантования вероятностных мер [11].

Носителем меры  $\mu \in P(X)$  является наименьшее (по включению) замкнутое подмножество  $A \subset X$ , для которого  $\mu(A) = 1$ . Известно, что

$$\begin{aligned} \overline{D}(\mu) &\leq \overline{\text{dim}}_B(\text{supp}(\mu)), \\ \underline{D}(\mu) &\leq \underline{\text{dim}}_B(\text{supp}(\mu)) \end{aligned} \quad (5)$$

(см. [3], для мер в  $\mathbb{R}^n$  с компактным носителем – [11]).

**Функтор идемпотентных мер I.** Для  $c \in \mathbb{R}$  через  $c_X$  обозначается постоянная функция на  $X$  со значением  $c$ .

**Определение 3** (см. [1]). Функционал  $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$  называется идемпотентной (вероятностной) мерой, определенной на компакте  $X$ , если для любых  $f, g \in C(X)$  и  $c \in \mathbb{R}$

- 1)  $\mu(c_X) = c$ ;
- 2)  $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$ ;
- 3)  $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$ .

Множество  $I(X)$  идемпотентных мер на компакте  $X$ , наделенное слабой\* топологией, всегда является компактом. Для любого непрерывного отображения компактов  $f : X \rightarrow Y$  отображение  $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$  определяется по схеме приведенного выше определения отображения  $P(f)$ . Как показал М. Заричный [1], функтор  $I$  является нормальным в смысле Е. В. Щепина (в частности, функтор  $I$  полунормален).

Для каждой идемпотентной меры  $\mu \in I(X)$  определена ее плотность  $d_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$  по формуле  $d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X), f \leq 0_X, f(x) = 0\}$ , где  $\mathbb{R}_{\max} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ . Функция  $d_\mu$  удовлетворяет условию  $\max d_\mu = 0$  и полунепрерывна сверху. При этом  $d_\mu$  определяет исходную идемпотентную меру  $\mu$ :

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \quad (6)$$

где  $f \in C(X)$ . (Формула (6) корректна, поскольку функция  $d_\mu + f$  полунепрерывна сверху и, следовательно,  $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$  достигается в некоторой точке компакта  $X$ ). И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию  $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ , удовлетворяющую условию  $\max g = 0$ , то формула (6) определяет идемпотентную меру  $\mu_g$ :

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой  $d_{\mu_g} = g$  (см. [8]). Носителем идемпотентной меры  $\mu$  является множество

$$\text{supp}(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}.$$

В работе Л. Базилевич, Д. Реповша и М. Заричного [9] для любого метрического компакта  $(X, \rho)$  на  $I(X)$  определена метрика  $\rho_I$ . В [13] показано, что семейство  $\{\rho_I\}$  задает метризацию функтора  $I$ . Метрика  $\rho_I$  строится в [9] с помощью семейства непрерывных псевдометрик  $\rho_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), определение которых аналогично определению метрики Канторовича – Рубинштейна на  $P(X)$ :

$$\rho_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \text{Lip}_n(X)\},$$

где  $\mu, \nu \in I(X)$ . По определению

$$\rho_I(\mu, \nu) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(\mu, \nu)}{n2^n}. \quad (7)$$

Размерности финитной аппроксимации идемпотентных мер, определенные по метризации  $\{\rho_I\}$ , в работе [13] были названы размерностями квантования (по аналогии с вероятностными мерами) и обозначены через  $D_I(\mu)$ .

Для размерностей квантования идемпотентных мер имеют место неравенства, аналогичные (5) (см. [13]):

$$\overline{D}_I(\mu) \leq \overline{\text{dim}}_B(\text{supp}(\mu)),$$

$$\underline{D}_I(\mu) \leq \underline{\text{dim}}_B(\text{supp}(\mu)).$$

**Функтор суперрасширения.** Система замкнутых подмножеств компакта  $X$  называется сцепленной, если любые два ее элемента пересекаются. Любая максимальная (по включению) сцепленная система (мсс) замкнутых подмножеств компакта  $X$  является точкой пространства  $\text{exr}(\text{exr } X)$ . Таким образом, множество  $\lambda X$  максимальных сцепленных систем является подмножеством  $\text{exr}(\text{exr } X)$  и может быть наделено топологией подпространства. Для любого компакта  $X$  пространство  $\lambda X$  также компактно. Если  $(X, \rho)$  – метрический компакт, то на  $\text{exr}(\text{exr } X)$  определена метрика Хаусдорфа  $(\rho_H)_H$ , ограничение которой на  $\lambda(X)$  обозначается через  $\rho_\lambda$ . Известно, что

$$\rho_\lambda(\xi, \eta) = \inf\{\varepsilon : \forall F \in \xi \exists B(F, \varepsilon) \in \eta\}.$$

Для непрерывного отображения компактов  $f : X \rightarrow Y$  отображение  $\lambda(f) : \lambda(X) \rightarrow \lambda(Y)$  определяется по правилу:  $\lambda(f)(\xi)$  есть единственная мсс в  $Y$ , содержащая сцепленную систему  $\{f(F) : F \in \xi\}$ . Носитель мсс  $\xi \in \lambda(X)$  есть наименьшее (по включению) замкнутое

подмножество  $A \subset X$ , для которого система  $\{F \cap A : F \in \xi\}$  является сцепленной. Функтор  $\lambda$  является метризуемым полунормальным функтором с метризацией  $\{\rho_\lambda\}$  (см. [6, 7]).

В [4] показано, что для размерностей финитной аппроксимации максимальных сцепленных систем  $\xi \in \lambda X$  выполняются неравенства (3):

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_\lambda(\xi) &\leq \overline{\dim}_B(\text{supp}(\xi)), \\ \underline{\dim}_\lambda(\xi) &\leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\xi)). \end{aligned}$$

### МЕТРИЗУЕМЫЕ ФУНКТОРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ $\varepsilon$ -СЕТИ

**Определение 4.** Будем говорить, что полунормальный метризуемый функтор  $\mathcal{F}$  с метризацией  $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$  сохраняет  $\varepsilon$ -сети, если существует константа  $p \geq 1$  такая, что для любого  $\varepsilon > 0$ , любого метрического компакта  $(X, \rho)$ , любого его замкнутого подмножества  $A$  и любой замкнутой  $\varepsilon$ -сети  $B$  для  $A$  множество  $\mathcal{F}(B)$  является  $p\varepsilon$ -сетью для  $\mathcal{F}(A)$  в  $\mathcal{F}(X)$ .

**Теорема 1.** Если полунормальный метризуемый функтор  $\mathcal{F}$  с метризацией  $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$  сохраняет  $\varepsilon$ -сети, то для любого метрического компакта  $(X, \rho)$  и любой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) &\leq \overline{\dim}_B(\text{supp}(\xi)), \\ \underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) &\leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\xi)). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  и  $\text{supp}(\xi) = A \in \text{exr } X$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и положим  $n = N(A, \varepsilon)$  (речь здесь идет о числе  $N$  для функтора  $\text{exr}$ ). Тогда существует  $D \in \text{exr}_n X$ , для которого  $\rho_H(A, D) \leq \varepsilon$ . Следовательно,  $A \subset B(D, \varepsilon)^1$ , т. е.  $D$  является  $\varepsilon$ -сетью для  $A$ . При этом  $|D| \leq n$ . В силу условий, наложенных на функтор  $\mathcal{F}$ , множество  $\mathcal{F}(D)$  является  $p\varepsilon$ -сетью для  $\mathcal{F}(A)$  в  $\mathcal{F}(X)$ , где  $p$  – константа из определения 4. Поскольку  $\xi \in \mathcal{F}(A)$ , в  $\mathcal{F}(D)$  найдется точка  $\eta$ , для которой  $\rho_{\mathcal{F}}(\xi, \eta) \leq p\varepsilon$ . Следовательно,  $\rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq p\varepsilon$ , и значит,  $N(\xi, p\varepsilon) \leq n = N(A, \varepsilon)$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon)}{-\log \varepsilon} \\ &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, p\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(A, \varepsilon)}{-\log \varepsilon} \\ &= \overline{\dim}_B(\text{supp}(\xi)). \end{aligned}$$

Неравенство для нижних размерностей доказывается аналогично.  $\square$

<sup>1</sup>В определении метрики  $\rho_H$  по формуле (4)  $\inf$  можно заменить на  $\min$ , поскольку  $\bigcap_{\varepsilon' > \varepsilon} B(D, \varepsilon') = B(D, \varepsilon)$ .

Для вероятностной меры  $\mu \in P(X)$  известна следующая формула [3], выражающая расстояние  $\rho_P$  от  $\mu$  до  $P(A)$ , где  $A$  – произвольное конечное подмножество  $X$ :

$$\rho_P(\mu, P(A)) = \mu(\rho(x, A)) = \int_X \rho(x, A) d\mu.$$

При доказательстве теоремы 2 нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

**Предложение.** Для любой меры  $\mu \in P(X)$  и любого замкнутого подмножества  $A$  метрического компакта  $X$  имеет место равенство

$$\rho_P(\mu, P(A)) = \mu(\rho(x, A)).$$

*Доказательство.* Заметим, что функция  $\rho(x, A)$  принадлежит множеству  $\text{Lip}_1(X)$ . Интеграл от функции  $\rho(x, A)$  по любой мере  $\nu \in P(A)$  равен нулю, поскольку  $\rho(x, A) = 0$  при  $x \in A$ . Следовательно,

$$\rho_P(\mu, \nu) \geq |\mu(\rho(x, A)) - \nu(\rho(x, A))| = \mu(\rho(x, A)).$$

Докажем обратное неравенство. Пусть  $F$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ , причем  $F \subset A$ . Покажем, что

$$\rho(x, F) \leq \rho(x, A) + \varepsilon.$$

Возьмем точку  $a \in A$ , для которой  $\rho(x, a) = \rho(x, A)$ . Существует точка  $b \in F$  такая, что  $\rho(a, b) \leq \varepsilon$ . Имеем  $\rho(x, F) \leq \rho(x, b) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) \leq \rho(x, A) + \varepsilon$ , что и требовалось.

Поскольку  $P(F) \subset P(A)$  и утверждение предложения выполняется для конечных множеств, мы получаем

$$\begin{aligned} \rho_P(\mu, P(A)) &\leq \rho_P(\mu, P(F)) \\ &= \mu(\rho(x, F)) \leq \mu(\rho(x, A) + \varepsilon). \end{aligned} \quad (8)$$

Неравенство (8) выполняется для любого  $\varepsilon$ . Следовательно,  $\rho_P(\mu, P(A)) \leq \mu(\rho(x, A))$ .  $\square$

**Теорема 2.** Функторы  $\text{exr}$ ,  $P$ ,  $I$  и  $\lambda$  сохраняют  $\varepsilon$ -сети. Для всех этих функторов  $p = 1$ .

*Доказательство.* **Функтор  $\text{exr}$ .** Пусть  $A, B$  – замкнутые подмножества  $X$ ,  $B$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $A$  и  $F \in \text{exr } A$ . Для  $\varepsilon' > \varepsilon$  рассмотрим систему множеств

$$\alpha = \{O(x, \varepsilon') : x \in B, O(x, \varepsilon') \cap F \neq \emptyset\},$$

где  $O(x, \varepsilon') = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon'\}$  – открытый  $\varepsilon'$ -шар с центром в  $x$ . Поскольку  $B$  –  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ , система  $\alpha$  является открытым покрытием

множества  $F$ . Выделим из этого покрытия конечное подпокрытие  $\{O(x_1, \varepsilon'), \dots, O(x_n, \varepsilon')\}$  и рассмотрим множество  $G = \{x_1, \dots, x_n\} \in \text{exp } B$ . Из построения следует, что  $\rho_H(F, G) \leq \varepsilon'$ . Таким образом,  $\rho_H(F, \text{exp } B) \leq \varepsilon'$  для любого  $\varepsilon' > \varepsilon$ . Следовательно,  $\rho_H(F, \text{exp } B) \leq \varepsilon$ , что и требовалось.

**Функтор Р.** Пусть  $A, B \in \text{exp } X$  и  $B - \varepsilon$ -сеть для  $A$ . В силу предложения для любой меры  $\mu \in P(A)$  имеет место равенство

$$\rho_P(\mu, P(B)) = \mu(\rho(x, B)) = \int_{\text{supp}(\mu)} \rho(x, B) d\mu.$$

При этом  $\rho(x, B) \leq \varepsilon$  для любой точки  $x \in \text{supp}(\mu)$ , поскольку  $B - \varepsilon$ -сеть для  $A$ . Следовательно,  $\rho_P(\mu, P(B)) \leq \varepsilon$ .

**Функтор I.** Пусть множества  $A, B \subset X$  такие же, как и выше, и  $\mu \in I(A)$ . Пусть  $F = \text{supp}(\mu) \subset A$ . Как и в рассуждениях о функторе  $\text{exp}$ , для множества  $F$  построим конечное подмножество  $G = \{x_1, \dots, x_n\} \subset B$  для  $\varepsilon' > \varepsilon$ . Пусть  $d_\mu$  – функция плотности идемпотентной меры  $\mu$  и  $\lambda_i = \max\{d_\mu(x) : x \in B(x_i, \varepsilon')\}$ . Определим функцию плотности  $d_\nu$  по формуле:  $d_\nu(x_i) = \lambda_i$ ,  $d_\nu(x) = -\infty$  при  $x \notin G$ . Функция  $d_\nu$  задает идемпотентную меру  $\nu \in I(B)$  по формуле (6).

Оценим расстояние  $\rho_I(\mu, \nu)$ . Пусть  $f \in \text{Lip}_n(X)$  и  $\mu(f) = d_\mu(x) + f(x)$ , где  $x \in F$ . Существует точка  $x_i \in G$  такая, что  $x \in B(x_i, \varepsilon')$ . Имеют место неравенства:  $d_\mu(x) \leq \lambda_i$ ,  $f(x) - n\varepsilon' \leq f(x_i)$ . Следовательно,

$$\nu(f) \geq \lambda_i + f(x_i) \geq \mu(f) - n\varepsilon'. \quad (9)$$

В силу формулы (6)  $\nu(f) = \lambda_j + f(x_j)$  для некоторой точки  $x_j \in G$ . При этом  $\lambda_j = d_\mu(x)$ , где  $x \in B(x_j, \varepsilon')$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu(f) &= d_\mu(x) + f(x_j) \leq d_\mu(x) + f(x) + n\varepsilon' \\ &\leq \mu(f) + n\varepsilon'. \end{aligned} \quad (10)$$

Из неравенств (9) и (10) следует, что

$$|\mu(f) - \nu(f)| \leq n\varepsilon'$$

для любой функции  $f \in \text{Lip}_n(X)$ . Таким образом,  $\rho_n(\mu, \nu) \leq n\varepsilon'$  для любого  $n$ . Значит,  $\rho_I(\mu, \nu) \leq \varepsilon'$  согласно формуле (7).

Итак, доказано, что  $\rho_I(\mu, I(B)) \leq \varepsilon'$  для любого  $\varepsilon' > \varepsilon$ . Следовательно,  $\rho_I(\mu, I(B)) \leq \varepsilon$ .

**Функтор суперрасширения.** Пусть  $D - \varepsilon$ -сеть для  $A$  в  $X$  и  $\xi \in \lambda(A)$ . Рассмотрим систему  $\eta_1 = \{B(F, \varepsilon) \cap D : F \in \xi\}$  и докажем, что она является сцепленной. В самом деле, для любых множеств  $F_1, F_2 \in \xi$

$$\begin{aligned} &B(F_1, \varepsilon) \cap B(F_2, \varepsilon) \cap D \\ &\supset B(F_1 \cap F_2 \cap A, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Дополним систему  $\eta_1$  до мсс  $\eta_2$  в  $D$ , а системе  $\eta_2$  дополним до мсс  $\eta$  в  $X$ . По построению  $\eta \in \lambda(D)$  и  $B(F, \varepsilon) \cap D \in \eta$  для любого  $F \in \xi$ . Из максимальнойности  $\eta$  следует, что  $B(F, \varepsilon) \in \eta$  для любого  $F \in \xi$ , и значит,  $\rho_\lambda(\xi, \eta) \leq \varepsilon$ . Следовательно,  $\lambda(D) - \varepsilon$ -сеть для  $\lambda(A)$ .  $\square$

**Замечание.** В работе [2] предложен вариант метризации функтора  $I$  с помощью следующего семейства метрик  $\{\rho_{I2}\}$ :

$$\begin{aligned} &\rho_{I2}(\mu, \nu) \\ &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{n2^n} : f \in \text{Lip}_1(X) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\mu, \nu \in I(X)$ . В [2] показано, что  $\rho_{I2}(\mu, \nu) \leq \rho_I(\mu, \nu)$  для любых идемпотентных мер  $\mu, \nu \in I(X)$ . Следовательно, функтор  $I$  с метризацией  $\{\rho_{I2}\}$  также сохраняет  $\varepsilon$ -сети. Из теоремы 1 следует, что для размерностей квантования идемпотентных мер, определенных по метрике  $\rho_{I2}$ , справедливы неравенства:

$$\overline{D}_{I2}(\mu) \leq \overline{\dim}_B(\text{supp}(\mu)),$$

$$\underline{D}_{I2}(\mu) \leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\mu)).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Заричный М. М. Пространства и отображения идемпотентных мер // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 45–64. doi: 10.4213/im2785
2. Иванов А. В. О метризации функтора идемпотентных вероятностных мер // Труды Карельского научного центра РАН. 2021. № 6. С. 20–25. doi: 10.17076/mat1412
3. Иванов А. В. О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестник Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. № 63. С. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2
4. Иванов А. В., Фомкина О. В. О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1034
5. Песин Я. Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 404 с.
6. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 396–417.
7. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.

8. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations // *Trans. of Amer. Math. Soc.* 1999. Vol. 351, no. 11. P. 4515–4543.

9. Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M. Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // *Topology and its Applications.* 2010. Vol. 157, iss. 1. P. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040

10. Fedorchuk V. V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors // *Topology and its Applications.* 1997. Vol. 76. P. 125–150.

11. Graf S., Luschny H. Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

12. Ivanov A. V. On metric order in spaces of the form  $F(X)$  // *Topology and its Applications.* 2017. Vol. 221. P. 107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

13. Ivanov A. V. On quantization dimensions of idempotent probability measures // *Topology and its Applications.* 2022. Vol. 306. Article 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

## REFERENCES

1. Zarichnyi M. M. Spaces and maps of idempotent measures. *Izv. RAN. Ser. Mat.* 2010;74(3):45–64. doi: 10.1070/IM2010V074N03ABEH002495 (In Russ.)

2. Ivanov A. V. On metrization of the functor of idempotent probability measures. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2021;6:20–25. doi: 10.17076/mat1412 (In Russ.)

3. Ivanov A. V. On the functor of probability measures and quantization dimensions. *Vestnik Tomskogo gos. un-ta. Matematika i Mekhanika = Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2020;63:15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2 (In Russ.)

4. Ivanov A. V., Fomkina O. V. On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2019;7:5–14. doi: 10.17076/mat1034 (In Russ.)

5. Pesin Y. B. Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications. The Univ. of Chicago Press; 1997. 397 p.

6. Fedorchuk V. V. Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Proceed. USSR Acad. Sci. Ser. Math.* 1991;36(2):411–433. (In Russ.)

7. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. General topology. Core structures. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta; 1988. 252 p. (In Russ.)

8. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations. *Trans. of Amer. Math. Soc.* 1999;351(11):4515–4543.

9. Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M. Spaces of idempotent measures of compact metric spaces. *Topology and its Applications.* 2010;157(1):136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040

10. Fedorchuk V. V., Todorčević S. Cellularity of covariant functors. *Topology and its Applications.* 1997;76:125–150.

11. Graf S., Luschny H. Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag; 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

12. Ivanov A. V. On metric order in spaces of the form  $F(X)$ . *Topology and its Applications.* 2017;221:107–113. doi: 10.1016/j.topol.2017.02.051

13. Ivanov A. V. On quantization dimensions of idempotent probability measures. *Topology and its Applications.* 2022;306:107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931

Поступила в редакцию / received: 24.03.2022; принята к публикации / accepted: 11.05.2022.  
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Иванов Александр Владимирович**  
д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник

*e-mail:* ablvivanov@krc.karelia.ru

## CONTRIBUTOR:

**Ivanov, Alexander**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher

УДК 519.977

## ОЦЕНИВАНИЕ ВРЕМЕНИ УХОДА ПОПУЛЯЦИИ С УЧАСТКА

А. Н. Кириллов, А. С. Иванова\*

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910), \*a\_s\_ivanova@bk.ru*

Проведен анализ классического результата теории оптимального фуражирования – теоремы о предельном значении (the Marginal Value Theorem (MVT)) Э. Чарнова (E. Charnov), согласно которому популяция покидает участок, содержащий питательный ресурс, в такой момент времени, при котором средняя скорость потребления энергии максимальна. Как показывают наблюдения, реальное время, проведенное популяцией на участке, чаще существенно отличается от прогнозируемого в соответствии с MVT. В предлагаемой модели учитывается состояние пищевых ресурсов участка, что позволяет сформулировать новый подход для оценивания момента времени ухода популяции. При этом используется понятие пищевой привлекательности участка, ранее введенное одним из авторов. Показано наличие запаздывания по времени ухода популяции с участка по сравнению с уходом, получаемым на основе MVT, что согласуется с реальными наблюдениями.

**Ключевые слова:** теорема о предельном значении; пищевая привлекательность участка; динамическая система

Для цитирования: Кириллов А. Н., Иванова А. С. Оценивание времени ухода популяции с участка // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 37–44. doi: 10.17076/mat1564

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### A. N. Kirillov, A. S. Ivanova\*. ESTIMATING THE TIME WHEN THE POPULATION LEAVES THE PATCH

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), \*a\_s\_ivanova@bk.ru*

The article analyzes a classical result of the optimal foraging theory – E. Charnov’s Marginal Value Theorem (MVT), according to which the population leaves the patch containing a food resource at the time instant when the average rate of energy consumption is maximum. Observations show that the real time spent by the population in the patch often differs significantly from the

time predicted according to MVT. The proposed model takes into account the state of food resources in the patch, permitting to formulate a new approach to estimating the time when the population will leave the patch. In doing so, we use the concept of food attractiveness of the patch introduced previously by one of the authors. It is shown that the time of the population's departure from the patch lags behind the departure time estimated by MVT, which is consistent with real-life observations.

**Key words:** Marginal Value Theorem; food attractiveness of the patch; dynamical system

**For citation:** Kirillov A. N., Ivanova A. S. Estimating the time when the population leaves the patch. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:37–44. doi: 10.17076/mat1564

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается участок, биологическое сообщество которого состоит из двух видов – стадного вида хищников и жертв. Причем предполагается, что популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников полностью мигрирует с участка. В работе рассматривается два подхода к уходу популяции хищников с участка. Первый основан на теореме о предельном значении Э. Чарнова, которую далее для краткости будем называть принципом Э. Чарнова. Согласно принципу Э. Чарнова [8], популяция хищников покидает участок в такой момент времени, при котором средняя скорость потребления энергии максимальна. Согласно второму подходу, основанному на понятии пищевой привлекательности участка, уход популяции хищников с участка происходит в результате накопления недостатка пищевого ресурса на участке. В настоящей работе проводится сравнение упомянутых подходов.

## ПРИНЦИП Э. ЧАРНОВА

В работе [8] рассматривается местообитание хищников, состоящее из участков  $k$  типов. Предполагается, что пищевой ресурс распределен по участкам и популяция хищников мигрирует между участками. В описанной ситуации перед популяцией хищников возникают два вопроса: участки каких типов ей посетить и в какой момент времени участки покидать? В классической работе Э. Чарнова [8] дается ответ на второй вопрос.

В [8] предполагается, что пока хищники находятся на участке, скорость потребления пищи для этого участка уменьшается с течением времени, проведенного на участке. Также в [8] предполагается, что популяция хищников по-

кидает участок в тот момент времени, при котором средняя скорость потребления энергии максимальна.

В настоящей работе рассмотрим частный случай. Предположим, что местообитание хищников состоит из  $n$  участков одного типа и области, находящейся между этими участками (рис. 1).

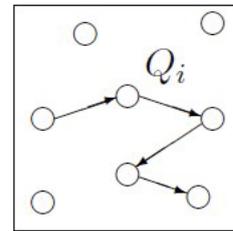


Рис. 1. Местообитание популяции хищников, где  $Q_i$  – участок местообитания ( $i = 1, \dots, n$ )

Fig. 1. Habitat of the predator population, where  $Q_i$  is the habitat patch ( $i = 1, \dots, n$ )

Следуя [8], введем обозначения:

$T$  – время, проведенное популяцией хищников на участке  $Q_i$ ;

$P$  – доля участков, которую посетила популяция хищников;

$t'$  – время, проведенное популяцией вне участков;

$E_t$  – энергия, которую расходует популяция хищников в единицу времени при перемещении между участками;

$h(T)$  – энергия, усвоенная хищниками от потребления пищевого ресурса на участке  $Q_i$  за время  $T$  без учета энергии, затраченной на поиск пищевого ресурса, причем по предположению  $h'(T) = dh/dT$  убывает при всех  $T$ ;

$E_s$  – энергия, которую расходуют хищники в единицу времени на поиск пищевого ресурса на участке  $Q_i$ ;

$g(T) = h(T) - E_s \cdot T$  – усвоенная энергия на участке  $Q_i$  за время  $T$  с учетом энергии, затраченной хищниками на поиск пищевого ресурса на участке  $Q_i$ .

Пусть  $E_n$  – средняя скорость потребления энергии. Справедлива формула

$$E_n = \frac{P \cdot g(T) - t' \cdot E_t}{t' + P \cdot T}.$$

Через  $E_n^*$  обозначим максимальную среднюю скорость потребления энергии.

**Теорема (Принцип Э. Чарнова [8]).** Хищники покидают участок  $Q_i$  в момент времени  $T$ , при котором выполняется равенство

$$\frac{\partial g(T)}{\partial T} = E_n^*. \quad (1)$$

**Обоснование теоремы [8].**

Оптимальное значение  $T$ , т. е. значение, при котором  $E_n$  максимальна, найдем, решая уравнение

$$\frac{\partial E_n}{\partial T} = 0$$

или

$$\frac{Pg'(T)(t' + PT) - (Pg(T) - t'E_t)P}{(t' + PT)^2} = 0.$$

После умножения на  $(t' + PT)^2 > 0$  получим уравнение

$$Pg'(T)(t' + PT) - (Pg(T) - t'E_t)P = 0,$$

которое может быть записано в виде

$$Pg'(T)(t' + PT) - E_n P(t' + PT) = 0$$

или

$$g'(T) = E_n.$$

Далее, так как  $g(0) = 0$  и  $g''(T) < 0$  при  $T \geq 0$  (следует из убывания  $h'(T)$  при  $T \geq 0$ ), то существует  $T = T^*$ , которое удовлетворяет (1), причем  $T^*$  – точка максимума, потому что матрица Гессе в точке  $T^*$  отрицательно определенная [12]. Итак,  $T$  оптимально, если  $g'(T) = E_n^*$ .

Таким образом, Э. Чарнов получил общее для всех систем условие мгновенного ухода популяции с участка. Чаще реальное время, проведенное популяцией на участке, существенно отличается от прогнозируемого по Э. Чарнову. Действительно, хищникам в непредсказуемой среде, возможно, потребуется дополнительное время на отлов жертв, что затрудняет определение времени, проведенного популяцией хищников на участке [11]. Принцип

Э. Чарнова является разумной отправной точкой. Стоит отметить, что при нахождении времени ухода популяции с участка важно учитывать естественную сложность системы. В связи с этим возникает задача моделирования процесса ухода популяции с участка с учетом реальных процессов в системе.

## ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

### Общий подход

Далее будем рассматривать один участок, биологическое сообщество которого состоит из  $k$  популяций, причем численность  $i$ -й популяции на участке в момент времени  $t$  обозначим через  $x_i = x_i(t)$ , где  $i = 1, \dots, k$ . Следуя Ю. Одуму [6], в правую часть дифференциального уравнения, описывающего динамику  $x_i$ , будем вводить положительные, отрицательные и нулевые члены в зависимости от воздействия, оказываемого популяциями биосообщества на  $i$ -ю популяцию,  $i = 1, \dots, k$ . Следовательно, система дифференциальных уравнений роста популяций на участке примет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_k), i = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Время жизни популяции на участке связано со структурной переменной, формальное определение которой введено в работах [3–5]. Далее структурную переменную будем называть пищевой привлекательностью. Пищевая привлекательность участка для  $i$ -й популяции характеризует накопление избытка или недостатка пищевого ресурса для данной популяции и определяется выражением вида

$$n_i = n_i(t) = \Lambda_i + \int_0^t h_i(x_1, \dots, x_k) d\tau, \quad (3)$$

где  $\Lambda_i = n_i(0)$  – постоянное положительное пороговое значение,  $h_i(x_1, \dots, x_k)$  – мгновенная скорость изменения пищевой привлекательности,  $i = 1, \dots, k$ . За счет интеграла в выражении для пищевой привлекательности решение об уходе принимается с учетом предыстории. Действительно, чтобы популяция ушла с участка из-за нехватки пищевого ресурса, она должна испытывать недостаток пищи в течение некоторого времени. Естественно считать, что  $n_i$  является критерием, по которому определяется присутствие или отсутствие  $i$ -й популяции на участке. Будем считать, что при  $n_i > \Lambda_i$   $i$ -я популяция находится на участке, при  $n_i < \Lambda_i$  – вне участка,  $i = 1, \dots, k$ .

За счет интеграла в выражении для  $n_i$  происходит накопление избытка (недостатка) пищевого ресурса, и когда накопление достигает порогового значения  $\Lambda_i$ , популяция покидает участок. Таким образом, решение об уходе популяции с участка принимается с учетом предыстории развития системы, в отличие от подхода Э. Чарнова.

Далее, проинтегрировав (3), получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{n}_i = h_i(x_1, \dots, x_k), i = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Итак, объединяя (2) и (4), получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_k), \\ \dot{n}_i &= h_i(x_1, \dots, x_k), \end{aligned} \quad (5)$$

$i = 1, \dots, k$ .

### Реализация общего подхода для двух популяций – хищников и жертв

В работе рассматривается участок, биологическое сообщество которого состоит из двух популяций – жертв и хищников. Причем популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников мигрирует с участка, если на нем недостаточное количество питательного ресурса (жертв).

Для описания динамики взаимодействующих популяций будем использовать классическую систему Лотки–Вольтерры

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \end{cases} \quad (6)$$

где  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$  – численность жертв и хищников в момент времени  $t$  соответственно;  $a$  – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников;  $b$  – коэффициент истребления хищником жертв;  $k$  – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство;  $m$  – коэффициент естественной смертности хищников; причем  $a$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $m$  считаются положительными постоянными ( $k < 1$ ).

Уравнение фазовой траектории системы (6), проходящей через точку  $M_0(x_{10}, x_{20})$ , имеет вид (см., например, [10]):

$$a \ln x_2 - bx_2 + m \ln x_1 - kbx_1 - c = 0,$$

где  $c = c(x_{10}, x_{20}) = a \ln x_{20} - bx_{20} + m \ln x_{10} - kbx_{10}$ .

Пусть  $t = 0$  – момент времени появления популяции хищников на участке. Поскольку

жертвы не покидают участок, то будем считать, что пищевая привлекательность участка для популяции жертв постоянна, т. е.

$$n_1(t) = C, \forall t \geq 0,$$

где  $C$  – положительная постоянная. Далее введем понятие пищевой привлекательности участка для популяции хищников.

Следуя идее Р. Ардити (R. Arditi) и Л. Гинзбурга (L. Ginzburg), изложенной в [7], рассмотрим функцию

$$w(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda,$$

т. е. отклонение относительной величины обеспеченности хищника ресурсом от некоторого порога  $\lambda > 0$ . Будем полагать, что при  $w(t) < 0$  появляется тенденция популяции хищников к миграции. Естественно считать, что мгновенное значение  $w(t^*) = 0$  не является определяющим для начала миграции в момент времени  $t = t^*$  при условии, что  $w(t) > 0$  при  $t \in [0, t^*)$ . Для начала миграции недостаток пищевого ресурса при  $w(t) < 0$  должен накапливаться в течение некоторого времени, что приводит к рассмотрению величины  $\int_0^t \left( \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$ . Следуя принципу «стада себялюбцев», предложенному У. Гамильтоном (W. Hamilton) в работе [9] для объяснения одновременности миграции особей популяции, введем величину  $\int_0^t x_2(\tau) \left( \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$ , учитывающую объем популяции хищников.

**Определение 1.** Пищевой привлекательностью участка для популяции хищников  $n_2(t)$  [5] называется сумма:

$$n_2(t) = \Lambda + \int_0^t x_2(\tau) \left( \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau, \quad (7)$$

где  $\Lambda = n_2(0)$  – постоянное положительное пороговое значение.

Будем полагать, что при  $n_2(t) > \Lambda$  популяция хищников находится на участке, а при  $n_2(t) < \Lambda$  – вне участка. Таким образом, критерием ухода популяции хищников с участка в данной работе является пищевая привлекательность. Отметим, что необходимость учета пороговых эффектов в моделях поведения популяций отмечена в [1, 2].

Итак, для  $n_2(t)$  будем использовать выражение (7), предлагаемое на основе концепций

Р. Ардити, Л. Гинзбурга и У. Гамильтона. За счет интеграла в выражении для пищевой привлекательности решение об уходе принимается с учетом предыстории. Действительно, чтобы популяция ушла с участка из-за нехватки пищевого ресурса, она должна испытывать недостаток пищи в течение некоторого времени. Другими словами, происходит накопление недостатка пищевого ресурса, и когда накопление достигает порогового значения, популяция покидает участок. Таким образом, уход популяции носит инерционный характер.

**Замечание 1.** В общем случае пищевую привлекательность можно ввести в виде

$$n_2(t) = \int_0^t \tilde{f}(x_2(\tau)) \tilde{g} \left( \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} \right) d\tau.$$

В данной работе функции  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  линейны (см. (7)).

Равенство (7) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{n}_2 = x_1 - \lambda x_2. \quad (8)$$

Так как  $n_1(t) = C$ , то в дальнейшем будем рассматривать и исследовать систему трех дифференциальных уравнений относительно  $x_1(t), x_2(t), n_2(t)$ . Объединяя систему (6) и уравнение (8) и обозначая  $n_2(t)$  через  $\tilde{n}(t)$ , получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \\ \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \quad (9)$$

В силу того, что в правые части первых двух уравнений системы (9) не входит  $\tilde{n}$ , в пространстве  $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}, \tilde{n} \in \mathbf{R}\}$  траектории этой системы располагаются на цилиндрических поверхностях, образующие которых параллельны оси  $O\tilde{n}$ , направляющие – траектории системы (6).

Решение системы (9) обозначим через

$$r(t, M_0) = (x_1(t, M_0), x_2(t, M_0), \tilde{n}(t, M_0)),$$

причем  $r(0, M_0) = M_0$ , где  $M_0 = (x_{10}, x_{20}, \Lambda)$ ,  $x_{10} = x_1(0), x_{20} = x_2(0), \Lambda = \tilde{n}(0)$ .

**Замечание 2.** Для плоскости  $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}, \tilde{n} = 0\}$  будем использовать обозначение  $(x_1, x_2)$ . Вместо исследования поведения траекторий системы (9) достаточно исследовать поведение проекций траекторий системы (9) на плоскость  $(x_1, x_2)$ . Причем,

так как проекцией траектории системы (9) на  $(x_1, x_2)$  является траектория системы Лотки – Вольтерры (6), достаточно исследовать поведение траекторий системы (6) на координатной плоскости  $(x_1, x_2)$ . Проекцию точки  $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  обозначим через  $M_0(x_{10}, x_{20})$ .

## СРАВНЕНИЕ ПОДХОДОВ

Получим условие на оптимальное время ухода популяции хищников с участка, используя понятие пищевой привлекательности. Вывод условия проведем аналогично тому, который проводил Э. Чарнов в работе [8]. Рассмотрим два случая.

1. Функция  $g(T)$  не учитывает объем популяции хищников и имеет вид

$$g(T) = \int_0^T \left( \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda \right) dt,$$

где  $T = T(M_0)$  – время, проведенное хищниками на участке,  $x_1(t) = x_1(t, M_0), x_2(t) = x_2(t, M_0)$  – численность жертв и хищников в момент времени  $t$  соответственно,  $\lambda$  – постоянная положительная величина. Будем считать, что  $x_1(t)/x_2(t)$  – энергия, усваиваемая хищником в единицу времени от потребления пищевого ресурса на участке без учета энергии, затраченной на поиск пищевого ресурса,  $\lambda$  – энергия, которую расходует хищник в единицу времени на поиск пищевого ресурса на участке. Таким образом, по смыслу  $g(T)$  – это энергия, усвоенная хищником на участке за время  $T$ , с учетом энергии, затраченной на поиск пищевого ресурса на участке.

В дальнейшем полагаем, что  $M_0 \in \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0\}$ .

Средняя скорость потребления энергии  $E_n(T) = E_n(T, M_0)$  вычисляется по формуле

$$E_n(T) = \frac{\int_0^T \left( \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda \right) dt}{T}.$$

Оптимальное значение  $T$ , т. е. значение, при котором  $E_n(T)$  максимальна, найдем, решая уравнение

$$E'_n(T) = 0$$

или

$$\frac{\left( \frac{x_1(T)}{x_2(T)} - \lambda \right) T - \int_0^T \left( \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda \right) dt}{T^2} = 0.$$

После умножения на  $T^2 > 0$  получим уравнение

$$\left(\frac{x_1(T)}{x_2(T)} - \lambda\right) T - \int_0^T \left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda\right) dt = 0,$$

которое после деления на  $T > 0$  запишем в виде

$$\frac{x_1(T)}{x_2(T)} - \lambda - E_n(T) = 0.$$

Далее, обозначив через  $E_n^*$  максимальное значение средней энергии, получим условие на  $T$ , при выполнении которого  $E_n(T) = E_n^*$ . Оно имеет вид

$$\frac{x_1(T)}{x_2(T)} = \lambda + E_n^*$$

или

$$x_1(T) - (\lambda + E_n^*)x_2(T) = 0,$$

где  $E_n^* \geq 0$ .

Таким образом, хищники покидают участок при  $t = T$ , где  $T$  – решение уравнения

$$x_1(T) - (\lambda + E_n^*)x_2(T) = 0.$$

Рассмотрим точку  $M_0$  (рис. 2). По Э. Чарнову, оптимальному моменту ухода соответствует точка  $M_1$  (см. рис. 2). В настоящей работе предполагается, что уход хищников происходит в момент времени  $t$  такой, что  $\tilde{n}(t) = \Lambda$  и  $\dot{\tilde{n}}(t) = x_1(t) - \lambda x_2(t) < 0$ , которому соответствует, например, точка  $M_2$  (см. рис. 2). Итак, для данной точки  $M_0$  уход хищников с участка, основанный на понятии пищевой привлекательности, происходит позже, чем уход, прогнозируемый по принципу Э. Чарнова.

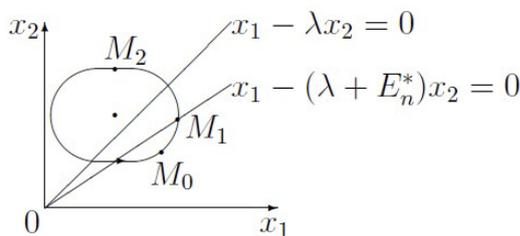


Рис. 2. В точке  $M_1$  происходит уход по принципу Э. Чарнова, в точке  $M_2$  – уход, основанный на понятии пищевой привлекательности

Fig. 2. At point  $M_1$  there is a leaving based on the Charnov's principle, at point  $M_2$  there is a leaving based on the concept of food attractiveness

2. Функция  $g(T)$  с учетом объема популяции хищников  $x_2$  примет вид

$$g(T) = \int_0^T x_2(t) \left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda\right) dt$$

или

$$g(T) = \int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt.$$

По смыслу  $g(T)$  – это энергия, усвоенная популяцией хищников на участке за время  $T$ , с учетом энергии, затраченной хищниками на поиск пищевого ресурса на участке.

Средняя скорость потребления энергии  $E_n(T) = E_n(T, M_0)$  вычисляется по формуле

$$E_n(T) = \frac{\int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt}{T}.$$

Оптимальное значение  $T$ , т. е. значение, при котором  $E_n(T)$  максимальна, найдем, решая уравнение

$$E_n'(T) = 0$$

или

$$\frac{(x_1(T) - \lambda x_2(T))T - \int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt}{T^2} = 0.$$

После умножения на  $T^2 > 0$  получим уравнение

$$(x_1(T) - \lambda x_2(T))T - \int_0^T (x_1(t) - \lambda x_2(t)) dt = 0,$$

которое после деления на  $T > 0$  может быть записано в виде

$$x_1(T) - \lambda x_2(T) - E_n(T) = 0.$$

Далее, обозначив через  $E_n^*$  максимальное значение средней энергии, получим условие на  $T$ , при выполнении которого  $E_n(T) = E_n^*$ . Оно имеет вид

$$x_1(T) - \lambda x_2(T) = E_n^*.$$

Таким образом, хищники уходят с участка при  $t = T$ , где  $T$  – решение уравнения

$$x_1(T) - \lambda x_2(T) = E_n^* \geq 0.$$

Рассмотрим точку  $M_0$  (рис. 3). Оптимальному моменту ухода по Э. Чарнову соответствует точка  $M_1$  (см. рис. 3). В данной работе предполагается, что уход хищников происходит в момент времени  $t$  такой, что  $\tilde{n}(t) = \Lambda$  и  $\dot{\tilde{n}}(t) = x_1(t) - \lambda x_2(t) < 0$ , которому соответствует, например, точка  $M_2$  (см. рис. 3).

Итак, для данной точки  $M_0$  уход хищников с участка, основанный на понятии пищевой привлекательности, происходит позже, чем уход, прогнозируемый с помощью принципа Э. Чарнова.

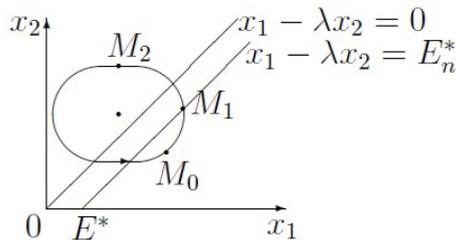


Рис. 3. В точке  $M_1$  происходит уход по принципу Э. Чарнова, в точке  $M_2$  – уход, основанный на понятии пищевой привлекательности

Fig. 3. At point  $M_1$  there is a leaving based on the Charnov's principle, at point  $M_2$  there is a leaving based on the concept of food attractiveness

Таким образом, где бы ни находилась точка  $M_0$ , при условии, что  $M_0 \in \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 > 0\}$ , прямая, соответствующая принципу Э. Чарнова, лежит ниже модельной  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ . Следовательно, уход по принципу Э. Чарнова происходит раньше, чем уход, основанный на понятии пищевой привлекательности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход к оцениванию момента времени ухода популяции с участка, содержащего питательный ресурс. В отличие от подхода Э. Чарнова, учитывается состояние участка, динамически изменяющееся во времени. Показано, что время пребывания популяции мигрирующего хищника на участке превышает величину, найденную на основе подхода Э. Чарнова. Следовательно, момент ухода популяции с участка, получаемый с помощью предложенного подхода, более согласуется с реальными наблюдениями [11].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. Т. 1. М.: Мир, 1989. 667 с.
2. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. Т. 2. М.: Мир, 1989. 477 с.
3. Кириллов А. Н. Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.

4. Кириллов А. Н. Системы с переменным фазовым пространством в моделировании процессов биологической очистки // Всероссийская школа-коллоквиум «Математические проблемы экологии»: Тезисы докладов. Душанбе, 1991. С. 44.

5. Кириллов А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6, вып. 2. С. 318–336.

6. Одум Ю. Основы экологии. М.: Мир, 1975. 746 с.

7. Arditi R., Ginzburg L. Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-Dependence // Journal of Theoretical Biology. 1989. Vol. 139. P. 311–326.

8. Charnov E. L. Optimal foraging, the marginal value theorem // Theoretical population biology. 1976. Vol. 9, no. 2. P. 129–136.

9. Hamilton W. Geometry for the selfish herd // Journal of Theoretical Biology. 1971. Vol. 31. P. 295–311.

10. Leonov G. A. Mathematical problems of control theory: an introduction. World Scientific, 2001. 172 p.

11. Nonacs P. State dependent behavior and the Marginal Value Theorem // Behavioral Ecology. 2001. Vol. 12, no. 1. P. 71–83.

12. Taha H. A. Operations Research. New York: Macmillan, 1971. 703 p.

## REFERENCES

1. Begon M., Harper J., Townsend C. Ecology. Individuals, populations and communities. Oxford: Blackwell Scientific Publ.; 1986. 876 p.

2. Begon M., Harper J., Townsend C. Ecology. Individuals, populations and communities. Oxford: Blackwell Scientific Publ.; 1986. 876 p.

3. Kirillov A. N. Dynamical systems with varying structure and dimensions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Priboroostroenie = Journal of Instrument Engineering*. 2009;52(3):23–28. (In Russ.)

4. Kirillov A. N. Systems with varying phase space in the modeling of biological purification processes. *Vserossiiskaya shkola-kollokvium. Matematicheskie problemy ekologii = All-Russian School and Colloquium. Mathematical problems in ecology*. Dushanbe; 1991. P. 44. (In Russ.)

5. Kirillov A. N. Ecological systems with varying dimensionality. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki = Surveys in Applied and Industrial Mathematics*. 1999;6(2):318–336. (In Russ.)

6. Odum E. P. Fundamentals of ecology. Third Edition, Philadelphia: W. B. Saunders Co.; 1971. 574 p.

7. *Arditi R., Ginzburg L.* Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-Dependence. *Journal of Theoretical Biology.* 1989;139:311–326.
8. *Charnov E. L.* Optimal foraging, the marginal value theorem. *Theoretical population biology.* 1976;9(2):129–136.
9. *Hamilton W.* Geometry for the selfish herd. *Journal of Theoretical Biology.* 1971;31:295–311.

10. *Leonov G. A.* Mathematical problems of control theory: An introduction. World Scientific; 2001. 172 p.
11. *Nonacs P.* State dependent behavior and the Marginal Value Theorem. *Behavioral Ecology.* 2001; 12(1):71–83.
12. *Taha H. A.* Operations Research. New York: Macmillan; 1971. 703 p.

Поступила в редакцию / received: 05.04.2022; принята к публикации / accepted: 20.05.2022.  
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Кириллов Александр Николаевич**  
д-р физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник

*e-mail: krlv1812@yandex.ru*

**Иванова Александра Сергеевна**  
канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник

*e-mail: a\_s\_ivanova@bk.ru*

#### CONTRIBUTORS:

**Kirillov, Alexander**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Leading Researcher

**Ivanova, Alexandra**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Researcher

УДК 519.179.2, 519.876.5

## МИНИМУМ И МАКСИМУМ СРЕДНЕГО РАССТОЯНИЯ В КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФАХ СО СТЕПЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

М. М. Лери

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматриваются конфигурационные графы, степени вершин которых имеют дискретное степенное распределение с фиксированным параметром. Посредством имитационного моделирования оценивается среднее расстояние (среднее арифметическое всех расстояний между всеми парами вершин графа) и рассматриваются две характеристики: минимальное среднее расстояние в графе и максимальное. В работе строятся зависимости этих характеристик от объема графа и параметра распределения степеней вершин и строится эмпирический доверительный интервал среднего расстояния в степенном конфигурационном графе.

**Ключевые слова:** конфигурационный граф; степенное распределение; среднее расстояние в графе; минимальное среднее расстояние в графе; максимальное среднее расстояние в графе; имитационное моделирование

Для цитирования: Лери М. М. Минимум и максимум среднего расстояния в конфигурационных графах со степенным распределением // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 45–50. doi: 10.17076/mat1573

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### **M. M. Leri. MINIMUM AND MAXIMUM OF THE AVERAGE DISTANCE IN POWER-LAW CONFIGURATION GRAPHS**

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The article studies configuration graphs with a discrete fixed-parameter power-law distribution of node degrees. Simulation is applied to estimate the average distance (the arithmetic mean of all distances between all pairs of graph vertices), and two characteristics are considered: the minimum and the maximum average distance in the graph. The dependences of these characteristics on the graph size and the vertex degree distribution parameter are obtained and the empirical confidence interval of the average distance in the power-law configuration graph is constructed.

Key words: configuration graph; power-law distribution; average distance in a graph; minimum average distance in a graph; maximum average distance in a graph; simulations

For citation: Leri M. M. Minimum and maximum of the average distance in power-law configuration graphs. *Trudy Kareli'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:45–50. doi: 10.17076/mat1573

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

Сложные сети коммуникаций продолжают оставаться одним из объектов, вызывающих стойкий интерес исследователей (см., например, [4, 6, 8]). Очевидно, что топология таких сетей влияет на их функционирование, а также на сохранение работоспособности в условиях внешних воздействий. В качестве математических моделей для описания сложных сетей нашли широкое применение случайные графы [4–7], разнообразие которых состоит в выборе способа определения степеней вершин и задании связей между этими вершинами. Например, для моделирования таких объектов, как телекоммуникационные сети, одной из которых является глобальная сеть Интернет, применяют случайные графы с независимыми одинаково распределенными степенями вершин с общим дискретным законом распределения [4, 5, 10].

В работе рассматриваются конфигурационные графы [1], состоящие из  $N$  вершин, степени  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  которых представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины с дискретным степенным распределением [10]:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где параметр  $\tau > 1$  является фиксированным для всех вершин графа. При построении конфигурационной модели сначала определяют степени каждой из  $N$  вершин в соответствии с распределением (1) с заранее заданным параметром  $\tau$ . Степень вершины задает число различных полуредер [10]. Все полуредера графа нумеруются в произвольном порядке. В настоящей работе сумма степеней вершин конфигурационного графа является случайной величиной. Если она нечетна, то одно полуредеро добавляется к равновероятно выбранной вершине. Далее редера графа строятся посредством попарного, равновероятного соединения всех полуредер между собой. Очевидно, что построенный таким образом граф может иметь петли, кратные редера и циклы.

Также о конфигурационных графах известно (см., например, [4, 6, 10]), что при  $\tau > 1$  число компонент связности такого графа асимптотически почти наверное больше 1.

Изучение структурных характеристик сложных сетей представляет определенный интерес в силу их значимости как при моделировании сетевой топологии, так и при изучении процессов, происходящих в таких сетях [4, 6]. Одной из важных числовых характеристик сети является расстояние между ее узлами, чему в случайном графе, как сетевой модели, соответствует расстояние между вершинами графа (см., например, [2, 7]).

В настоящей работе рассматривались две структурные характеристики: минимальное среднее расстояние в графе и максимальное среднее расстояние в графе. Под расстоянием  $d(v, u)$  между двумя произвольно выбранными вершинами  $v$  и  $u$  графа ( $v \neq u$ ) будем понимать длину цепи (число редер, соединяющих вершины  $v$  и  $u$ ) от вершины  $v$  до вершины  $u$  наименьшей длины. Если вершины  $v$  и  $u$  принадлежат разным компонентам связности, то расстояние между ними полагают равным  $\infty$ . Среднее расстояние вычисляется как среднее арифметическое всех расстояний графа:

$$dist = \frac{\sum_{v \neq u} d(v, u)}{k}, \quad (2)$$

где  $k$  – число расстояний  $d(v, u) \neq \infty$  между всеми парами вершин графа. Исследование проводилось с помощью методов имитационного моделирования и рассматривались конфигурационные графы, число вершин которых принимало следующие значения:  $10 \leq N \leq 100$  с шагом 10,  $100 \leq N \leq 1000$  с шагом 50,  $1000 \leq N \leq 7000$  с шагом 500. Значения параметра  $\tau$  изменялись от 1,1 до 3,0 с шагом 0,1. Для каждой пары значений  $(N, \tau)$  генерировалось по 100 графов. Расстояния  $d(v, u)$  между всеми парами вершин каждого графа находились посредством алгоритма Дейкстры [3]. Затем для каждого графа рассчитывалось

среднее расстояние  $dist$  по формуле (2), после чего для каждой пары значений  $(N, \tau)$  вычислялось минимальное среднее расстояние  $dist_{\min}$  как минимум из 100 средних расстояний, полученных в 100 экспериментах, и максимальное среднее расстояние  $dist_{\max}$  – максимум по 100 имитационным графам. Цель работы состояла в нахождении зависимостей этих характеристик от числа вершин графа  $N$  и параметра распределения степеней вершин  $\tau$  и построении эмпирического доверительного интервала среднего расстояния в степенном конфигурационном графе.

Для наглядности на рис. 1 графически показана зависимость экспериментальных значений среднего расстояния  $dist$  в графе от числа его вершин  $N$  и параметра распределения (1) степеней вершин  $\tau$ .

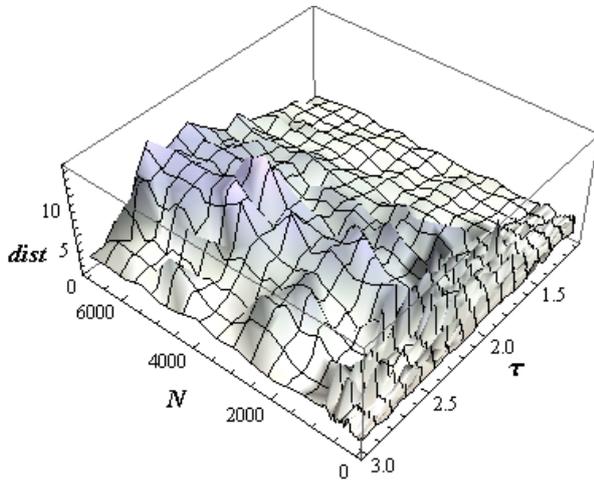


Рис. 1. Зависимость экспериментальных значений от  $N$  и  $\tau$   
Fig. 1. Dependence of experimental values of  $dist$  on  $N$  and  $\tau$

Были получены следующие регрессионные уравнения зависимостей среднего расстояния  $dist$ , а также минимума  $dist_{\min}$  и максимума  $dist_{\max}$  среднего расстояния в графе от  $N$  и  $\tau$ :

$$dist = -0,361 - (0,075 - 0,658\tau^2 + 0,205\tau^3) \ln N, \quad (3)$$

$$dist_{\min} = -0,226 - (0,567 - 1,091\tau + 0,277\tau^2) \ln N, \quad (4)$$

$$dist_{\max} = 0,432 - (0,547 - 1,103\tau^2 + 0,323\tau^3) \ln N \quad (5)$$

с коэффициентами детерминации  $R^2$  этих уравнений, равными 0,82, 0,71 и 0,74 соответственно. Здесь и далее все коэффициенты регрессионных уравнений значимы на уровне значимости 0,05, а гипотеза  $H_0 : R^2 = 0$  отвергается на 5%-м уровне значимости.

В работе [7] показано, что «типичное расстояние» (математическое ожидание расстояния) в конфигурационном графе при  $N \rightarrow \infty$  растет как  $\ln \ln N$  при  $1 < \tau < 2$  и как  $\ln N$  при  $\tau > 2$ . В настоящей работе рассматривается среднее расстояние в графах в доасимптотической области ( $N \leq 7000$ ) на интервале изменения параметра  $\tau \in (1, 3]$ , и заметим, что согласно (3)–(5) все три рассматриваемые характеристики растут логарифмически с ростом числа вершин графа  $N$ .

На рис. 2 графически представлены зависимости (3)–(5) при четырех объемах графа: 10, 100, 1000 и 7000. Сплошные линии на графиках соответствуют зависимости  $dist$  от  $\tau$ , а точечная и пунктирная – зависимостям  $dist_{\min}$  и  $dist_{\max}$  соответственно.

Минимальное и максимальное средние расстояния в графе можно рассматривать в качестве граничных значений эмпирического доверительного интервала для среднего расстояния  $dist$ . Отметим (см. рис. 2), что этот интервал расширяется примерно к середине отрезка  $1,1 \leq \tau \leq 3$ , сужаясь к его границам.

Исследование показало, что все три характеристики: среднее расстояние, минимальное и максимальное среднее расстояние в конфигурационном графе имеют максимумы на рассмотренном интервале изменения параметра  $\tau \in (1, 3]$ .

Введем следующие обозначения:

$M_{\text{mean}} = \max dist_{\text{mean}}$  – максимум среднего расстояния в графе;

$M_{\text{min}} = \max dist_{\text{min}}$  – максимум минимального среднего расстояния;

$M_{\text{max}} = \max dist_{\text{max}}$  – максимум максимального среднего расстояния.

По экспериментальным данным для каждого значения  $N$  были вычислены  $M_{\text{mean}}$ ,  $M_{\text{min}}$ ,  $M_{\text{max}}$  и соответствующие им значения  $\tau$ , при которых эти максимумы достигаются:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\text{mean}} &= \tau(\max dist_{\text{mean}}), \\ \hat{\tau}_{\text{min}} &= \tau(\max dist_{\text{min}}), \\ \hat{\tau}_{\text{max}} &= \tau(\max dist_{\text{max}}). \end{aligned}$$

Полученные результаты представлены в таблице.

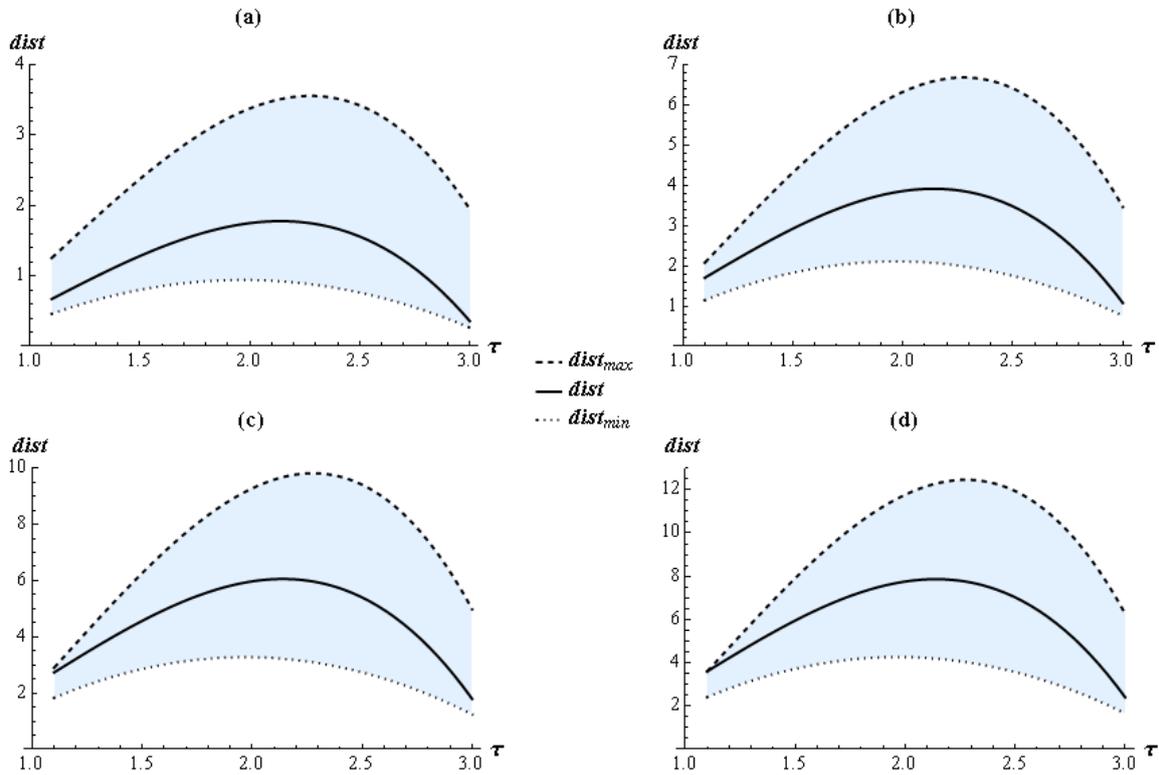


Рис. 2. Регрессионные зависимости  $dist$ ,  $dist_{\min}$  и  $dist_{\max}$  от  $\tau$  при: (a)  $N = 10$ , (b)  $N = 100$ , (c)  $N = 1000$  и (d)  $N = 7000$

Fig. 2. Regression dependencies of  $dist$ ,  $dist_{\min}$  and  $dist_{\max}$  on  $\tau$  for (a)  $N = 10$ , (b)  $N = 100$ , (c)  $N = 1000$  and (d)  $N = 7000$

Максимум среднего расстояния  $M_{\text{mean}}$  и соответствующие значения  $\hat{\tau}_{\text{mean}}$ , максимум минимального среднего расстояния  $M_{\text{min}}$  с соответствующими значениями  $\hat{\tau}_{\text{min}}$  и максимум максимального среднего расстояния  $M_{\text{max}}$  с соответствующими значениями  $\hat{\tau}_{\text{max}}$  для некоторых объемов графа  $N$

Maximum of the average distance  $M_{\text{mean}}$  and corresponding values of  $\hat{\tau}_{\text{mean}}$ , maximum of minimal average distance  $M_{\text{min}}$  with corresponding values of  $\hat{\tau}_{\text{min}}$  and maximum of maximal average distance  $M_{\text{max}}$  with corresponding values of  $\hat{\tau}_{\text{max}}$  for some graph sizes  $N$

$N$	$M_{\text{mean}}$	$\hat{\tau}_{\text{mean}}$	$M_{\text{min}}$	$\hat{\tau}_{\text{min}}$	$M_{\text{max}}$	$\hat{\tau}_{\text{max}}$
10	1,97	1,3	3,51	1,3	1,25	1,1
100	3,81	1,8	7,53	2,1	2,41	1,3
500	5,76	2,0	9,15	2,3	3,35	1,7
1000	6,65	2,3	11,81	2,3	3,45	1,9
2000	8,20	2,3	14,08	2,2	4,78	2,1
3000	8,70	2,4	13,61	2,4	5,01	2,2
4000	9,49	2,3	18,06	2,3	6,03	2,3
5000	9,81	2,3	16,59	2,6	6,03	2,1
6000	10,44	2,4	17,72	2,5	6,61	2,4
7000	10,57	2,4	16,91	2,4	7,06	2,3

Построены регрессионные зависимости максимумов среднего расстояния, минимального среднего расстояния и максимального

среднего расстояния от объема графа  $N$ :

$$M_{\text{mean}} = 1,405 \ln N - 2,519 \quad (R^2 = 0,96); \quad (6)$$

$$M_{\text{min}} = 0,807 \ln N - 1,231 \quad (R^2 = 0,91); \quad (7)$$

$$M_{\text{max}} = 2,394 \ln N - 3,806 \quad (R^2 = 0,91). \quad (8)$$

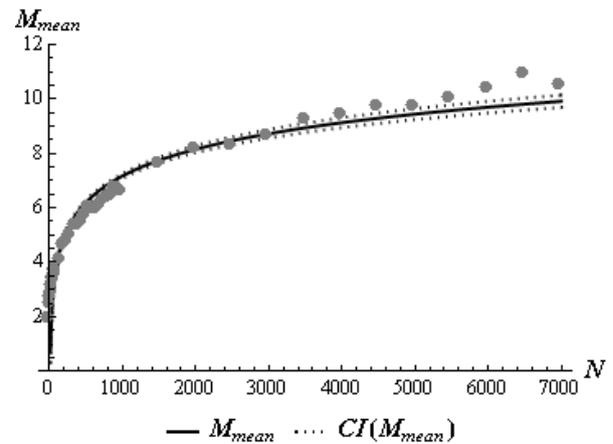


Рис. 3. Регрессионная зависимость  $M_{\text{mean}}$  от  $N$

Fig. 3. Regression dependence of  $M_{\text{mean}}$  on  $N$

На рис. 3, 4 и 5 сплошными линиями показаны регрессионные зависимости (6), (7) и

(8), точечными – доверительные интервалы этих зависимостей, серыми точками обозначены выборочные значения  $M_{\text{mean}}$ ,  $M_{\text{min}}$  и  $M_{\text{max}}$  соответственно.

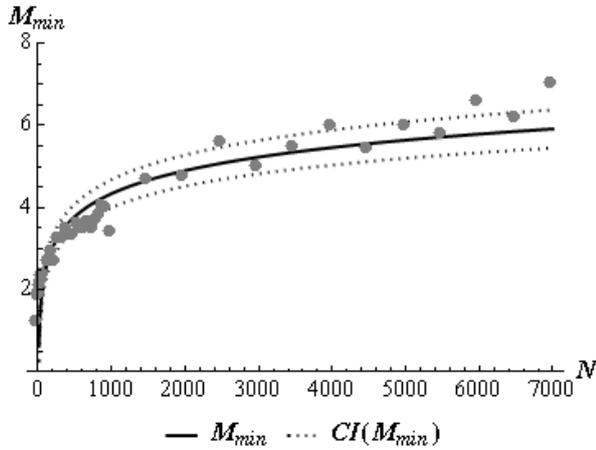


Рис. 4. Регрессионная зависимость  $M_{\text{min}}$  от  $N$   
Fig. 4. Regression dependence of  $M_{\text{min}}$  on  $N$

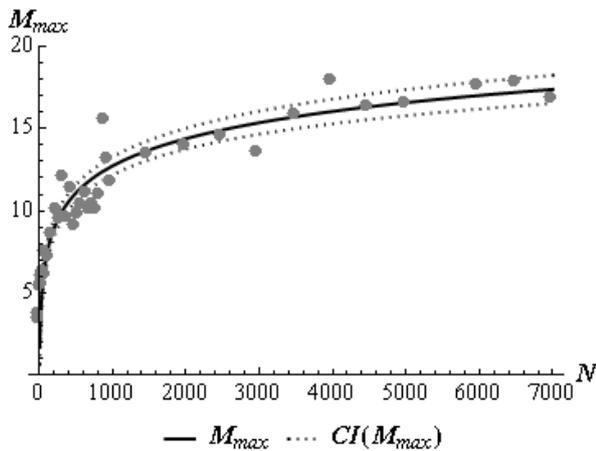


Рис. 5. Регрессионная зависимость  $M_{\text{max}}$  от  $N$   
Fig. 5. Regression dependence of  $M_{\text{max}}$  on  $N$

С увеличением размера графа максимум среднего расстояния  $M_{\text{mean}}$ , а также максимумы минимального  $M_{\text{min}}$  и максимального  $M_{\text{max}}$  среднего расстояния растут логарифмически. Что касается соответствующих значений параметра  $\tau$ , при которых эти максимумы достигаются  $\hat{\tau}_{\text{mean}}$ ,  $\hat{\tau}_{\text{min}}$  и  $\hat{\tau}_{\text{max}}$ , то при малых объемах графа они возрастают с ростом  $N$ , однако уже начиная с  $N > 1000$   $\hat{\tau}_{\text{mean}}$ ,  $\hat{\tau}_{\text{min}}$  и  $\hat{\tau}_{\text{max}}$  варьируются в пределах  $2 \leq \tau \leq 2,5$ . По уравнениям (3)–(5) можно вычислить  $\hat{\tau}_{\text{mean}} = 2,14$ ,  $\hat{\tau}_{\text{min}} = 1,97$  и  $\hat{\tau}_{\text{max}} = 2,28$ , что также укладывается в данные пределы.

Исследование показало, что в степенных конфигурационных графах среднее расстоя-

ние принимает наименьшие значения на концах интервала изменения параметра распределения степеней вершин  $\tau \in (1, 3]$ , то есть чем ближе значение параметра  $\tau$  к 1 или к 3, тем меньше среднее расстояние. Этот вывод также относится и к минимальному и максимальному среднему расстоянию в графе, причем разница между минимальным и максимальным средним расстоянием на концах интервала  $\tau \in (1, 3]$  меньше, чем в его середине, т. е. эмпирический доверительный интервал среднего расстояния  $dist$  в конфигурационном графе расширяется примерно в середине отрезка  $1 < \tau \leq 3$  и сужается к его граничным значениям. Полученные результаты также показывают, что при  $\tau < 1,5$  максимальное среднее расстояние (верхняя граница эмпирического доверительного интервала) не превышает 6 ребер, что соответствует так называемой «теории шести рукопожатий» (см., например, [4]). Чем ближе значение параметра  $\tau$  к 2,4, тем больше будет среднее расстояние в конфигурационном графе. Так, наибольших значений среднее расстояние достигает при  $2,3 \leq \tau \leq 2,4$ , не превышая при этом 10–11 ребер, минимальное среднее расстояние достигает максимума при  $\tau \approx 2$  и не превышает 7–8 ребер, а максимальное – при  $2,3 \leq \tau \leq 2,5$  (для графов с числом вершин  $N > 1000$ ), достигая длины в 18–19 ребер.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
2. Chung F., Lu L. The average distances in random graphs with given expected degrees // Proc. of the National Acad. Sci. of the USA. 2002. Vol. 99, iss. 25. P. 15879–15882. doi: 10.1073/pnas.252631999
3. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numer. Math. 1959. Vol. 1, iss. 1. P. 269–271. doi: 10.1007/BF01386390
4. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 221 p.
5. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology // Comp. Comm. Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
6. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
7. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 2. 2018. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf> (дата обращения: 20.04.2022).

8. *Newman M. E. J.* Networks. An Introduction. Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. 772 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199206650.001.0001
9. *Newman M. E. J.* Networks. Second edition. Oxford: Oxford Univ. Press, 2018. 800 p. doi: 10.1093/oso/9780198805090.001.0001
10. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

## REFERENCES

1. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Comb.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
2. *Chung F., Lu L.* The average distances in random graphs with given expected degrees. *Proc. of the National Acad. Sci. of the USA.* 2002;99(25):15879–15882. doi: 10.1073/pnas.252631999
3. *Dijkstra E. W.* A note on two problems in connexion with graphs. *Numer. Math.* 1959;1(1):269–271. doi: 10.1007/BF01386390

4. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2007. 221 p.

5. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationships of the internet topology. *Comp. Comm. Rev.* 1999;29:251–262. doi: 10.1145/316194.316229

6. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

7. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 2. 2018. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf> (accessed: 20.04.2022).

8. *Newman M. E. J.* Networks. An Introduction. Oxford: Oxford Univ. Press; 2010. 772 p. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199206650.001.0001

9. *Newman M. E. J.* Networks. Second edition. Oxford: Oxford Univ. Press; 2018. 800 p. doi: 10.1093/oso/9780198805090.001.0001

10. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004;55(1-2):3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию / received: 22.04.2022; принята к публикации / accepted: 11.05.2022.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Лери Марина Муксумовна**  
канд. техн. наук, научный сотрудник  
e-mail: [leri@krc.karelia.ru](mailto:leri@krc.karelia.ru)

## CONTRIBUTOR:

**Leri, Marina**  
Cand. Sci. (Tech.), Researcher

УДК 519.175.4

## УСЛОВИЯ СВЯЗНОСТИ ИНТЕРНЕТ-ГРАФОВ

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматривается конфигурационный граф с  $N$  вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по степенному закону, зависящему от медленно меняющейся функции. Они равны числу исходящих из вершин занумерованных полуребер. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Такие модели можно использовать для адекватного описания различных сетей коммуникаций и топологии сети Интернет. В статье исследуются условия, при выполнении которых случайный конфигурационный граф асимптотически связан при  $N \rightarrow \infty$ . Найдены также оценки скорости сходимости к нулю вероятности того, что граф не связан.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степень вершины; медленно меняющаяся функция; связность графа

Для цитирования: Павлов Ю. Л. Условия связности Интернет-графов // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 51–56. doi: 10.17076/mat1560

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### Yu. L. Pavlov. CONNECTIVITY CONDITIONS OF INTERNET GRAPHS

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

We consider a configuration graph with  $N$  vertices whose degrees are independent and identically distributed according to the power law which depends on a slowly varying function. They are equal to the number of each vertex's numbered semi-edges. The graph is constructed by joining all the semi-edges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used to adequately describe various communication networks and Internet topologies. The paper investigates the conditions under which the random configuration graph is asymptotically connected as  $N \rightarrow \infty$ . In addition, the rate at which the probability that the graph is not connected converges to zero was estimated.

Key words: configuration graph; vertex degree; slowly varying function; graph connectivity

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время случайные графы широко используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, социальные, транспортные сети, системы мобильной связи. Наиболее полный обзор соответствующих результатов можно найти, например, в [8]. Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали, что в моделях сетей степени вершин можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Обнаружено, что число узлов сети, степени которых не меньше, чем  $k$ , при достаточно больших  $k$  пропорционально  $k^{-\tau}$ , где  $\tau > 0$ . Поэтому возникла идея считать, что распределение случайной величины  $\xi$ , равной степени любой вершины моделирующей сеть графа, задается равенством

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = \frac{h(k)}{k^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

где  $h(x)$  – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Одним из наиболее часто используемых для моделирования сложных сетей видов случайных графов является конфигурационный граф, конструкция которого предложена Б. Боллобашем в [7]. Обозначим  $N$  число вершин графа. Степень каждой вершины задается случайной величиной  $\xi$  и равна числу полуредер, т. е. ребер, инцидентных этой вершине, но для которых смежные вершины еще не определены. Все полуредера различимы (занумерованы в произвольном порядке). Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуредер друг с другом для образования ребер. Сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, а в случае нечетной суммы в граф добавляется вспомогательная вершина единичной степени или вспомогательное полуредеро добавляется к равновероятно выбранной вершине. В работе [11] отмечалось, что такие вспомогательные элементы, в случае их появления, не влияют на асимптотическое поведение основных числовых характеристик графов при  $N \rightarrow \infty$ , поэтому далее мы будем учитывать только основные полуредера. Заметим также, что в таких графах возможно появление пе-

тель и кратных ребер. Поскольку с помощью конфигурационных моделей нередко описывают топологию сети Интернет, эти графы иногда называют Интернет-графами (см., например, [10]).

Обозначим

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В теореме 3.15 из [9] рассматривались условия, при выполнении которых конфигурационный граф является асимптотически связным. Доказано, что если  $p_1 = p_2 = 0$ , то с вероятностью, стремящейся к единице, т. е. асимптотически достоверно, граф состоит из единственной компоненты связности, содержащей все  $N$  вершин. Дана также оценка скорости сходимости вероятности связности к единице. Обозначим  $A_N$  событие, состоящее в том, что граф не связан. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/N).$$

В [8] показано, что если параметр  $\tau$  распределения (1) принадлежит интервалу  $(1, 2)$ , то граф содержит единственную компоненту связности, объем которой пропорционален числу вершин графа при  $N \rightarrow \infty$ , а объемы других компонент бесконечно малы по сравнению с наибольшей компонентой. Такая максимальная компонента связности получила название гигантской.

В статье [6] получены результаты об асимптотической связности конфигурационных графов, в которых распределение (2) степеней вершин обладает свойством:

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^v}, \quad (3)$$

где  $d > 0$ ,  $g > 1$ ,  $v \geq 0$ . Найдены условия асимптотической связности в случае  $p_2 > 0$ , включая и случай  $p_1 > 0$ , и даны оценки скорости сходимости  $\mathbf{P}\{A_N\}$  к нулю. В частности, показано, что граф асимптотически связан, если  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$  и  $1 < g < 3/2$ .

Недавно появились работы, в которых обсуждаются сети с распределением (1), но не с фиксированным  $\tau$ , а в случае  $\tau = \tau(N)$ . В [5] рассматривалась модель, предложенная в [11], но с изменяющимся параметром. В этой модели

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Из (4) следует, что при  $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{\tau}{k^{\tau+1}},$$

поэтому (4) обладает свойством (3), если  $d = \tau$ ,  $g = \tau - 1$ ,  $v = 0$ . В [5] найдены условия асимптотической связности графа в случае  $\tau \uparrow 1/2$ .

В последнее время разворачиваются исследования предельного поведения конфигурационных графов с наиболее общим степенным распределением степеней вершин:

$$p_k = \frac{h(k)}{k^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau > 1 \quad (5)$$

и с неизвестной медленно меняющейся на бесконечности функцией  $h(x)$ . Впервые степенная структура моделей с распределением (5) рассматривалась в [4].

В настоящей статье будут найдены условия асимптотической связности конфигурационного графа с распределением (5) степеней вершин. При этом будем считать, что  $h(x)$  является медленно меняющейся на бесконечности функцией с остаточным членом. Приведем определение такой функции, следуя работе [1].

**Определение 1.** Пусть положительная возрастающая функция  $f(x)$  задана на полуоси  $[0, \infty)$  и обладает следующими свойствами:

- 1)  $f(x) \rightarrow \infty$ , если  $x \rightarrow \infty$ ;
- 2) для некоторого положительного числа  $\theta$  и некоторого положительного  $X$  функция  $x^{-\theta}f(x)$  не возрастает на полуоси  $[X, \infty)$ .

Положительная измеримая функция  $h(x)$ , определенная на  $[0, \infty)$ , называется *медленно меняющейся с остаточным членом*, если для каждого  $\lambda > 0$  при  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{h(\lambda x)}{h(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{f(x)}\right). \quad (6)$$

Примером медленно меняющейся функции с остаточным членом может служить любая положительная степень функции  $1/\ln x$ . Будем также считать для простоты, что максимальный шаг распределения (5) равен единице.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже доказана теорема, в которой найдены условия асимптотической связности рассматриваемого случайного конфигурационного графа. Далее термин медленно меняющейся функции с остаточным членом будем понимать чуть шире, чем в приведенном выше

определении, допуская, что при  $x \in [0, 1]$  возможно равенство  $h(x) = 0$ . Нетрудно убедиться, что результаты статьи [5] являются частными случаями доказанных ниже утверждений.

Введем стремящуюся к бесконечности последовательность  $B_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , которая при  $N \rightarrow \infty$  удовлетворяет соотношению

$$B_N \sim (Nh(B_N))^{1/(\tau-1)}. \quad (7)$$

**Теорема.** Пусть  $N \rightarrow \infty$  и  $h(2) > 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если  $h(1) = 0$  и  $1 < \tau < 2$ , то  $\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/(N^{2-\tau}h(B_N))^{1/(\tau-1)})$ .
2. Если  $h(1) = 0$ ,  $\tau = 2$ , то  $\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/(h(B_N) \ln N))$ .
3. Если  $h(1) > 0$ ,  $1 < \tau < 3/2$ , то  $\mathbf{P}\{A_N\} = O(1/(N^{3-2\tau}h(B_N))^{1/(\tau-1)})$ .

*Доказательство.* Будем следовать доказательству теоремы из статьи [6] и использовать ту же систему обозначений. Предположим, что рассматриваемый граф не связан. Разобьем множество вершин на два непустых непересекающихся подмножества  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega}$  таких, что не существует ребер, соединяющих вершины из  $\Omega$  с вершинами из  $\tilde{\Omega}$ . Мы можем считать, что число вершин в множестве  $\Omega$  не превосходит  $N/2$ . Обозначим  $\Lambda$  множество всех таких возможных разбиений множества вершин графа на два подмножества. Пусть случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_N$  независимы и равны степеням вершин  $1, \dots, N$  соответственно и пусть  $\zeta_N$  равно сумме этих случайных величин:

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N. \quad (8)$$

Обозначим

$$\zeta_N(\Omega) = \sum_{i \in \Omega} \xi_i, \quad \zeta_N(\tilde{\Omega}) = \sum_{i \in \tilde{\Omega}} \xi_i. \quad (9)$$

Легко видеть, что общее число различных графов с суммой степеней вершин  $\zeta_N$  равно  $(\zeta_N - 1)!!$ . Поскольку полуредра соединяются равномерно,

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq \sum_{\Omega \in \Lambda} \frac{(\zeta_N(\Omega) - 1)!! (\zeta_N(\tilde{\Omega}) - 1)!!}{(\zeta_N - 1)!!}.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq \sum_{\Omega \in \Lambda} \prod_{j=1}^{\zeta_N(\Omega)/2} \frac{\zeta_N(\Omega) - 2j + 1}{\zeta_N - 2j + 1}. \quad (10)$$

Пусть  $F(x)$  означает функцию распределения случайной величины  $\xi$ . Очевидно, что при  $x < 0$

$$F(x) = 0. \quad (11)$$

Из (5) следует, что при  $x > 0$

$$F(x) = 1 - \sum_{k \geq x} \frac{h(k)}{k^\tau}. \quad (12)$$

Функция  $h(x)$  обладает свойством (6), поэтому из первого утверждения леммы А.1.1 статьи [1] вытекает, что существуют не зависящие от  $\lambda$  и  $x$  числа  $M$  и  $Z$  такие, что для всех  $x \geq Z$  и  $\lambda \in [1, \infty)$

$$\left| \frac{h(\lambda x)}{h(x)} - 1 \right| \leq \frac{M\lambda}{f(x)}.$$

Отсюда и из (12) нетрудно получить, что при  $x \rightarrow \infty$

$$F(x) = 1 - h(x)(1 + o(1)) \sum_{k \geq x} \frac{1}{k^\tau}.$$

Заменяя суммирование интегрированием, видим, что

$$F(x) = 1 - \frac{h(x)(1 + o(1))}{(\tau - 1)x^{\tau-1}}.$$

Отсюда и из (11) следует, что  $F(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.6.1 из [2] и, значит, принадлежит области притяжения устойчивого закона  $G(x)$  с показателем  $\tau - 1$ . Поэтому из теоремы 2.2.2 [2] вытекает, что логарифм характеристической функции  $\varphi_G(t)$  устойчивого закона  $G(x)$  при  $1 < \tau < 2$  представим в виде:

$$\ln \varphi_G(x) = i\gamma t - c|t|^{\tau-1} \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau-1)}{2} \right), \quad (13)$$

где  $\gamma$  – некоторая константа, при этом в доказательстве теоремы 2.2.2 [2] показано, что

$$c = -\Gamma(1 - \tau) \cos \frac{\pi(\tau-1)}{2}, \quad (14)$$

$\Gamma(x)$  – гамма-функция. Если  $\tau = 2$ , то для нахождения  $\ln \varphi_G(x)$  используем теорему 5.7.3 из [3], откуда

$$\ln \varphi_G(x) = i\gamma t - \frac{\pi}{2}|t| \left( 1 + i \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln |t| \right). \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что константу  $\gamma$  в (13) и (15) можно сделать равной нулю, выбирая соответствующим образом нормирующие постоянные из определения области притяжения закона распределения.

Теперь из (13), (15) и теоремы 2.6.5 [2] следует, что в окрестности нуля характеристическая функция  $\varphi(t)$  случайной величины  $\xi$  имеет вид:

$$\varphi(t) = \exp \left\{ -c|t|^{\tau-1} \tilde{h}(t) \left( 1 - i \frac{t}{|t|} w(t, \tau) \right) \right\}, \quad (16)$$

где  $c$  определено в (14) при  $1 < \tau < 2$  и  $c = \pi/2$ , если  $\tau = 2$ ,

$$w(t, \tau) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau-1)}{2}, & 1 < \tau < 2; \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t|, & \tau = 2, \end{cases}$$

а  $\tilde{h}(t)$  – медленно меняющаяся функция. В ходе доказательства теоремы 2.6.5 [2] показано, что

$$\tilde{h}(t) = h(1/|t|). \quad (17)$$

Пусть  $1 < \tau < 2$ . Тогда из (7), (16), (17) следует, что при любом фиксированном  $t \neq 0$

$$\varphi^N \left( \frac{t}{B_N} \right) \rightarrow \exp \left\{ -c|t|^{\tau-1} \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(\tau-1)}{2} \right) \right\}. \quad (18)$$

Согласно (8) и теореме 4.2.1 из [2], соотношение (18) означает, что имеет место локальное сближение распределений сумм  $\zeta_N$  с устойчивым законом с показателем  $\tau - 1$ . Отсюда следует, что для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  и достаточно большого  $A$

$$\mathbf{P}\{1/A \leq \zeta_N/B_N \leq A\} > 1 - \varepsilon. \quad (19)$$

Положим,

$$u(x) = \prod_{j=1}^x \frac{2x-2j+1}{\zeta_N-2j+1} = \prod_{j=0}^{x-1} \frac{2j+1}{\zeta_N-2j-1}. \quad (20)$$

Пусть  $h(1) = 0$ . Поскольку максимальный шаг распределения (5) равен единице, из (9) и (19) вытекает, что

$$\zeta_N(\Omega) > 2|\Omega|, \quad (21)$$

где  $|\Omega|$  – число вершин в множестве  $\Omega$ . Поскольку

$$\frac{u(s+1)}{u(s)} = \frac{2s+1}{\zeta_N-2s-1}, \quad (22)$$

эта величина растет вместе с  $s$ . Кроме того, при  $s \leq \zeta_N/4 - 1$

$$\frac{2s+1}{\zeta_N-2s-1} < 1. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что это неравенство остается в силе и при  $\zeta_N/4 - 1 < s < \zeta_N(\Omega)/2$ . Действительно, из (19) следует, что в этом случае

$|\Omega| \rightarrow \infty$  и оценка вида (19) сохраняет силу при замене  $N$  на  $\Omega$  в (7), а также  $B_N$  на  $B_{|\Omega|}$  и  $\zeta_N$  на  $\zeta_N(\Omega)$  в (19).

Случай  $\tau = 2$  рассмотрим аналогично. Из (16), (17) прямыми вычислениями получаем, что при любом фиксированном  $t \neq 0$

$$\varphi^N \left( \frac{t}{B_N} \right) \exp\{-it \ln B_N\} \rightarrow \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}|t| \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \ln |t| \right) \right\}.$$

Отсюда и из теоремы 4.2.1 [2] следует, что

$$\zeta_N \sim B_N \ln B_N, \quad (24)$$

и, как и выше, приходим к (23). Из (22), (23) видим, что при достаточно больших  $N$  и  $s < \zeta_N(\Omega)/2$  функция  $u(s)$  убывает. Тогда из (10), (20), (21) находим, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq \sum_{\Omega \in \Lambda} u(|\Omega|) = \sum_{s=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} R_N(s), \quad (25)$$

где

$$R_N(s) = \binom{N}{s} u(s). \quad (26)$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$\frac{R_N(s+1)}{R_N(s)} = \frac{(N-s)(2s+1)}{(s+1)(\zeta_N - 2s - 1)}. \quad (27)$$

Используя (7), (19) и (24), из (27) нетрудно получить, что существует такое положительное число  $q < 1$ , что

$$\frac{R_N(s+1)}{R_N(s)} \leq q. \quad (28)$$

Если  $2 \leq s \leq \lfloor N/2 \rfloor - 1$ , то из (28)

$$R_N(s+1) = R_N(2) \prod_{j=2}^s \frac{R_N(j+1)}{R_N(j)} \leq R_N(2) q^{s-1}$$

и, согласно (25),

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq R_N(1) + R_N(2)(1-q)^{-1}. \quad (29)$$

Если  $1 < \tau < 2$ , то из (19), (20), (26) видим, что

$$\begin{aligned} R_N(1) &= O(N/B_N), \\ R_N(2) &= O((N/B_N)^2), \end{aligned} \quad (30)$$

а если  $\tau = 2$ , то (7), (20), (24), (26) дают нам

$$\begin{aligned} R_N(1) &= O(1/(h(B_N) \ln N)), \\ R_N(2) &= O(1/(h(B_N) \ln N)^2). \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь первое и второе утверждения теоремы очевидным образом следуют из (29)–(31).

Осталось рассмотреть случай  $h(1) > 0$ ,  $1 < \tau < 3/2$ . В этом случае  $\zeta_N(\Omega) > |\Omega|$ . Обозначим

$$R_N^{(1)}(s) = \binom{N}{s} u \left( \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \right). \quad (32)$$

Рассуждая как и выше, находим, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq \sum_{s=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} R_N^{(1)}(s). \quad (33)$$

Проводя элементарные вычисления (см. также доказательство теоремы в [6]) отдельно для четных и нечетных  $s$ , получаем, что при достаточно больших  $N$

$$\frac{R_N^{(1)}(s+2)}{R_N^{(1)}(s)} < q, \quad (34)$$

где  $q$  – сколь угодно малое положительное число. Тогда из (33) и (34) видим, что

$$\mathbf{P}\{A_N\} \leq R_N^{(1)}(1) + R_N^{(1)}(2) + R_N^{(1)}(3)$$

$$+ R_N^{(1)}(2) \prod_{j \geq 1} \frac{R_N^{(1)}(2j+2)}{R_N^{(1)}(2j)}$$

$$+ R_N^{(1)}(3) \prod_{j \geq 2} \frac{R_N^{(1)}(2j+1)}{R_N^{(1)}(2j-1)}$$

$$\leq R_N^{(1)}(1) + (R_N^{(1)}(2) + R_N^{(1)}(3))(1-q)^{-1}.$$

Для завершения доказательства третьего утверждения теоремы осталось только заметить с помощью (19), (20), (32) и элементарных свойств медленно меняющихся функций, что

$$R_N^{(1)}(1) = O(1/(N^{2-\tau} h(B_N))^{1/(\tau-1)}),$$

$$R_N^{(1)}(2) = O(1/(N^{3-2\tau} h(B_N))^{1/(\tau-1)}),$$

$$R_N^{(1)}(3) = O(1/(N^{5-3\tau} h(B_N))^{1/(\tau-1)}).$$

□

## ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. М., Шиганов И. С. Дополнения // Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. С. 100–131.
2. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
3. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 424 с.

4. Павлов Ю. Л. Об асимптотике степенной структуры условных Интернет-графов // Труды Карельского научного центра РАН. 2020. № 7. С. 77–83. doi: 10.17076/mat1202
5. Павлов Ю. Л. Об условии связности Интернет-графа с изменяющимся параметром распределения степеней вершин // Труды Карельского научного центра РАН. 2020. № 7. С. 84–88. doi: 10.17076/mat1170
6. Павлов Ю. Л. О связности конфигурационных графов // Дискретная математика. 2019. Т. 31, вып. 2. С. 115–123. doi: 10.4213/dm1008
7. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
8. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
9. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 2. 2021. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf> (дата обращения: 15.03.2022).
10. Reittu H., Norros I. On the effect of very large nodes in Internet graphs // GLOBECOM'02 IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105
11. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

## REFERENCES

1. Zolotarev V. M., Shiganov I. S. Supplement. Seneta E. Regularly Varying Functions. Moscow: Nauka; 1985. P. 100–131. (In Russ.)

2. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters-Noordho; 1971. 443 p.

3. Lukacs E. Characteristic functions. London: Griffin; 1970. 358 p.

4. Pavlov Yu. L. On the asymptotics of the degree structure of conditional Internet graphs. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2020;7:77–83. doi: 10.17076/mat1202 (In Russ.)

5. Pavlov Yu. L. On the connectivity condition for an Internet graph with a variable parameter of the vertex degree distribution. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2020;7:84–88. doi: 10.17076/mat1170 (In Russ.)

6. Pavlov Yu. L. On the connectivity of configuration graphs. *Discrete Math. Appl.* 2021;30(1):43–49. doi: 10.1515/dma-2021-0004

7. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Comb.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

8. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. One. Cambridge: Cambridge University Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

9. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 2. 2021. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf> (accessed: 15.03.2022).

10. Reittu H., Norros I. On the effect of very large nodes in Internet graphs. *GLOBECOM'02 IEEE.* 2002:2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

11. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004;55(1-2):3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию / received: 17.03.2022; принята к публикации / accepted: 26.04.2022.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Павлов Юрий Леонидович**  
д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: [pavlov@krc.karelia.ru](mailto:pavlov@krc.karelia.ru)

## CONTRIBUTOR:

**Pavlov, Yury**  
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher

УДК 517.938, 517.977

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ ПО УРОВНЯМ ЭФФЕКТИВНОСТИ

А. М. Сазонов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,  
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)*

В статье рассмотрена задача оптимального управления инвестиционной политикой с шумпетеровской динамикой фондов с двумя уровнями эффективности на бесконечном времени. На основе принципа максимума Понтрягина найдены оптимальные в смысле максимизации прибыли объемы инвестиций для каждого уровня. Проведен качественный анализ динамической системы с произвольным переключением управления. Для каждого значения оптимального управления показана глобальная устойчивость соответствующего положения равновесия. Найдено инвариантное множество для исследуемой системы с переменной структурой. Получена оценка для момента времени, после которого прибыль будет сколь угодно мала. Поставлена задача о выживаемости экономической системы для двух и произвольного числа уровней эффективности. Найдены допустимые управления, обеспечивающие выживаемость.

**Ключевые слова:** управление; динамические системы; шумпетеровская динамика

Для цитирования: Сазонов А. М. Об оптимальном управлении распределением ресурсов по уровням эффективности // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 57–66. doi: 10.17076/mat1562

**Финансирование.** Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

### A. M. Sazonov. ABOUT OPTIMAL CONTROL OF RESOURCE ALLOCATION BY EFFICIENCY LEVELS

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

The paper addresses the problem of the optimal control of the investment policy with Schumpeterian dynamics of capital stocks with two efficiency levels over infinite time. Pontryagin's maximum principle was used to find the investment volumes that are optimal for maximizing profit for each level. Qualitative analysis of the dynamical system with a variable structure characterized by optimal control values was carried out. The corresponding equilibrium for each optimal control value was proved to possess global stability. The invariant set for the investigated

system with variable structure was identified. The time instant after which the profit will be arbitrarily small was estimated. The viability problem for the economic system with two and an arbitrary number of efficiency levels was formulated. The admissible controls that ensure viability were identified.

**Key words:** control; dynamic systems; Schumpeterian dynamics

**For citation:** Sazonov A. M. About optimal control of resources distribution over efficiency levels. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:57–66. doi: 10.17076/mat1562

**Funding.** The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

## ВВЕДЕНИЕ

В начале XX века Й. Шумпетер предложил концепцию эндогенного экономического роста, в основе которого лежат два процесса: создание новых технологий – инновации и их заимствование – имитации. Математическая формализация теории эндогенного экономического роста предложена в работах [2, 4–6].

В статье А. А. Шананина и Г. М. Хенкина [6] описана модель динамики мощностей следующего вида:

$$\dot{M}_i = (1 - \varphi_i)\lambda_i M_i + \varphi_{i-1}\lambda_{i-1}M_{i-1}, \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, \dots$  с граничными и начальными условиями

$$M_0(t) \equiv 0, M_i(0) \geq 0, \sum_{i=1}^N M_i(0) > 0, \quad (2)$$

$$M_i(0) = 0 \text{ при } i > N.$$

Здесь  $M_i(t)$  – объем мощностей предприятий на уровне  $i$ ,  $\varphi_i$  – доля средств, которую предприятия на уровне  $i$  тратят на развитие производства на уровне  $i+1$ ,  $\lambda_i$  – удельная прибыль, получаемая на уровне  $i$  (прибыль от единицы товара в единицу времени),  $i = 1, \dots, N$ . При

этом  $\varphi_i(t) = \alpha + \beta(1 - \frac{\sum_{k=0}^i M_k}{\sum_{k=0}^{\infty} M_k})$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  –

константы, обозначающие интенсивность инноваций и имитаций соответственно.

В представленной модели уровни различаются прибылью, получаемой за единицу времени от единичной мощности. Переход предприятий с уровня  $i$  возможен только на следующий более высокий уровень  $i+1$ . При этом число предприятий, переходящих за единицу времени с уровня  $i$  на уровень  $i+1$ , пропорционально количеству предприятий на уровне  $i$  в данный момент времени. Первое слагаемое  $(1 - \varphi_i)\lambda_i M_i$  характеризует экономический

рост на уровне  $i$  за счет производства на данном уровне, а второе  $\varphi_{i-1}\lambda_{i-1}M_{i-1}$  характеризует вклад с предыдущего уровня  $i-1$ . В работе [6] был получен вид предельного распределения мощностей.

В настоящей статье предлагается оптимальная в некотором смысле модель шумпетеровской динамики. При этом стимулом для построения предлагаемой модели послужила работа С. М. Асеева и А. В. Кряжковского [1], в которой предложена модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды вида

$$\dot{x} = u - \delta x, u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1, 0 \leq u \leq u_{max}\}, \quad (3)$$

$$x(0) = x_0, \quad (4)$$

$$J(x, u) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} [ax(t) - bx^2(t) - cu(t)] dt \rightarrow max, \quad (5)$$

где  $x$  – основные производственные фонды (капитал), управление  $u(t)$  – количество единиц оборудования, приобретаемого в единицу времени, следующую за моментом времени  $t$  (инвестиционная политика), постоянные  $\delta > 0$  – удельная скорость износа оборудования,  $\rho > 0$  – коэффициент дисконтирования,  $a = \bar{\pi} - \zeta > 0$ , где  $\bar{\pi} > 0$  – максимальная цена, по которой товар может быть продан на рынке,  $\zeta > 0$  – стоимость производства единицы продукта, величина  $b > 0$  такая, что  $\frac{\bar{\pi}}{b}$  – максимальный доступный объем рынка,  $c > 0$  – стоимость единицы капитала,  $x_0 > 0$  – начальное состояние,  $u_{max} > 0$  – максимально возможный объем инвестиций.

В работе [1] на основе принципа максимума Понтрягина было построено оптимальное управление в задаче (3)–(5).

В настоящей работе представлено развитие модели (3)–(5) с шумпетеровской динамикой вида (1). Рассматривается экономическая система из двух уровней эффективности такая,

что часть средств на каждом уровне используется для производства на текущем уровне, а другая часть – для развития производства на следующем уровне. При этом предполагается, что часть средств на втором уровне эффективности, используемая для развития производства на следующем уровне, накапливается для создания нового уровня эффективности. Эти средства могут вкладываться в научные разработки или накапливаться для формирования начального капитала на новом уровне эффективности.

### МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ОСНОВНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФОНДЫ ПРЕДПРИЯТИЯ С ШУМПЕТЕРОВСКОЙ ДИНАМИКОЙ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления инвестиционной политикой с шумпетеровской динамикой следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 - \delta_1 x_1 + (1 - \varphi_1)x_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 - \delta_2 x_2 + (1 - \varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1, \end{cases} \quad (6)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in U = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_i \geq 0, y_1 + y_2 \leq u_{max}, i = 1, 2\}, \quad (8)$$

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$J(x, u) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left[ \sum_{i=1}^2 a_i(1 - \varphi_i)x_i(t) - b_i(1 - \varphi_i)^2 x_i^2(t) - c_i u_i(t) \right] dt \rightarrow \max. \quad (10)$$

Здесь  $x_i$  – основные производственные фонды (капитал) на уровне  $i$ ; управления  $u_i(t)$  – количество единиц оборудования, приобретаемого в единицу времени, следующую за моментом времени  $t$  на уровне  $i$  (инвестиционная политика). Функции  $u_i$  измеримы (по Лебегу). Заданные постоянные:  $\delta_i > 0$  – удельная скорость износа оборудования на уровне  $i$ ;  $\rho > 0$  – коэффициент дисконтирования;  $a_i = \bar{\pi}_i - \zeta > 0$ , где  $\bar{\pi}_i > 0$  – максимальная цена, по которой товар может быть продан на рынке, для уровня  $i$ ;  $\zeta_i > 0$  – стоимость производства единицы продукта на уровне  $i$ ; величины  $b_i > 0$  такие, что  $\frac{\bar{\pi}_i}{b}$  – максимальный доступный объем рынка для уровня  $i$ ;  $\varphi_i$  – доля средств на уровне  $i$ , используемая для развития производства на следующем уровне  $i + 1$ ;  $c_i > 0$  – стоимость единицы капитала на уровне  $i$ ;  $x_i^0 > 0$  – начальный объем фондов на уровне  $i$ ;  $u_{max} > 0$  –

максимально возможный объем инвестиций. Обозначим  $f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u))$  вектор правых частей системы (6),  $g(x, u) = \sum_{i=1}^2 (a_i(1 - \varphi_i)x_i(t) - b_i(1 - \varphi_i)^2 x_i^2(t) - c_i u_i(t))$ , где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $u = (u_1, u_2)$ .

**Замечание 1.** В отличие от модели (1)–(2) в данной работе величины  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ , полагаются постоянными.

**Замечание 2.** Величины  $\varphi_i$ ,  $\delta_i$  в модели (6)–(10) в данной работе полагаются такими, что  $\delta_i > 1 - \varphi_i$ , поскольку в случае  $\delta_i < 1 - \varphi_i$  имеем  $x_i(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , что противоречит экономической интерпретации  $x_i(t)$ , а случай  $\delta_i = 1 - \varphi_i$  не имеет смысла рассматривать по причине его аналитической очевидности. С экономической точки зрения это означает, что скорость износа оборудования  $\delta_i$  на каждом уровне превышает скорость роста фондов за счет внутренних резервов  $1 - \varphi_i$ . В рассматриваемой задаче это ограничение экономически обосновано, поскольку инвестиции из внешних источников,  $u_i$ , необходимы в том случае, когда собственные средства не покрывают износ. В противном случае экономический рост обеспечивается за счет внутренних резервов, и вследствие этого привлечение дополнительных внешних вложений требуется только для значительного расширения производства. Зачастую привлечение внешних вложений может быть убыточно для развития предприятия, если, например, речь идет о банковском кредите, который требует выплаты процентов. В данной статье задача расширения производства не рассматривается.

Для решения поставленной задачи (6)–(10) используется принцип максимума Понтрягина.

Проверим выполнение достаточных условий существования оптимального управления, полученных в [1].

**Условие 1 (A1).** Существует такое  $C_0 > 0$ , что скалярное произведение

$$(x, f(x, u)) \leq C_0(1 + \|x\|^2)$$

для любых  $x, u$ .

Покажем, что это верно. Рассмотрим скалярное произведение

$$(x, f(x, u)) = x_1 u_1 - \delta_1 x_1^2 + (1 - \varphi_1)x_1^2 + x_2 u_2 - \delta_2 x_2^2 + (1 - \varphi_2)x_2^2 + \varphi_1 x_1 x_2.$$

Поскольку  $u_1 + u_2 \leq u_{max}$ , имеем следующую верхнюю оценку для скалярного произведения  $(x, f)$ :

$$(x, f(x, u)) \leq u_{max}x_1 + x_1^2 + (1 - \delta_1 - \varphi_1)x_1^2 + u_{max}x_2 + (1 - \delta_2 - \varphi_2)x_2^2 + \varphi_1x_1x_2.$$

Рассмотрим евклидову метрику  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ . Вычтем из  $C_0(1 + \|x\|^2)$  полученную верхнюю оценку для  $(x, f)$ .

$$\begin{aligned} C_0(1 + \|x\|^2) - u_{max}x_1x_2 + (1 - \delta_1 - \varphi_1)x_1^2 + u_{max}x_2 + (1 - \delta_2 - \varphi_2)x_2^2 + \varphi_1x_1x_2 \\ = (C_0 + \delta_1 + \varphi_1 - 1)x_1^2 - u_{max}x_1 + (C_0 + \delta_2 + \varphi_2 - 1)x_2^2 - u_{max}x_2 + C_0 - \varphi_1x_1x_2. \end{aligned}$$

Выделим полные квадраты

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi_1}{2}x_1 - x_2\right)^2 + \left(x_1\sqrt{C_0 + \varphi_1 + \delta_1 - \frac{\varphi_1^2}{4}} - 1 - \frac{u_{max}}{2\sqrt{C_0 + \varphi_1 + \delta_1 - \frac{\varphi_1^2}{4}}}\right)^2 \\ + \left(x_2\sqrt{C_0 + \varphi_2 + \delta_2 - 2} - \frac{u_{max}}{2\sqrt{C_0 + \varphi_2 + \delta_2 - 2}}\right)^2 + C_0 - \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0 + \varphi_1 + \delta_1 - \frac{\varphi_1^2}{4})}\right) - \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0 + \varphi_2 + \delta_2 - 2)}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при

$$C_0 \geq \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0 + \frac{\varphi_1^2}{4} + \delta_1 - 1)}\right) + \left(\frac{u_{max}^2}{4(C_0 + \varphi_2 + \delta_2 - 2)}\right)$$

условие (A1) выполняется. Очевидно, что если  $C_0$  достаточно большое, то данное неравенство и, следовательно, условие (A1) выполнено. Рассмотрим в качестве примера  $C_0 = u_{max}^2 + 2$ . Ясно, что  $u_{max}^2 + 2 > \frac{1}{2}$ . Подставим  $C_0 = u_{max}^2 + 2$  в правую часть неравенства. Учитывая  $\varphi_1 < 1$ , имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{max}^2}{4(u_{max}^2 + \varphi_1 + \delta_1 + 1 - \frac{\varphi_1^2}{4})}\right) + \left(\frac{u_{max}^2}{4(u_{max}^2 + \varphi_2 + \delta_2)}\right) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что при  $C_0 = u_{max}^2 + 2$  условие (A1) выполнено.

**Условие 2 (A2).** Для любого  $x$  множество

$$Q(x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^3 : z^0 \leq g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}$$

выпукло.

Согласно (1.7) из [1, с. 12] условие (A2) в рассматриваемой задаче выполнено автоматически, поскольку управляемая система аффинна по управлению.

**Условие 3 (A3).** Существуют такие положительные функции  $\omega$  и  $\mu$ , заданные на  $[0, \infty)$ , что  $\omega(t) \rightarrow +0$ ,  $\mu(t) \rightarrow +0$  при  $t \rightarrow \infty$ , и для любой допустимой пары  $(x, u)$  выполняются неравенства

$$e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(x(t), u(t))| \leq \mu(t), t \geq 0,$$

$$\int_T^\infty e^{-\rho t} |g(x(t), u(t))| dt \leq \omega(T), T \geq 0. \quad (11)$$

При этом, если функция  $\mu(t)$  суммируемая, (11) выполняется автоматически. В этом случае функцию  $\omega$  можно определить как

$$\omega(T) = \int_T^\infty \mu(t) dt, T \geq 0.$$

Проверим выполнение условия (A3). Покажем, что  $x_i(t)$  ограничены. Решив систему (6), имеем

$$\begin{aligned} x_1(t) = e^{-(\delta_1 + \varphi_1 - 1)t} \times \left(x_1^0 + \int_0^t u_1(\tau) e^{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)\tau} d\tau\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = e^{-(\delta_2 + \varphi_2 - 1)t} \left(x_2^0 + \int_0^t \left(u_2(\tau_1) + \varphi_1 e^{-(\delta_1 + \varphi_1 - 1)\tau_1} \left(x_1^0 + \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2) e^{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)\tau_2} d\tau_2\right)\right) e^{(\delta_2 + \varphi_2 - 1)\tau_1} d\tau_1\right). \end{aligned}$$

Поскольку  $u_i \leq u_{max}$ , получим

$$x_1(t) \leq e^{-(\delta_1 + \varphi_1 - 1)t} x_1^0 + \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) \leq e^{-(\delta_2 + \varphi_2 - 1)t} x_2^0 + \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + e^{-(\delta_1 + \varphi_1 - 1)t} \frac{\varphi_1 x_1^0}{\delta_2 + \varphi_2 - \delta_1 - \varphi_1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) и (13) очевидно, что  $x_i(t)$  ограничены. Следовательно, функция  $g(x, u) = a_1(1 - \varphi_1)x_1(t) - b_1(1 - \varphi_1)^2x_1^2(t) - c_1u_1(t) + a_2(1 - \varphi_2)x_2(t) - b_2(1 - \varphi_2)^2x_2^2(t) - c_2u_2(t)$  также ограничена.

Очевидно,  $\max_{u \in U} |g(x, u)| \leq |a_1(1 - \varphi_1)x_1(t) - b_1(1 - \varphi_1)^2x_1^2(t) + a_2(1 - \varphi_2)x_2(t) - b_2(1 - \varphi_2)^2x_2^2(t) + (c_1 + c_2)u_{max}|$ . Рассмотрим функцию  $\mu(t) = e^{-\rho t} |a_1(1 - \varphi_1)x_1(t) - b_1(1 - \varphi_1)^2x_1^2(t) + a_2(1 - \varphi_2)x_2(t) - b_2(1 - \varphi_2)^2x_2^2(t) + (c_1 + c_2)u_{max}| + k$ , где константа  $k > 0$ . Ясно, что  $e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(x(t), u(t))| < \mu(t)$ . Поскольку  $\mu(t)$  суммируемая, то условие (A3) выполнено.

Таким образом, по теореме 2.1 из [1] в рассматриваемой задаче существует оптимальное допустимое управление.

Гамильтониан имеет вид

$$H = (\psi_1 - c_1e^{-\rho t})u_1 + (\psi_2 - c_2e^{-\rho t})u_2 + h(x, \psi),$$

где  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  – вектор сопряженных переменных, а слагаемое  $h(x, \psi)$  не содержит управления  $u$ . Уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\delta_1\psi_1 + u_1\psi_1 - u_1\psi_2 + e^{-\rho t}a_1u_1 - \\ - 2b_1u_1^2x_1 \\ \dot{\psi}_2 = -\delta_2\psi_2 + u_2\psi_2 + e^{-\rho t}a_2u_2 - 2b_2u_2^2x_2. \end{cases} \quad (14)$$

Система (6), (14) – линейная неоднородная, ее решение  $(x_1(t), x_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t))$  удовлетворяет условию асимптотической стационарности, представленному в [1]:

$$H = \lim_{t \rightarrow \infty} H(x_1^*, x_2^*, t, \psi_1(t), \psi_2(t)) = 0.$$

Обозначим  $q_i = \psi_i - c_i e^{-\rho t}$ ,  $i = 1, 2$ . Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление  $u^*$  имеет вид

$$u^* = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } q_1 < 0, q_2 < 0, \\ (0, u_{max}), & \text{если } q_1 < 0, q_2 > 0, \\ (u_{max}, 0), & \text{если } q_1 > 0, q_2 < 0, \\ (\hat{u}_1, \hat{u}_2), & \text{если } q_1 > 0, q_2 > 0, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \begin{cases} (u_{max}, 0), & \frac{q_1}{q_2} > 1, \\ (0, u_{max}), & \frac{q_1}{q_2} < 1, \\ (\hat{u}_1^*, \hat{u}_2^*), & u_1^* + u_2^* = u_{max}, \\ \frac{q_1}{q_2} = 1. \end{cases}$$

Очевидно, с экономической точки зрения, если некоторое  $q_i < 0$ , то это означает, что инвестирование в фонды на данном уровне эффективности  $i$  нецелесообразно. В случае, когда  $q_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , распределение инвестиций определяется соотношением  $\frac{q_1}{q_2}$ , которое

показывает, вложения в какой уровень обеспечат большую прибыль. В такой доминирующий уровень оптимально инвестировать все доступные средства. Если  $q_1 = q_2$ , т. е. уровни равнозначны, то конкретное распределение  $(u_1^*, u_2^*)$ , где  $u_1^* + u_2^* = u_{max}$ , не имеет значения, поскольку прибыль будет одинакова. Следует заметить, что на практике случаи равенства  $q_1 = q_2$ ,  $q_1 = 0$  и  $q_2 = 0$  невозможны хотя бы потому, что в экономике все величины вычисляются приближенно. Таким образом, при дальнейшем анализе откажемся от рассмотрения этих случаев. Вид решения (6), (14) не позволяет использовать его для дальнейшего уточнения оптимального управления.

Исследуем динамику системы при  $u$ , принимающем одно из значений, которое дается принципом максимума Понтрягина, т. е. определяемое по формуле (15). Для этого рассмотрим системы, получаемые при возможных значениях оптимального управления  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ . Рассмотрим первый случай  $u^* = (0, 0)$ . Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\delta_1x_1 + (1 - \varphi_1)x_1, \\ \dot{x}_2 = -\delta_2x_2 + (1 - \varphi_2)x_2 + \varphi_1x_1. \end{cases} \quad (16)$$

При  $u^* = (0, u_{max})$  получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\delta_1x_1 + (1 - \varphi_1)x_1 \\ \dot{x}_2 = u_{max} - \delta_2x_2 + (1 - \varphi_2)x_2 + \varphi_1x_1. \end{cases} \quad (17)$$

Если  $u^* = (u_{max}, 0)$ , то система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_{max} - \delta_1x_1 + (1 - \varphi_1)x_1 \\ \dot{x}_2 = -\delta_2x_2 + (1 - \varphi_2)x_2 + \varphi_1x_1. \end{cases} \quad (18)$$

Таким образом, для каждого возможного значения оптимального управления  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  получаем положение равновесия соответствующей системы

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} (0, 0), & (u_1^*, u_2^*) = (0, 0), \\ (0, \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1}), & (u_1^*, u_2^*) = (0, u_{max}), \\ (\frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, \frac{u_{max}\varphi_1}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}), & \\ (u_1^*, u_2^*) = (u_{max}, 0). \end{cases}$$

Исследуем полученные равновесия на предмет глобальной устойчивости. Для этого используем теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению. Поскольку  $u_i^*$  – константы во всех случаях, то матрица Якоби  $f'$  для каждого оптимального управления  $u^*$  имеет вид

$$f' = \begin{pmatrix} -\delta_1 - \varphi_1 + 1 & 0 \\ \varphi_1 & -\delta_2 - \varphi_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа:  $\lambda_1 = -\delta_1 - \varphi_1 + 1 < 0$ ,  $\lambda_2 = -\delta_2 - \varphi_2 + 1 < 0$ . Следовательно, поскольку системы (16)–(18) линейны, каждое из равновесий  $(x_1^*, x_2^*)$ , соответствующее своим значениям оптимального управления  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ , глобально асимптотически устойчиво.

Исходя из вышесказанного, имеем динамику системы следующего вида: при каждом оптимальном  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  траектория будет приближаться к своему глобально устойчивому равновесию  $(x_1^*(u^*), x_2^*(u^*))$ , положение которого будет изменяться при переключении управления согласно формуле (15).

Рассмотрим систему с переменной структурой при условии (15) следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_{1j}^* - \delta_1 x_1 + (1 - \varphi_1)x_1 \\ \dot{x}_2 = u_{2j}^* - \delta_2 x_2 + (1 - \varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1, \\ j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} (u_{11}^*, u_{21}^*) = (0, 0) \\ (u_{12}^*, u_{22}^*) = (0, u_{max}) \\ (u_{13}^*, u_{23}^*) = (u_{max}, 0). \end{cases} \quad (20)$$

**Теорема 1** (об инвариантном множестве). Система (19) при любом из условий (20) имеет инвариантное множество  $\Pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, 0 \leq x_2 \leq \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}\}$ .

**Замечание 3.** Смысл теоремы 1 состоит в том, что хотя мы не знаем моменты переключения системы, мы можем определить, где сосредоточено движение системы (множество  $\Pi$ ). Таким образом, мы локализовали движение, т. е. оптимальную траекторию. На практике крайне затруднительно реализовать конкретные моменты переключения в экономических системах, следовательно, невозможно реализовать оптимальную траекторию, и тем самым мы получаем неоптимальное движение. Однако, согласно теореме 1, при любых моментах переключения движение находится в  $\Pi$ .

*Доказательство.* Поскольку  $\dot{x}_1 < 0$  при  $x_1 = \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}$  для любого управления  $u^*$ , траектории пересекают прямую  $x_1 = \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}$  справа налево (в направлении убывания  $x_1$ ). Значит, все траектории входят в полосу  $x_1 \leq \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}$  и не выходят из нее. Кроме того, поскольку  $\dot{x}_1 < 0$  при  $x_1 = R_1$  для любой постоянной  $R_1 \geq \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}$ , траектории входят в любую полосу  $x_1 \leq R$  и не выходят из нее. Следовательно, полоса  $x_1 \leq \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}$  является притягивающим множеством.

Рассмотрим поведение траекторий внутри данной полосы. Найдем точки пересечения прямой  $x_1 = \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}$  с изоклиной  $\dot{x}_2 = 0$  при различном оптимальном управлении:

- при  $(u_1^*, u_2^*) = (0, 0)$ :

$$Q_1 = \left( \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)} \right);$$

- при  $(u_1^*, u_2^*) = (0, u_{max})$ :

$$Q_2 = \left( \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)} \right);$$

- при  $(u_1^*, u_2^*) = (u_{max}, 0)$ :

$$Q_3 = \left( \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)} \right) = Q_1.$$

Значит, наивысшая точка пересечения (с наибольшим  $x_2$ ) – это точка  $Q_2 = \left( \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)} \right)$ . Рассмотрим поведение траекторий на прямой  $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}$ . Очевидно, данная прямая находится выше всех возможных изоклин  $\dot{x}_2 = 0$ , за исключением единственной точки  $Q_2$  ее пересечения с изоклиной  $x_2 = \frac{u_{max} + \varphi_1 x_1}{\delta_2 + \varphi_2 - 1}$  (при  $(u_1^*, u_2^*) = (0, u_{max})$ ). Следовательно, при  $x_1 \in [0, \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}]$  имеем  $\dot{x}_2 < 0$  при  $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}$ , что означает, что все траектории пересекают прямую  $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}$  сверху вниз (в направлении убывания  $x_2$ ). Рассмотрим отдельно точку  $Q_2$ . Имеем  $\dot{x}_1(Q_2) < 0$ ,  $\dot{x}_2(Q_2) = 0$ , следовательно, получаем движение по прямой  $x_2 = \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}$  в направлении убывания  $x_1$ . Кроме того,  $\dot{x}_2 < 0$  при  $x_2 = R_2$  для любой постоянной  $R_2 \geq \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)}$ . Следовательно, траектории входят в любое множество  $\Pi(R_1, R_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq R_1, 0 \leq x_2 \leq R_2\}$  и не выходят из него.

Таким образом, множество

$$\Pi = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq \frac{u_{max}}{\delta_1 + \varphi_1 - 1}, 0 \leq x_2 \leq \frac{u_{max}}{\delta_2 + \varphi_2 - 1} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{(\delta_1 + \varphi_1 - 1)(\delta_2 + \varphi_2 - 1)} \right\}$$

является инвариантным и притягивающим.  $\square$

Естественно, модель (6)–(10) функционирует на конечном промежутке времени. Это связано с тем, что коэффициенты  $\delta_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  определяются конкретными экономическими условиями и технологиями. Но бесконечный промежуток времени управления позволяет управлять так, что к концу промежутка существования модели (6)–(10) экономическая система имеет некоторый объем ресурсов

для дальнейшего развития и реструктуризации, которая приводит к изменению указанных коэффициентов. Получим оценку прибыли начиная с достаточно большого момента времени, которую можно использовать при решении вопроса о реструктуризации.

Покажем, что функционал  $J \leq \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$  начиная с некоторого момента  $T$ . Представим  $J$  в виде  $J = J_1 + J_2$ , где

$$J_i = \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} [a_i(1 - \varphi_i)x_i(t) - b_i(1 - \varphi_i)^2 x_i^2(t) - c_i u_i(t)] dt,$$

$i = 1, 2$ . Слагаемые  $J_1, J_2$  относятся к первому и второму уровням эффективности соответственно.

**Замечание 4.** В данной работе исследуется случай, когда получаемая прибыль положительна ( $J > 0$ ). Случай убыточного производства ( $J < 0$ ) не рассматривается.

Обозначим  $k_i = \delta_i + \varphi_i - 1 > 0$ . Напомним,

$$x_1(t) = e^{-k_1 t} \left( x_1^0 + \int_0^t (u_1(\tau) e^{k_1 \tau} d\tau) \right),$$

$$x_2(t) = e^{-k_2 t} \left( x_2^0 + \int_0^t (u_2(\tau_1) + \varphi_1 e^{-k_1 \tau_1} \right.$$

$$\left. \times \left( x_1^0 + \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2) e^{k_1 \tau_2} d\tau_2 \right) e^{k_2 \tau_1} d\tau_1 \right).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} \left[ e^{-k_1 t} a_1(1 - \varphi_1) \left( x_1^0 + \int_0^t u_1 e^{k_1 \tau} d\tau \right) - c_1 u_1 - e^{-2k_1 t} b_1(1 - \varphi_1)^2 \left( x_1^0 + \int_0^t u_1 e^{k_1 \tau} d\tau \right)^2 \right] dt \\ &\leq \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} e^{-k_1 t} a_1(1 - \varphi_1) \left( x_1^0 + \int_0^t u_1 e^{k_1 \tau} d\tau \right) dt \leq \int_T^{+\infty} e^{-(\rho+k_1)t} a_1(1 - \varphi_1) \left( x_1^0 + u_{max} \int_0^t e^{k_1 \tau} d\tau \right) dt \\ &= \int_T^{+\infty} e^{-(\rho+k_1)t} a_1(1 - \varphi_1) \left( x_1^0 + u_{max} \left( \frac{e^{k_1 t} - 1}{k_1} \right) \right) dt \\ &= a_1(1 - \varphi_1) \left( \frac{x_1^0}{\rho + k_1} e^{-(\rho+k_1)T} + \frac{u_{max}}{\rho k_1} e^{-\rho T} - \frac{u_{max}}{k_1(\rho + k_1)} e^{-(\rho+k_1)T} \right) \\ &= a_1(1 - \varphi_1) e^{-\rho T} \left( \frac{k_1 x_1^0 - u_{max}}{k_1(\rho + k_1)} e^{-k_1 T} + \frac{u_{max}}{\rho k_1} \right) \leq a_1(1 - \varphi_1) e^{-\rho T} \left( \frac{k_1 x_1^0 - u_{max}}{k_1(\rho + k_1)} + \frac{u_{max}}{\rho k_1} \right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

для любого  $\varepsilon > 0$ .

Имеем  $J_1 \leq \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$  при  $T \geq T_1 = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{\varepsilon}{a_1(1 - \varphi_1) \left( \frac{k_1 x_1^0 - u_{max}}{k_1(\rho + k_1)} + \frac{u_{max}}{\rho k_1} \right)}$ .

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} e^{-k_2 t} a_2(1 - \varphi_2) \left[ x_2^0 + \int_0^t \left( u_2 + \varphi_1 e^{-k_1 \tau_1} \left( x_1^0 + \int_0^{\tau_1} u_1 e^{k_1 \tau_2} d\tau_2 \right) e^{k_2 \tau_1} \right) d\tau_1 \right] dt \\ &\leq a_2(1 - \varphi_2) \int_T^{+\infty} e^{-(\rho+k_2)t} \left( x_2^0 + \int_0^t \left( u_{max} + \varphi_1 e^{-k_1 \tau_1} \left( x_1^0 + u_{max} \int_0^{\tau_1} (e^{k_1 \tau_2} d\tau_2) e^{k_2 \tau_1} d\tau_1 \right) \right) \right) dt \\ &= a_2(1 - \varphi_2) \left( \frac{x_2^0}{\rho + k_2} e^{-(\rho+k_2)T} + \frac{u_{max}}{\rho k_2} e^{-\rho T} - \frac{u_{max}}{k_2(\rho + k_2)} e^{-(\rho+k_2)T} + \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2 - k_1)(\rho + k_2)} e^{-(\rho+k_1)T} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2 - k_1)(\rho + k_2)} e^{-(\rho+k_2)T} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1 k_2 \rho} e^{-\rho T} - \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2 - k_1)(\rho + k_1)} e^{-(\rho+k_1)T} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_2(1 - \varphi_2)e^{-\rho T} \left( e^{-k_2 T} \left( \frac{x_2^0}{\rho + k_2} - \frac{u_{max}}{k_2(\rho + k_2)} - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2 - k_1)(\rho + k_2)} \right) \right. \\
&+ e^{-k_1 T} \left( \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2 - k_1)(\rho + k_2)} - \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2 - k_1)(\rho + k_1)} \right) + \frac{u_{max}}{\rho k_2} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1 k_2 \rho} \left. \right) \\
&\leq a_2(1 - \varphi_2)e^{-\rho T} \left( \frac{x_2^0}{\rho + k_2} - \frac{u_{max}}{k_2(\rho + k_2)} - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2 - k_1)(\rho + k_2)} + \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2 - k_1)(\rho + k_2)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2 - k_1)(\rho + k_1)} + \frac{u_{max}}{\rho k_2} + \frac{\varphi_1 u_{max}}{k_1 k_2 \rho} \right) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

для любого  $\varepsilon > 0$ .

Имеем  $J_2 \leq \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$  при

$$T \geq T_2 = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{\varepsilon}{a_2(1 - \varphi_2) \left( \frac{k_2 x_2^0 - u_{max}}{k_2(\rho + k_2)} + \frac{(k_1 + \varphi_1)u_{max}}{\rho k_1 k_2} - \frac{k_1 \varphi_1 x_1^0 + \varphi_1 u_{max}}{k_1(k_2 - k_1)(\rho + k_1)} - \frac{\varphi_1 x_1^0}{(k_2 - k_1)(\rho + k_2)} \right)}.$$

Получаем  $J \leq \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$  при  $T \geq \max(T_1, T_2)$ .

#### ЗАДАЧА О ВЫЖИВАЕМОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Поставим задачу о выживаемости двухуровневой экономической системы. Выживаемость экономической системы означает, что ни один из уровней эффективности не исчезает, т. е. объем фондов на каждом уровне должен быть отделен от нуля в любой момент времени. Таким образом, на управление накладывается дополнительное ограничение, обеспечивающее выживаемость системы.

Обозначим  $\tilde{x}_i = const > 0$  минимально допустимый объем производственных фондов на  $i$ -м уровне. Тогда получаем задачу о выживаемости следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 - \delta_1 x_1 + (1 - \varphi_1)x_1 = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2), \\ \dot{x}_2 = u_2 - \delta_2 x_2 + (1 - \varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1 \\ = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2), \end{cases}$$

$$x_i(t) \geq \tilde{x}_i, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$x_i(0) = x_i^0 \geq \tilde{x}_i, \quad i = 1, 2,$$

$$u = (u_1(t), u_2(t)) \in U = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (21) \\ y_1 + y_2 \leq u_{max}, y_i \geq 0, i = 1, 2\},$$

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, цель состоит в том, чтобы найти такое управление  $u = (u_1, u_2)$ , при котором траектория не выходит из множества  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i(t) \geq \tilde{x}_i, t \geq 0, i = 1, 2\}$ , т. е. множество  $X$  должно быть инвариантным. Для этого необходимо, чтобы все

траектории пересекали границу  $\partial X$  снаружи внутрь. Это означает, что вектор скорости  $f$  должен составлять острый угол с каждой нормалью  $n_i$  на границе  $\partial X$ , т. е. скалярное произведение каждой нормали на вектор правых частей  $(n_i, f) > 0, i = 1, 2$ .

$$(n_1, f) = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2) = u_1 - \delta_1 \tilde{x}_1 + (1 - \varphi_1)\tilde{x}_1 > 0.$$

Получаем  $u_1 > \tilde{x}_1(\delta_1 + \varphi_1 - 1) = \tilde{u}_1$ .

$$(n_2, f) = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2) = u_2 - \delta_2 x_2 + (1 - \varphi_2)x_2 + \varphi_1 x_1 > 0.$$

Получаем  $u_2 > \tilde{x}_2(\delta_2 + \varphi_2 - 1) - \varphi_1 x_1$ . Поскольку  $\varphi_1 x_1 > 0$ , можно рассматривать условие  $u_2 > \tilde{x}_2(\delta_2 + \varphi_2 - 1) = \tilde{u}_2$ . Учитывая ограничение (21), имеем следующую область допустимых управлений, обеспечивающих выживаемость  $U_v = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \tilde{u}_1 \leq u_1 \leq u_{max} - \tilde{u}_2, \tilde{u}_2 \leq u_2 \leq u_{max} - \tilde{u}_1\}$ .

Обобщим задачу о выживаемости, рассмотрим систему из  $n$  уровней эффективности вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 - \delta_1 x_1 + (1 - \varphi_1)x_1 = f_1(x, u), \\ \dot{x}_i = u_i - \delta_i x_i + (1 - \varphi_i)x_i + \varphi_{i-1}x_{i-1} \\ = f_i(x, u), \end{cases}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), u = (u_1, \dots, u_n),$$

$$x_i(t) \geq \tilde{x}_i, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_i(0) = x_i^0 \geq \tilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$u = (u_1(t), \dots, u_n(t)) \in U = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq u_{max}, y_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad (22)$$

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Требуется найти такое управление  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , при котором траектория не выходит из множества  $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i(t) \geq \tilde{x}_i, t \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ , т. е. множество  $X$  должно быть инвариантным. Для этого необходимо, чтобы все траектории не пересекали  $\partial X$  снаружи внутрь. Это означает, что вектор скорости  $f$  должен составлять острый угол с каждой нормалью  $n_i$  на границе  $\partial X$ , т. е. скалярное произведение каждой нормали на вектор правых частей  $(n_i, f) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$(n_1, f) = f_1(x, u) = u_1 - \delta_1 \tilde{x}_1 + (1 - \varphi_1) \tilde{x}_1 > 0.$$

Получаем  $u_1 > \tilde{x}_1(\delta_1 + \varphi_1 - 1) = \tilde{u}_1$ .

$$(n_i, f) = f_i(x, u) = u_i - \delta_i x_i + (1 - \varphi_i) x_i + \varphi_{i-1} x_{i-1} > 0.$$

Получаем  $u_i > \tilde{x}_i(\delta_i + \varphi_i - 1) - \varphi_{i-1} x_{i-1}$ . Поскольку  $\varphi_{i-1} x_{i-1} > 0$ , можно рассматривать условие  $u_i > \tilde{x}_i(\delta_i + \varphi_i - 1) = \tilde{u}_i$ . Учитывая ограничение (22), имеем следующую область допустимых управлений, обеспечивающих выживаемость:

$$U_v = \left\{ (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n : \right. \\ \left. \tilde{u}_1 \leq u_1 \leq u_{max} - \sum_{j=2}^n \tilde{u}_j, \tilde{u}_i \leq u_i \leq u_{max} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \tilde{u}_j, i = 1, \dots, n \right\}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача оптимального управления инвестиционной политикой с шумпетеровской динамикой фондов с двумя уровнями эффективности на бесконечном времени. Для решения поставленной задачи используется принцип максимума Понтрягина. Показано существование оптимального управления. Получены и проанализированы необходимые условия оптимальности управления. Проведен качественный анализ динамической системы с произвольным переключением управления, принимающего значения (20). Для каждого значения оптимального управления показана глобальная устойчивость соответствующего положения равновесия. Найдено инвариантное множество для исследуемой системы с переменной структурой. Получена оценка момента времени, начиная с которого прибыль

будет сколь угодно мала. Поставлена задача о выживаемости экономической системы для двух и произвольного числа уровней эффективности. Найдены допустимые управления, обеспечивающие выживаемость.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев С. М., Кряжымский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН имени В. А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 3–271.
2. Гельман Л. М., Левин М. И., Полтерович В. М., Спивак В. А. Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) // Экономика и математические методы. 1993. Т. 29, № 3. С. 460–469.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. Полтерович В. М. Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // Журнал Новой экономической ассоциации. 2017. № 2. С. 3–19. doi: 10.1007/s11135-017-0624-2
5. Полтерович В. М., Хенкин Г. М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. № 24. С. 1071–1083.
6. Хенкин Г. М., Шананин А. А. Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 193–201.

## REFERENCES

1. Aseev S. M., Kryazhimskii A. V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Trudy MIAN imeni V. A. Steklova = Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2007;257(3):3–271. (In Russ.)
2. Gelman L. M., Levin M. I., Polterovich V. M., Spivak V. A. Modeling of the dynamics of the enterprises distribution by efficiency levels (on an example of ferrous metallurgy). *Ekonomika i matematicheskie metody = Economics and Mathematical Methods*. 1993;29(3):460–469. (In Russ.)
3. Lee E. B., Markus L. Foundations of optimal control theory. Moscow: Nauka; 1972. 576 p. (In Russ.)
4. Polterovich V. M. The theory of endogenous economic growth and equations of mathematical physics. *Zhurnal Novoi ekonomicheskoi assotsiatsii = The Journal of the New Economic Association*. 2017;2(34):193–201. (In Russ.)

5. *Polterovich V. M., Henkin G. M.* Evolutionary model of the interaction of creating and borrowing technologies processes. *Ekonomika i matematicheskie metody = Economics and Mathematical Methods*. 1988;24:1071–1083. (In Russ.)

6. *Henkin G. M., Shanin A. A.* Mathematical modeling of the Schumpeterian dynamics of innovation. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014;26(8):3–19. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 28.03.2022; принята к публикации / accepted: 11.05.2022.  
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Сазонов Александр Михайлович**  
канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник

*e-mail: sazon-tb@mail.ru*

#### CONTRIBUTOR:

**Sazonov, Alexander**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Researcher

УДК 519.115:519.2

## ДОАСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ КОМПЛЕКТАМИ С УСЛОВИЯМИ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)*

Обобщение классической схемы размещения частиц комплектами по ячейкам означает расширение ее условий на возможность разных размеров комплектов. Отдельно рассматривается эта схема размещения без пустых ячеек и по выделенным ячейкам. Исследование производится перечислительным методом на основе построения и анализа итерационного случайного процесса прямого неповторного нумерованного перечисления его исходов в доасимптотической области изменения параметров по следующим направлениям: решения задачи нумерации в прямой и обратной постановках, состоящих в установлении взаимно-однозначного соответствия между номерами и видами исходов схемы, определения вероятностного распределения числа пустых ячеек и на множестве исходов схемы по введенным вероятностям итерационных переходов процесса их перечисления и разработки процедуры их моделирования.

Ключевые слова: размещение частиц комплектами; размеры комплектов; выделенные ячейки

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Доасимптотический анализ обобщения классической схемы размещения частиц комплектами с условиями // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 67–74. doi: 10.17076/mat1528

## N. Yu. Enatskaya. PREASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE GENERALIZATION OF THE CLASSICAL SCHEME OF PARTICLE ALLOCATION BY SETS WITH CONDITIONS

*National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of  
Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)*

Generalization of the classical scheme of allocating particles into cells by sets implies extending its conditions to allow different sizes of sets. This allocation scheme is studied separately for cases without empty cells and by selected cells. The study is carried out by the enumeration method based on the construction and analysis of an iterative random process of direct non-repetitive numbered enumeration of its outcomes in the pre-asymptotic region of parameter change in the following directions: solving the numbering problem in direct and inverse formulations which consist in finding one-to-one correspondence between the numbers and types of outcomes of the scheme, determining the probabilistic distribution of the

number of empty cells and on the set of outcomes of the scheme according to the introduced probabilities of iterative transitions of the process of their enumeration and developing a procedure for their modeling.

Key words: allocation of particles by sets; set sizes; selected cells

For citation: Enatskaya N. Yu. Preasymptotic analysis of the generalization of the classical scheme of particle allocation by sets with conditions. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2022;4:67–74. doi: 10.17076/mat1528

## ВВЕДЕНИЕ

Классическая схема размещения частиц комплектами [1] описывает размещения по  $n$  различным ячейкам неразличимых частиц  $m$  различными комплектами по  $r$  частиц в каждом. Частицы каждого комплекта размещаются независимо и равновероятно по  $n$  различным ячейкам так, что все частицы каждого комплекта попадают в разные ячейки.

Для этой схемы в [1] представлен ее асимптотический анализ и получены точные формулы для распределения и моментов (математического ожидания и дисперсии) числа  $\mu_0(rm, n)$  пустых ячеек в исходах схемы, вид которых записывается уровнями заполнений ячеек в порядке роста их нумерации. Приведем здесь из [1] точные формулы для распределения числа  $\mu_0(rm, n)$ :

$$P(\mu_0(rm, n) = k) = C_n^k (C_{n-k}^r / C_n^r)^m P(\mu_0(rm, n - k) = 0); \quad (1)$$

$$P(\mu_0(rm, n) = 0) = (1/C_n^r)^m \sum_{t=0}^n C_n^t (-1)^t (C_{n-t}^r)^m, \quad (2)$$

где  $r \leq n - k \leq \min(rm, n)$ , откуда

$$l = \max(0, n - mr) \leq k \leq n - r = L \quad (3)$$

есть диапазон для числа пустых ячеек в исходах схемы.

Пространство элементарных исходов схемы представляют все наборы номеров комплектов частиц, попавших в каждую ячейку в порядке нумерации ячеек.

Цели доасимптотического анализа изучаемых здесь схем определены в аннотации, а их результаты дополняют ранее полученные для классической схемы с заменой  $r$  частиц в каждом комплекте на вектор  $\vec{r} = (r_1, \dots, r_m)$  размеров комплектов в условиях изучаемых здесь ограничений.

Для краткости далее будем называть обобщение классической схемы размещения частиц

комплектами разных размеров без ограничений **схема А**, без пустых ячеек – **схема В**, а по выделенным  $M$  ячейкам – **схема С**.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 1.1. Перечислительный метод (ПМ)

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ [3], суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ) [3], состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между видами исходов и их номерами, и универсальное моделирование (УМ) исходов по [3], дающее его единый прием, состоящий в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению ЗН, учитывающему специфику схемы. (В более ранних публикациях УМ также называлось БМ – быстрое моделирование). Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

Перечислим используемые здесь результаты (со своими обозначениями) ранее изученных схем по решению ЗН.

### 1.2. Схема сочетаний

В [2] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы сочетаний из  $n$  элементов по  $r$  с числом исходов  $C_n^r$ . Номера элементов в каждом исходе схемы  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$

упорядочены по возрастанию, и значение  $n_m$  ( $m = \overline{1, r}$ ) определяет величина  $l_m$  – порядковый номер  $n_m$  по возрастанию среди значений от  $(n_{m-1} + 1)$  до  $n$ .

**Теорема 1. Прямая ЗН.** Дан номер  $N$  исхода схемы сочетаний. Тогда в его искомом виде  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$  значение  $l_m$  ( $m = \overline{1, r}$ ) при  $j_0 = 1, n_0 = 0, C_0^0 = 1$  есть

$$l_m = \min j_m :$$

$$\left\{ N \leq \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{s_i=n_{i-1}+J(i-1)}^{l_m-1} C_{n-s_i}^{r-i} + \sum_{s_m=n_{m-1}}^{j_m} C_{n-s_m}^{r-m} \right\},$$

где  $J(Z) = 1$  при  $Z = 0$  и  $J(Z) = 0$  при  $Z > 0$ .

**Теорема 2. Обратная ЗН.** Дан исход  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$ . Тогда его номер  $N$  находится (при  $n_0 = 0$ ) по формуле

$$N = \sum_{i=1}^r \sum_{s_i=n_{i-1}+1}^{n_i-1} C_{n-s_i}^{r-i} + 1.$$

### 1.3. Схема последовательных действий (ПД)

Схема  $k$  ПД с результатом анализа в [2] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия, и числа исходов на каждом следующем шаге (действию) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Если  $i$ -е действие ( $i = \overline{1, k}$ ) совершается  $d_i$  числом способов, то число исходов схемы  $N = \prod_{i=1}^k d_i$ .

Вид исхода после совершения  $i$  действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые соответственно обозначаются через  $R_{ij_i}$ , где  $i$  – номер действия, а  $j_i$  – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид  $R_{ij_i}$  определяется характером действия. Исход совершения  $r$  действий ( $r \leq k$ ) обозначен в виде  $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{rj_r}\}$ . Тогда окончательный исход схемы получен при  $r = k$ .

**Теорема 3. Прямая ЗН.** Пусть в схеме с параметрами  $d_1, \dots, d_k$  дан номер  $N^{(k)}$  ее исхода. Тогда вид исхода  $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$ , определяемый номерами  $(j_1, \dots, j_k)$  исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при  $i = \overline{1, k}$  находится по формуле

$$j_i = t_i + I(t_i)d_i,$$

где  $t_i = N^{(i)} \bmod d_i$ ;  $I(Z) = 0$  при  $Z \neq 0$  и  $I(Z) = 1$  при  $Z = 0$ ;

$$N^{(i-1)} = \left\lfloor \frac{N^{(i)} + d_i - 1}{d_i} \right\rfloor,$$

где  $[Z]$  – целая часть числа  $Z$  и  $i = k, k-1, \dots, 1$ ;  $N^{(0)} = 1$ .

**Теорема 4. Обратная ЗН.** Пусть в схеме с параметрами  $d_1, \dots, d_k$  дан вид ее исхода  $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$ , определяющий номера  $(j_1, \dots, j_k)$  исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при  $i = \overline{1, k}$ . Тогда его номер вычисляется по формуле

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^k d_i + j_k.$$

### 1.4. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД)

Схема ОПД с результатом анализа [2] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действию) неодинаковы, т. е. зависят от характера действия и вида предыдущего исхода. Результатом этого являются разные размеры пучков внутри итерации в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему, т. е. числа исходов из каждого состояния на следующей итерации.

Анализ схемы ОПД приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится  $k$  последовательных действий,  $i$ -е из которых ( $i = \overline{1, k}$ ) на  $i$ -м шаге совершается  $N^{(i)}$  способами. Тогда число исходов этих  $k$  действий складывается из  $N^{(k-1)}$  пучков размерами  $\vec{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \dots, d_{N^{(k-1)}}^{(i)})$ , т. е. общее число  $N = N^{(k)}$  исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при  $i = k$  и  $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения  $i$  действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через  $R_{ij_i}$ , где  $i$  – номер действия, а  $j_i$  – номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из  $k$  действий и известной пучковой структуре графа

перечисления исходов нашей схемы, т. е. с известными числами исходов (размерами пучков) при каждом действии на каждой итерации. Под траекторией  $T$  исхода схемы понимается последовательность исходов, ведущая в графе их перечисления от начала к исследуемому исходу.

**Прямая и обратная задачи нумерации** решены следующими теоремами.

**Теорема 5.** Пусть совершается  $k$  действий и задан номер исхода  $N_*^{(k)}$ . Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории  $T$  в содержащих их пучках  $\{j_i\}$  от первой до  $k$ -й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для  $j_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ):

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)},$$

где все пучковые структуры действий  $\bar{d}^{(i)}$  заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t : \left( \sum_{l=1}^t d_l^{(k)} = A_k \leq N_*^{(k)} \right),$$

где  $\delta = 0$  при  $A_k = N_*^{(k)}$  и  $\delta = 1$  при  $A_k < N_*^{(k)}$ ; заменяя  $k$  на  $i$ , доходим по рекурренте до первого шага.

По решенной ЗН для всех действий находим из  $\{j_i\}$  виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода  $R_*^{(k)}$ .

**Теорема 6.** Пусть совершается  $k$  действий и задан вид исхода  $R_*^{(k)} = \{j_1, \dots, j_k\}$ . Тогда его номер  $N_*^{(k)}$  определяется по рекуррентной формуле при  $i = k$ ,  $i = \overline{1, k}$ :

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)} + j_i$$

начиная с  $i = 1$  при  $N_*^{(1)} = j_1$ .

## 2. АНАЛИЗ СХЕМЫ А

### 2.1. Вид, число исходов и структура графа перечисления исходов схемы в исходе схемы

Прямое бесповторное перечисление  $N = \prod_{i=1}^m C_n^{r_i}$  исходов схемы будем производить по п. 1.3 итерационным случайным процессом для схемы ПД, где действиями – итерациями будут последовательные поединичные добавления независимых равновероятных размещений следующих комплектов частиц по ячейкам в соответствии с условиями схемы – по

схеме сочетаний до последнего  $m$ -го комплекта. Получение результатов анализа схемы требует определения пучковой структуры графа данного процесса перечисления ее исходов при решении ЗН по п. 1.3 и вероятностного распределения на множестве ее исходов при проведении их моделирования по УМ.

Тогда пучковая структура графа данного перечисления исходов схемы определяется пучковой структурой итераций, где на  $i$ -й итерации ( $i = \overline{1, m}$ ) все размеры пучков по  $C_n^{r_i}$ .

При этом бесповторность исходов каждой (а значит, и итоговой) итерации такого перечисления обеспечивается неизменяемыми далее, заложенными в процессе перечисления исходов, отличиями: по пучкам – в разных добавленных исходах схемы сочетаний последней размещенной на выполняемой итерации частицы, а в пучках одной итерации – в разных наборах заполнений ячеек при размещении предшествующих комплектов.

Исходы итераций будем записывать в виде составов номеров комплектов принадлежащих им частиц в ячейках в порядке ячеек, заключая в круглые скобки составы ячеек, содержащие более одной частицы, и перечисляя их через запятую в ячейке в порядке размещения комплектов. Пустые ячейки в исходе обозначаем нулями.

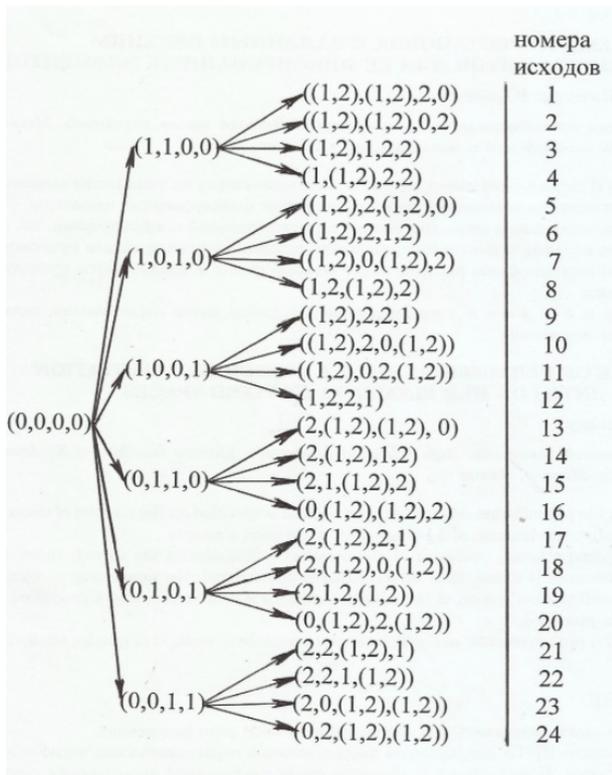
Диапазон возможных значений  $k$  – числа пустых ячеек в исходе схемы определяются по аналогии с формулой (3) из [1]:

$$l = \max \left( 0, n - \sum_{i=1}^m r_i \right) \leq k \leq (n - \max_{i=1}^m r_i) = L.$$

Для отражения различимости комплектов частиц при неразличимости частиц внутри каждого комплекта для описания результата исхода любой итерации перечислительного процесса исходов схемы будем далее обозначать все частицы  $i$ -го комплекта через  $i$ , где  $i = \overline{1, m}$ .

Приведем числовой пример наглядного графического представления и записи бесповторного формирования с итогом перечисления всех разных исходов схемы.

**Пример 1.** Пусть  $n = 4$ ,  $\bar{r} = (2, 3)$ ,  $m = 2$ . Тогда число размещений первого комплекта  $C_4^2 = 6$ , а второго –  $C_4^3 = 4$ , что дает число исходов схемы  $N = 6 \cdot 4 = 24$ . Граф перечисления последовательных исходов итераций схемы размещения частиц комплектами с заданными параметрами с учетом их суммирования по результатам размещения со всеми предшествующими комплектами представлен на рисунке.



Граф перечисления исходов схемы  $A$  в примере 1  
The graph of outcomes enumeration of scheme  $A$  in example 1

Здесь число  $N$  исходов схемы по рисунку совпадает с его теоретическим значением  $N = (C_4^3)^2 = 24$ .

## 2.2. Решение ЗН для исходов схемы

По предложенной в п. 2.1 процедуре бесповторного перечисления исходов схемы она соответствует схеме ПД с действиями – итерациями последовательного поединичного добавления результатов размещения по схеме сочетаний комплектов частиц по ячейкам с изученной пучковой структурой графа перечисления исходов схемы – и в общем виде решена в п. 1.3.

Приведем численный пример решения ЗН в прямой и обратной постановках в условиях примера 1 с наглядной проверкой по рисунку, считая решенной ЗН для действий – схем сочетания размещения каждого комплекта (см. п. 1.2).

### Пример 2.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы  $N^* = N^{(2)} = 14$ . Найти его вид  $R^* = R^{(2)}$ . По рисунку  $R^* = (2, (1, 2), 1, 2)$ . Найдем  $R^*$  по формулам п. 1.4.

#### Шаги решения:

1) по данному  $N^{(2)} = 14$  находим по п. 1.4 номер предшествующего ему исхода схемы на

1-й итерации  $N^{(1)} = 4$ , т. к.  $t = 3$ ,  $\delta = 1$ , чему соответствует добавляемый результат размещения первого комплекта по ячейкам вида  $(0, 1, 1, 0)$ ;

2) по данному  $N^{(2)} = 14$  по п. 1.4 в 4-м пучке второй итерации находим номер искомого исхода  $j_2 = 14 - 12 = 2$ , что соответствует добавлению второго комплекта  $(2, 2, 0, 2)$ ;

3) тогда, суммируя результаты независимых размещений двух комплектов, получаем итоговый искомым вид исхода схемы  $R^* = (2, (1, 2), 1, 2)$ , что совпадает с результатом по рисунку.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R^* = R^{(2)} = (2, (1, 2), 1, 2)$ . Найти его номер  $N^* = N^{(2)}$ . По рисунку  $N^* = 14$ . Найдем  $N^*$  по формулам п. 1.4.

#### Шаги решения:

1) по данному  $R^{(2)} = (2, (1, 2), 1, 2)$  находим виды первого комплекта  $(0, 1, 1, 0)$ , а второго комплекта –  $(2, 2, 0, 2)$ , откуда  $j_1 = 4$ ,  $j_2 = 2$ ;

2) по п. 1.4 получаем  $N^* = N^{(2)} = (4-1)4 + 2 = 14$ , что совпадает с результатом по рисунку.

## 2.3. Распределение вероятностей на множестве исходов схемы и числа пустых ячеек

В силу заданных равновероятных итерационных переходов при симметричной структуре графа перечисления исходов итоговые исходы схемы также равновероятны с вероятностью каждого по  $1/\prod_{i=1}^m C_n^{r_i}$ .

**Замечание 1.** Расчет распределения итоговых исходов схемы в более общих условиях заданных, отличных от равновероятного независимого размещения частиц комплектами по ячейкам, производится по тому же графу итерационного перечисления при формировании исходов схемы путем произведений их вероятностей по последовательным переходам в графе по итерациям в траекториях, ведущих к каждому итоговому исходу схемы.

Вероятностное распределение числа  $k$  пустых ячеек в исходе схемы выводится по аналогии с формулами (1) и (2) из [1]:

$$\begin{aligned}
 & P\left(\mu_0\left(\sum_{i=1}^m r_i, n\right) = k\right) \\
 &= C_n^k \prod_{i=1}^m (C_{n-k}^{r_i} / C_n^{r_i}) P\left(\mu_0\left(\sum_{i=1}^m r_i, n-k\right) = 0\right); \\
 & P\left(\mu_0\left(\sum_{i=1}^m r_i, n\right) = 0\right)
 \end{aligned}$$

$$= \left( 1 / \prod_{i=1}^m C_n^{r_i} \right) \sum_{t=0}^n C_n^t (-1)^t \prod_{i=1}^m C_{n-t}^{r_i}.$$

Диапазон возможных значений  $k$  указан в п. 2.1.

### 2.4. Моделирование исхода схемы

Его предлагается проводить приемом УМ [3] путем разыгрывания его номера одним случайным числом с равновероятным вероятностным распределением в схеме (или по полученному по замечанию в более общей схеме) и по нему по результату решения ЗН находить вид смоделированного исхода схемы.

## 3. АНАЛИЗ СХЕМЫ В

Схема В существует при  $\sum_{i=1}^m r_i \geq n$ .

### 3.1. Вид, число исходов и структура графа перечисления исходов схемы

Вид исхода схемы записывается как в схеме А. Бесповторное перечисление исходов получаем отбраковкой из их перечисления исходов схемы А с хотя бы одной нулевой компонентой. В результате в общем случае получаем граф перечисления исходов схемы В другой пучковой структуры и в общем случае с неодинаковыми размерами пучков в итерациях. А это значит, что схема В представляет собой ОПД с действиями итераций. Тогда ЗН в прямой и обратной постановках здесь будем решать по формулам п. 1.4, а число исходов схемы получается сложением размеров пучков предпоследней итерации.

Приведем численный пример описанных расчетов результатов перечисления исходов схемы В.

**Пример 3.** Пусть, как и в примере 1,  $n = 4$ ,  $\bar{r} = (2, 3)$ ,  $m = 2$ . Тогда при перечислении по рисунку исходов схемы В после отбраковки из исходов схемы А в первом пучке итоговых исходов остаются 2 исхода:  $((1,2), 1,2,2)$ ,  $(1, (1,2), 2,2)$ , во втором – 2 исхода:  $((1,2), 2,1,2)$ ,  $(1,2, (1,2), 2)$ , в третьем – 2 исхода:  $((1,2), 2,2,1)$ ,  $(1,2,2,1)$ , в четвертом – 2 исхода:  $(2, (1,2), 1,2)$ ,  $(2,1, (1,2), 2)$ , в пятом – 2 исхода:  $(2, (1,2), 2,1)$ ,  $(2,1,2, (1,2))$ , в шестом – 2 исхода:  $(2,2, (1,2), 1)$ ,  $(2,2,1, (1,2))$  – всего 12 исходов, как сумма размеров пучков итерации после этой отбраковки. Их последовательные номера в схеме А  $\bar{S} = (3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22)$ .

### 3.2. Решение ЗН для исходов схемы

ЗН решаем по АЛГОРИТМУ 1 пересчетом результатов ЗН в схеме А путем установления номеров ее последовательных исходов без

пустых ячеек  $\bar{S}$  в качестве исходов исследуемой схемы В. Пусть эти номера фиксируются в процессе проведенной отбраковки исходов схемы А для схемы В с пустыми ячейками.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы В  $N^* = N^{(2)}$ . Найти его вид  $R^* = R^{(2)}$ .

#### Шаги решения:

1) среди номеров исходов схемы А  $\bar{S}$  находим по порядку  $N^*$ -й номер;

2) по найденному в 1) номеру по результату решения прямой ЗН в схеме А получаем его вид в схеме А, совпадающий с искомым в схеме В.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы В  $R^* = R^{(2)}$ . Найти его номер  $N^* = N^{(2)}$ .

#### Шаги решения:

1) сравниваем данный вид исхода схемы В с подряд идущими исходами схемы А, с номерами из  $\bar{S}$ , считая число сравнений до их совпадения включительно, которое и дает искомым номер исхода схемы В.

### 3.3. Вероятностное распределение на множестве исходов схемы

Вероятностное распределение исходов схемы будем получать по вероятностям траекторий, оставшихся после отбраковки исходов схемы А, вычисляемых произведением вероятностей составляющих их итерационных переходов, которые получаются пропорциональным пересчетом оставшихся в пучках переходов каждой итерации с сохранением суммарной единицы.

### 3.4. Моделирование исходов схемы

Теперь, имея вероятностное распределение исходов схемы и решенную прямую ЗН, будем моделировать ее исходы по УМ [3], т. е. по разыгранному с известным распределением номеру исхода будем получать смоделированный исход по результату прямой ЗН.

Приведем числовой пример решения ЗН в прямой и обратной постановках в условиях примера 1 для исходов схемы В и перерасчет вероятностей ее исходов.

**Пример 4.** Пусть снова  $n = 4$ ,  $\bar{r} = (2, 3)$ ,  $m = 2$ .

Предварительное перечисление видов и номеров оставшихся из исходов схемы А в качестве исходов схемы В см. в примере 3.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы В  $N^* = N^{(2)} = 8$ . Найти его вид  $R^* = R^{(2)}$ . По примеру 3  $R^* = (2, (1,2), 1,2)$ . Найдем  $R^*$  по АЛГОРИТМУ 1.

### Шаги решения:

1) среди номеров исходов схемы А (см. пример 3)  $\bar{S} = (3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22)$  8-м порядковым номером стоит номер 15;

2) по результату решения прямой ЗН в схеме А ей соответствует исход  $(2, 1, (1, 2), 2)$ , который совпадает с искомым видом исхода  $R^* = R^{(2)}$  схемы В, что совпадает с результатом по примеру 3.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R^* = R^{(2)} = (2, 1, (1, 2), 2)$ . Найти его номер  $N^* = N^{(2)}$ . По примеру 3  $N^* = 8$ . Найдем  $N^*$  по АЛГОРИТМУ 1.

### Шаги решения:

1) находим 8-й по порядку из видов исходов схемы А с номерами  $\bar{S} = (3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22)$ , совпадающий с данным видом схемы В  $R^{(2)} = (2, 1, (1, 2), 2)$ , равный 15-му номеру исхода в схеме А, который соответствует 8-му номеру данного вида схемы В, что совпадает с результатом по примеру 3.

Произведем перерасчет вероятностного распределения на множестве исходов схемы В из равновероятного распределения исходов схемы А по рисунку.

В примере 3 показано, что после отбраковки исходов схемы А по ограничению в схеме В в пучках итоговых исходов остается по два исхода из четырех, откуда получаем число всех исходов равное 12, а их вероятности – по  $1/12$ .

## 4. АНАЛИЗ СХЕМЫ С

### 4.1. Вид, число исходов и структура графа перечисления исходов схемы

Не нарушая общности, считаем выделенные  $M$  ячеек первыми.

Вид исхода схемы записывается первыми  $M$  компонентами исхода схемы А.

Бесповторное перечисление исходов схемы С получаем отбраковкой повторов в результате их получения из перечисления исходов схемы А. В результате в общем случае получаем граф перечисления исходов схемы С другой пучковой структуры и в общем случае с неодинаковыми размерами пучков в итерациях. А это значит, что схема С представляет собой ОПД с действиями итераций. Тогда ЗН в прямой и обратной постановках здесь будем решать по формулам п. 1.4, а число исходов схемы получается сложением размеров пучков предпоследней итерации.

Приведем численный пример описанных расчетов результатов перечисления исходов схемы С.

**Пример 5.** Пусть, как и в примере 1,  $n = 4$ ,  $\bar{r} = (2, 3)$ ,  $m = 2$ . Тогда при перечислении по рисунку разных исходов схемы С после отбраковки из исходов схемы А:  $((1, 2), (1, 2))$  2 раза,  $((1, 2), 1)$  1 раз,  $(1, (1, 2))$  1 раз,  $((1, 2), 2)$  4 раза,  $((1, 2), 0)$  2 раза,  $(1, 2)$  2 раза,  $(2, (1, 2))$  2 раза,  $(0, (1, 2))$  2 раза,  $(2, 2)$  2 раза,  $(2, 0)$  1 раз,  $(0, 2)$  1 раз – всего 12 разных исходов. Количество повторов разных исходов приведено для перерасчета вероятностей исходов схемы С. Их последовательные номера в схеме А  $\bar{T} = (1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15, 21, 23, 24)$ .

### 4.2. Решение ЗН для исходов схемы

Вводим и решаем ЗН по АЛГОРИТМУ 2 пересчетом результатов ЗН в схеме А для исходов схемы С путем установления соответствия первых номеров исходов схемы А  $\bar{T}$ , порождающих разные последовательные исходы схемы С. Пусть эти номера фиксируются в процессе проведенной отбраковки исходов схемы А для схемы С.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы В  $N^* = N^{(2)}$ . Найти его вид  $R^* = R^{(2)}$ .

### Шаги решения:

1) среди номеров исходов схемы А  $\bar{S}$  находим по порядку  $N^*$ -й номер;

2) по найденному в 1) номеру по результату решения прямой ЗН в схеме А получаем его вид в схеме А, первые две компоненты которого дают искомый вид исхода в схеме С.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы В  $R^* = R^{(2)}$ . Найти его номер  $N^* = N^{(2)}$ .

### Шаги решения:

1) сравниваем данный вид исхода схемы С с подряд идущими исходами схемы А, с номерами из  $\bar{S}$ , считая число сравнений до их совпадения включительно, которое и дает искомый номер исхода схемы С.

### 4.3. Вероятностное распределение на множестве исходов схемы

Вероятностное распределение разных исходов схемы С получаем кратное числу повторов исходов схемы С при их получении из исходов схемы А увеличением вероятности равновероятных исходов схемы А.

### 4.4. Моделирование исходов схемы

Теперь, имея вероятностное распределение исходов схемы и решенную прямую ЗН, будем моделировать ее исходы по УМ [3], т. е. по разыгранному с известным распределением номеру исхода будем получать смоделированный исход по результату прямой ЗН.

Приведем числовой пример решения ЗН в прямой и обратной постановках в условиях

примера 1 для исходов схемы В и перерасчет вероятностей ее исходов.

**Пример 6.** Пусть снова  $n = 4$ ,  $\bar{r} = (2, 3)$ ,  $m = 2$ .

Предварительное перечисление видов и номеров оставшихся из исходов схемы А в качестве исходов схемы С см. в примере 5.

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы В  $N^* = N^{(2)} = 8$ . Найти его вид  $R^* = R^{(2)}$ . По примеру 5  $R^* = (1, 2)$ . Найдем  $R^*$  по АЛГОРИТМУ 2.

#### Шаги решения:

1) среди номеров исходов схемы А (см. пример 5)  $\bar{T} = (1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15, 21, 23, 24)$  8-м порядковым номером стоит номер 13;

2) по результату решения прямой ЗН в схеме А ей соответствует исход  $(1, 2)$ , который совпадает с искомым видом исхода  $R^* = R^{(2)}$  схемы С, что совпадает с результатом по примеру 5.

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R^* = R^{(2)} = (1, 2)$ . Найти его номер  $N^* = N^{(2)}$ . По примеру 5  $N^* = 8$ . Найдем  $N^*$  по АЛГОРИТМУ 2.

#### Шаги решения:

1) находим 8-й по порядку из видов исходов схемы А с номерами  $\bar{T} = (1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 15, 21, 23, 24)$ , совпадающий с данным видом схемы В  $R^{(2)} = (2, (1, 2))$ , равный 13-му номеру исхода в схеме А, который соответствует 8-му номеру данного вида схемы С, что совпадает с результатом по примеру 5.

Произведем перерасчет вероятностного распределения на множестве исходов схемы В

из равновероятного распределения исходов схемы А по рисунку.

В примере 5 получены кратности увеличения вероятностей исходов схемы С по сравнению с вероятностями исходов схемы А, что приводит к результатам следующих вероятностей исходов схемы С в порядке их перечисления:  $(2/24, 1/24, 1/24, 4/24, 2/24, 2/24, 3/24, 3/24, 3/24, 2/24, 1/24, 1/24)$  с суммарной единицей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
2. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750
3. Энатская Н. Ю. Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312

#### REFERENCES

1. Kolchin V. F., Sevast'yanov B. A., Chistyakov V. P. Random postings. Moscow: Nauka; 1976. (In Russ.)
2. Enatskaya N. Yu. Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2018;7:117–133. doi: 10.17076/mat750 (In Russ.)
3. Enatskaya N. Yu. Probabilistic models of combinatorial schemes. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.* 2020;13(3):103–111. doi: 10.14529/mmp200312 (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 06.12.2021; принята к публикации / accepted: 19.04.2022.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**  
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента  
прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

#### CONTRIBUTOR:

**Enatskaya Natalia**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

УДК 519.115:519.2

## КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

Для схемы сочетаний со случайным параметром проводится анализ по всем направлениям перечислительной комбинаторики: нахождения числа ее исходов, их перечисление, решения для них задачи нумерации, определения их вероятностного распределения и их моделирование.

Ключевые слова: выделенные ячейки; случайный параметр

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний со случайным параметром // Труды Карельского научного центра РАН. 2022. № 4. С. 75–79. doi: 10.17076/mat1526

### N. Yu. Enatskaya. COMBINATORY ANALYSIS OF A COMBINATION SCHEME WITH A RANDOM PARAMETER

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

Analysis covering the full range of enumerative combinatorics elements is carried out for a combination scheme with a random parameter: finding the number of its outcomes, enumerating them, solving the numbering problem for them, determining their probability distribution, and modeling them.

Key words: selected cells; random parameter

For citation: Enatskaya N. Yu. Combinatory analysis of a combination scheme with a random parameter. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2022;4:75–79. doi: 10.17076/mat1526

### ВВЕДЕНИЕ

В наглядной интерпретации размещения частиц по ячейкам к схеме сочетаний со случайным параметром приводит размещение  $r$  неразличимых частиц по  $n$  различным ячейкам, вмещающим каждая не более одной частицы, при рассмотрении исходов заполнения выделенных  $m$  из  $n$  ячеек, число частиц в ко-

торых  $X$  – случайно. Далее эту схему будем называть схемой  $A$ .

Не нарушая общности анализа схемы, будем считать выделенными первые  $m$  ячеек.

### 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем кратко результаты анализа для отдельных комбинаторных схем по перечисленным в аннотации направлениям (для каж-

дой схемы в своих обозначениях), используемые здесь далее.

### 1.1. Схема сочетаний

В [1] и [2] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы сочетаний из  $n$  элементов по  $r$  с общим числом исходов  $C_n^r$ .

Бесповторное перечисление всех  $C_n^r$  различных исходов схемы производится случайным процессом размещения частиц, начиная с нуля частиц с добавлением на каждом шаге еще одной частицы до заданного числа частиц  $r$ , независимо по всем ячейкам, правее последней занятой, с нумерацией исходов подряд, перечисляемых группами по возрастанию номеров первых занятых ячеек, а в каждой группе – по возрастанию номеров последних занятых ячеек. Номера элементов в каждом исходе схемы  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$  упорядочены по возрастанию, и значение  $n_m$ , ( $m = \overline{1, r}$ ) определяет величина  $l_m$  – порядковый номер  $n_m$  по возрастанию среди значений от  $(n_{m-1}+1)$  до  $n$ .

**Прямая задача нумерации (ЗН)** решается теоремой:

**Теорема 1.** Дан номер  $N$  исхода схемы сочетаний. Тогда в его искомом виде  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$  значение  $l_m$ , ( $m = \overline{1, r}$ ) вычисляется при  $l_0 = 1$ ,  $n_0 = 0$ ,  $C_0^0 = 1$  по формуле

$$l_m = \min j_m :$$

$$\left\{ N \leq \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{s_i=n_{i-1}+1}^{l_{m-1}-1} C_{n-s_i}^{r-i} + \sum_{s_m=n_{m-1}}^{j_m} C_{n-s_m}^{r-m} \right\},$$

где  $I(Z) = 0$  при  $Z > 0$  и  $I(Z) = 1$  при  $Z = 0$ .

**Обратная ЗН** решается теоремой:

**Теорема 2.** Дан исход  $R = (n_1 n_2 \dots n_r)$ . Тогда его номер  $N$  находится по формуле

$$N = \sum_{i=1}^r \sum_{s_i=n_{i-1}+1}^{n_i-1} C_{n-s_i}^{r-i} + 1,$$

где  $n_0 = 0$ .

### 1.2. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД)

В [1] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы ОПД.

В схеме проводится  $k$  последовательных действий,  $i$ -е из которых ( $i = \overline{1, k}$ ) на  $i$ -м шаге совершается  $N^{(i)}$  способами. Тогда число исходов этих  $k$  действий складывается из  $N^{(k-1)}$  пучков размерами  $\vec{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \dots, d_{N^{(k-1)}}^{(i)})$ , т. е. общее число  $N = N^{(k)}$  исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при

$$i = k \text{ и } N = N^{(0)} = 1$$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения  $i$  действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через  $R_{ij_i}$ , где  $i$  – номер действия, а  $j_i$  – номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из  $k$  действий и известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы, т. е. с известными числами исходов (размерами пучков) при каждом действии на каждой итерации. Под траекторией  $T$  исхода схемы понимается последовательность исходов, ведущая в графе их перечисления от начала к исследуемому на последней итерации.

**Прямая и обратная ЗН** решены следующими теоремами:

**Теорема 3.** Пусть совершается  $k$  действий и задан номер исхода  $N_*^{(k)}$ . Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории  $T$  в содержащих их пучках  $\{j_i\}$  от первой до  $k$ -й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для  $j_i$  ( $i = \overline{1, k}$ )

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)},$$

где все пучковые структуры действий  $\vec{d}^{(i)}$  заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t : \left( \sum_{l=1}^t d_l^{(k)} = A_k \leq N_*^{(k)} \right),$$

где  $\delta = 0$  при  $A_k = N_*^{(k)}$  и  $\delta = 1$  при  $A_k < N_*^{(k)}$ ; заменяя  $k$  на  $i$ , доходим по рекурренте до первого шага.

По решенной ЗН для всех действий найдем из  $\{j_i\}$  виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода  $R_*^{(k)}$ .

**Теорема 4.** Пусть совершается  $k$  действий и задан вид исхода  $R_*^{(k)} = \{j_1, \dots, j_k\}$ . Тогда его номер  $N_*^{(k)}$  определяется по рекуррентной формуле при  $i = k$ ,  $i = \overline{1, k}$

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с  $i = 1$  при  $N_*^{(1)} = j_1$ .

## 2. Вид исходов схемы А, их перечисление и число

В условиях схемы каждый ее исход будет иметь вид 1) возрастающего набора номеров непустых ячеек среди выделенных  $m$  или 2)  $m$ -размерной последовательности нулей и единиц, где нули стоят на местах пустых, а единицы – непустых ячеек среди первых  $m$  ячеек.

Процедуру прямого нумерованного перечисления исходов схемы представим в виде двух этапов – итераций: перебора всех возможных растущих количеств  $X$  попавших в первые  $m$  ячеек частиц и перечисления исходов ранее изученной (см. [1, 2]) при каждом исходе первого этапа схемы сочетаний в порядке установленного там перечисления. Наглядно этот процесс перечисления представляется графом по методу графов (МГ, см. [3]). Структура графа представляет собой реализацию двух описанных итераций, состоящих соответственно на первой итерации из одного пучка размером диапазона возможных значений случайного числа  $X$  частиц в выделенных ячейках, а на второй (итоговой) – из каждого исхода пучка первой итерации образуется пучок размера числа исходов схемы сочетаний с фиксированным значением случайного числа  $X$ , от которого зависит размер пучка. Таким образом, наша схема представляет собой обобщенную схему двух последовательных действий, приведенную в п. 1.2 по результатам, используемым далее.

**Теорема 5.** Число  $N$  разных исходов схемы А определяется по формуле

$$N = \sum_{k=t}^T C_m^k, \quad (1)$$

где для возможных значений числа  $k$  частиц, попадающих в выделенные ячейки, выполняется соотношение  $t = \max(0, r - n + m) \leq k \leq \min(r, m) = T$ .

*Доказательство.* Доказательство формулы (1) для числа  $N$  следует из вышеописанной структуры графа перечисления исходов схемы А как сумма размеров пучков ее итоговой итерации в диапазоне  $k \in (t, T)$  возможных значений с. в.  $X$ , а бесповторность перечисления исходов схемы А обеспечивается разными количествами размещаемых в выделенных ячейках частиц.  $\square$

## 3. РЕШЕНИЕ ЗН

Будем решать ЗН для схемы А в прямой и обратной постановках, определяя соответственно вид ее исхода  $R^*$  по ее номеру при

перечислении  $N^*$ , и наоборот. В общем виде ЗН в обеих постановках решена в схеме ОПД (см. в п. 1.1 или в [1]). Выпишем в форме пошаговых АЛГОРИТМОВ решения ЗН при заданных параметрах схемы  $(n, m, r)$ , откуда из п. 2 известны крайние значения  $(t, T)$  диапазона изменения целочисленной с. в.  $X$ .

**Прямая ЗН.** Дан номер исхода схемы  $N^*$ , требуется найти его вид  $R^*$ .

### Шаги решения:

1) определяем номер  $j$  пучка итоговой итерации, содержащий искомый исход схемы по формуле теоремы 3

$$j = \delta + \max s : \left\{ \sum_{k=t}^s C_m^k = A_s \leq N^* \right\}, \quad (2)$$

где  $\delta = 0$  при  $A_s = N^*$  и  $\delta = 1$  при  $A_s < N^*$ ;

2) находим номер  $h$  искомого исхода в пучках итоговой итерации по формуле

$$h = N^* - A_s; \quad (3)$$

3) по результату теоремы 1 решения прямой ЗН для схемы сочетаний (см. в п. 1.1 или [1] и [2]), с соответствующим номером  $h$  и значением числа  $k$  частиц  $X$ , в пучке с номером, равным  $j = k - t + 1$ , откуда при  $k = j + t - 1$  получаем искомый вид исхода схемы  $R^*$ .

**Обратная ЗН.** Дан вид исхода схемы  $R^*$ , требуется найти его номер  $N^*$ .

### Шаги решения:

1) из данного вида исхода  $R^*$  определяем число  $k$  непустых ячеек среди выделенных в схеме и номер пучка  $j = k - t + 1$ , содержащего искомый исход;

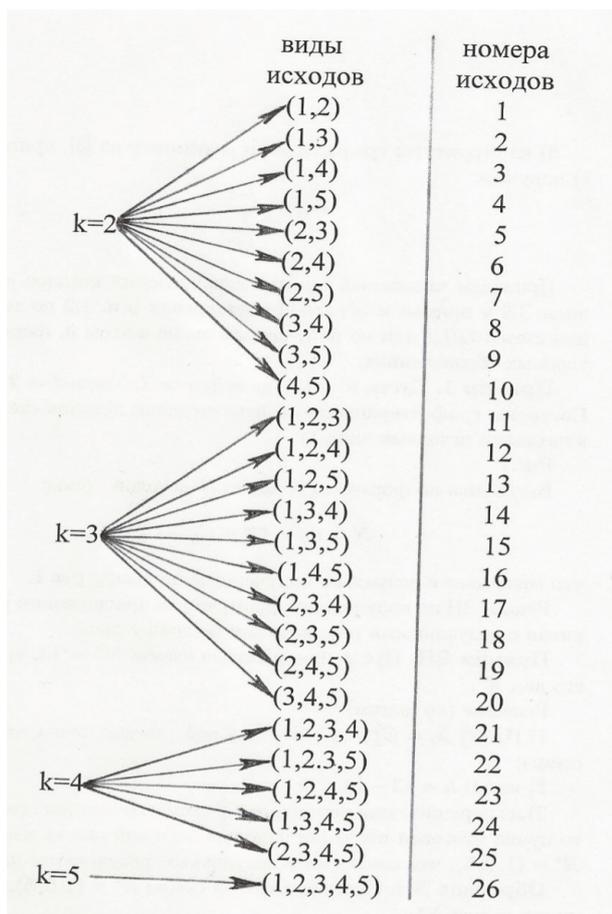
2) по результату решения обратной ЗН для схемы сочетаний п. 1.1 с параметрами чисел ячеек  $m$  и частиц  $k$  по виду  $R^*$  находим его номер  $h$ , совпадающий с номером искомого исхода в итоговом пучке;

3) по теореме 2 из п. 1.1 получаем

$$N^* = \sum_{k=t}^{j-1} C_m^k + h. \quad (4)$$

Приведем численный пример перечисления исходов схемы с решением ЗН в прямой и обратной постановках в п. 1.2 по теоремам 3 и 4 для схемы ОПД или по полученным выше в этом пункте формулам в более удобных обозначениях.

**Пример 1.** Пусть  $n = 10, m = 5, r = 7$ . Тогда  $t = 2 \leq k \leq 5 = T$ . Построим граф итерационного перечисления исходов схемы на рисунке с итоговыми исходами вида 1).



Граф перечисления исходов схемы в примере 1  
The graph of outcomes enumeration of the scheme in example 1

Вычислим по формуле (1) число  $N$  исходов схемы:

$$N = C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 26,$$

что совпадает с визуальным полученным по графу на рисунке.

Решим ЗН по полученным формулам ее приведенных в АЛГОРИТМАХ решений, сравнивая с визуальными результатами по графу на рисунке.

**Прямая ЗН.** Пусть номер исхода схемы  $N^* = 13$ , требуется найти его вид  $R^*$ .

Решение (по шагам):

1) из (2)  $A_s = C_5^2 = 10$ ;  $\delta = 1$ ;  $j = 2$  – номер пучка итогового исхода схемы;

2) из (3)  $h = 13 - 10 = 3$ ;

3) из перечисления исходов из  $C_5^3$  схемы сочетаний при  $j = 2$  – второго пучка итоговой итерации с  $k = 3$  находим искомый вид исхода нашей схемы  $R^* = (1, 2, 5)$ , что совпадает с визуальным результатом на рисунке.

**Обратная ЗН.** Пусть вид исхода схемы  $R^* = (1, 2, 5)$ , требуется найти его номер  $N^*$ .

Решение (по шагам):

1) из данного вида исхода  $R^* = (1, 2, 5)$  следует, что  $k = 3$ , и находим номер пучка искомого исхода  $j = 2$ ;

2) из результата решения обратной ЗН для схемы сочетаний по данному виду исхода  $R^* = (1, 2, 5)$  из результата решения обратной ЗН для схемы сочетаний с параметрами  $m = 5$  ячеек,  $k = 3$  частиц получаем его номер  $h = 3$  в пучке;

3) из (4)  $N^* = \sum_{k=t}^{j-1} C_m^k + h = C_5^3 + 3 = 13$ , что совпадает с визуальным результатом на рисунке.

#### 4. ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

**Теорема 6.** Пусть процесс бесповторного перечисления исходов схемы сочетаний приводит к равновероятным исходам. Тогда  $p_i(k)$  – вероятность  $i$ -го исхода ( $i = \overline{1, N}$ ) нашей схемы – в этом случае определяется формулой

$$p_i(k) = \frac{C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}, \quad (5)$$

где  $k = \overline{t, T}$ ,  $(k-t+1)$  – номер пучка этого  $i$ -го итогового исхода перечисления всех исходов схемы с совпадающими внутри каждого пучка вероятностями, а их номера в общем списке исходов, обозначенные индексом  $i$ , меняют значения в пределах пучка размером  $C_m^k$ .

**Доказательство.** В условиях теоремы вероятностное распределение случайной величины  $X$  имеет гипергеометрическое распределение  $P(X=k) = C_m^k C_{n-m}^{r-k} / C_n^r$ , где  $t = \max(0, r-n+m) \leq k \leq \min(r, m) = T$ , которое по описанной выше структуре графа перечисления исходов нашей схемы является распределением исходов единственного пучка первой итерации. На второй итоговой итерации мы имеем  $(T-t+1)$  пучков исходов соответствующих схем сочетаний с параметром  $k$  – числа частиц от  $t$  до  $T$  включительно, каждый со своими совпадающими в пучке вероятностями итерационных переходов, обратными размеру пучка  $C_m^k$ .

Отсюда следует, что вероятностное распределение на множестве исходов нашей схемы представляет собой группы совпадающих вероятностей в пределах исходов каждого итогового пучка, вычисляемых по траекториям исходов схемы как произведения соответствующей гипергеометрической вероятности исхода первой итерации с  $k = \overline{t, T}$  частицами в выделенных  $m$  ячейках и вероятности  $1/C_m^k$  исхода схемы сочетаний с параметром числа частиц

равным  $k$ . Тогда

$$p_i(k) = \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r} \frac{1}{C_m^k} = \frac{C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r},$$

где  $k = \overline{t, T}$ ,  $(k - t + 1)$  – номер пучка этого  $i$ -го итогового исхода перечисления всех исходов схемы с совпадающими внутри каждого пучка вероятностями, а их номера в общем списке исходов, обозначенные индексом  $i$ , меняют значения в пределах пучка размером  $C_m^k$ , что и утверждалось.  $\square$

**Замечание.** При неравновероятном распределении исходов схемы сочетаний, определяющем вероятностное распределение исходов первой итерации, вероятность каждого исхода нашей схемы вычисляется как вероятность ведущей к нему траектории.

Покажем на примере расчет вероятностей на множестве исходов нашей схемы в случае равновероятных исходов схемы сочетаний.

**Пример 2.** Будем находить вероятностное распределение исходов схемы в условиях примера 1, т. е. при  $n = 10$ ,  $m = 5$ ,  $r = 7$ . Тогда  $t = 2 \leq k \leq 5 = T$ .

Общее число исходов схемы  $N = 26$ , полученное в примере 1, в порядке их нумерации разделим на группы исходов совпадающих итоговых вероятностей в соответствии с размерами пучков второй итерации их перечисления, т. е. размерами:  $C_5^2 = 10$ ;  $C_5^3 = 10$ ;  $C_5^4 = 5$ ;  $C_5^5 = 1$ , соответствующие значениям  $k = \overline{2, 5}$  с. в.  $X$ . Тогда при каждом значении  $k$  по формуле (5) будем получать подряд совпадающие итоговые вероятности исходов нашей схемы в количестве  $C_5^k$ :

$$\begin{aligned} p_1(2) &= \dots = p_{10}(2) = 1/120; \\ p_{11}(3) &= \dots = p_{20}(3) = 5/120; \\ p_{21}(4) &= \dots = p_{25}(4) = 10/120; \\ p_{26}(5) &= 10/120. \end{aligned}$$

Проверка на распределение

$$10 \cdot \frac{1}{120} + 10 \cdot \frac{5}{120} + 5 \cdot \frac{10}{120} + 1 \cdot \frac{10}{120} = 1.$$

Поступила в редакцию / received: 05.12.2021; принята к публикации / accepted: 28.04.2022.  
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**  
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента  
прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

При изученном вероятностном распределении на множестве исходов схемы будем методом маркировки (см. [4]) разыгрывать его случайный номер от 1 до  $N$ . Тогда по результату прямой ЗН по разыгранному номеру исхода будем определять его вид, который считаем смоделированным исходом нашей схемы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды Карельского научного центра РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750
2. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.
3. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 8. С. 15–21.
4. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

## REFERENCES

1. Enatskaya N. Yu. Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2018;7:117–133. doi: 10.17076/mat750 (In Russ.)
2. Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of a combination scheme. *Promyshlennyye ASU i kontrolyery = Industrial ACS and Controllers*. 2015;8:33–38. (In Russ.)
3. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Graphs method for solving enumerative combinatorics. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika = Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*. 2014;8:15–21. (In Russ.)
4. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Stochastic modelling. Moscow: MIEM; 2012. 185 p. (In Russ.)

## CONTRIBUTOR:

**Enatskaya Natalia**  
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor

## ЕВСЕЙ ВИКТОРОВИЧ МОРОЗОВ (к 75-летию со дня рождения)



Евсей Викторович Морозов родился 3 октября 1947 г. в Ленинграде. В 1971 г. окончил физико-математический факультет Петрозаводского государственного университета. С 1971 по 1985 г. работал в НИИ экономики и экономико-математических методов планирования Госплана БССР (г. Минск), в 1977 г. окончил заочную аспирантуру при НИИ, а в 1979 г. защитил кандидатскую диссертацию в Институте кибернетики АН УССР (г. Киев) по специальности «математическая кибернетика». С 1986 г. работает в Петрозаводском государственном университете, сначала в должности старшего преподавателя, затем – доцента (с 1992 г.) и профессора (с 1996 г.). До 1996 г. являлся заместителем декана матема-

тического факультета по научной работе, принимал активное участие в открытии магистратуры на факультете. В 1996 г. защитил докторскую диссертацию в Институте проблем управления РАН по специальности «управление в технических системах». С 2000 г. работает в должности ведущего научного сотрудника лаборатории математической кибернетики Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, с 2019 г. – в должности главного научного сотрудника.

Е. В. Морозов является признанным специалистом в области теории вероятностей и теории массового обслуживания. Его основной сферой научных интересов является исследование условий стационарности систем массового обслуживания. Им был разработан универсальный метод, основанный на теории регенеративных процессов, позволяющий проводить такого рода анализ при достаточно общих ограничениях на распределения входного потока и времена обслуживания. С помощью данного метода получены условия стационарности для широкого класса систем обслуживания, включая системы с повторными вызовами, системы, зависящие от состояния, системы с оптическими буферами. Помимо этого, исследования Е. В. Морозова затрагивают следующие важные направления: развитие методов слабой и квазирегенерации, свойства монотонности процессов обслуживания, асимптотические методы анализа систем массового обслуживания, ускоренное оценивание характеристик систем массового обслуживания.

Е. В. Морозов был руководителем грантов Российского фонда фундаментальных исследований (2001–2003, 2004–2006, 2007–

2009, 2010–2012, 2015–2017 гг.), Международного научного фонда ИНТАС, Совета министров Северных стран и Шведского института. Под руководством и при участии Е. В. Морозова проведены такие значимые научные мероприятия, как семинар «Queueing Theory» (Петрозаводск, 1987), Международный семинар «Coupling and regeneration» (Петрозаводск, 1992), Международная конференция RAREEVENTS'99 (Рига, Латвия, 1999), Международный семинар «Applied Stochastic Models and Information Processes», посвященный 60-летию профессора Владимира Вячеславовича Калашникова (Петрозаводск, 2002), 5th Saint-Petersburg Workshop on Simulation (Санкт-Петербург, 2005), Российско-скандинавский симпозиум «Probability Theory and Applied Probability» (Петрозаводск, 2006), Международная конференция VALUETOOLS в 2006–2009 годах, Международный семинар «Networking Games and Management» (Петрозаводск, 2013), серия семинаров SMARTY (с 2018 г.). Евсей Викторович являлся членом оргкомитета и председателем секций на многих международ-

ных конференциях и семинарах по проблемам теории массового обслуживания, телекоммуникационных сетей, стохастического моделирования, прикладной теории вероятностей. Е. В. Морозов состоит в редколлегии журнала «Проблемы анализа», а также был приглашенным редактором специального выпуска журнала «Queueing Systems: Theory and Applications», Vol. 46 (2004), посвященного памяти В. В. Калашникова. Под руководством Евсея Викторовича в ИПМИ КарНЦ РАН проходит еженедельный семинар «Вероятностные модели коммуникационных систем».

Научную работу Е. В. Морозов успешно сочетает с преподавательской деятельностью: читает лекции в Петрозаводском государственном университете, руководит выпускными квалификационными работами бакалавров и магистрантов, осуществляет научное руководство аспирантами. Особая манера преподавания уже много лет делает Евсея Викторовича одним из наиболее любимых студентами лекторов Института математики и информационных технологий ПетрГУ.



Евсей Викторович Морозов со своими учениками

Под руководством Е. В. Морозова защищены следующие кандидатские диссертации:

1. Аминова И. В. «Моделирование сетей обслуживания методом слабой регенерации» (2003).
2. Бородина А. В. «Регенеративная модификация метода расщепления для оценивания вероятности перегрузки в системах обслуживания» (2008).
3. Лукашенко О. В. «Асимптотический анализ и оценивание качества обслуживания

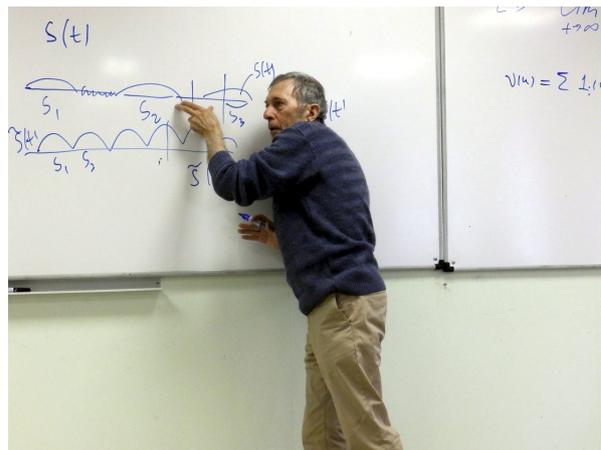
систем с гауссовским входным потоком» (2012).

4. Некрасова Р. С. «Регенеративное оценивание и его применение к системам с конечным буфером» (2012).
5. Румянцев А. С. «Вероятностный анализ процесса нагрузки вычислительного кластера» (2012).
6. Потахина Л. В. «Анализ стационарности стохастических моделей телекоммуникационных систем методами теории восстановления» (2015).

7. Жукова К. А. «Оценивание качества обслуживания коммуникационных систем с использованием теории больших уклонов и регенеративного анализа» (2018).

Студенты и аспиранты, обучавшиеся под руководством Евсея Викторовича, поощрялись стипендиями Республики Карелия, повышенными стипендиями за особые успехи в учебно-исследовательской деятельности, как молодые ученые были отмечены грантами РФФИ, Президента России. Е. В. Морозов является членом Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН, членом диссертационных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций в ПетрГУ.

Ученый с мировым именем, Евсей Викторович Морозов неоднократно выступал с приглашенными докладами и интенсивными курсами лекций, а также посещал с исследовательским визитом ведущие научные центры (Айзу, Япония; Лилль, Марне-ла-Валле, Антиб, София-Антиполис, Франция; Наварра, Сарагоса, Барселона, Памплона, Малага, Мадрид, Испания; Куопио, Оулу, Хельсинки, Финляндия; Гент, Бельгия; Тель-Авив, Хайфа, Израиль; Уорик, Великобритания; Пиза, Италия; Ольборг, Дания; Чалмерс, Лунд, Упсала, Умео, Стокгольм, Швеция; Гливице, Краков, Польша; Эйндховен, Нидерланды). В частности, Е. В. Морозов выступал с докладами на следующих международных научных мероприятиях: Symposium on stochastic modelling in communication networks (Лунд, Швеция, 1998); 2nd Nordic-Russian symposium on stochastic analysis (Бейтостолен, Норвегия, 1999); Modern Problems in Applied Probability (Новосибирск, 2000); 4th Saint-Petersburg Workshop on Simulation (Санкт-Петербург, 2001); A mathematical perspective on queueing and teletraffic modeling (Стокгольм, Швеция, 2004); Euro-FGI Workshop on *New Trends in Modelling, Quantative Methods and Measurements* (Гент, Бельгия, 2007); Mathematical methods for analysis and optimization of information telecommunication networks (Минск, Белоруссия, 2009); международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко (Москва, 2012); Conference on Man-Machine Interactions (Гливице, Польша, 2013); 1st European Conference on Queueing Theory (Бельгия, Гент, 2014); 14th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (Бельгия, Гент, 2019); Conference on Information Technology and Data Science (Венгрия, Дебрецен, 2022).



Выступление на семинаре «Вероятностные модели коммуникационных систем»

Результаты исследований Е. В. Морозова представлены в более чем 150 печатных работах. Евсей Викторович является автором и соавтором 6 монографий.

За успешную научную, научно-организационную и педагогическую деятельность Е. В. Морозов награжден:

- Почетной грамотой Министерства образования и науки Российской Федерации (2000),
- Почетной грамотой г. Петрозаводска (2008),
- Почетной грамотой ПетрГУ (2015),
- званием «Заслуженный деятель науки Республики Карелия» (2018).

Коллеги знают Евсея Викторовича как человека незаурядного и творческого, ценителя живописи, художественного слова, человека неиссякаемого трудолюбия. Ученики ценят его за отеческую заботу и отзывчивость, внимательное отношение и душевную теплоту общения. Е. В. Морозов ведет активный образ жизни, любит лыжный спорт и бег, с удовольствием путешествует. Благодаря легкости характера, доброжелательности и общительности Евсея Викторовича его рабочие отношения с многими коллегами переросли в дружеские и сохраняются на протяжении многих лет.

Коллектив сотрудников ИПМИ КарНЦ РАН сердечно поздравляет юбиляра и желает ему крепкого здоровья, творческих успехов в научной деятельности, интересных путешествий и встреч с коллегами.

*Ученики Евсея Викторовича Морозова –  
О. В. Лукашенко, Т. Е. Морозова,  
Р. С. Некрасова, И. В. Пешкова,  
А. С. Румянцев*

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ  
ПУБЛИКАЦИЙ Е. В. МОРОЗОВА**

**1985.** Некоторые результаты для системы массового обслуживания GI/GI/m с неидентичными каналами и потерями из очереди // Известия АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. № 2. С. 84.

**1988.** Критерий стационарности одного класса непуассоновских сетей массового обслуживания // Известия АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. № 3. С. 129.

**1993.** A comparison theorem for queueing system with non-identical channels // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1546. P. 130–133.

**1994.** Wide sense regenerative processes with applications to multi-channel queues and networks // Acta Applicandae Mathematicae. Vol. 34. P. 189–212.

**1997.** The stability of non-homogeneous queueing system with regenerative input // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 89. P. 407–421.

The tightness in the ergodic analysis of regenerative queueing processes // Queueing Systems. Vol. 27. P. 179–203.

**1998.** Elements of Queueing Theory. Petrozavodsk: PetrSU. 67 p.

**2004.** Communications systems: rare event simulation and effective bandwidths. Universidad Publica de Navarra. 68 p.

**2013.** Coupling and stochastic monotonicity of queueing process. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 72 с.

Введение в гауссовские системы обслуживания. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 80 с. (Совместно с О. В. Лукашенко.)

Распределения с тяжелыми хвостами и их применения. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 68 с. (Совместно с А. С. Румянцевым.)

Регенеративный метод и его применение в анализе систем обслуживания. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 76 с. (Совместно с Р. С. Некрасовой.)

Теория восстановления и ее применение в анализе коммуникационных систем. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 52 с. (Совместно с Р. С. Некрасовой, Л. В. Потахиной.)

Stability analysis of a two-station cascade queueing network // Annals of Operations Research. Vol. 202, iss. 1. P. 135–160. (Совместно с В. Steyaert.)

**2014.** Stability analysis of cascade networks via fluid limits // Performance Evaluation. Vol. 82. P. 39–54. (Совместно с R. Delgado.)

**2015.** Sufficient stability conditions for multi-class constant retrial rate systems // Queueing Systems. Vol. 82, iss. 1-2. P. 149–171. (Совместно с К. Avrachenkov, В. Steyaert.)

**2017.** Stability criterion of a multiserver model with simultaneous service // Annals of Operations Research. Vol. 252, no. 1. P. 29–39. (Совместно с А. S. Rumyantsev.)

**2019.** A large deviation analysis of retrial models with constant and classic retrial rates // Performance Evaluation. Vol. 135. Art. 102021. (Совместно с К. А. Zhukova.)

**2021.** Stability Analysis of Regenerative Queueing Models. Mathematical Methods and Applications. Springer Cham. 193 p. (Совместно с В. Steyaert.)

## АНДРЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ ПЕЧНИКОВ (к 70-летию со дня рождения)



Андрей Анатольевич Печников родился 10 сентября 1952 г. в Петрозаводске. После окончания средней школы №10 в 1969 г. он поступил на физико-математический факультет Петрозаводского госуниверситета (ПетрГУ), а в 1972 г. был переведен на 4 курс в Ленинградский госуниверситет (ЛГУ) на факультет прикладной математики – процессов управления. После окончания учебы год отслужил рядовым в Советской Армии. В 1975–1976 гг. проходил стажировку на факультете прикладной математики – процессов управления ЛГУ, затем в 1976–1979 гг. учился там же в очной аспирантуре. После окончания аспирантуры вернулся в ПетрГУ, где начал работать в должности преподавателя на кафедре математического анализа. В 1981 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1982 г. переведен на должность доцента кафедры прикладной математики и кибернетики, в 1985 г. ему было присвоено звание доцента. С 1987 по 1991 г. работал деканом математического фа-

культета ПетрГУ, с 1991 по 1996 г. – первым проректором ПетрГУ. Был одним из организаторов Университетского лицея в Петрозаводске и Кольского филиала ПетрГУ (Апатиты), а также Инновационно-технологического парка ПетрГУ. С 1996 по 2000 г. работал доцентом кафедры информатики и математического обеспечения и директором Центра дистанционного образования по Европейскому Северу. Работая в ПетрГУ, участвовал в разработке первой концепции информатизации Республики Карелия, руководил проектом «Организация учебно-научного центра дистанционного образования ПетрГУ и Кольского филиала ПетрГУ» по федеральной программе «Интеграция».

Андрей Анатольевич внес значительный вклад в развитие и информатизацию муниципального самоуправления. В 2000–2002 гг. работал начальником информационно-аналитического управления Администрации местного самоуправления Петрозаводска. С июля 2002 по декабрь 2005 г. – исполнительный директор Карельского регионального общественного фонда развития общественного самоуправления «Инициатива». Работая в Администрации г. Петрозаводска, участвовал в создании ее официального сайта и виртуальной приемной. В 2003–2004 гг. был руководителем проекта «Создание информационно-коммуникационной среды поддержки общественного участия и межмуниципальной кооперации» (грант Фонда «Евразия», соисполнитель – ИПМИ КарНЦ РАН), являлся ответственным исполнителем проекта «Повышение уровня общественного участия в разработке приоритетов развития экологического туриз-

ма в Лахденпохском районе Республики Карелия» (грант Посольства Королевства Нидерланды).

В январе 2006 г. избран по конкурсу на должность старшего научного сотрудника лаборатории телекоммуникационных систем ИПМИ КарНЦ РАН, в 2012 г. по конкурсу был переведен на должность ведущего научного сотрудника, а в 2015 г. стал главным научным сотрудником; с 2014 г. руководит лабораторией телекоммуникационных систем ИПМИ КарНЦ РАН.

Сфера научных интересов А. А. Печникова – базы данных, дискретная математика, теория графов, сложные системы, системы автоматизации производства, исследования глобальной сети Интернет. Начиная с 2006 г. научные исследования А. А. Печникова сконцентрированы в области разработки методических подходов и математических методов, обеспечивающих доступность и удобство использования информационных научных ресурсов. В течение 2006–2007 гг. руководил проектом Яндекса «Интернет-математика 2007» (математические модели согласованного поведения малых Интернет-сообществ), а также госконтрактом с Минэкономразвития РК «Модернизация и пополнение интернет-коллекции минерально-сырьевой базы Республики Карелия для инвестора», являлся исполнителем по госконтракту с Минобрнауки РФ «Разработка комплекса математических моделей, методов и программного обеспечения для управления сложными производственными процессами» в ПетрГУ (2008 г.). В 2008–2010 гг. руководил проектом по гранту РФФИ «Вебометрические исследования научных интернет-ресурсов российского Интернета». В 2011 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук по теме «Разработка математических моделей, методов и программных средств для исследования взаимосвязей регламентируемых веб-сайтов». Являлся руководителем ряда тем НИР и научных проектов: «Информационная система вебометрического ранжирования веб-ресурсов научных учреждений России» (проект РГНФ 12-03-12001, 2012–2014 гг.), «Исследование, разработка и развитие перспективных моделей, методов и технологий построения и применения информационно-вычислительных систем для поддержки научной деятельности» (тема НИР № 0219-2014-0005 (№ 7.1), 2014–2016 гг., сорук. Крижановский А. А.), «Разработка вебометрических и эргономических моделей и методов анализа эффективности присутствия в Ве-

бе информационных веб-пространств крупных организаций» (проект РФФИ № 15-01-06105, 2015–2017 гг., совместный проект с СПбГУ, сорук. Сергеев С. Л.), «Перспективные модели, методы и технологии применения и построения информационно-вычислительных систем» (тема НИР № 0219-2017-0007, 2017–2019 гг.), «Cross Border Business Opportunities Creation Empowered by Modern IT and IoT Technologies» (проект приграничного сотрудничества СВС Karelia КА4033, 2018–2022 гг.).

В 2012 г. награжден Почетной грамотой КарНЦ РАН за значительный вклад в развитие фундаментальных и прикладных исследований, активную научно-организаторскую и педагогическую деятельность, а в 2018 г. – ведомственной наградой ФАНО, почетной грамотой за безупречный труд и высокие достижения в профессиональной деятельности.

А. А. Печников является автором более 140 научных трудов, в том числе книги по центральному процессорам ЭВМ. В настоящее время ведет исследовательскую работу в ИПМИ КарНЦ РАН, педагогическую работу в ПетрГУ и Санкт-Петербургском государственном университете.

Андрей Анатольевич общительный и контактный человек, хороший педагог и наставник, заядлый рыбак, заботливый муж, отец и дедушка. Для сотрудников возглавляемой им лаборатории А. А. Печников – не только опытный руководитель и коллега, но и старший товарищ, внимательно и бережно относящийся к вверенному ему коллективу.

Коллеги сердечно поздравляют юбиляра и желают ему отличного здоровья, творческого долголетия и успехов!

*Коллектив лаборатории ТКС*

#### **СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ А. А. ПЕЧНИКОВА**

**1978.** Формирование ответа на запрос в универсальной ИПС // Проблемы системотехники и АСУ. СЗПИ. Вып. 1. С. 149–154. (Совместно с А. А. Пекки.)

**1983.** Конечный автомат как функциональная модель информационной системы // Программирование. № 2. С. 61–68.

**1984.** Оптимальное размещение динамического информационного массива // Кибернетика. № 2. С. 115–117.

Finite automaton as a functional model of an information system // Programming and Computer Software. Vol. 9, no. 2. P. 95–101.

**2005.** Создание информационно-коммуникационной среды поддержки развития общественного участия и межмуниципальной кооперации. Петрозаводск: Копистар Оптима. 33 с. (Совместно с В. В. Мазаловым, И. В. Раковским.)

**2006.** Серия «Информатика: Основы и приложения». Т. 1. Центральные процессоры персональных ЭВМ. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 188 с. (Совместно с Ю. А. Богоявленским, М. В. Дьяконовым.)

**2007.** Математические модели размещения ссылок в локализованной системе Интернет-ресурсов // Системы управления и информационные технологии. № 2(28). С. 92–96.

**2008.** Рейтинг официальных web-сайтов университетов России и Финляндии: сравнительный анализ // Информационные ресурсы России. № 3(103). С. 25–28. (Совместно с О. Г. Илюкевич.)

О некоторых подходах к моделированию клик-сообществ // Системы управления и информационные технологии. № 3(33). С. 15–18.

Вебометрические исследования Web-сайтов университетов России // Информационные технологии. № 11. С. 74–78.

Многофункциональная программная система разработки приложений для задач раскроя материалов и комплектования изделий // Автоматизация и современные технологии. № 11. С. 10–14. (Совместно с В. А. Кузнецовым, А. И. Шабаевым.)

**2009.** Разработка инструментов для вебометрических исследований гиперссылок научных сайтов // Вычислительные технологии. Т. 14, № 5. С. 66–78. (Совместно с Н. Б. Луговой, Ю. В. Чуйко, И. Э. Косинец.)

**2010.** Методы исследования регламентируемых тематических фрагментов Web // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Серия: Прикладные проблемы управления макросистемами. Т. 59. С. 134–145.

**2011.** Исследование взаимосвязей между веб-сайтами научных библиотек университетов России // Дистанционное и виртуальное обучение. № 7. С. 13–24.

**2012.** Адаптивный краулер для поиска и сбора внешних гиперссылок // Управление большими системами. Вып. 36. М.: ИПУ РАН. С. 301–315. (Совместно с Д. И. Чернобровкиным.)

Webometric analysis of Nigerian university websites // Webology. Vol. 9, no. 1. P. 1–11. (Совместно с А. Nwohiri.)

Изучение мотиваций создания внешних гиперссылок на университетских веб-сайтах:

опыт Нигерии // Информационное общество. № 6. С. 26–34. (Совместно с Э. М. Нвохири.)

О взаимосвязях российского суперкомпьютерного сообщества в Вебе // Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений: Труды международной суперкомпьютерной конференции (г. Новороссийск, 17–22 сентября 2012 г.). М.: Изд-во МГУ. С. 573–576.

**2013.** Применение вебометрических методов для исследования веб-пространства Карельской государственной педагогической академии // Современные проблемы науки и образования. № 2. С. 232. (Совместно с О. Ю. Дербеневой.)

Применение вебометрических методов для исследования информационного веб-пространства научной организации (на примере Карельского научного центра РАН) // Труды КарНЦ РАН. № 1. С. 86–95.

**2014.** Размышления о вебометрическом рейтинге // Научная периодика: проблемы и решения. № 1. С. 17–21.

О некоторых тенденциях изменения связности российского академического Веба // Информационные ресурсы России. № 2(138). С. 16–20.

Adaptive Crawler for External Hyperlinks Search and Acquisition // Automation and Remote Control. Vol. 75, no. 3. P. 587–593. (Совместно с D. I. Chernobrovkin.)

**2015.** Построение и исследование веб-графа информационного веб-пространства Санкт-Петербургского государственного университета // Фундаментальные исследования. № 10, ч. 3. С. 512–517.

Webgraph connectivity and dynamics: Russian research institutions // Webology. Vol. 12, no. 1. P. 1–13. (Совместно с А. М. Nwohiri.)

**2017.** Теоретико-игровые методы нахождения сообществ в академическом Вебе // Труды СПИИРАН. Вып. 55. С. 237–254. (Совместно с Н. А. Ермолиным, В. В. Мазаловым.)

О сходстве структур веб-пространств с одинаковой тематикой // Фундаментальные исследования. № 7. С. 59–64. (Совместно с А. Г. Павловым.)

Программы-краулеры для сбора данных о представительских сайтах заданной предметной области – аналитический обзор // Современные наукоемкие технологии. № 2. С. 58–62. (Совместно с Е. М. Сотенко.)

About crawling scheduling problems. BOINC:FAST 2017. Third International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development. Petrozavodsk, Russia, August

28 – September 01, 2017. CEUR Proceedings. P. 49–55. (Совместно с Denis I. Chernobrovkin, Anthony M. Nwohiri.)

**2018.** Ассортативное смешивание в российском академическом Вебе // ВИНТИ РАН. № 1. С. 8–13.

О схожести сайтов и колмогоровской сложности // Norwegian Journal of Development of the International Science. 2018. Vol. 1, no. 14. P. 25–29.

Об использовании колмогоровской сложности для исследования изображений // Международный научно-исследовательский журнал. № 5(71). С. 59–61.

**2019.** Application of webometrics methods for analysis and enhancement of academic site structure based on page value criterion // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Vol. 15, iss. 3. P. 337–352. (Совместно с А. М. Nwohiri.)

Программы-архиваторы для вычисления колмогоровской сложности // Международ-

ный журнал прикладных и фундаментальных исследований. № 7. С. 118–123. (Совместно с Д. А. Прусским.)

**2020.** Properties of Communication Graph of Academic Web. Proceedings of the 21st Conference on Scientific Services & Internet (SSI-2019). CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2543. P. 414–421.

A Task Scheduling Strategy for a Parallel Distributed Crawler // International Journal of Information Security, Privacy and Digital Forensics. Vol. 3, no. 2. P. 46–60. (Совместно с D. I. Chernobrovkin, A. M. Nwohiri.)

**2021.** Сравнительный анализ наукометрических показателей журналов Math-Net.ru и eLibrary.ru // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. № 56. С. 112–121.

О некоторых свойствах графов сотрудничества ученых в Math-Net.Ru // Электронные библиотеки. Т. 24, № 1. С. 184–196. (Совместно с Д. Е. Чебуковым.)

## АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ СОКОЛОВ (к 70-летию со дня рождения)



Андрей Владимирович Соколов родился 29 мая 1952 г. в Петрозаводске. После окончания средней школы № 30 в 1969 г. поступил в Петрозаводский госуниверситет на физико-математический факультет, а в 1972 г. был направлен для продолжения обучения на факультет прикладной математики – процессов управления Ленинградского госуниверситета, который окончил в 1974 г. После военной службы в рядах Советской Армии в 1975 г. стажировался в Ленинградском госуниверси-

тете, затем учился там же в аспирантуре в 1976–1979 гг. С 1979 г. преподает в Петрозаводском государственном университете.

В 1982 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 2006 г. – докторскую диссертацию в диссертационном совете математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета по теме: «Математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных». В 2000 г. А. В. Соколов был избран по конкурсу старшим научным сотрудником Института прикладных математических исследований (ИПМИ) КарНЦ РАН, а с 2007 г. – ведущим научным сотрудником.

А. В. Соколов является высококвалифицированным специалистом в области теоретической информатики. Сфера его научных интересов – математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных. А. В. Соколов – автор и соавтор более 90 научных работ, в которых содержатся результаты, представляющие теоретический и практический интерес для разработки программных и аппаратных комплексов, требующих динамического распределения памяти.

А. В. Соколов является членом Ученого совета ИПМИ КарНЦ РАН, членом редакционной коллегии научного периодического издания «Стохастическая оптимизация в информатике», издающегося в Санкт-Петербургском университете, членом редакционной коллегии серии «Математическое моделирование и информационные технологии» журнала «Труды Карельского научного центра РАН», экспер-

том РФФИ по направлению «Математика, механика, информатика». Работал в составе специализированного совета по защите кандидатских диссертаций при ИПМИ КарНЦ РАН. Выступал в качестве рецензента ряда научных работ, был оппонентом на защите кандидатских и докторских диссертаций. Руководил рядом госбюджетных тем ИПМИ КарНЦ РАН и грантами РФФИ.

Доцент по кафедре информатики и математического обеспечения ПетрГУ с 1992 г., доцент по специальности «Дискретная математика и математическая кибернетика» с 2005 г., профессор по кафедре информатики и математического обеспечения ПетрГУ с 2009 г. Стаж педагогической работы в Петрозаводском университете составил более 30 лет. А. В. Соколов читал лекционные курсы по дисциплинам: «Информатика. Структуры данных»; «Языки и методы программирования (C++)»; «Введение в параллельные вычисления»; «Методы и алгоритмы параллельных вычислений». Являлся инициатором введения в учебный процесс ПетрГУ курсов по языкам программирования Паскаль, C++, Java и по технологиям параллельного программирования. Руководил курсовыми, дипломными работами и магистерскими диссертациями студентов математического факультета ПетрГУ. По совместительству работал профессором кафедры прикладной информатики Петрозаводского филиала Московско-

го Института международного права и экономики им. А. С. Грибоедова.

Избирался членом профкома ПетрГУ и членом Объединенного комитета профсоюза КарНЦ РАН.

В разные годы Андрей Владимирович работал председателем Государственной экзаменационной комиссии в Карельском педагогическом институте и в Петрозаводском университете. В 1991 г. он председатель жюри городской и республиканской школьных олимпиад по программированию и председатель предметной комиссии по математике и информатике на вступительных экзаменах в ПетрГУ. Прошел научные стажировки в Ленинградском, Московском и Люблинском (Польша) университетах.

А. В. Соколов – высококвалифицированный специалист в области теоретической информатики, опытный педагог, ведущий ученый. Под его руководством защищено две кандидатские диссертации.

Андрей Владимирович Соколов руководит научным семинаром «Теоретическая информатика» для студентов, аспирантов и научных работников. Возглавляемый им коллектив успешно работает по его научной тематике.

Сотрудники ИПМИ КарНЦ РАН сердечно поздравляют юбиляра и желают ему крепкого здоровья и творческих успехов в научной деятельности.

*А. А. Крижановский, Е. А. Аксенова*



Андрей Владимирович Соколов и его ученики

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ  
ПУБЛИКАЦИЙ А. В. СОКОЛОВА**

**1986.** Оценка эффективности методов динамического распределения нестраничной памяти // Программирование. № 5. С. 65–71.

**2001.** Mathematical Models and Optimal Algorithms of Dynamic Data Structure Control. Fundamental of Computation Theory // 13th International Symposium. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2138. Springer-Verlag. P. 416–419.

**2002.** Математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных (монография). Петрозаводск: Изд-во ПГУ. 215 с.

**2004.** Исследование немарковской модели управления стеком в двухуровневой памяти // Программирование. № 1. С. 1–10. (Совместно с Е. А. Аксеновой, А. А. Лазутиной.)

**2007.** Оптимальное управление двумя параллельными стеками в двухуровневой памяти // Дискретная математика. № 1. С. 67–75. (Совместно с Е. А. Аксеновой.)

**2009.** Оптимальное управление  $n$  FIFO-очередями на бесконечном времени // Информационно-управляющие системы. № 6. С. 46–54. (Совместно с Е. А. Аксеновой, А. В. Драцем.)

Анализ некоторых методов размещения в памяти очереди с  $n$  приоритетами // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 5. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета. С. 115–121. (Совместно с А. В. Драцем.)

Математические модели оптимального управления динамическими структурами данных // Математические машины и системы. № 1. С. 144–149. (Совместно с Е. А. Аксеновой.)

**2012.** Оптимальное разбиение общей памяти для двух последовательных циклических FIFO-очереди // Прикладная информатика. № 4(40). С. 113–125. (Совместно с Н. В. Каблуковой.)

**2015.** Some problems of optimal control of two parallel FIFO-queues // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014). AIP Conf. Proc. Vol. 1648. (Совместно с Е. А. Barkovsky.)

The circular representation of 2 FIFO-queues in single level memory // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014). AIP Conf. Proc. Vol. 1648. (Совместно с А. В. Драцем.)

The Mathematical Model and The Problem of Optimal Partitioning of Shared Memory for Work-Stealing Deques // Lecture Notes in Computer Science: 13th International Conference on Parallel Computing Technologies, PaCT 2015. Vol. 9251. P. 102–106. (Совместно с Е. А. Barkovsky.)

**2016.** Модель управления двумя параллельными FIFO-очередями, двигающимися друг за другом в общей памяти // Информационно-управляющие системы. № 1(80). С. 65–73. (Совместно с Е. А. Барковским.)

**2018.** Staccato: Cache-Aware Work-Stealing Task Scheduler for Shared-Memory Systems // Computational Science and Its Applications. ICCSA 2018. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 10963. Springer, Cham. P. 91–102. (Совместно с R. Kuchumov, V. Korkhov.)

**2019.** Staccato: shared-memory work-stealing task scheduler with cache-aware memory management // International Journal of Web and Grid Services. Vol. 15, no. 4. P. 394–407. (Совместно с R. Kuchumov, V. Korkhov.)

The Models and Methods of Optimal Control of Three Work-Stealing Deques Located in a Shared Memory // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 40, no. 11. P. 1763–1770. (Совместно с Е. А. Aksenova, Е. А. Barkovsky.)

**2020.** Об оптимальном управлении Work-Stealing деками в двухуровневой памяти // Вестник компьютерных и информационных технологий. Т. 17, № 4. 2020. С. 51–60. (Совместно с А. А. Лазутиной.)

**2021.** About Optimal Management of Work-Stealing Deques in Two-Level Memory // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 42. P. 1475–1482. (Совместно с Е. А. Aksenova, А. А. Lazutina.)

Optimal Parallel Control of  $n$  FIFO-Queues in Shared Memory // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 42. P. 44–49. (Совместно с Е. А. Aksenova.)

**Учебные пособия**

**2016.** Методы и алгоритмы параллельных вычислений: электронное учебное пособие для студентов вузов. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 101 с. (Совместно с Е. А. Барковским, Р. И. Кучумовым, А. М. Сазоновым.)

Объектно-ориентированное программирование на C++. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 44 с. (Совместно с Е. А. Аксеновой.)

Структуры данных, сортировка и поиск на C++. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ. 53 с. (Совместно с Е. А. Аксеновой.)

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

(требования к работам, представляемым к публикации  
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, утраты науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учётом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редколлегия серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляет за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил её оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы анкеты и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия анкеты и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее чем через месяц после получения рецензии. Перед опубликованием авторам высылаются электронная версия статьи, которую авторы вычитывают и заверяют.

Журнал имеет систему электронной редакции на базе Open Journal System (OJS), позволяющую вести представление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегиями серий и рецензентами в электронном формате и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Содержание выпусков Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные версии статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

### ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Объём рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объём рисунков не должен превышать 1/4 объёма статьи. Рукописи большего объёма (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

При оформлении рукописи применяется полуторный межстрочный интервал, шрифт Times New Roman, кегль 12, выравнивание по обоим краям. Размер полей страницы – 2,5 см со всех сторон. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в правом нижнем углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

Рукописи подаются в электронном виде в систему электронной редакции на сайте <http://journals.krc.karelia.ru>, либо высылаются на e-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru), или же представляются в редакцию лично (г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, каб. 502).

**Для публикации в выпусках серии «Математическое моделирование и информационные технологии» рукописи принимаются в формате .tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу: <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>. Статья в файле с расширением .pdf загружается на сайт журнала <http://journals.krc.karelia.ru>. Исходный файл с расширением .tex и необходимые рисунки загружаются на 4-м шаге «Загрузка дополнительных файлов».**

### **Обязательные элементы рукописи располагаются в следующем порядке:**

УДК курсивом в левом верхнем углу первой страницы; заглавие статьи на русском языке полужирным шрифтом; инициалы и фамилии авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название и полный почтовый адрес организации – места работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов аффилированным организациям; автора, ответственного за переписку, следует отметить звездочкой и указать в аффилиации его электронный адрес); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; указание источников финансирования выполненных исследований на русском языке.

Далее располагаются все вышеуказанные элементы на английском языке.

Текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: **Введение. Материалы и методы. Результаты и обсуждение. Выводы** либо **Заключение**); благодарности; списки литературы на языке оригинала (**Литература**) и на английском языке (**References**); таблицы на русском и английском языках (на отдельных листах); рисунки (на отдельных листах); подписи к рисункам на русском и английском языках (на отдельном листе).

На отдельном листе дополнительные сведения об авторах: фамилии, имена, отчества всех авторов полностью на русском и английском языке; должности, ученые звания, ученые степени авторов; адрес электронной почты каждого автора; можно указать телефон для контакта редакции с авторами статьи.

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать ее содержание и состоять из 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, создавать возможно полное представление о содержании статьи и иметь объем не менее 200 слов. Рукопись с недостаточно раскрывающей содержание аннотацией может быть отклонена.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ (как правило, не менее пяти). Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце точка не ставится.

Раздел «Материалы и методы» должен содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

Изложение результатов должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. На табличный и иллюстративный материал следует ссылаться так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т.д.), фотографии, помещаемые на клейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой в разделе «Заключение» основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во «Введении». Ссылки на литературу в работах **серии «Математическое моделирование и информационные технологии»** даются цифрами.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Заголовки таблиц, заголовки и содержание столбцов, строк, а также примечания приводятся на русском и английском языках. Диаграммы и графики не должны дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, поясняются в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.

РИСУНКИ представляются отдельными файлами с расширением TIFF (\*.TIF) или JPG. При первичной подаче материала в редакцию рисунки вставляются в общий текстовый файл. При сдаче материала, принятого в печать, все рисунки должны быть представлены в виде отдельных файлов в вышеуказанном формате. Графические материалы могут быть снабжены указанием желательного размера рисунка, пожеланиями и требованиями к конкретным иллюстрациям. На каждый рисунок должна быть как минимум одна ссылка в тексте.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ приводятся на русском и английском языках, должны содержать достаточную информацию для того, чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях, детали на рисунках следует обозначать цифрами или буквами, значение которых также приводится в подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все прочие сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. Располагаются после основного текста статьи отдельным абзацем, в котором авторы выражают признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и организациям, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи.

ИНФОРМАЦИЯ О КОНФЛИКТЕ ИНТЕРЕСОВ. При подаче статьи авторы должны раскрыть потенциальные конфликты интересов, которые могут быть восприняты как оказавшие влияние на результаты или выводы, представленные в работе. Если конфликт интересов отсутствует, следует об этом сообщить в отдельной формулировке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ оформляется по ГОСТ Р 7.0.5-2008. Источники располагаются в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами авторов ставится пробел.

REFERENCES. Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Библиографические записи источников оформляются согласно стилю Vancouver (см. примеры в ГОСТ Р 7.0.7–2021 и образцы ниже). Заголовки русскоязычных работ приводятся на английском языке; для журналов и сборников, в которых размещены цитируемые работы, указывается параллельное английское наименование (при его наличии) либо русскоязычное наименование приводится в латинской транслитерации (вариант BSI) с переводом на английский язык. Прочие элементы библиографической записи приводятся на английском языке (русскоязычное название издательства транслитерируется). При наличии переводной версии источника в References желательно указать ее. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала.

Для каждого источника обязательно указание DOI при его наличии; если приводится адрес интернет-страницы источника (URL), нужно указать дату обращения к ней.

**Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences**  
**No. 4, 2022**  
**“MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES”**

**TABLE OF CONTENTS**

B. Z. Belashev. LUNAR CYCLES OF GEOMAGNETIC ACTIVITY AND EMERGENCY AMBULANCE CALLS .....	5
Yu. V. Zaika, E. K. Kostikova. IDENTIFICATION OF THE TWO-PEAK SPECTRUM OF HYDROGEN THERMAL DESORPTION .....	14
A. V. Ivanov. ON DIMENSIONS OF FINITE APPROXIMATION AND FUNCTORS PRESERVING $\varepsilon$ -NETS .....	30
A. N. Kirillov, A. S. Ivanova. ESTIMATING THE TIME WHEN THE POPULATION LEAVES THE PATCH .....	37
M. M. Leri. MINIMUM AND MAXIMUM OF THE AVERAGE DISTANCE IN POWER-LAW CONFIGURATION GRAPHS .....	45
Yu. L. Pavlov. CONNECTIVITY CONDITIONS OF INTERNET GRAPHS .....	51
A. M. Sazonov. ABOUT OPTIMAL CONTROL OF RESOURCE ALLOCATION BY EFFICIENCY LEVELS .....	57
N. Yu. Enatskaya. PREASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE GENERALIZATION OF THE CLASSICAL SCHEME OF PARTICLE ALLOCATION BY SETS WITH CONDITIONS .....	67
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORY ANALYSIS OF A COMBINATION SCHEME WITH A RANDOM PARAMETER .....	75
DATES AND ANNIVERSARIES	
Evsey V. Morozov (on the 75 <sup>th</sup> anniversary) .....	80
Andrey A. Pechnikov (on the 70 <sup>th</sup> anniversary) .....	84
Andrey V. Sokolov (on the 70 <sup>th</sup> anniversary) .....	88
INSTRUCTIONS FOR AUTHORS .....	91

Научный журнал

**Труды Карельского научного центра  
Российской академии наук**  
№ 4, 2022

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

*Печатается по решению Ученого совета  
Федерального исследовательского центра  
«Карельский научный центр Российской академии наук»*

Выходит 8 раз в год

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
Регистрационная запись ПИ № ФС 77-72429 от 28.02.2018 г.

Редактор А. И. Мокеева  
Компьютерная верстка Л. Э. Бюркланд

Подписано в печать 22.06.2022. Дата выхода 30.06.2022. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,6. Усл. печ. л. 10,9.  
Тираж 100 экз. Заказ 724. Цена свободная

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»  
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН  
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50