

Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр  
Российской академии наук»



# **ТРУДЫ**

## **КАРЕЛЬСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

№ 6, 2021

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Петрозаводск  
2021

Главный редактор  
А. Ф. ТИТОВ, член-корр. РАН, д. б. н., проф.

Редакционный совет

А. М. АСХАБОВ, академик РАН, д. г.-м. н., проф.; О. Н. БАХМЕТ (зам. главного редактора), член-корр. РАН, д. б. н.; А. В. ВОРОНИН, д. т. н., проф.; И. В. ДРОБЫШЕВ, доктор биологии (Швеция – Канада); Э. В. ИВАНТЕР, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; Х. ЙООСТЕН, доктор биологии, проф. (Германия); А. М. КРЫШЕНЬ, д. б. н.; Е. В. КУДРЯШОВА, д. флс. н., проф.; О. Л. КУЗНЕЦОВ, д. б. н.; Н. В. ЛУКИНА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; В. В. МАЗАЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Н. Н. НЕМОВА, член-корр. РАН, д. б. н., проф.; О. ОВАСКАЙНЕН, доктор математики, проф. (Финляндия); О. Н. ПУГАЧЕВ, академик РАН, д. б. н.; С. А. СУББОТИН, доктор биологии (США); Д. А. СУБЕТТО, д. г. н.; Н. Н. ФИЛАТОВ, член-корр. РАН, д. г. н., проф.; Т. Э. ХАНГ, доктор географии (Эстония); П. ХЁЛЬТТЯ, доктор геологии, проф. (Финляндия); К. ШАЕВСКИЙ, доктор математики, проф. (Польша); В. В. ЩИПЦОВ, д. г.-м. н., проф.

Редакционная коллегия серии  
«Математическое моделирование и информационные технологии»

В. А. ВАТУТИН, д. ф.-м. н., проф.; Ю. В. ЗАЙКА, д. ф.-м. н., проф.; А. Н. КИРИЛЛОВ, д. ф.-м. н., доцент;  
В. В. МАЗАЛОВ (ответственный редактор), д. ф.-м. н., проф.; Ю. Л. ПАВЛОВ (зам. ответственного редактора), д. ф.-м. н., проф.; Л. А. ПЕТРОСЯН, д. ф.-м. н., проф.; А. В. СОКОЛОВ, д. ф.-м. н., проф.; Т. П. ТИХОМИРОВА (ответственный секретарь), к. т. н., доцент.

*Издается с января 2009 г.*

Адрес редакции: 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11  
Тел. (8142)762018; факс (8142)769600  
E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)

Электронная полнотекстовая версия: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences

# **TRANSACTIONS**

**of the KARELIAN RESEARCH CENTRE  
of the RUSSIAN ACADEMY of SCIENCES**

No. 6, 2021

**MATHEMATICAL MODELING  
AND INFORMATION TECHNOLOGIES**

Petrozavodsk  
2021

Editor-in-Chief

A. F. TITOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.

Editorial Council

A. M. ASKHABOV, RAS Academician, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; O. N. BAKHMET (Deputy Editor-in-Chief), RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.); I. V. DROBYSHEV, PhD (Biol.) (Sweden – Canada); N. N. FILATOV, RAS Corr. Fellow, DSc (Geog.), Prof.; T. E. HANG, PhD (Geog.) (Estonia); P. HÖLTTÄ, PhD (Geol.), Prof. (Finland); E. V. IVANTER, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; H. JOOSTEN, Dr. (Biol.), Prof. (Germany); A. M. KRYSHEN', DSc (Biol.); E. V. KUDRYASHOVA, DSc (Phil.), Prof.; O. L. KUZNETSOV, DSc (Biol.); N. V. LUKINA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; V. V. MAZALOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; N. N. NEMOVA, RAS Corr. Fellow, DSc (Biol.), Prof.; O. OVASKAINEN, PhD (Math.), Prof. (Finland); O. N. PUGACHYOV, RAS Academician, DSc (Biol.); V. V. SHCHIPTSOV, DSc (Geol.-Miner.), Prof.; S. A. SUBBOTIN, PhD (Biol.) (USA); D. A. SUBETTO, DSc (Geog.); K. SZAJEWSKI, PhD (Math.), Prof. (Poland); A. V. VORONIN, DSc (Tech.), Prof.

Editorial Board of the “Mathematical Modeling and Information Technologies” Series

A. N. KIRILLOV, DSc (Phys.-Math.), Assistant Prof.; V. V. MAZALOV (Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. L. PAVLOV (Deputy Editor-in-Charge), DSc (Phys.-Math.), Prof.; L. A. PETROSIAN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; A. V. SOKOLOV, DSc (Phys.-Math.), Prof.; T. P. TIKHOMIROVA (Executive Secretary), PhD (Tech.), Assistant Prof.; V. A. VATUTIN, DSc (Phys.-Math.), Prof.; Yu. V. ZAIKA, DSc (Phys.-Math.), Prof.

*Published since January 2009*

*Monthly*

Editorial Office address: 11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia  
Tel. (8142)762018; fax (8142)769600  
E-mail: [trudy@krc.karelia.ru](mailto:trudy@krc.karelia.ru)  
Full-text electronic version: <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

УДК 519.179.4

## О МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ВЕРШИНЫ УСЛОВНОГО ИНТЕРНЕТ-ГРАФА

Д. А. Беспалов<sup>1</sup>, Ю. Л. Павлов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт математики и информационных технологий,  
Петрозаводский государственный университет, Россия

<sup>2</sup> Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматриваются конфигурационные графы с  $N$  вершинами, степени которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с распределением

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{1}{\zeta(\tau)k^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\zeta(\tau)$  – значение зета-функции Римана в точке  $\tau$ ,  $1 < \tau < 2$ . Конфигурационные графы часто используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, в частности Интернета. Изучается подмножество таких случайных графов при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна  $n$ . С помощью обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам в работе доказаны теоремы о предельном распределении максимальной степени вершины, при  $n, N \rightarrow \infty$  в случаях, когда  $n/N \rightarrow 1$  и  $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$  и когда  $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$ .

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; Интернет-граф; условный граф; степень вершины.

### D. A. Bepalov, Yu. L. Pavlov. ON THE MAXIMUM VERTEX DEGREE OF A CONDITIONAL INTERNET GRAPH

We consider configuration graphs with  $N$  vertices, whose degrees are independent identically distributed random variables with the distribution

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = \frac{1}{\zeta(\tau)k^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

where  $\zeta(\tau)$  is the value of the Riemann zeta function at the point  $\tau$ ,  $1 < \tau < 2$ . Configuration graphs are often used to model complex communication networks, such as the Internet. We study a subset of such random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and equal to  $n$ . In this paper, we prove theorems on the limit distribution of the maximum degree of a vertex using the generalized allocation scheme, when  $n/N \rightarrow 1$  and  $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$  and in the case when  $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$ .

Key words: configuration random graph; Internet graph; conditional graph; vertex degree.

## ВВЕДЕНИЕ

В реальном мире широко распространены так называемые сложные сети коммуникаций, такие как Интернет, транспортные сети или сети нейронов в нашем мозге. Несмотря на различие природы этих сетей, они удачно моделируются случайными графами [7]. Наблюдения показали [6], что в таких сетях степени узлов можно считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Причем число узлов, степени которых равны  $k$ , при больших  $k$  пропорционально  $k^{-\tau}$ , где  $\tau$  – положительный параметр. В связи с этим в [10] для моделей сетей предложено считать, что случайная величина  $\eta$ , равная степени вершины графа, имеет распределение

$$\mathbf{P}\{\eta = k\} = h(k)k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $\tau > 1$ , а  $h(x)$  – медленно меняющаяся функция.

В качестве графов, моделирующих сложные сети, часто используют конфигурационные случайные графы, введенные и описанные в работе [5]. В таких графах степень каждой вершины задается случайной величиной с распределением (1), таким образом, для каждой вершины получаем исходящие из нее полуредра. Если сумма степеней всех вершин оказывается нечетной, то в граф добавляется вспомогательная вершина единичной степени, которая, как отмечается в [10], на асимптотические свойства графа не влияет. Затем полуредра попарно равновероятно соединяются, образуя ребра. Заметим сразу, что при таком построении возможны петли и кратные ребра. В связи с областью применения таких графов их иногда (см., например, [9]) называют Интернет-графами.

В статье [10] впервые рассматривается модель, в которой распределение степеней вершин задавалось как

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Впоследствии, в работе [4], впервые изучались условные конфигурационные графы, в которых распределение вершин имеет вид (2). В [4] были доказаны теоремы о предельном распределении максимальной степени вершины и числа вершин заданой степени при различном характере стремления числа вершин и числа ребер к бесконечности и различных значениях параметра  $\tau$ .

В статье [3] впервые изучались условные конфигурационные графы с неизвестным распределением степеней вершин, обладающим

свойствами:  $p_k > 0, k = 1, 2, \dots$  и при  $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^{g(\ln k)^h}},$$

где  $d > 0, g \geq 1, h \geq 0, g + h > 1$ .

В работе [2] решалась задача нахождения распределений максимальной степени вершины и числа узлов заданной степени для наиболее общего случая, а именно когда степени вершин имеют распределение (1), при условии, что  $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$ .

Пусть  $N$  – число вершин в графе, а  $\eta_1, \dots, \eta_N$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, равные степеням вершин  $1, \dots, N$  соответственно. В настоящей работе рассматривается модель условного конфигурационного графа при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна  $n$ , а распределение этих вершин имеет вид

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = \frac{1}{\zeta(\tau)k^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $\zeta(\tau)$  – значение зета-функции Римана в точке  $\tau$ ,  $1 < \tau < 2$  – параметр модели. Наблюдения показали, что такой диапазон изменения параметра  $\tau$  наиболее характерен для реальных сетей.

Заметим здесь же, что распределение (3) является частным случаем (1) с медленно меняющейся функцией, равной константе, а именно  $h(x) = 1/\zeta(\tau)$ . Авторам известна только одна работа [8], в которой рассматривалось распределение (3). В [8] была найдена асимптотика кластерного коэффициента такого случайного графа.

В настоящей работе для графа с распределением (3), используя методы обобщенной схемы размещения [1], удалось получить предельные распределения максимальной степени вершины  $\eta_{(N)} = \max(\eta_1, \dots, \eta_N)$  в случаях, когда  $n/N \rightarrow 1$  и  $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$ , а также для случая, когда  $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$ .

В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1 и 2 для  $\eta_{(N)}$  в соответствующих случаях поведения  $n/N$ . Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–8), с помощью которых в последнем разделе статьи доказываются теоремы 1 и 2.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_N$  такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{\lambda^{k-1}}{\Phi(\lambda, \tau, 1)k^\tau}, \quad (4)$$

где  $k = 1, 2, \dots$ ,  $0 < \lambda < 1$ ,  $\Phi(\lambda, \tau, 1)$  – трансцендентная функция Лерча, имеющая вид

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}. \quad (5)$$

Параметр  $\lambda$  для распределения (4) будем выбирать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{E}\xi_1 = n/N. \quad (6)$$

В статье доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 1$ ,  $(n-N)^3/N^2 \rightarrow \infty$ . Выберем наименьшие  $r = r(N, n)$  такие, что

$$\frac{N\lambda^r}{(r+1)^\tau} \rightarrow \gamma, \quad (7)$$

где  $\gamma$  – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r\} \rightarrow e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r+1\} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$ , а  $r = r(N, n)$  выбраны так, что

$$\frac{N\lambda^r}{r^\tau(1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)} \rightarrow \gamma, \quad (8)$$

где  $\gamma$  – некоторая положительная постоянная. Тогда для всякого фиксированного  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r+k\} = e^{-\gamma\lambda^k} + o(1).$$

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Из (3) и (4) следует, что

$$m = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{\Phi(\lambda, \tau-1, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \quad (9)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 = \frac{\Phi(\lambda, \tau-2, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)} - m^2. \quad (10)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины  $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$  такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq r\}, \quad (11)$$

и пусть  $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ ,  $\zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}$ .

Для наборов случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_N$  и  $\xi_1, \dots, \xi_N$  с распределениями (3) и (4) соответственно нетрудно получить следующее утверждение.

**Лемма 1.** Справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \end{aligned}$$

Равенство в лемме 1 означает, что выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [1], для которой известно следующее утверждение.

**Лемма 2.** Справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

где

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}. \quad (12)$$

Как видно из (6) и (9), поведение параметра  $\lambda$  зависит от отношения  $n/N$ .

**Лемма 3.** Верны следующие утверждения.

1. Если выполнены условия теоремы 1, то  $\lambda \rightarrow 0$ , причем

$$\lambda = \frac{2^\tau(n-N)}{N}(1 + o(1)). \quad (13)$$

2. Если выполнены условия теоремы 2, то

$$0 < C_3 \leq \lambda \leq C_4 < 1.$$

*Доказательство.* В первом пункте, полагая, что  $\lambda$  не стремится к нулю, и используя (5), (9), получаем противоречие с (6). Докажем (13). Действительно, используя (5), (6) и (9), получим

$$\begin{aligned} \frac{2^\tau(n-N)}{N} &= 2^\tau \frac{\Phi(\lambda, \tau-1, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)} \\ &= 2^\tau \frac{2^{-\tau}\lambda + o(\lambda)}{1 + 2^{-\tau}\lambda + o(\lambda)}, \end{aligned}$$

отсюда и из того, что  $\lambda \rightarrow 0$ , следует требуемое.

Для второго пункта леммы, полагая противное и используя (5), (9), получаем противоречие с (6).  $\square$

Рассмотрим асимптотику  $(1 - P_r)^N$ .

**Лемма 4.** Верны следующие утверждения.

1. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$NP_{r-1} \rightarrow \infty, \quad NP_r \rightarrow \gamma, \quad NP_{r+1} \rightarrow 0.$$

2. Если выполнены условия теоремы 2, то для всякого фиксированного  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$(1 - P_{r+k})^N = e^{-\gamma \lambda^k} + o(1).$$

*Доказательство.* Пусть выполнены условия теоремы 1. Из (4), (5), (12) и леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} NP_r &= Np_{r+1}(\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)/p_{r+1}(\lambda) \\ &= (1 + o(1)) \frac{N\lambda^r}{(r+1)^\tau} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \left(1 - \frac{j-1}{r+j}\right)^\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда, используя (7), можем написать

$$NP_r \rightarrow \gamma.$$

В силу минимальности выбора  $r = r(n, N)$  и из (14) имеем  $NP_{r-1} \rightarrow \infty$  и  $NP_{r+1} \rightarrow 0$ . Что и требовалось в первом пункте.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Из (4) и (12) получаем, что

$$\begin{aligned} NP_{r+k} &= Np_{r+k}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{r+k+j+1}(\lambda)}{p_{r+k}(\lambda)} \\ &= \frac{\lambda^{r+k}}{\Phi(\lambda, \tau, 1)(r+k)^\tau} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left(1 - \frac{j+1}{r+k+j+1}\right)^\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку из условия теоремы 2 следует, что  $r \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left(1 - \frac{j+1}{r+k+j+1}\right)^\tau \\ \sim \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j = \frac{1}{1-\lambda}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15), пользуясь (8) и (16), получаем требуемое во втором пункте утверждение.  $\square$

В следующих леммах мы рассмотрим асимптотическое поведение случайных величин  $\zeta_N$  и  $\zeta_N^{(r)}$ . Обозначим  $\varphi_N(t)$  характеристическую функцию случайной величины  $(\zeta_N - n)/(\sigma\sqrt{N})$ .

**Лемма 5.** Пусть выполнены условия теоремы 1 либо условия теоремы 2. Тогда для всякого фиксированного  $t$

$$\varphi_N(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

*Доказательство.* Обозначим  $\varphi(t)$  характеристическую функцию случайной величины  $\xi_1$ . Из (4) нетрудно получить, что

$$\varphi(t) = e^{it} \frac{\Phi(e^{it}\lambda, \tau, 1)}{\Phi(\lambda, \tau, 1)}. \quad (17)$$

При достаточно малых  $t$  верно разложение

$$\ln \varphi(t) = imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{Q(t)}{6} t^3, \quad (18)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|u| < |t|} |(\ln \varphi(u))'''|. \quad (19)$$

Из (4), (9), (10) и леммы 3 имеем, что в случае выполнения условий теоремы 1 верно

$$\sigma^2 = \lambda/2^\tau + o(\lambda), \quad (20)$$

а в случае выполнения условий теоремы 2 –

$$0 < C_5 \leq \sigma^2 \leq C_6 < \infty. \quad (21)$$

Отсюда и из леммы 3, как легко видеть, следует, что

$$\sigma^3 \sqrt{N} \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Используя (17) и (19), получаем, что для всякого фиксированного  $t$

$$\ln \varphi_N(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3 \sqrt{N}} Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right). \quad (23)$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что второе слагаемое в правой части (23) стремится к нулю. В силу условий данной леммы, (18) и (22) доказательство сводится к оценке третьей производной логарифма  $\varphi(t)$ .

Из (4), (17) можно получить, что

$$\begin{aligned} (\ln \varphi(t))''' \\ = i \left( -\frac{f_4(t)}{f_1(t)} + 3 \frac{f_2(t)f_3(t)}{f_1^2(t)} - 2 \left( \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \right)^3 \right), \end{aligned}$$

где

$$f_1(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau, 1),$$

$$f_2(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau - 1, 1),$$

$$f_3(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau - 2, 1),$$

$$f_4(t) = \Phi(e^{it}\lambda, \tau - 3, 1).$$



В случае, когда выполнены условия теоремы 2, из (5) и леммы 3 имеем, что все ряды  $f_1-f_4$  абсолютно сходятся к некоторым положительным константам и попарно не равны, откуда следует существование такой константы  $C$ , что  $Q(t/(\sigma\sqrt{N})) \leq C$ . При выполнении условий теоремы 1 имеем, что ряды  $f_1-f_4$  абсолютно сходятся к единице, что очевидно влечет  $Q(t/(\sigma\sqrt{N})) \leq C$ . Учитывая это и используя (22), получаем

$$\frac{Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)}{\sigma^3\sqrt{N}} \rightarrow 0, \quad (24)$$

что и доказывает лемму.  $\square$

Мы показали, что случайная величина  $\zeta_N$  слабо сходится к нормальному закону. Покажем, что на самом деле имеет место локальная сходимость.

**Лемма 6.** Пусть выполнены условия теоремы 1 либо условия теоремы 2. Тогда для всякого натурального  $k$  равномерно относительно  $z = \frac{k-n}{\sigma\sqrt{N}}$  во всяком фиксированном конечном отрезке

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

*Доказательство.* Представим вероятность  $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$  по формуле обращения

$$\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-itz} \varphi_N(t) dt.$$

Для нормального закона имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi \left( \sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right), \quad (25)$$

представив ее в виде суммы четырех интегралов

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-itz} \left( \varphi_N(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt,$$

$$I_2 = \int_{A < |t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-itz} \varphi_N(t) dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{N} \leq |t| \leq \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-itz} \varphi_N(t) dt,$$

$$I_4 = - \int_{A < |t|} e^{-itz} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

причем положительные постоянные  $A$  и  $\varepsilon$  мы далее выберем так, чтобы интегралы  $I_1-I_4$  были сколь угодно малы.

Очевидно, что интеграл  $I_1 \rightarrow 0$  по лемме 5, а интеграл  $I_4$  можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ .

Пусть выполнены условия теоремы 2. Из (23) и (24) имеем, что при достаточно малом  $\varepsilon$

$$|\varphi_N(t)| \leq e^{-C_7 t^2}, \quad (26)$$

где  $C_7$  – некоторая положительная константа. Тогда получим оценку

$$|I_2| \leq \int_{A < |t|} e^{-C_7 t^2} dt, \quad (27)$$

что, очевидно, можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ .

Для интеграла  $I_3$  имеем, что при  $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$  верно, что

$$|\varphi(t)| \leq e^{-C_8}, \quad (28)$$

где  $C_8$  – некоторая константа. Поскольку максимальный шаг распределения  $\xi_1$  равен единице, а по лемме 3 параметр  $\lambda$  изменяется на компактном множестве, то

$$\max_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t)| = q < 1, \quad (29)$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \sigma\sqrt{N} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq \pi} q^N dx \\ &= \sigma\sqrt{N} 2\pi q^N - \sigma\sqrt{N} 2\varepsilon q^N, \end{aligned} \quad (30)$$

что очевидно стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .

Пусть выполнены условия теоремы 1. Из (20), (23) и (24) видно, что для  $I_2$  справедлива оценка вида (27).

Чтобы оценить интеграл  $I_3$  при  $n/N \rightarrow 1$ , заметим, что из (17) и леммы 3 можно получить

$$\varphi(t) = e^{it} (1 - 2^{-\tau} (1 - e^{it}) \lambda + o(\lambda)). \quad (31)$$

Используя (31), лемму 3 и условие  $\varepsilon \leq |t/(\sigma\sqrt{N})| \leq \pi$ , нетрудно получить, что

$$\left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \right| \leq \exp\left\{-C_9 \frac{n-N}{N}\right\}. \quad (32)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right),$$

из (20) и леммы 3 заключаем, что

$$|I_3| \leq C_{10}\sqrt{n-N}e^{C_9(n-N)} \rightarrow 0. \quad (33)$$

□

Рассмотрим теперь асимптотику суммы  $\zeta_N^{(r)}$ . Обозначим  $\varphi_N^{(r)}$  характеристическую функцию случайной величины  $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma\sqrt{N})$ .

**Лемма 7.** *Верны следующие утверждения.*

1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для всякого фиксированного  $t$

$$\varphi_N^{(r+s)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}, \quad (34)$$

где  $s = 0, \pm 1$ .

2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для всякого фиксированного  $t$

$$\varphi_N^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (35)$$

*Доказательство.* Из (11), (12) и (17) получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_N^{(r)}(t) &= \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\} (1 - P_r)^{-N} \\ &\times \left( \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) - \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) e^{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}} \right)^N. \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда, из (22) и леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \varphi_N^{(r)}(t) &= (1 + o(1))e^{-t^2/2}(1 - P_r)^{-N} \\ &\times \left( 1 - (1 + o(1)) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) e^{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}} \right)^N. \end{aligned} \quad (37)$$

Заметим, что

$$r/(\sigma\sqrt{N}) \rightarrow 0, \quad (38)$$

ибо в противном случае в условиях теоремы 1, используя (20), (22), а также леммы 3 и 4, пришли бы к противоречию с  $NP_{r-1} \rightarrow \infty$ . В случае выполнения условий теоремы 2, используя

(21) и лемму 3, приходим к противоречию с (8). Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\left\{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \\ &= P_r + O\left((\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j)\right). \end{aligned} \quad (39)$$

Из (37) и (39) ясно, что для доказательства (34) при  $s = 0$  и (35) достаточно показать, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j) = o(N^{-1}). \quad (40)$$

Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j) = O(rp_{r+1}(\lambda)). \quad (41)$$

Действительно, используя (4), рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j)}{rp_{r+1}(\lambda)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \left(1 - \frac{j-1}{r+j}\right)^{\tau} \\ &+ r^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} j\lambda^{j-1} \left(1 - \frac{j-1}{r+j}\right)^{\tau}. \end{aligned}$$

Поскольку  $(1 - (j-1)/(r+j))^{\tau} < 1$ , то

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j)}{rp_{r+1}(\lambda)} \leq \frac{1}{1-\lambda} + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)',$$

откуда сразу видно, что рассматриваемое отношение ограничено, что и дает нам (41).

В случае выполнения условий теоремы 2 из (4), (8) и леммы 3 имеем, что для  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} NP_r &= Np_{r+k}(\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_{r+j}(\lambda)}{p_{r+k}(\lambda)} \\ &= \frac{Np_{r+k}(\lambda)}{\lambda^{k-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \left(1 - \frac{j-k}{r+j}\right)^{\tau}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (8) вытекает, что  $r \rightarrow \infty$ , и из второго утверждения леммы 4 следует, что  $NP_r \rightarrow \gamma > 0$ . Тогда, используя (42), получаем, что

$$p_{r+k}(\lambda) = O(N^{-1}). \quad (43)$$

Подставляя (41) и (43) в левую часть (40), получаем верное равенство, что и требовалось.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 1. Подставим (41) в левую часть (40) и,

используя леммы 3, 4, (4), (20) и соотношение  $\Phi(\lambda, \tau, 1) \rightarrow 1$ , напишем

$$\begin{aligned} O\left(\frac{r p_{r+1}(\lambda)}{\sigma\sqrt{N}}\right) &= O\left(\frac{N\lambda^r r}{(r+1)^\tau \sigma\sqrt{N^3}}\right) \\ &= O\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{N}} \frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

В силу (38) имеем, что (40) действительно выполнено.

При  $s = 1$  соотношение (34) следует из (37), поскольку по лемме 4 имеем  $NP_{r+1} \rightarrow 0$ . Пусть  $s = -1$ . Нетрудно видеть, что при замене  $r$  на  $r - 1$  (41) сохраняет силу. Используя (4) и (20), получаем

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} p_{r+j}(\lambda)(r+j) = O\left(\frac{r}{\lambda\sigma\sqrt{N}} \frac{1}{N}\right).$$

Заметим, что  $r/(\lambda\sigma\sqrt{N}) \rightarrow 0$ , действительно, полагая противное, получаем противоречие с  $NP_{r-1} \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Лемма 8.** Пусть выполнены условия теоремы 1 либо условия теоремы 2. Тогда для всякого натурального  $k$  равномерно относительно  $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$  во всяком фиксированном конечном отрезке

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}.$$

Если выполнены условия теоремы 1, то в этом утверждении  $r$  можно заменить на  $r - 1$  или  $r + 1$ .

*Доказательство.* Лемма 8 доказывается в целом аналогично лемме 6. Заменяем в соответствующих выражениях  $\zeta_N$  на  $\zeta_N^{(r)}$  и  $\varphi_N(t)$  на  $\varphi_N^{(r)}$  и докажем, что разность (25) стремится к нулю. Из леммы 7 следует, что  $I_1 \rightarrow 0$ , а  $I_4$  можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ . Из (36), (37) и из того, что  $NP_r \rightarrow \gamma$ , следует, что существует константа  $C$  такая, что

$$|\varphi_N^{(r)}(t)| \leq C|\varphi_N(t)|, \quad (44)$$

откуда сразу следует, что верны оценки вида (26), (27).

В случае, когда выполнены условия теоремы 2, для интеграла  $I_3$  в силу (44) имеют место оценки (28), (29) и (30). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, поскольку верна оценка (44), сохраняют силу выражения (32) и (33). Нетрудно видеть, что выражения (37) и (40) позволяют сохранить рассуждения при замене  $r$  на  $r - 1$  или  $r + 1$ .  $\square$

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Используя леммы 6 и 8, получаем, что в условиях теорем 1 и 2

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \rightarrow 1. \quad (45)$$

Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда из (45), лемм 2 и 4 следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r - 1\} &\rightarrow 0, \\ \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} &\rightarrow e^{-\gamma}, \\ \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r + 1\} &\rightarrow 1, \end{aligned}$$

что и приводит к утверждениям теоремы. Теорема 2 следует из лемм 2, 4 и соотношения (45).  $\square$

*Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 256 с.
2. Павлов Ю. Л. Об асимптотике степенной структуры условных Интернет-графов // Труды КарНЦ РАН. 2020. № 7. С. 77–83. doi: 10.17076/mat1202
3. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
4. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
5. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
6. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. x+212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594
7. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
8. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks // SIAM Review. 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

9. Reittu H., Norros I. On the effect of very large nodes in Internet graphs // GLOBECOM'02. IEEE. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

10. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 11.04.2021

## REFERENCES

1. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 252 p.
2. Pavlov Yu. L. Ob asimptotike stepennoi struktury usloynykh Internet-grafov [On the asymptotics of the power structure of conditional Internet graphs]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 77–83. doi: 10.17076/mat1202
3. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB MATH*. 2018. Vol. 209, iss. 2. P. 258–275. doi: 10.1070/SM8832
4. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random Internet-type graphs and the generalized allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033
5. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Comb.* 1980.

Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

6. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. x+212 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

7. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

8. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*. 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

9. Reittu H., Norros I. On the effect of very large nodes in Internet graphs. *GLOBECOM'02. IEEE*. 2002. P. 2624–2628. doi: 10.1109/GLOCOM.2002.1189105

10. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received April 11, 2021

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

### Беспалов Даниил Андреевич

студент  
Институт математики и информационных технологий,  
Петрозаводский государственный университет  
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: bespalov@cs.petrstu.ru

### Павлов Юрий Леонидович

главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 781218

## CONTRIBUTORS:

### Bespalov, Daniil

Institute of Mathematics and Information Technology,  
Petrozavodsk State University  
33 Lenina Ave., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: bespalov@cs.petrstu.ru

### Pavlov, Yuriy

Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 781218

УДК 51-76

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА $CO_2$ В ЛЕСНЫХ ПЕСЧАНЫХ ПОЧВАХ

К. В. Грудова

*Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

В контексте проблемы анализа антропогенного воздействия на окружающую среду возникает потребность в исследовании динамики почвенного углерода. Учитывая зависимость процессов переноса и продуцирования  $CO_2$  от текстуры почвы, влажности атмосферы, частоты осадков и других факторов, актуальной задачей является математическое описание газовой фазы почв для конкретной местности. В основу данной работы была взята математическая модель продуцирования и переноса углекислого газа в суточном диапазоне времени в лесных почвах, характерных для Восточной Фенноскандии. Модель ориентирована на сравнительный количественный анализ диффузионной и конвективной составляющих с целью оценки динамики дыхания почвы и изменений направлений стока (в атмосферу и глубинные горизонты, грунтовые воды). В работе осуществлен переход к безразмерному виду модели, предложены явно-неявная разностная схема и итерационный вычислительный алгоритм решения краевой задачи переноса углекислого газа в почвенном горизонте.

**Ключевые слова:** краевые задачи в пористой среде; диффузия и конвекция; перенос  $CO_2$  в песчаных почвах; явно-неявная разностная схема.

### **K. V. Grudova. DIFFERENCE SCHEME OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF $CO_2$ TRANSPORT IN SANDY FOREST SOIL**

In the context of anthropogenic environmental impact analysis, there is a need to study soil carbon dynamics. Since  $CO_2$  transport and production depend on soil texture, air humidity, rainfall frequency, and other factors, mathematical description of the gaseous phase of soils in a specific area is a topical task. This work is based on a mathematical model of the production and transport of carbon dioxide in the circadian time range in forest soils typical of Eastern Fennoscandia. The model is focused on a comparative quantitative analysis of diffusive and convective components to assess the dynamics of soil respiration and changes in flow directions (towards the atmosphere and deep-lying horizons, to groundwater). In this paper, the transition to the dimensionless form of the model was implemented, an explicit-implicit difference scheme and an iterative computational algorithm for solving the boundary value problem of carbon dioxide transport in a soil horizon were proposed.

**Keywords:** boundary value problems in a porous medium; diffusion and convection;  $CO_2$  transport in sandy soils; explicit-implicit difference scheme.

## ВВЕДЕНИЕ

Поток  $CO_2$  в атмосферу из почвы является одним из самых значимых в глобальном цикле углерода [17]. Для сравнения: в течение всего года количество  $CO_2$ , выделяемого из почвы в атмосферу, примерно в 10 раз превышает ежегодное количество  $CO_2$ , выделяемого при сжигании ископаемого топлива [15, 16]. Поэтому мониторинг динамики почвенного  $CO_2$  имеет важное значение для количественной оценки и моделирования глобального цикла углерода, который, в свою очередь, исследуется в контексте проблемы антропогенного воздействия на биосферу. В данных исследованиях соответствующие математические модели представляют значительный интерес.

В связи с многообразием почв и условий их жизненного цикла возникает необходимость более пристального внимания к математическому описанию газовой фазы почв для конкретной взятой местности. Локальные экспериментальные данные позволяют делать выводы о преимущественной эмиссии или доминирующем стоке углерода на тех или иных территориях, о влиянии мелиорации почв, таяния вечной мерзлоты и т. д. Методы численного моделирования — один из способов получения информации, позволяющих анализировать баланс потоков углекислого газа и метана в различных почвенных и болотных экосистемах.

Более подробный обзор литературы, модели и их сравнение, тенденции развития математического моделирования в этой области представлены в [5, 9–11, 13, 14]. В книгах [8, 11, 12, 18] даются физически обоснованные математические описания газовой фазы почв.

В почве углекислый газ по большей части образуется за счет дыхания корней, химических процессов разложения органических веществ и жизнедеятельности микроорганизмов. Задача состоит в исследовании доли продуцируемого в почве  $CO_2$ , которая достигает поверхности (с которой эмиссия  $CO_2$  регистрируется достаточно надежно), и доли, которая депонируется глубинными слоями почвы (в частности, уносится грунтовыми водами).

В данной работе рассматривается модель продуцирования и переноса углекислого газа в суточном диапазоне времени в лесных почвах Восточной Финноскандии [2, 19]. При разработке разностных схем автор следовал работам [1, 4].

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Кратко представим математическую модель, предложенную в [2, 19]. Уравнение материального баланса (знак тождества  $\equiv$  бу-

дем использовать также в смысле равенства по определению):

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = \mathcal{F}_{tr} + \mathcal{F}_{pr}, \quad \mathcal{F}_{tr} = -\frac{\partial J}{\partial z}, \quad (1)$$

$$C_m = C_g \varepsilon + C_w \theta, \quad C \equiv C_g,$$

где  $\mathcal{F}_{tr}$  — транспортное слагаемое;  $\mathcal{F}_{pr}$  — продуктивность верхнего корнеобитаемого слоя почвы;  $C_w$  — массовая концентрация  $CO_2$ , растворенного в единице объема жидкости;  $C_g \equiv C$  — массовая концентрация газа в единице объема почвенного воздуха;  $\varepsilon(t, z)$  — порозность аэрации (объемная доля газа в почве);  $\theta(t, z)$  — объемная доля влаги.

Транспортное слагаемое ( $\mathcal{F}_{tr}$ ) зависит от плотности потока, которая выражается в виде суммы диффузионного и конвективного слагаемых [2, с. 41]:

$$J(t, z) = f_\varepsilon(\varepsilon) [-D \partial_z C(t, z) + VC(t, z)],$$

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \exp \left\{ -\frac{a}{\sigma(\varepsilon)} \right\}, \quad \sigma(\varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\theta + \zeta}.$$

В факторе порозности аэрации ( $f_\varepsilon$ ) параметр  $a$  имеет «активационный» смысл. Характерный вид фактора  $f_\varepsilon$  в зависимости от параметра  $a > 0$  представлен на рис. 1.

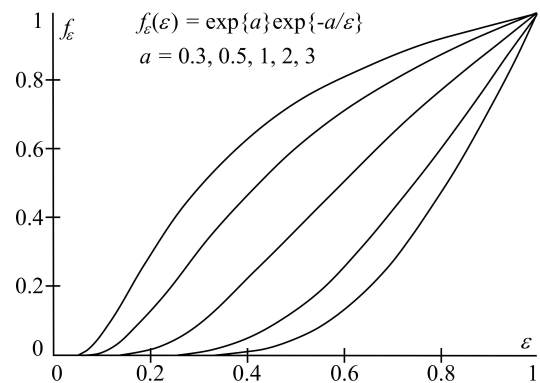


Рис. 1. Фактор порозности аэрации  
Fig. 1. Aeration porosity factor

По данным [18, с. 40], с увеличением глубины порозность аэрации ( $\varepsilon(t, z)$ ) монотонно убывает, а объемная влажность ( $\theta(t, z)$ ) растет (с выходом на асимптоты). Величины  $\varepsilon$ ,  $\theta$  связаны соотношением  $\varepsilon + \theta + \zeta = 1$ , где  $\zeta$  — объемная доля сухого вещества почвы. По  $\theta$  и  $\zeta$ , полученным экспериментально, вычисляется  $\varepsilon$ . Предполагая, что влага — питательный ресурс, будем использовать функции Моно (Михаэлиса–Ментен) [6, с. 18] вида  $\theta = \theta_{\max} z / [z + h]$ . Это кривая насыщения, в которой параметр  $h$  — глубина достижения половины «асимптотического» максимума.

Коэффициент диффузии ( $D \equiv D(\bar{p}, T)$ ) и величина «обобщенной скорости» движения (молярного переноса) ( $V \equiv V(\bar{p}, T, \partial_z T)$ ) имеют следующий вид:

$$D = D_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[ \frac{T}{T_0} \right]^2, \quad V = v - DT^{-1} \partial_z T,$$

$$v \equiv v(\bar{p}, T) = v_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

В данном случае  $D_0$  и «усредненная конвективная скорость среды»  $v_0$  считаются варьируемыми в разумных пределах параметрами. В первом приближении  $v_0 = \bar{v} = \text{const}$  для светового дня и ночи, причем знак  $\bar{v}$  не уточняется и выбирается отдельно ( $\bar{v} = \bar{v}_{d,n}$ ).

Температурные зависимости определяются на основе волнового приближения [3, §14], [7, §55]. В модели рассматривается суточный ход температуры. В качестве аппроксимации для среднегодовых температурных волн (индекс  $y$  означает «year», а индекс  $J$  – «July») принимается следующее выражение:

$$\alpha_y \equiv \sqrt{\omega_y [2\chi_y]^{-1}}, \quad T_J(z) = T_\infty + \Delta T_y \exp \{ -\alpha_y z \} \cos \{ -\alpha_y z \},$$

где период колебаний  $\tau_y = 2\pi/\omega_y$  равен году,  $\omega_y$  – соответствующая частота,  $\chi_y$  – коэффициент температуропроводности,  $T_\infty$  – установившееся значение температуры на глубине 2–3 метра (например,  $T_\infty = 277,15$  К),  $\Delta T_y$  – амплитуда колебания.

Для ориентировки по порядку величин значения параметров принимаются в соответствии с работой [3, с. 101]: период  $\tau_y \approx 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 3.15 \times 10^7$  с, частота  $\omega_y \approx 2 \times 10^{-7}$ , коэффициент  $\chi_y \approx 2 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ . Для численных расчетов по уравнению диффузии в относительно небольшом диапазоне времени принимается  $[t] = \text{с}$ .

Аналогичным образом для дневного диапазона используется аппроксимация

$$\alpha_d \equiv \sqrt{\omega_d [2\chi_d]^{-1}}, \quad T_d(t, z) = T_J(z) - \Delta T_d \exp \{ -\alpha_d z \} \cos \{ \omega_d t - \alpha_d z \}. \quad (2)$$

При этом  $\omega_d \gg \omega_y$  (примерно в 365 раз) и  $\alpha_d \gg \alpha_y$  (примерно в 19 раз). Так как лесная подстилка оказывает демпфирующее влияние, дневная амплитуда колебаний  $\Delta T_d$  будет невелика (например,  $\Delta T_d = 2$ ). За начальный момент времени в формуле (2) принимается начало нагрева почвы после ночного охлаждения (6 часов утра). Минимум приповерхностной ( $z = 0$ ) температуры достигается при  $t = 0$ .

Характерный вид второго слагаемого (продуктивности)  $\text{Pr} = \mathcal{F}_{\text{pr}}$  представлен на рис. 2 (где  $[\text{Pr}] = \text{mg}/\text{m}^2 \cdot \text{cm} \cdot \text{h}$ , как на Fig. 3.9 [18]).

Продуктивность моделируется на основе зависимости  $\mathcal{F}_{\text{pr}} = A \exp\{-b/z\}/z^k$ ,  $k > 0$ . Аррениусовский всплеск в подповерхностном слое (температуру и влажность считаем максимально благоприятными) сменяется относительно медленным спадом со степенной скоростью (плотность корней, бактерий, органических веществ быстро падает). Параметры  $A, b, k$  будут уточняться в лабораторных условиях.

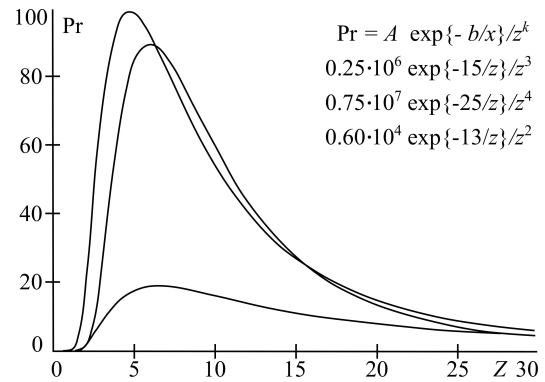


Рис. 2. Продуктивность  $\text{CO}_2$

Fig. 2.  $\text{CO}_2$  productivity

Так как продуктивность зависит от отклонений температуры и влажности от оптимальных значений, то примем

$$\mathcal{F}_{\text{pr}} = f_\theta(\theta) f_T(T) A \exp \{ -bz^{-1} \} z^{-k},$$

$$\theta = \theta(t, z), \quad T = T(t, z).$$

Фактор влажности фиксируем в форме [8]:

$$f_\theta(\theta) = \left[ \frac{\theta - \theta_{\min}^0}{\hat{\theta} - \theta_{\min}^0} \right]^\alpha \cdot \left[ \frac{\theta_{\max}^0 - \theta}{\theta_{\max}^0 - \hat{\theta}} \right]^\beta,$$

$$\alpha > 1, \quad \beta > 0.$$

Значение  $\hat{\theta} = [\alpha\theta_{\max}^0 + \beta\theta_{\min}^0]/[\alpha + \beta]$  оптимальной влажности (при благоприятной температуре), для которой  $f_{\max} = f_\theta(\hat{\theta}) = 1$ , задается из опытных данных. Параметр  $\alpha > 1$  варьируется, а значение  $\beta > 0$  вычисляется по заданным  $\hat{\theta}$ ,  $\alpha$  как  $\beta = \alpha(\theta_{\max} - \hat{\theta})/(\hat{\theta} - \theta_{\min})$ . Характерный вид  $f_\theta$  представлен на рис. 3.

Аналогичным образом определяется фактор температуры  $f_T(T)$ .

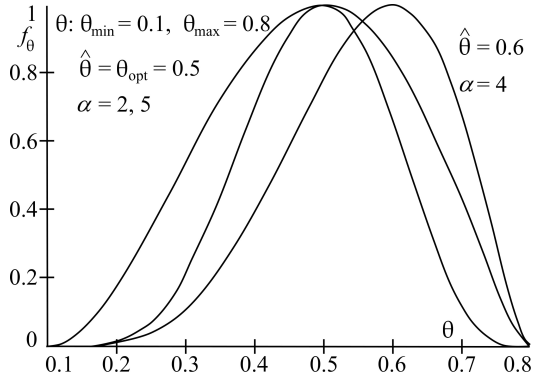


Рис. 3. Зависимость фактора  $f_\theta$  от  $a = \alpha$   
 Fig. 3. Dependence of the factor  $f_\theta$  on the  $a = \alpha$

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОДЕЛИ: ПЕРЕХОД К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ

Сделаем замену времени  $t = H^2 D_0^{-1} t'$ , где  $H^2 D_0^{-1}$  — характерное время диффузии, и замену независимой переменной  $z = Hx$ ,  $\widehat{C}(t', x) = C(t(t'), z(x))$ . Введем соответствующую нормировку концентраций и оставим прежнее обозначение для функции  $\widehat{C}(t', x) := \widehat{C}(t', x)/c$ , где  $c$  — концентрация углекислого газа в атмосфере. После указанной замены переменных уравнение материального баланса (1) примет вид:

$$\frac{\partial \widehat{C}}{\partial t'} = \widehat{\mathcal{F}}_{\text{tr}} + \widehat{\mathcal{F}}_{\text{pr}}; \quad \widehat{\mathcal{F}}_{\text{tr}} = -\frac{\partial \widehat{J}}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\text{pr}} = f_\theta(\theta) f_T(T) \frac{A}{(Hx)^{-k}} \exp\left\{-\frac{b}{Hx}\right\}. \quad (4)$$

При этом плотность потока преобразуется к виду ( $\widehat{D} \equiv \widehat{D}(t', x)$ ,  $\widehat{V} \equiv \widehat{V}(\bar{p}, T, \partial_x T)$ ):

$$\widehat{J} = -\widehat{D} \frac{\partial \widehat{C}}{\partial x} + \widehat{V} \widehat{C},$$

где

$$\widehat{D} = f_\varepsilon(\varepsilon) \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \left[\frac{T}{T_0}\right]^2, \quad v(\bar{p}, T) \equiv v_0 \frac{p_0}{\bar{p}} \cdot \frac{T}{T_0},$$

$$\widehat{V} = f_\varepsilon(\varepsilon) H D_0^{-1} v(\bar{p}, T) - \widehat{D} T^{-1} \partial_x T.$$

После преобразований объемная влажность ( $\theta$ ) и температурные зависимости ( $T$ ) примут следующий вид:

$$\theta \equiv \theta(t', x) = \theta_{\max} x / [x + h(t')],$$

$$h(t') = h_0 / H + v_h t' H D^{-1}, \quad v_h = v_{h,d} > 0;$$

$$T \equiv T_d(t', x) = T_J(x) - \Delta T_d \exp\{-\alpha_d Hx\}$$

$$\times \cos\{\omega_d t' H^2 D_0^{-1} - \alpha_d Hx\},$$

$$T_J(x) = T_\infty + \Delta T_y \exp\{-\alpha_y Hx\}$$

$$\times \cos\{-\alpha_y Hx\}.$$

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Введем сетку  $\{x_m = m\bar{h}_m, m = 0, 1, \dots, M\}$ , где  $\bar{h}_m$  — шаг по пространственной переменной (глубине) между узлами  $x_{m-1}$  и  $x_m$  на момент времени  $t'_{n+1}$ . Будем использовать сетку с равномерным шагом  $h_x = 1/M$ , т.е.  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \dots = \bar{h}_M := h_x$  для любого момента времени. Также вводим сетку по времени  $\{t'_n = nh_{t'}, n = 0, 1, \dots\}$  с шагом  $h_{t'}$ . Приближенные значения концентрации  $\text{CO}_2$  в почве обозначим  $\{\widehat{C}_m^n\}$ .

В уравнении материального баланса (3) выделяются две составляющие — транспортное слагаемое и продуктивность верхнего корнеобитаемого слоя почвы. В свою очередь, транспортное слагаемое ( $\widehat{\mathcal{F}}_{\text{tr}}$ ) разделяется на две основные части: диффузионную и конвективную. В соответствии с работой [1] для диффузионной составляющей транспортного слагаемого используется техника неявных разностных схем, а для конвективной — явных. Диффузионное слагаемое содержит переменный коэффициент  $\widehat{D}(t', x)$ , что представляет некоторую сложность в построении разностной схемы. Один из вариантов решения данной проблемы предложен в книге [4], который и был взят за основу. В результате построена следующая неявная разностная схема ( $\sigma = 0.5$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \widehat{D}(t', x) \frac{\partial \widehat{C}(t', x)}{\partial x} \right) \\ & \approx \bar{\chi}_{m-1/2} \frac{\widehat{C}_{m-1}^{n+1} - \widehat{C}_m^{n+1} + \widehat{C}_{m-1}^n - \widehat{C}_m^n}{2h_x^2} \\ & - \bar{\chi}_{m+1/2} \frac{\widehat{C}_m^n - \widehat{C}_{m+1}^n + \widehat{C}_m^{n+1} - \widehat{C}_{m+1}^{n+1}}{2h_x^2}, \\ & \bar{\chi}_{m\pm 1/2} \approx \frac{\widehat{D}_m^{n+1/2} + \widehat{D}_{m\pm 1}^{n+1/2}}{2} \\ & \approx \frac{2\widehat{D}_m^{n+1/2} \widehat{D}_{m\pm 1}^{n+1/2}}{\widehat{D}_m^{n+1/2} + \widehat{D}_{m\pm 1}^{n+1/2}} \approx \sqrt{\widehat{D}_m^{n+1/2} \widehat{D}_{m\pm 1}^{n+1/2}}. \end{aligned}$$

В данном и последующих уравнениях черта означает, что величина относится к моменту времени  $t' = t' + h_{t'}/2$ .

Для конвективного слагаемого примем

$$\frac{\partial \widehat{G}(t', x)}{\partial x} \approx \frac{\widehat{G}_{m+1}^n - \widehat{G}_m^n}{2h_x},$$

$$\text{где } \widehat{G}(t', x) = \widehat{V}(\bar{p}, T, \partial_x T) \widehat{C}(t', x).$$



В результате для уравнения материального баланса (3) получили линейную трехточечную (по пространству) разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{C}_m^{n+1} - \widehat{C}_m^n}{h_{t'}} \\ &= \bar{\chi}_{m+1/2} \frac{\widehat{C}_m^n - \widehat{C}_{m+1}^n + \widehat{C}_m^{n+1} - \widehat{C}_{m+1}^{n+1}}{2h_x^2} \\ & - \bar{\chi}_{m-1/2} \frac{\widehat{C}_{m-1}^{n+1} - \widehat{C}_m^{n+1} + \widehat{C}_{m-1}^n - \widehat{C}_m^n}{2h_x^2} \\ & - \frac{\widehat{G}_{m+1}^n - \widehat{G}_{m-1}^n}{2h_x} + \varphi(n, m). \end{aligned}$$

Для обеспечения монотонности схемы в качестве шага по времени  $h_{t'}$  необходимо брать малое значение:  $h_{t'} \leq 2/3 \min \left( \frac{h_x^2}{\chi_m} \right)$  [4].

Продуктивность корнеобитаемого слоя почвы представлена зависимостью (4), и для нее можно использовать аппроксимацию

$$\begin{aligned} \varphi(n, m) &= \frac{1}{h_{t'} h_x} \int_{t'}^{t'+h_{t'}} dt' \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} dx f_{pr}(t', x) \\ &\approx \frac{1}{2} f_{pr}(\bar{t}', x_{m-1/2}) + \frac{1}{2} f_{pr}(\bar{t}', x_{m+1/2}). \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение перехода с  $n$ -го на  $(n+1)$ -й слой по времени:

$$\begin{aligned} \omega_1 [\widehat{C}_{m-1}^n - \widehat{C}_{m-1}^{n+1}] + \omega_2 [\widehat{C}_{m+1}^n - \widehat{C}_{m+1}^{n+1}] \\ + \omega_3 [\widehat{C}_m^n - \widehat{C}_m^{n+1}] + \Psi_m^n = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega_1 \equiv (2h_x^2)^{-1} \bar{\chi}_{m-1/2}, \omega_2 \equiv (2h_x^2)^{-1} \bar{\chi}_{m+1/2},$$

$$\omega_3 \equiv (h_{t'})^{-1} - \omega_1 - \omega_2,$$

$$\Psi_m^n \equiv \varphi(n, m) - [\widehat{G}_{m+1}^n - \widehat{G}_{m-1}^n](2h_x)^{-1}.$$

Следуя методу прогонки, ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на  $(n+1)$ -м слое в виде  $\widehat{C}_m^{n+1} = \alpha_{m+1} \widehat{C}_{m+1}^{n+1} + \beta_{m+1}$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ . Применяв это выражение к (5), получим выражение для прогоночных коэффициентов ( $m = 1, \dots, M-1$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= -\frac{\omega_2}{\omega_3 + \omega_1 \alpha_m}, \quad \beta_{m+1} = -\alpha_{m+1} \widehat{C}_{m+1}^n \\ & + \frac{\omega_1 [\widehat{C}_{m-1}^n - \beta_m] + \omega_3 \widehat{C}_m^n + \Psi_m^n}{\omega_3 + \omega_1 \alpha_m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для реализации обратного хода прогонки необходимо знать значения  $\alpha_1, \beta_1$ . Из выражения  $\widehat{C}_0^{n+1} = \alpha_1 \widehat{C}_1^{n+1} + \beta_1$  получим  $\alpha_1 = 0$ , а  $\beta_1 = \widehat{C}_0^{n+1}$ . В качестве значений  $\widehat{C}_0^{n+1}$  и  $\widehat{C}_M^{n+1}$ ,

необходимых для реализации обратного хода прогонки, возьмем экспериментальные данные. По полученным значениям  $\alpha_1, \beta_1$  с помощью уравнений (6) находим оставшиеся прогоночные коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, i = 2, \dots, M-1$ .

На следующем шаге обратным ходом прогонки ищем приближенные значения концентрации в узлах сетки на  $(n+1)$ -м слое.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учитывая зависимость процессов переноса и продуцирования  $CO_2$  от почвенных структур, погодных условий и других факторов, актуальной задачей является математическое описание газовой фазы почв для конкретной местности. В работе кратко описывается задача моделирования продуцирования и переноса углекислого газа в суточном диапазоне времени в лесных почвах, характерных для Восточной Финноскандии. Разработана явно-неявная разностная схема и итерационный вычислительный алгоритм решения краевой задачи переноса углекислого газа в почвенном горизонте (техника неявных разностных схем используется для диффузионного слагаемого, а явных – для конвективного).

*Финансирование исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Отдел комплексных научных исследований КарНЦ РАН).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гамзаев Х. М. Численный метод решения коэффициентной обратной задачи для уравнения диффузии – конвекции – реакции // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2017. № 50. С. 67–78. doi: 10.17223/19988621/50/6
2. Заика Ю. В., Бахмет О. Н. Краевая задача переноса  $CO_2$  в лесных песчаных почвах // Труды КарНЦ РАН. 2020. № 7. С. 34–45. doi: 10.17076/mat1244
3. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 457 с.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. С. 380–384.
5. Полуэктов Р. А., Смоляр Э. И., Тарлеев В. В., Топаж А. Г. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. СПб.: СПбГУ, 2006. 396 с.
6. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 184 с.

7. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит, 2005. 544 с.
8. Смагин А. В. Газовая фаза почв. М.: МГУ, 2005. 301 с.
9. Тарко А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2005. 232 с.
10. Чертов О. Г., Комаров А. С., Надпорожская М. А., Михайлов А. В., Быховец С. С., Зудин С. Л., Зубкова Е. В. Динамическое моделирование процессов трансформации органического вещества почв. Имитационная модель ROMUL. СПб.: СПбГУ, 2007. 96 с.
11. Шейн Е. В., Рыжова И. М. Математическое моделирование в почвоведении. М.: ИП Маракушев А. Б., 2016. 377 с.
12. Шейн Е. В. Курс физики почв. М.: МГУ, 2005. 432 с.
13. Edmund M. R., Kiona O., Heather K., Kimberly E. S., Yolima C., Elise P. Modeling soil CO<sub>2</sub> production and transport with dynamic source and diffusion terms: testing the steady-state assumption using DETECT v1.0 // Geosci. Model Dev. 2018. P. 1909–1928. doi: 10.5194/gmd-11-1909-2018
14. Enrique P. S., Russell L. S., Joost van H., Greg A. B. Improving the accuracy of the gradient method for determining soil carbon dioxide efflux // J. Geophys. Res. Biogeosci. 2017. P. 50–64. doi: 10.1002/2016JG003530
15. Friedlingstein P., Andrew R. M., Rogelj J., Peters G., Canadell J. G., Knutti R., Luderer G., Raupach M. R., Schaeffer M., Van Vuuren D. P. Persistent growth of CO<sub>2</sub> emissions and implications for reaching climate targets // Nat. Geosci. 2014. No. 7. P. 709–715. doi: 10.1038/ngeo2248
16. Hashimoto S., Carvalhais N., Ito A., Migliavacca M., Nishina K., Reichstein M. Global spatiotemporal distribution of soil respiration modeled using a global database // Biogeosciences. 2015. No. 12. P. 4121–4132. doi: 10.5194/bg-12-4121-2015
17. Raich J. W., Schlesinger W. H. The global carbon dioxide flux in soil respiration and its relationship to vegetation and climate // Tellus B. 1992. Vol. 44, no. 2. P. 81–99. doi: 10.1034/j.1600-0889.1992.t01-1-00001.x
18. Richter J. The soil as a reactor: modelling processes in the soil. Catena Verlag, 1987. 192 p.
19. Zaika Yu. V., Bakhmet O. N. Boundary value problem of CO<sub>2</sub> production and transport in forest sandy soil / A Closer Look at Boundary Value Problems, New York: Nova Sci. Publ., 2020.

Поступила в редакцию 29.04.2021

## REFERENCES

1. Gamzaev H. M. Chislennyi metod resheniya koeffitsientnoi obratnoi zadachi dlya uravneniya diffuzii – konveksii – reaktsii. Vestnik TG. Matematika i mekhanika [A numerical method for solving the coefficient inverse problem for diffusion-convection-reaction equation. Tomsk St. Univ. J. Mathematics and Mechanics]. 2017. Vol. 50. P. 67–78. doi: 10.17223/19988621/50/6
2. Zaika Yu. V., Bakhmet O. N. Kraevaya zadacha perenosa CO<sub>2</sub> v lesnykh peschanykh pochvakh [Boundary value problem of CO<sub>2</sub> production and transport in forest sandy soil]. Trudy KarNTs RAN [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 34–45. doi: 10.17076/mat1244
3. Zommerfel'd A. Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh fiziki [Differential equations in partial derivatives in physics]. Moscow: IL, 1950. 457 p.
4. Kalitkin N. N. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1978. P. 380–384.
5. Poluektov R. A., Smolyar E. I., Tarleev V. V., Topazh A. G. Modeli produktsionnogo protsesssa sel'skokhozyaistvennykh kul'tur [Models of the productional process in crops]. St. Petersburg: SPbGU, 2006. 396 p.
6. Riznichenko G. Yu. Matematicheskie modeli v biofizike i ekologii [Mathematical models in biophysics and ecology]. Moscow; Izhevsk: IKI, 2003. 184 p.
7. Sivukhin D. V. Obshchii kurs fiziki. T. II. Termodinamika i molekulyarnaya fizika [A general physics course. Vol. II. Thermodynamics and molecular physics]. Moscow: Fizmatlit, 2005. 544 p.
8. Smagin A. V. Gazovaya faza pochv [Gaseous phase of soils]. Moscow: MGU, 2005. 301 p.
9. Tarko A. M. Antropogennyye izmeneniya global'nykh biosfernykh protsessov. Matem. modelirovanie [Man-induced changes in global biosphere processes. Mathematical modelling]. Moscow: Fizmatlit, 2005. 232 p.
10. Chertov O. G., Komarov A. S., Nadporozhskaya M. A., Mikhailov A. V., Bykhovets S. S., Zudin S. L., Zubkova E. V. Dinamicheskoe modelirovanie protsessov transformatsii organicheskogo veshchestva pochv. Imitatsionnaya model' ROMUL [Dynamic modelling of transformation processes of organic matter in soils. ROMUL simulation model]. St. Petersburg: SPbGU, 2007. 96 p.
11. Shein E. V., Ryzhova I. M. Matematicheskoe modelirovanie v pochvovedenii [Mathematical

modelling in soil science]. Moscow: IP Marakushev A. B., 2016. 377 p.

12. *Shein E. V.* Kurs fiziki pochv [A course of soil physics]. Moscow: MGU, 2005. 432 p.

13. *Edmund M. R., Kiona O., Heather K., Kimberly E. S., Yolima C., Elise P.* Modeling soil  $CO_2$  production and transport with dynamic source and diffusion terms: testing the steady-state assumption using DETECT v1.0. *Geosci. Model Dev.* 2018. P. 1909–1928. doi: 10.5194/gmd-11-1909-2018

14. *Enrique P. S., Russell L. S., Joost van H., Greg A. B.* Improving the accuracy of the gradient method for determining soil carbon dioxide efflux. *J. Geophys. Res. Biogeosci.* 2017. P. 50–64. doi: 10.1002/2016JG003530

15. *Friedlingstein P., Andrew R. M., Rogelj J., Peters G., Canadell J. G., Knutti R., Luderer G., Raupach M. R., Schaeffer M., Van Vuuren D. P.* Persistent growth of  $CO_2$  emissions and implications for reaching climate

targets. *Nat. Geosci.* 2014. No. 7. P. 709–715. doi: 10.1038/ngeo2248

16. *Hashimoto S., Carvalhais N., Ito A., Migliavacca M., Nishina K., Reichstein M.* Global spatiotemporal distribution of soil respiration modeled using a global database. *Biogeosciences.* 2015. No. 12. P. 4121–4132. doi: 10.5194/bg-12-4121-2015

17. *Raich J. W., Schlesinger W. H.* The global carbon dioxide flux in soil respiration and its relationship to vegetation and climate. *Tellus B.* 1992. Vol. 44, no. 2. P. 81–99. doi: 10.1034/j.1600-0889.1992.t01-1-00001.x

18. *Richter J.* The soil as a reactor: modelling processes in the soil. Catena Verlag, 1987. 192 p.

19. *Zaika Yu. V., Bakhmet O. N.* Boundary value problem of  $CO_2$  production and transport in forest sandy soil. *A Closer Look at Boundary Value Problems.* Nova Science Publ., New York, 2020.

Received April 29, 2021

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Грудова Ксения Васильевна**

младший научный сотрудник  
Отдел комплексных научных исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский  
центр «Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: grudova@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 766312

#### CONTRIBUTOR:

**Grudova, Kseniya**

Department of Multidisciplinary Scientific Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: grudova@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 766312

УДК 519.21, 515.12

## О МЕТРИЗАЦИИ ФУНКТОРА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

**А. В. Иванов**

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

В идемпотентной математике аналогом вероятностной меры на компакте  $X$  является нормированный функционал  $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , линейный относительно идемпотентных арифметических операций. Для обычных вероятностных мер давно построена содержательная теория квантования, имеющая широкие приложения (квантованием меры называется ее приближение мерами с конечными носителями). Естественно встает вопрос о построении аналогичной теории для идемпотентных вероятностных мер. Квантование предполагает наличие метрики на пространстве  $I(X)$  идемпотентных вероятностных мер, совместимой с топологией и задающей метризацию функтора  $I$  идемпотентных мер в смысле В. В. Федорчука. Вариант метрики на пространстве  $I(X)$  был определен в совместной работе Л. Базилевич, Д. Реповша и М. Заричного при доказательстве гомеоморфности этого пространства гильбертову кубу для любого бесконечно-метрического компакта  $X$ . Однако метрика Базилевич и др. имеет слишком сложную структуру, что затрудняет ее использование для оценки приближений. В работе предложен модифицированный вариант метризации функтора  $I$ , более удобный для построения теории квантования идемпотентных вероятностных мер.

Ключевые слова: идемпотентная вероятностная мера; квантование мер; метризуемый функтор.

### **A. V. Ivanov. ON METRIZATION OF THE FUNCTOR OF IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES**

In idempotent mathematics, an analogue of a probability measure on a compactum  $X$  is a normed functional  $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , linear with respect to idempotent arithmetic operations. For ordinary probability measures, a meaningful theory of quantization has long been available, which has a wide range of applications (quantization of a measure is called its approximation by measures with finite supports). The question naturally arises of constructing a similar theory for idempotent probability measures. Quantization presupposes the presence of a metric on the space  $I(X)$  of idempotent probability measures, compatible with the topology and defining a metrization of the functor  $I$  of idempotent measures sensu V. V. Fedorchuk. A version of the metric on the space  $I(X)$  was defined in a joint paper by L. Bazilevich, D. Repovs, and M. Zarichnyi when proving that this space is homeomorphic to the Hilbert cube for any infinite metric compactum  $X$ . However, the structure of the metric of Bazilevich et al. is too complicated for it to be used for estimating approximations. In this paper, we propose a modified version of the metrization of the functor  $I$ , which is more convenient for constructing a theory of quantization of idempotent probability measures.

Key words: idempotent probability measure; quantization of measures; metrizable functor.

В идемпотентной математике аналогом вероятностной меры на компакте  $X$  является нормированный функционал  $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , линейный относительно идемпотентных арифметических операций (суммы  $x \oplus y = \max\{x, y\}$  и произведения  $x \odot y = x + y$ ). Множество таких функционалов  $I(X)$ , наделенное слабой\* топологией, называется пространством идемпотентных вероятностных мер компакта  $X$ . Топологические свойства пространства  $I(X)$  исследованы в работе М. Заричного [1], где показано, в частности, что  $I(X)$  является компактом для любого компакта  $X$ . Конструкция  $I$  определяет ковариантный функтор в категории компактов и непрерывных отображений  $Compr$ , который является нормальным в смысле Е. В. Щепина [5]. Таким образом, свойства функтора  $I$  аналогичны свойствам функтора  $P$  классических вероятностных мер.

Для обычных вероятностных мер построена содержательная теория квантования, имеющая широкие приложения [8] (квантованием меры называется ее приближение мерами с конечными носителями). Естественно встает вопрос о построении аналогичной теории для идемпотентных вероятностных мер, к которому можно подходить с общих функториальных позиций (см. [2]). Для решения задачи квантования необходимо выбрать удобную метрику на  $I(X)$ , совместимую с топологией и задающую метризацию функтора  $I$  в смысле В. В. Федорчука [3]. Например, для функтора экспоненты  $\exp$  такой метрикой является метрика Хаусдорфа ( $\exp X$  – пространство непустых замкнутых подмножеств компакта  $X$  с топологией Вьеториса), для функтора  $P$  – метрика Канторовича – Рубинштейна.

В работе Л. Базилевич с соавт. [7] для каждого метрического компакта  $(X, \rho)$  была определена метрика на  $I(X)$ , которая фактически задает метризацию функтора  $I$  по Федорчуку. Однако квантование идемпотентных вероятностных мер с использованием этой метрики сталкивается с техническими трудностями, которые вызваны сложной структурой ее определения (в первую очередь это касается оценок расстояния сверху).

В настоящей работе предложена модификация метрики, определенной в [7], облегчающая построение теории квантования идемпотентных мер и при этом удовлетворяющая естественные требования, которые можно предъявить к метризации функтора  $I$ . В частности, ограничение этой метрики на подпро-

странство  $\exp X \subset I(X)$  совпадает с метрикой Хаусдорфа.

Для компактного хаусдорфова пространства (компакта)  $X$  через  $C(X)$ , как обычно, обозначается пространство непрерывных функций на  $X$ ;  $c_X$  – постоянная функция на  $X$  со значением  $c \in \mathbb{R}$ .

**Определение 1.** [1] Функционал  $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$  называется идемпотентной вероятностной мерой, если для любых  $f, g \in C(X)$  и  $c \in \mathbb{R}$

- 1)  $\mu(c_X) = c$ ;
- 2)  $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$ ;
- 3)  $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$ .

Множество идемпотентных вероятностных мер обозначается через  $I(X)$ . Любой функционал  $\mu \in I(X)$  сохраняет порядок. Это означает, что если функции  $f, g \in C(X)$  связаны точечным неравенством  $f(x) \leq g(x)$  для любого  $x \in X$ , то  $\mu(f) \leq \mu(g)$ . Из указанного свойства следует, что для любой меры  $\mu \in I(X)$  и  $f \in C(X)$  выполняются неравенства

$$\min f \leq \mu(f) \leq \max f. \quad (1)$$

Через  $\mathbb{R}_{\max}$  в идемпотентной математике обозначается полупрямая, компактифицированная точкой  $-\infty$ :  $\mathbb{R}_{\max} = [-\infty, 0]$ . Для каждой идемпотентной вероятностной меры  $\mu \in I(X)$  определена ее плотность  $d_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$  по формуле  $d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X), f \leq 0_X, f(x) = 0\}$ . Функция  $d_\mu$  удовлетворяет условию  $\max d_\mu = 0$  и полунепрерывна сверху. Последнее означает, что для любой точки  $x \in X$  и любого числа  $r \in \mathbb{R}$  такого, что  $d_\mu(x) < r$ , существует окрестность  $U$  точки  $x$  такая, что  $d_\mu(x') < r$  для любого  $x' \in U$ . При этом функция плотности определяет исходную меру  $\mu$ :

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \quad (2)$$

где  $f \in C(X)$ . (Формула (2) корректна, поскольку функция  $d_\mu + f$  полунепрерывна сверху и, следовательно,  $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$  достигается в некоторой точке компакта  $X$ ). И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию  $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ , удовлетворяющую условию  $\max g = 0$ , то формула (2) определяет идемпотентную вероятностную меру  $\mu_g$ :

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой  $d_{\mu_g} = g$  (см. [6]).

Множество  $I(X)$  является подмножеством пространства  $\mathbb{R}^{C(X)}$  с тихоновской топологией.

Тем самым  $I(X)$  наделяется слабой\* топологией. В [1] показано, что для любого компакта  $X$  пространство  $I(X)$  является компактом.

Для любого непрерывного отображения компактов  $h : X \rightarrow Y$  определено непрерывное отображение  $I(h) : I(X) \rightarrow I(Y)$ , действующее по формуле:  $I(h)(\mu)(f) = \mu(f \circ h)$ , где  $f \in C(Y)$ . Конструкция  $I$  определяет ковариантный функтор в категории  $Comp$  компактов и непрерывных отображений (см. [1]).

**Определение 2.** [4] Функтор  $\mathcal{F}$  в категории  $Comp$  называется полунормальным, если  $\mathcal{F}$ :

- 1) сохраняет точку и пустое множество;
- 2) сохраняет мономорфизмы;
- 3) сохраняет пересечения;
- 4) непрерывен, то есть перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра.

В дальнейшем через  $\mathcal{F}$  обозначается полунормальный функтор, и при этом мы считаем дополнительно, что  $\mathcal{F}$  сохраняет вес всякого бесконечного компакта. Если  $A$  – замкнутое подмножество компакта  $X$ , то в силу условия 2)  $\mathcal{F}(A)$  естественно вкладывается в  $\mathcal{F}(X)$ . Таким образом, можно считать, что  $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}(X)$ . Для каждой точки  $\xi \in \mathcal{F}(X)$  определен ее носитель  $supp(\xi)$  как наименьшее замкнутое подмножество  $A \subset X$ , для которого  $\xi \in \mathcal{F}(A)$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  множество

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : |supp(\xi)| \leq n\}$$

является замкнутым подмножеством  $\mathcal{F}(X)$ . При этом  $\mathcal{F}_1(X)$  естественно гомеоморфно  $X$  (каждая точка  $x \in X$  отождествляется с единственной точкой пространства  $\mathcal{F}(\{x\})$ ). Таким образом,  $X = \mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$ .

В работе [1] доказано, что функтор  $I$  идемпотентных вероятностных мер удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Нетрудно показать, что  $supp(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}$  для любой меры  $\mu \in I(X)$ .

**Определение 3.** [3] Функтор  $\mathcal{F}$  называется метризуемым, если для любого метрического компакта  $(X, \rho)$  может быть указана совместимая с топологией метрика  $\rho_{\mathcal{F}}$  на  $\mathcal{F}(X)$  так, что выполнены следующие условия:

- 1) для любого изометрического вложения  $i : (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$  отображение  $\mathcal{F}(i) : (\mathcal{F}(X_1), (\rho_1)_{\mathcal{F}}) \rightarrow (\mathcal{F}(X_2), (\rho_2)_{\mathcal{F}})$  также является изометрическим вложением;
- 2)  $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$ ;
- 3)  $diam(\mathcal{F}(X)) = diam(X)$ .

При этом семейство метрик  $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$  по определению задает метризацию функтора  $\mathcal{F}$ .

<sup>1</sup>Из условия  $\rho_n(\mu, \nu) = 0$  не следует, вообще говоря, равенство  $\mu = \nu$ .

В работе [7] для каждого метрического компакта  $(X, \rho)$  определена метрика на пространстве  $I(X)$  следующим образом. Для  $n \in \mathbb{N}$  и любых двух мер  $\mu, \nu \in I(X)$

$$\rho_n(\mu, \nu) = \frac{1}{n} \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in Lip_n(X)\}, \quad (3)$$

где  $Lip_n(X)$  – множество вещественных функций на  $X$ , удовлетворяющих условию Липшица с константой  $n$ .

Функции  $\rho_n$  являются непрерывными псевдометриками<sup>1</sup> (см. [7], теорема 4.1). При этом семейство  $\{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$  разделяет точки  $I(X)$ , и функция

$$\rho'_I(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(\mu, \nu)}{2^n}$$

является совместимой метрикой на  $I(X)$ .

**Определение 4.** Для мер  $\mu, \nu \in I(X)$  положим

$$\begin{aligned} &\rho_I(\mu, \nu) \\ &= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{n2^n} : f \in Lip_1(X)\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что в силу (1) для функции  $f \in Lip_1(X)$

$$\begin{aligned} |\mu(nf) - \nu(nf)| &\leq \max(nf) - \min(nf) \\ &\leq n \cdot diam(X). \end{aligned}$$

Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{n2^n}$  сходится и

$$\rho_I(\mu, \nu) \leq diam(X). \quad (5)$$

Пусть  $(X, \rho)$  – метрический компакт,  $x \in X$  и  $\varepsilon > 0$ . Для открытого (замкнутого)  $\varepsilon$ -шара точки  $x$  используются следующие обозначения:  $O(x, \varepsilon, \rho) = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\}$  ( $B(x, \varepsilon, \rho) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$ ). Если из контекста ясно, о какой метрике идет речь, допускается сокращенная запись:  $O(x, \varepsilon)$  ( $B(x, \varepsilon)$ ). Аналогично обозначаются открытый и замкнутый  $\varepsilon$ -шары подмножества  $A \subset X$ .

**Теорема.** Для любого метрического компакта  $(X, \rho)$  функция  $\rho_I$  является совместимой с топологией метрикой на  $I(X)$ , которая задает метризацию функтора  $I$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $\rho_I$  симметрична и  $\rho_I(\mu, \mu) = 0$  для  $\mu \in I(X)$ . Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место равенство

$$n \cdot Lip_1(X) = \{nf : f \in Lip_1(X)\} = Lip_n(X).$$

Следовательно, согласно формуле (3)

$$\rho_n(\mu, \nu) = \frac{1}{n} \sup\{|\mu(nf) - \nu(nf)| : f \in Lip_1(X)\}. \quad (6)$$

Таким образом, для любых  $\mu, \nu \in I(X)$  и любого  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^n} \rho_n(\mu, \nu) \leq \rho_I(\mu, \nu). \quad (7)$$

Поскольку семейство  $\{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$  разделяет точки  $I(X)$ , в силу (7)  $\rho_I(\mu, \nu) > 0$  при  $\mu \neq \nu$ .

Покажем, что для  $\rho_I$  выполняется неравенство треугольника. Пусть  $\mu, \nu, \xi \in I(X)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \rho_I(\mu, \nu) \\ &= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{2^{nn}} : f \in Lip_1(X)\right\} \\ &\leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \xi(nf)|}{2^{nn}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi(nf) - \nu(nf)|}{2^{nn}} : f \in Lip_1(X)\right\} \leq \rho_I(\mu, \xi) + \rho_I(\nu, \xi). \end{aligned}$$

Итак,  $\rho_I$  – метрика на  $I(X)$ . Проверим совместимость  $\rho_I$  с топологией  $I(X)$ . Для любых  $\mu, \nu \in I(X)$  выполняется неравенство

$$\rho_I(\mu, \nu) \leq \rho'_I(\mu, \nu). \quad (8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} & \rho_I(\mu, \nu) \\ &= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{2^{nn}} : f \in Lip_1(X)\right\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup\left\{\frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{2^{nn}} : f \in Lip_1(X)\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(\mu, \nu)}{2^n} = \rho'_I(\mu, \nu). \end{aligned}$$

В силу (8) для любого  $\varepsilon > 0$  и  $\mu \in I(X)$  имеет место включение  $O(\mu, \varepsilon, \rho'_I) \subset O(\mu, \varepsilon, \rho_I)$ . Метрика  $\rho'_I$  совместима с топологией  $I(X)$  (см. [7]). Следовательно, любая  $\varepsilon$ -окрестность  $O(\mu, \varepsilon, \rho_I)$  содержит некоторую топологическую окрестность точки  $\mu$ .

Пусть теперь  $U$  – топологическая окрестность  $\mu$  в  $I(X)$ . Для каждой точки  $\nu \in I(X) \setminus U$

выберем псевдометрику  $\rho_n$ , которая разделяет  $\mu$  и  $\nu$ . Пусть

$$\frac{\rho_n(\mu, \nu)}{2^n} = a_\nu > 0.$$

В силу непрерывности  $\rho_n$  найдется окрестность  $O\nu$  меры  $\nu$  такая, что для любого  $\xi \in O\nu$

$$\frac{\rho_n(\mu, \xi)}{2^n} \geq \frac{a_\nu}{2}.$$

И тогда в силу (7)

$$\rho_I(\mu, \xi) \geq \frac{a_\nu}{2}$$

для любого  $\xi \in O\nu$ . Из покрытия  $\{O\nu : \nu \in I(X) \setminus U\}$  множества  $I(X) \setminus U$  выделим конечное подпокрытие  $\{O\nu_1, \dots, O\nu_k\}$ . Пусть

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{a_{\nu_i}}{2} : i = 1, \dots, k\right\}.$$

По построению  $\rho_I(\mu, \xi) \geq \varepsilon$  для любой точки  $\xi \in I(X) \setminus U$ . Следовательно,  $O(\mu, \varepsilon, \rho_I) \subset U$ , что и требовалось.

Покажем теперь, что метрика  $\rho_I$  задает метризацию функтора  $I$ . Для проверки условия 1) определения 3 достаточно убедиться в том, что для любого замкнутого подмножества  $F$  метрического компакта  $(X, \rho)$  и любых мер  $\mu, \nu \in I(F) \subset I(X)$ , выполняется равенство

$$(\rho|_F)_I(\mu, \nu) = \rho_I(\mu, \nu). \quad (9)$$

Как известно, любая функция  $f \in Lip_1(F)$  допускает продолжение  $\bar{f} \in Lip_1(X)$  на метрический компакт  $X$ . Продолжение  $\bar{f}$  может быть определено, например, по формуле:

$$\bar{f}(x) = \sup\{f(u) - \rho(x, u) : u \in F\}.$$

Из существования  $\bar{f}$  следует равенство (9).

Каноническое вложение  $X \subset I(X)$  определяется отождествлением точек  $x \in X$  с мерами Дирака  $\delta_x \in I(X)$ . Пусть  $a, b \in X$ . Для любой функции  $f \in Lip_1(X)$

$$|f(a) - f(b)| \leq \rho(a, b). \quad (10)$$

Следовательно,  $\rho_I(\delta_a, \delta_b) \leq \rho(a, b)$ . В то же время для функции  $f(x) = \rho(a, x) \in Lip_1(X)$  неравенство (10) превращается в равенство. Таким образом,  $\rho_I(\delta_a, \delta_b) = \rho(a, b)$  – условие 2) определения метризуемого функтора выполнено.

Условие 3) является прямым следствием неравенства (5) и условия 2).  $\square$

Как обычно, через  $\text{exr } X$  мы будем обозначать пространство непустых замкнутых подмножеств компакта  $X$  с топологией Вьеториса. В [1] показано, что  $\text{exr } X$  естественно вкладывается в пространство  $I(X)$  (более того, функтор  $\text{exr}$  является подфунктором функтора  $I$ ). При этом вложении замкнутое подмножество  $F \in \text{exr } X$  отождествляется с мерой  $\mu_F \in I(X)$ , которая определяется по формуле

$$\mu_F(f) = \max\{f(x) : x \in F\},$$

где  $f \in C(X)$ . Для метрического компакта  $(X, \rho)$  топологию Вьеториса на  $\text{exr } X$  порождает классическая метрика Хаусдорфа  $\rho_H$ :

$$\rho_H(F, G) = \min\{\varepsilon : G \subset B(F, \varepsilon), F \subset B(G, \varepsilon)\},$$

$F, G \in \text{exr } X$ .

Следующее предложение показывает, что ограничение метрики  $\rho_I$  на  $\text{exr } X$  совпадает с метрикой Хаусдорфа.

**Предложение.** Для любых  $F, G \in \text{exr } X$

$$\rho_I(\mu_F, \mu_G) = \rho_H(F, G).$$

*Доказательство.* Пусть  $F, G \in \text{exr } X$ .  $\rho_H(F, G) = a$  и  $f \in Lip_1(X)$ . Предположим для определенности, что  $\mu_F(f) \geq \mu_G(f)$  и  $\mu_F(f) = f(p)$ , где  $p \in F$ . Для точки  $p$  найдется точка  $q \in G$  такая, что  $\rho(p, q) \leq a$ . Тогда  $f(p) - f(q) \leq a$ , откуда следует, что  $\mu_F(f) - \mu_G(f) \leq a$ . Аналогичные выкладки можно провести для функции  $nf$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , и мы получим, что

$$\mu_F(nf) - \mu_G(nf) \leq na. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует неравенство  $\rho_I(\mu_F, \mu_G) \leq a$ .

Поскольку  $\rho_H(F, G) = a$ , в одном из множеств ( $F$  или  $G$ ) существует точка, удаленная от другого множества на расстояние  $a$ . Пусть  $s \in G$  и  $\rho(s, F) = a$ . Рассмотрим функцию  $g(x) = \rho(x, F) \in Lip_1(X)$ . Для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеем  $\mu_G(ng) \geq ng(s) = na$  и  $\mu_F(ng) = 0$ . Следовательно,  $|\mu_F(ng) - \mu_G(ng)| \geq na$ . Значит,  $\rho_I(\mu_F, \mu_G) \geq a$ .  $\square$

В силу определения идемпотентных вероятностных мер (свойство 2)) в формулах (4) и (6) можно рассматривать только функции  $f \in Lip_1(X)$ , которые принимают нулевое значение в некоторой фиксированной точке  $x_0 \in X$ . Множество таких функций будем обозначать через  $Lip_1(X, x_0)$ .

**Пример.** Метрика  $\rho_I$  не совпадает с метрикой  $\rho'_I$ .

На множестве  $X = \{a, b, c\}$  зададим метрику  $\rho$  следующим образом:  $\rho(a, b) = 1$ ,  $\rho(a, c) = \rho(b, c) = 3$ . Меры  $\mu, \nu \in I(X)$  определим с помощью функций плотности:  $d_\mu(a) = 0$ ,  $d_\mu(b) = -\infty$ ,  $d_\mu(c) = -3$ ;  $d_\nu(a) = -\infty$ ,  $d_\nu(b) = 0$ ,  $d_\nu(c) = -1$ . Покажем, что  $\rho_I(\mu, \nu) < \rho'_I(\mu, \nu)$ .

Пусть  $f \in Lip_1(X, a)$ . Нетрудно показать, что  $\mu(f) = 0$  и  $-1 \leq \nu(f) \leq 2$ . Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \rho_1(\mu, \nu) &= \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| \\ &: f \in Lip_1(X, a)\} = 2, \end{aligned} \quad (12)$$

причем супремум достигается на функции  $f \in Lip_1(X, a)$ , принимающей значение  $f(c) = 3$ . При этом

$$\sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in Lip_1(X, a), f(c) \leq 2\} = 1. \quad (13)$$

Найдем теперь величину

$$\begin{aligned} A(n) &= \sup\{|\mu(nf) - \nu(nf)| \\ &: f \in Lip_1(X, a), f(c) > 2\} \end{aligned} \quad (14)$$

при  $n > 1$ . Если  $f(c) > 2$ , то  $\mu(f) = nf(c) - 3$ ,  $\nu(f) = nf(c) - 1$  и  $|\mu(f) - \nu(f)| = 2$ . Следовательно,  $A(n) = 2$ .

При этом для функции  $g \in Lip_1(X, a)$ , принимающей значения  $g(b) = g(c) = -1$ ,

$$|\mu(ng) - \nu(ng)| = n.$$

Таким образом, при  $n > 2$

$$\begin{aligned} A(n) &< \sup\{|\mu(nf) - \nu(nf)| \\ &: f \in Lip_1(X, a), f(c) \leq 2\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из формул (12)–(15) следует, что

$$\begin{aligned} &\rho_I(\mu, \nu) \\ &= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{2^{nn}} : f \in Lip_1(X, a)\right\} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \sup\left\{\frac{|\mu(nf) - \nu(nf)|}{2^{nn}} : f \in Lip_1(X, a)\right\} \\ &= \rho'_I(\mu, \nu). \end{aligned}$$

$\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Заричный М. М. Пространства и отображения идемпотентных мер // Известия РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 45–64. doi: 10.4213/im2785
2. Иванов А. В. О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2020. № 63. С. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2



3. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, вып. 2. С. 396–417.
4. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.
5. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. № 31. С. 3–62.

6. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351, no. 11. P. 4515–4543.
7. Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M. Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topology and its Applications. 2010. Vol. 157, iss. 1. P. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040
8. Graf S., Luschgy H. Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

Поступила в редакцию 19.03.2021

## REFERENCES

1. Zarichnyi M. M. Prostranstva i otobrazheniya idempotentnykh mer [Spaces and maps of idempotent measures]. *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Izvestiya: Mathematics]. 2010. Vol. 74, iss. 3. P. 45–64. doi: 10.1070/IM2010v074n03ABEH002495
2. Ivanov A. V. O funktove veroyatnostnykh mer i razmernostyakh kvantovaniya. *Vestnik TGU. Matematika i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Mathematics and Mechanics]. 2020. No. 63. P. 15–26. doi: 10.17223/19988621/63/2
3. Fedorchuk V. V. Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Proceed. USSR Acad. Sci. Ser. Math.* 1991. Vol. 36, no. 2. P. 411–433.
4. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruksii [General

Topology. Basic design]. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 1988. 252 p.

5. Shchepin E. V. Functors and uncountable powers of compacta. *Russ. Math. Surveys.* 1981. Vol. 36, no. 3. P. 1–71.
6. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1999. Vol. 351, no. 11. P. 4515–4543.
7. Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M. Spaces of idempotent measures of compact metric spaces. *Topology and its Applications.* 2010. Vol. 157, iss. 1. P. 136–144. doi: 10.1016/j.topol.2009.04.040
8. Graf S., Luschgy H. Foundations of quantization for probability distributions. Springer-Verlag, 2000. 231 p. doi: 10.1007/BFb0103947

Received March 19, 2021

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Иванов Александр Владимирович**  
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru  
тел.: +79217015441

## CONTRIBUTOR:

**Ivanov, Aleksander**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru  
tel.: +79217015441

УДК 519.977

## УПРАВЛЯЕМАЯ ДИНАМИКА В ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ДВУХВИДОВОГО БИОСООБЩЕСТВА

А. С. Иванова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Предполагается, что биологическое сообщество некоторого участка состоит из двух видов – хищников и жертв. Причем популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников мигрирует с участка в случае его недостаточной пищевой привлекательности. Под видовой структурой биосообщества понимается совокупность видов и типов взаимодействий между ними. Статья посвящена задаче сохранения видовой структуры биосообщества при помощи изъятия особей популяции хищников. Найдены интенсивности изъятия особей, позволяющие решить данную задачу. Также в статье решается задача об уменьшении интенсивностей изъятия особей, что позволяет сохранять видовую структуру биосообщества при меньшей антропогенной нагрузке на биосообщество.

Ключевые слова: пищевая привлекательность участка; динамическая система; видовая структура биосообщества; внешнее воздействие.

### A. S. Ivanova. CONTROLLED DYNAMICS IN THE PROBLEM OF PRESERVING THE STRUCTURE OF A TWO-SPECIES BIOCOMMUNITY

It is assumed that the biological community of a patch consists of two species – predators and prey. Supposedly, the prey population does not leave the patch, while the predator population migrates away from the patch if its trophic attractiveness is insufficient. The species structure of the biological community is defined as the entirety of species and types of interactions between them. The article deals with the preservation of the species structure of the biological community of the patch through removal of individuals from the predator population. The removal rates that enable the solution of this problem were found. The article also solves the problem of reducing the rate of removal of individuals, which allows the species structure of the biocommunity to be preserved with a lower anthropogenic pressure on the biocommunity.

Keywords: trophic attractiveness of the patch; dynamical system; species structure of biocommunity; external intervention.

### ВВЕДЕНИЕ

Введено понятие пищевой привлекательности участка в виде дополнительной переменной. Рассматривается динамическая система, задаваемая тремя обыкновенными дифферен-

циальными уравнениями, два из которых – система Лотки–Вольтерры с изъятием особей популяции хищников, третье – дифференциальное уравнение относительно пищевой привлекательности участка. Предполагается, что

популяция хищников покидает участок, когда пищевая привлекательность достигает порогового значения  $\Lambda > 0$ . Решается задача сохранения видовой структуры биосообщества. В отличие от работы [9], в которой видовая структура биосообщества сохраняется за счет постоянного изъятия особей популяций хищников и жертв, в настоящей работе задача решается при помощи изъятия только особей популяции хищников. Также в работе решается задача об уменьшении интенсивностей изъятия хищников.

В первом разделе статьи приводятся модель и постановка задач, во втором – предварительные сведения, в третьем – решение задач, в четвертом – результат, полученный при решении задачи об уменьшении интенсивностей изъятия хищников.

### МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть биологическое сообщество некоторого участка состоит из двух видов – жертв и хищников. Предполагается, что жертвы не покидают участок, а хищники мигрируют с участка при недостаточном количестве питательного ресурса (жертв) на данном участке. Для описания динамики взаимодействующих популяций используется классическая система Лотки – Вольтерры

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$  – численность жертв и хищников в момент времени  $t$  соответственно;  $a$  – коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников;  $b$  – коэффициент истребления хищником жертв;  $k$  – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство;  $m$  – коэффициент естественной смертности хищников; причем  $a, b, k, m$  – положительные постоянные ( $k < 1$ ).

Время присутствия популяции хищников на участке связано со структурной переменной, формальное определение которой введено в работах [2–4]. Далее структурную переменную будем называть пищевой привлекательностью участка. Итак, введем понятие пищевой привлекательности участка для популяции хищников.

Следуя идее Р. Ардити (R. Arditi) [7] о важности рассмотрения величины отношения  $x_1/x_2$  при описании динамики популяций, рассмотрим функцию

$$w(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \lambda,$$

т. е. отклонение относительной величины обеспеченности хищника ресурсом от некоторого порога  $\lambda > 0$ . Будем полагать, что при  $w(t) < 0$  проявляется тенденция популяции хищников к миграции. Ясно, что мгновенное значение  $w(t^*) = 0$  не является определяющим для начала миграции в момент времени  $t = t^*$  при условии, что  $w(t) > 0$  при  $t \in [0, t^*)$ . Для начала миграции недостаток пищевого ресурса при  $w(t) < 0$  должен накапливаться в течение некоторого времени, что приводит к рассмотрению величины  $\int_0^t \left( \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$ . Следуя принципу «стада себялюбцев», предложенному В. Гамильтоном (W. Hamilton) в работе [8] для объяснения одновременности миграции особей популяции, рассмотрим величину  $\int_0^t x_2(\tau) \left( \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau$ , учитывающую объем  $x_2$  популяции.

**Определение 1.** Пищевой привлекательностью участка для популяции хищников  $\tilde{n}$  называется сумма

$$\tilde{n} = \tilde{n}(t) = \Lambda + \int_0^t x_2(\tau) \left( \frac{x_1(\tau)}{x_2(\tau)} - \lambda \right) d\tau, \quad (2)$$

где  $\Lambda = \tilde{n}(0)$  – положительная постоянная.

Пусть  $t = 0$  – момент времени, в который популяция хищников находится на участке. Тогда полагаем, что при  $\tilde{n}(t) > \Lambda$  популяция хищников находится на участке, при  $\tilde{n}(t) < \Lambda$  – находится вне участка, при  $\tilde{n}(t) = \Lambda$  поведение хищников определяется знаком разности  $x_1 - \lambda x_2$ . Отметим, что необходимость учета пороговых эффектов в моделях поведения популяций отмечена в [1].

Таким образом, для  $\tilde{n}$  используется выражение, предлагаемое на основе концепций Р. Ардити и В. Гамильтона. За счет интеграла в выражении для пищевой привлекательности (2) решение об уходе принимается с учетом предыстории развития системы. Действительно, чтобы популяция покинула участок, она должна испытывать недостаток пищевого ресурса в течение некоторого времени. Другими словами, происходит накопление недостатка пищевого ресурса, и когда накопление достигает порогового значения, популяция покидает участок.

Равенство (2) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \quad (3)$$

Объединяя (1) и (3), получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m), \\ \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Благодаря тому, что в правых частях первых двух дифференциальных уравнений системы (4) не содержится переменная  $\tilde{n}$ , качественное и аналитическое исследование системы (4) упрощается.

**Определение 2.** Допустимым внешним воздействием называется изъятие хищников с постоянной интенсивностью  $u \geq 0$ , где  $u \in \mathbb{R}$ .

Система (4) с учетом допустимого внешнего воздействия  $u$  примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u), \\ \dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2. \end{cases} \quad (5)$$

Введем векторные обозначения

$$r = (x_1, x_2, \tilde{n}), f = (f_1, f_2, f_3),$$

где  $f_1 = x_1(a - bx_2)$ ,  $f_2 = x_2(kbx_1 - m - u)$ ,  $f_3 = x_1 - \lambda x_2$ . Тогда система (5) примет вид

$$\dot{r} = f(r, u). \quad (6)$$

Пусть  $r(t, u)$  – решение уравнения (6), соответствующее внешнему воздействию  $u$ . Тогда траектория, соответствующая данному решению, есть множество  $\{r(t, u) : t \in I\}$ , где  $I$  – максимальный промежуток существования решения.

**Замечание 1.** В дальнейшем для сокращения текста не будем различать обозначения  $r$ ,  $\{r\}$  и термины в случаях, которые не приводят к непониманию.

Пусть  $r(t, u, M_0) = (x_1(t, u, M_0), x_2(t, u, M_0), \tilde{n}(t, u, M_0))$  – траектория системы (6), причем  $r(0, u, M_0) = M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$ .

**Определение 3.** Точка  $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$  называется точкой сохранения структуры биосообщества, если найдется такое допустимое внешнее воздействие  $u$ , что

$$\tilde{n}(t, u, M_0) \geq \Lambda \quad (7)$$

при любом  $t \geq 0$ .

Пусть  $A$  – множество точек сохранения структуры биосообщества.

**Определение 4.** Допустимое внешнее воздействие  $u$ , при котором выполнено (7), называется воздействием, сохраняющим структуру биосообщества.

Пусть  $U(M_0)$  – множество допустимых управлений  $u$ , при которых  $M_0$  – точка сохранения структуры биосообщества.

С прикладной точки зрения естественно рассмотреть задачу нахождения  $\inf U(M_0)$ , т. е. определить внешнее, антропогенное, воздействие, сохраняющее видовую структуру биосообщества, наименьшим образом изменяющее его естественную динамику. Но это трудная задача, решение которой пока получить не удастся. Рассмотрим следующие задачи.

**Задача 1.** Пусть  $M_0 \in A$ . Найти воздействие  $u \in U(M_0)$  такое, что

$$\dot{\tilde{n}}(t, u, M_0) \geq 0 \quad (8)$$

при любом  $t \geq 0$ .

**Замечание 2.** Очевидно, что из (8) следует (7).

**Задача 2.** Найти множество таких точек  $M_0 \in A$ , для которых задача 1 разрешима.

Проще говоря, в задаче 1 нужно найти допустимое внешнее воздействие, обеспечивающее неубывание функции пищевой привлекательности, в задаче 2 – при каких начальных численностях популяций задача 1 разрешима.

Таким образом, если популяция жертв входит в рацион популяции хищников, то решение задачи 1 позволит сохранить популяцию хищников на участке сколь угодно долго. В связи с тем, что, покинув участок, некоторые особи популяции хищников до другого участка могут не дойти, поставленная задача обретает важное значение в случае, когда популяция хищников – исчезающий вид.

**Замечание 3.** Следует отметить, что задача 1 является задачей выживаемости, которая заключается в построении такого внешнего воздействия на систему, при котором ее траектории принадлежат некоторому подмножеству фазового пространства, не покидая его.

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Отдельно рассмотрим классическую модель «хищник-жертва» Лотки – Вольтерры, учитывающую изъятие хищников,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m - u). \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение фазовой траектории системы (9), проходящей через точку  $M_0(x_{10}, x_{20})$ , имеет вид (при  $u = 0$  см., например, [5])

$$a \ln x_2 - bx_2 + (m + u) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \quad (10)$$

где

$$c = c(x_{10}, x_{20}, u) = a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u) \ln x_{10} - kbx_{10}.$$

Через  $f = f(x_1, x_2, x_{10}, x_{20}, u)$  обозначим левую часть уравнения (10). Нетрудно показать, что  $f = 0$  – выпуклая замкнутая кривая.

Положение равновесия  $R$  системы (9) в области  $\{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$  при постоянном  $u$  имеет координаты

$$x_1 = \frac{m + u}{bk}, \quad x_2 = \frac{a}{b}.$$

В силу того, что в правые части первых двух уравнений системы (5) не входит  $\tilde{n}$ , в пространстве  $(x_1, x_2, \tilde{n})$  траектории этой системы располагаются на цилиндрических поверхностях. При этом образующие цилиндрических поверхностей параллельны оси  $O\tilde{n}$ , направляющие – траектории системы (9). Из того, что в данной работе решается задача сохранения популяции хищников на участке, т. е. ищется воздействие на биосообщество участка, при котором  $\tilde{n}(t) \geq \Lambda$  при любом  $t \geq 0$  и при  $t = 0$   $\tilde{n}(0) = \Lambda$ , следует, что траектории системы (5) при  $t \geq 0$  находятся на части цилиндрической поверхности, содержащейся в полупространстве  $\tilde{n} \geq \Lambda$ .

Для системы (5) множество

$$\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$$

инвариантно, поэтому далее  $x_1 > 0, x_2 \geq 0$ .

**Замечание 4.** Если начальная точка  $M_0 \in \pi^- = \{(x_1, x_2, \Lambda) : x_1 - \lambda x_2 < 0\}$ , то популяция хищников покидает участок. Действительно, в точке  $M_0$  имеем  $\dot{\tilde{n}} = x_1 - \lambda x_2 < 0$ , или  $\tilde{n}$  убывает, следовательно, популяция хищников мигрирует с участка.

**Замечание 5.** Вместо исследования поведения траекторий системы (5) достаточно исследовать поведение проекций траекторий системы (5) на плоскость  $(x_1, x_2, 0)$ , которую обозначим через  $(x_1, x_2)$ . Причем, так как проекцией траектории системы (5) на  $(x_1, x_2)$  является траектория системы Лотки–Вольтерры, достаточно исследовать поведение траекторий системы (9) на координатной плоскости  $(x_1, x_2)$ . Проекцию точки  $M_0(x_{10}, x_{20}, \Lambda)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  обозначим через  $M_0(x_{10}, x_{20})$ .

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 1 И 2

Неравенство (8) выполняется при любом  $t \geq 0$ , если траектория системы (9), проходящая через  $M_0(x_{10}, x_{20})$ , содержится в полуплоскости  $x_1 - \lambda x_2 \geq 0$ . В работе рассматривается предельный случай – случай касания траектории системы (9), проходящей через  $M_0$ , и прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ .

Пусть  $M_0(x_{10}, x_{20}) \in B = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 \geq 0, x_{10} \geq \frac{(a+m)\lambda}{(1+k\lambda)b}\}$ .

Введем обозначения:

$$P = 1 + \ln \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda}, \quad Q = a \ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} - bx_{20} - kbx_{10}. \quad (11)$$

Заметим, что  $Q < 0$ . Действительно, поскольку  $M_0 \in B$ , то

$$\frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} \leq 1.$$

Следовательно,  $\ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} \leq 0$ . Тогда  $Q < 0$ .

Справедлив результат.

**Теорема 1.** Траектория системы (9), проходящая через точку  $M_0 \in B$  и касающаяся прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ , существует и единственна тогда и только тогда, когда

$$P = \ln(-Q) + 1. \quad (12)$$

**Эквивалентная формулировка теоремы 1.** Траектория системы (9), проходящая через точку  $M_0 \in B$  и касающаяся прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ , существует и единственна тогда и только тогда, когда точка  $M_0$  является точкой кривой

$$bx_2 \left( \frac{x_1}{\lambda x_2} - 1 \right) + a \ln \frac{\lambda x_2}{x_1} = 0. \quad (13)$$

*Доказательство.* Пусть  $(x_1, x_2)$  – точка касания траектории системы (9), проходящей через  $M_0$ , и прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ . Тогда ее координаты удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$a \ln x_2 - bx_2 + (m + u) \ln x_1 - kbx_1 - c = 0, \quad (14)$$

$$\frac{x_2(kbx_1 - m - u)}{x_1(a - bx_2)} = \frac{1}{\lambda}, \quad (15)$$

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad (16)$$

где  $c = a \ln x_{20} - bx_{20} + (m + u) \ln x_{10} - kbx_{10}$ .

Решим сначала систему (15)–(16). Ее решение имеет вид

$$x_1 = \lambda x_2, \quad x_2 = \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}.$$

Таким образом, получаем, что точка касания траектории системы (9), необязательно проходящей через  $M_0$ , и прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$  имеет координаты

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}, \\ x_2 &= \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, подставив выражения для  $x_1, x_2$  (17) в уравнение (14), получим уравнение относительно  $u$

$$\begin{aligned} &a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - b \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ &+ (m+u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - kb\lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ &- (a \ln x_{20} - bx_{20}) \\ &+ (m+u) \ln x_{10} - kbx_{10}) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решим последнее уравнение. Другими словами, найдем значения  $u$ , при которых траектория системы (9), проходящая через точку  $M_0$ , касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ .

После вынесения в уравнении (18) общего множителя второго и четвертого слагаемых за скобки получим уравнение

$$\begin{aligned} &a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - (a+m+u) \\ &+ (m+u+a-a) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ &- (a \ln x_{20} - bx_{20}) \\ &+ (m+u+a-a) \ln x_{10} - kbx_{10}) = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$z = a + m + u.$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\begin{aligned} &a \ln \frac{z}{b(1+k\lambda)} - z + (z-a) \ln \lambda \frac{z}{b(1+k\lambda)} \\ &- (a \ln x_{20} - bx_{20} + (z-a) \ln x_{10} - kbx_{10}) = 0, \end{aligned}$$

или после преобразований, учитывая формулы для  $P$  и  $Q$  (11), получаем

$$z \ln z = Pz + Q. \quad (19)$$

Учитывая взаимное положение графиков функций  $y = z \ln z$  и  $y = Pz + Q$ , заключаем, что существует 0, 1 или 2 решения уравнения (19). Таким образом, касательная траектория единственна тогда и только тогда, когда графики  $y = z \ln z$  и  $y = Pz + Q$  имеют одну общую точку, которая является точкой касания этих линий. Итак, пусть  $z$  – единственное решение уравнения (19). Тогда  $z$  удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} z \ln z = Pz + Q, \\ (z \ln z)' = (Pz + Q)' \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z \ln z = Pz + Q, \\ \ln z + 1 = P. \end{cases}$$

Решив второе уравнение последней системы относительно  $z$  и подставив решение в первое уравнение, получим условие, обеспечивающее существование единственного решения уравнения (19). Оно имеет вид (12).

При этом воздействие  $u$  имеет вид

$$u = e^{P-1} - a - m$$

или

$$u = \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda} - a - m \quad (20)$$

и является допустимым. Допустимость воздействия  $u$  следует из условия:  $M_0 \in B$ .

Далее подставим выражения для  $P$  и  $Q$  (11) в (12). Получим уравнение

$$\begin{aligned} &1 - \ln \frac{\lambda}{b(1+k\lambda)} + \ln x_{10} \\ &= \ln(-a \ln \frac{\lambda x_{20}}{x_{10}} + b(x_{20} + kx_{10})) + 1. \end{aligned}$$

После преобразований оно примет вид (13). Получаем, что для точки  $M_0$ , принадлежащей кривой (13), существует единственное  $u$ , при котором траектория системы (9) проходит через  $M_0$  и касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ .  $\square$

**Замечание 6.** Если для углового коэффициента  $P$  прямой  $y = Pz + Q$  выполнено равенство (12), то уравнение (19) имеет одно решение. Свойства функций  $y = z \ln z$  и  $y = Pz + Q$  таковы, что при увеличении угла наклона прямой  $y = Pz + Q$  к положительному направлению оси  $Oz$  уравнение (19) имеет два решения, а при уменьшении – не имеет решений. Другими словами, при  $P > \ln(-Q) + 1$  уравнение (19) имеет два решения, что соответствует существованию двух значений  $u$ , при которых траектория системы (9), проходящая через  $M_0$ , касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ , а при  $P < \ln(-Q) + 1$  уравнение (19) не имеет решений или не существует  $u$  таких, что траектория системы (9), проходящая через  $M_0$ , касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ .

Обозначим левую часть уравнения (13) через  $g(x_1, x_2)$ . Исследуем кривую

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) = 0\}.$$

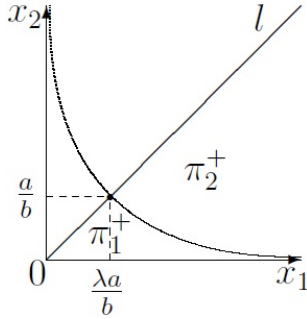
Сначала разберемся в структуре множества решений. Уравнение (13) представим в виде

$$\frac{bx_1}{\lambda} - a \ln x_1 = \frac{b}{\lambda} \lambda x_2 - a \ln(\lambda x_2).$$

Отсюда видно, что  $x_1$  или  $\lambda x_2$  – корни уравнения

$$\frac{b}{\lambda}x - a \ln x = C,$$

в котором левая часть – выпуклая вниз функция  $f(x)$  с минимумом в точке  $x = \frac{\lambda a}{b}$ , правая часть –  $C$  – значение функции  $f(x)$ , полученное при фиксированном значении  $x = \lambda x_2$  или  $x = x_1$  соответственно. Уравнение имеет два корня  $\lambda x_2 = x_1$ ,  $\lambda x_2$  – альтернативный корень уравнения. Таким образом, получаем, что множество решений уравнения (13) распадается на две ветви, одна из которых – прямая  $l = \{(x_1, x_2) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$ . Можно показать, что другая ветвь есть график монотонно убывающей выпуклой вниз функции с двумя асимптотами (см. рисунок).



Кривая  $\Gamma$   
Curve  $\Gamma$

Далее выясним, для какого множества точек существует два значения  $u$ , при которых траектория системы (9), проходящая через точку  $M_0$ , касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ , и для какого множества точек не существует таких  $u$ .

Итак, кривая  $\Gamma$  делит угловую область  $\pi^+ = \{(x_1, x_2) : x_1 > \lambda x_2 > 0\}$  на две части  $\pi_1^+$  и  $\pi_2^+$  (см. рисунок). Определим знак  $g(x_1, x_2)$  в каждой из частей. В  $\pi_1^+$  и  $\pi_2^+$  выберем соответственно точки  $(\frac{\lambda a}{b}, \frac{a}{2b})$  и  $(\frac{2\lambda a}{b}, \frac{a}{b})$ . После подстановки координат первой точки в выражение для  $g(x_1, x_2)$  получим

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\lambda a}{b}, \frac{a}{2b}\right) &= b \frac{a}{2b} \left(\frac{\frac{\lambda a}{b}}{\lambda \frac{a}{2b}} - 1\right) + a \ln \frac{\lambda \frac{a}{2b}}{\frac{\lambda a}{b}} \\ &= \frac{a}{2} + a \ln \frac{1}{2} = a \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из замечания 6 получаем, что для точек из  $\pi_1^+$  не существует внешнего воздействия  $u$ , при котором траектория системы (9), проходящая через точку данного множества, касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ . После подстановки координат второй точки в выра-

жение для  $g(x_1, x_2)$  получим

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2\lambda a}{b}, \frac{a}{b}\right) &= b \frac{a}{b} \left(\frac{\frac{2\lambda a}{b}}{\lambda \frac{a}{b}} - 1\right) + a \ln \frac{\lambda \frac{a}{b}}{\frac{2\lambda a}{b}} \\ &= a + a \ln \frac{1}{2} = a(1 - \ln 2) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из замечания 6 получаем, что для точек из  $\pi_2^+$  существует два внешних воздействия  $u_{1\tau}, u_{2\tau}$ , при которых траектория системы (9), проходящая через точку данного множества, касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ .

**Замечание 7.** Задача 1 разрешима для  $M_0 \in B \cap (\Gamma \cup \pi_2^+)$ . А именно, если  $M_0 \in B \cap \Gamma$ , то  $u$  вычисляется по формуле (20), если  $M_0 \in B \cap \pi_2^+$ , то

$$\begin{aligned} u_{1\tau} &= z_1 - a - m, \\ u_{2\tau} &= z_2 - a - m, \end{aligned}$$

где  $z_1, z_2$  – решения уравнения (19). Следует отметить, что кроме полученных воздействий, возможно, существуют и другие решения задачи 1.

Справедлива следующая теорема 2.

**Теорема 2.** Если проекция траектории  $r(t, u)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  касается одной из ветвей кривой  $\Gamma$ , то она касается и другой ветви. При этом если  $M_1(x_{11}, x_{21})$  и  $M_2(x_{12}, x_{22})$  – соответствующие точки касания, то

$$x_{11} = x_{12}.$$

*Доказательство.* Проекцией траектории  $r(t, u)$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  является траектория системы (9). Предположим, что она касается прямой  $x_1 - \lambda x_2 = 0$ . Тогда уравнение проекции, т. е. траектории системы (9), проходящей через точку касания (17), имеет вид

$$\begin{aligned} a \ln x_2 - b x_2 + (m + u) \ln x_1 - k b x_1 \\ - \left( a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - b \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \right) \\ + (m + u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - k b \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Докажем, что при подстановке вместо  $x_1$  первой координаты точки касания (17) в последнее уравнение и в уравнение кривой (13) получим равносильные уравнения. Действительно, после подстановки  $x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}$  получим уравнения

$$\begin{aligned} a \ln x_2 - b x_2 + (m + u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - k b \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \\ - \left( a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - b \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} \right) \\ + (m + u) \ln \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} - k b \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{a + m + u}{1 + k\lambda} - b x_2 + a \ln \lambda x_2 - a \ln \lambda \frac{a + m + u}{b(1 + k\lambda)} = 0.$$

После преобразований уравнения примут соответственно вид

$$a \ln x_2 - bx_2 - a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} + \frac{a+m+u}{1+k\lambda} = 0,$$

$$\frac{a+m+u}{1+k\lambda} - bx_2 + a \ln x_2 - a \ln \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)} = 0.$$

Последние уравнения равносильны. Причем из свойств кривой следует, что уравнения имеют два решения  $x_{21}, x_{22}$ . Итак, получаем, что траектория системы (9) и кривая  $\Gamma$  имеют две общие точки  $M_1(x_{11}, x_{21})$  и  $M_2(x_{12}, x_{22})$ , причем  $x_{11} = x_{12} = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}$ . Далее докажем, что точки  $M_1(x_{11}, x_{21})$  и  $M_2(x_{12}, x_{22})$  – точки касания траектории системы (9) и кривой  $\Gamma$ . При  $x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}$  угловые коэффициенты касательных к кривой  $\Gamma$   $x'_2 = \frac{x_2(\lambda a/b - x_1)}{\lambda x_1(a/b - x_2)}$  (следует из (13)) и к траектории системы (9)  $\frac{dx_2}{dx_1}$  (получается делением второго уравнения системы (9) на первое) после преобразований принимают одинаковый вид

$$\begin{aligned} x'_2 \Big|_{x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}} &= \frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_1 = \lambda \frac{a+m+u}{b(1+k\lambda)}} \\ &= \frac{bx_2(ak\lambda - m - u)}{\lambda(a+m+u)(a - bx_2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $x_2 = x_{21}$  и  $x_2 = x_{22}$  угловые коэффициенты касательных к обеим кривым равны. Таким образом, получаем, что траектория системы (9) и кривая  $\Gamma$  касаются в точках  $M_1(x_{11}, x_{21})$  и  $M_2(x_{12}, x_{22})$ , причем  $x_{11} = x_{12}$ .  $\square$

## УМЕНЬШЕНИЕ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Внешнее воздействие  $u$  на биосистему естественно стараться уменьшить, поэтому рассмотрим следующий результат, основанный на теореме о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от правой части (см., например, [6]) и лемме, доказанной в работе [4].

Пусть  $A'$  – прообраз точки  $A$  при движении по траектории системы (5) (без учета ограничений на  $x_1, x_2, \tilde{n}$ ) из точки  $A$  вспять (при убывании времени) в течение времени, равного периоду проекции данной траектории на плоскость  $(x_1, x_2)$ . Очевидно, точка  $A'$  лежит на прямой, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно плоскости  $\tilde{n} = \Lambda$ . Возникает вопрос: какая из точек –  $A$  или  $A'$  лежит выше? Ответ дается в работе [4] леммой.

Пусть  $\tilde{n}(A), \tilde{n}(A')$  – соответствующие координаты точек  $A$  и  $A'$ .

**Лемма.** [4] Если

- а)  $\lambda < \frac{m+u}{ak}$ , то  $\tilde{n}(A) > \tilde{n}(A')$ ;
- б)  $\lambda > \frac{m+u}{ak}$ , то  $\tilde{n}(A) < \tilde{n}(A')$ ;
- в)  $\lambda = \frac{m+u}{ak}$ , то  $\tilde{n}(A) = \tilde{n}(A')$ .

Введем обозначения:

- 1)  $T(u)$  – период траектории системы (9), проходящей через  $M_0$ , соответствующий внешнему воздействию  $u$ ;
- 2) если  $M_0 \in B$ , то

$$\bar{u} = \begin{cases} \min\{u_{1\tau}, u_{2\tau}\} & \text{для } M_0 \in \pi_2^+, \\ \frac{x_{10}b(1+k\lambda)}{\lambda} - a - m & \text{для } M_0 \in \Gamma; \end{cases}$$

- 3)  $|\cdot|$  – обозначение для нормы.

Справедлива следующая теорема 3.

**Теорема 3.** Для любой точки  $M_0 \in B \cap (\pi_2^+ \cup \Gamma)$  существует такое  $\delta > 0$ , что при  $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$  таком, что  $\lambda < \frac{m+u}{ak}$

$$\tilde{n}(t, u, M_0) > \Lambda \quad (21)$$

для любого  $t > 0$ .

*Доказательство.* Правые части системы (5) – многочлены относительно  $x_1, x_2, \tilde{n}$ . Следовательно, применима теорема о непрерывной зависимости решения от параметра (см. [6]), согласно которой для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для любого  $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$  справедливо неравенство

$$|r(t, u, M_0) - r(t, \bar{u}, M_0)| < \varepsilon, \quad (22)$$

где  $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$ ;  $\bar{t} \in [0, T(\bar{u})]$  – первый момент времени после  $t = 0$ , при котором шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $(x_1(\bar{t}, \bar{u}, M_0), x_2(\bar{t}, \bar{u}, M_0), \tilde{n}(\bar{t}, \bar{u}, M_0))$  касается плоскости  $\{(x_1, x_2, \tilde{n}) : x_1 - \lambda x_2 = 0\}$ ;  $T_{sup} = \sup_{u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)} T(u)$ .

Неравенство (22) обеспечивает близость траекторий при разных  $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$  для любого  $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$ , но нам надо обеспечить выполнение неравенства (21) для любого  $t \in (0, +\infty)$ .

Из неравенства (22) следует, что для любого  $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$  точки траекторий при любом  $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$  находятся в шаре радиуса  $\varepsilon > 0$ . Для того чтобы при любом  $t > 0$  ни одна траектория, находящаяся в шаре, не вышла в полупространство  $\tilde{n} < \Lambda$ , достаточно взять

$$\varepsilon < \frac{\tilde{n}(\bar{t}, \bar{u}, M_0) - \Lambda}{2}. \quad (23)$$

Получим, что при любом  $t \leq \bar{t}$  точки траекторий в полупространстве  $\tilde{n} > \Lambda$ , т. к. при  $t = 0$   $M_0 \in \{(x_1, x_2, \tilde{n}) : \tilde{n} = \Lambda\}$  и  $\dot{\tilde{n}} > 0$ ; при



$t = \bar{t}$  шар находится на расстоянии не меньшем  $\frac{\tilde{n}(\bar{t}, \bar{u}, M_0) - \Lambda}{2} > 0$ . Далее, при  $\bar{t} < t < \bar{t} + T_{sup}$  шар с центром в точке  $r(t, \bar{u}, M_0)$  поднимается вверх, т. к.  $\dot{\tilde{n}}(t, \bar{u}, M_0) \geq 0$ . Так как  $\lambda < \frac{m+u}{ak}$ , то в силу леммы ([4]) получаем, что для любого  $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u} + \delta)$  и любого  $t > \bar{t} + T_{sup}$

$$\tilde{n}(t + T(u), u, M_0) > \tilde{n}(t, u, M_0).$$

Это значит, что неравенство (21) выполняется для любого  $t > 0$ .  $\square$

**Замечание 8.** Оценим теперь величину  $\delta$  сверху.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= \bar{f}(\bar{r}, \bar{u}), \\ \dot{r} &= f(r, u).\end{aligned}$$

Пусть  $\bar{r}(t, \bar{u}, M_0)$ ,  $r(t, u, M_0)$  – решения первого и второго уравнений соответственно;  $V = \{t \in [0, \bar{t} + T_{sup}], |r - \bar{r}| \leq \rho\}$  – окрестность решения  $\bar{r}(t, \bar{u}, M_0)$ , где  $\rho > 0$ , в которой  $\bar{f}(\bar{r}, \bar{u})$  и  $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) непрерывны. Как в доказательстве теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части уравнения (см. теорему 6 на с. 52 в [6]), из неравенств

$$|\bar{f}(\bar{r}, \bar{u}) - \bar{f}(r, \bar{u})| \leq k|\bar{r} - r|,$$

где  $(t, \bar{r}), (t, r) \in V, k = 3p$ , где  $p = \max \left| \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} \right|$  ( $i, j = 1, 2, 3$ );

$$\begin{aligned}|\bar{f}(r, \bar{u}) - f(r, u)| &= \max_{(t,r) \in V} |\bar{f}(r, \bar{u}) - f(r, u)| \\ &= \max |x_2(\bar{u} - u)| < c\delta = \tilde{\delta},\end{aligned}$$

где  $c = \max x_2, \delta > |\bar{u} - u|$ , следует

$$|\dot{\bar{r}} - \dot{r}| = |\bar{f}(\bar{r}, \bar{u}) - f(r, u)| < k|\bar{r} - r| + \tilde{\delta}.$$

Тогда при  $t \in [0, \bar{t} + T_{sup}]$  имеем

$$|\bar{r} - r| < \tilde{\delta} \left( e^{ks} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right),$$

где  $s = \bar{t} + T_{sup}$ . Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ , для которого выполнено неравенство (23),  $\varepsilon_1 = \min\{\rho, \varepsilon\}$  и такое  $\tilde{\delta} > 0$ , чтобы

$$|\bar{r} - r| < \tilde{\delta} \left( e^{ks} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \right) < \varepsilon_1.$$

Учитывая, что  $\tilde{\delta} = c\delta$ , получаем

$$\delta < \frac{\varepsilon_1}{c(e^{ks}(1 + \frac{1}{k}) - \frac{1}{k})}.$$

Таким образом, получена оценка величины  $\delta$  такой, что для любого  $u \in (\bar{u} - \delta, \bar{u})$   $M_0$  является точкой сохранения структуры биосообщества.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено решение задачи сохранения видовой структуры биосообщества участка, основанное на отлове хищников. Найдены начальные численности, при которых задача разрешима. Получены интенсивности изъятия хищников, обеспечивающие рост пищевой привлекательности участка для популяции хищников.

Поскольку процесс отлова хищников требует материальных и физических затрат, то естественно возникает вопрос о возможности уменьшения интенсивности изъятия особей. Доказано, что уменьшение интенсивности изъятия также позволяет решить поставленную задачу. Получена оценка величины, уменьшение интенсивности изъятия на которую не приведет к миграции хищников.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества. М.: Мир, 1989. Т. 1. 667 с.
2. Кириллов А. Н. Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.
3. Кириллов А. Н. Системы с переменным фазовым пространством в моделировании процессов биологической очистки // Математические проблемы экологии: Всерос. школьно-коллоквиум: Тез. докл. Душанбе, 1991. С. 44.
4. Кириллов А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6, вып. 2. С. 318–336.
5. Леонов Г. А. Введение в теорию управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 218 с.
6. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Учебник. М.: КомКнига, 2007. 240 с.
7. Arditi R., Ginzburg L. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // J. Theor. Biol. 1989. Vol. 139. P. 311–326.
8. Hamilton W. Geometry for the selfish herd // J. Theor. Biol. 1971. Vol. 31. P. 295–311.
9. Kirillov A., Ivanova A. Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 1500–1511. doi: 10.1134/S0005117917080100

Поступила в редакцию 23.04.2021

## REFERENCES

1. *Begon M., Harper J. L., Townsend C. R.* Ecology: individuals, populations and communities. Oxford: Blackwell Sci. Publ., 1986. 876 p.
2. *Kirillov A. N.* Dinamicheskie sistemy s peremennoi strukturoi i razmernostiu [Dynamical systems with varying structure and dimensions]. *Izv. vuzov. Priborostroenie* [J. Instrument Engineering]. 2009. Vol. 52, no. 3. P. 23–28.
3. *Kirillov A. N.* Sistemy s peremennym fazovym prostranstvom v modelirovanii protsessov biologicheskoi ochistki [Systems with varying phase space in the modeling of biological purification processes]. *Matematicheskie problemy ekol.: Vseros. shkola-kollokvium: Tez. dokl.* [All-Russ. school and colloquium «Mathematical problems in ecology»: Proceed.] Dushanbe, 1991. P. 44.
4. *Kirillov A. N.* Ekologicheskie sistemy s peremennoi razmernostiu [Ecological systems with varying dimensionality]. *Obozrenie priklad. i promyshlennoi matematiki* [Surveys in Appl. and Industrial Mathematics]. 1999. Vol. 6, no. 2. P. 318–336.
5. *Leonov G. A.* Mathematical problems of control theory: an introduction. Singapoure: World Scientific, 2001. 172 p.
6. *Filippov A. F.* Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravnenii. Uchebnik [Introduction to the theory of differential equations. A textbook]. Moscow: KomKniga, 2007. 240 p.
7. *Arditi R., Ginzburg L.* Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. *J. Theor. Biol.* 1989. Vol. 139. P. 311–326.
8. *Hamilton W.* Geometry for the selfish herd. *J. Theor. Biol.* 1971. Vol. 31. P. 295–311.
9. *Kirillov A., Ivanova A.* Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem. *Automation and Remote Control*. 2017. Vol. 78. P. 1500–1511. doi: 10.1134/S0005117917080100

Received April 23, 2021

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Иванова Александра Сергеевна**  
младший научный сотрудник  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: a\_s\_ivanova@bk.ru  
тел.: +79535268311

## CONTRIBUTOR:

**Ivanova, Alexandra**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: a\_s\_ivanova@bk.ru  
tel.: +79535268311

УДК 519.977

## ПОВЕДЕНИЕ ПОПУЛЯЦИИ ПРИ ВЫБОРЕ АРЕАЛА: ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

А. Н. Кириллов<sup>1</sup>, И. В. Данилова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

<sup>2</sup> *Институт математики и информационных технологий,  
Петрозаводский государственный университет, Россия*

Рассматривается задача выбора популяцией наиболее пригодного ареала для случая двух ареалов, расположенных на концах отрезка. Предполагается, что популяция перемещается внутри заданного отрезка с постоянной скоростью. Вводятся функции полезности рассматриваемых ареалов с учетом неполноты меры информированности об их качестве, истинной полезности каждого ареала и затрат на перемещение к ним. С помощью введенных функций полезности заданный отрезок делится на области предпочтительной полезности, из чего можно сделать выводы о предпочтениях популяции. Также рассматривается задача оптимизации численности популяции в ареале и анализируются условия, при которых ее численность максимизируется.

Ключевые слова: функция полезности; область предпочтительной полезности; мера информированности.

**A. N. Kirillov, I. V. Danilova. THE BEHAVIOR OF A  
POPULATION WHEN CHOOSING A PATCH: A ONE-  
DIMENSIONAL CASE**

The problem of selection of the most suitable patch by a population is considered for the case of two patches located at the ends of a segment. It is assumed that the population moves within the given segment at constant speed. Utility functions of the patches are introduced, taking into account the incompleteness of the measure of awareness of the patch quality, the true utility of each patch, and the cost of moving to the patch. Using these utility functions, the segment is divided into preferred utility domains, enabling conclusions regarding the population's preferences. We also study the problem of optimization of the population size in the patch, and analyze the conditions under which its size is maximized.

Key words: utility function; preferred utility domain; measure of awareness.

---

### ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени основной концепцией, используемой для исследования задачи выбора популяцией ареала, являлась концепция

идеального свободного распределения (Ideal Free Distribution, IFD) [2–6]. Согласно этой концепции, среди особей популяции существует равная конкуренция, при этом популяция

имеет точную информацию о качестве ареалов и не несет затрат на перемещение между ними. Но эмпирические наблюдения экологов показали, что концепция IFD не отражает реальную ситуацию при выборе ареалов. В качестве альтернативы работе [6] был предложен подход, основанный на введении функций полезности, отражающих факторы, не учтенные в концепции идеального свободного распределения.

В работе [1] было введено понятие области предпочтительной полезности (ОПП)  $D_i$  ареала  $A_i$  с точки зрения популяции  $M$ , где  $A_i$  и  $M$  – точки пространства  $\mathbb{R}^n$ . Смысл этого понятия заключается в следующем: находясь в области  $D_i$ , популяция из множества ареалов с большей вероятностью выберет ареал  $A_i$ . На основе подхода [6] в данной работе вводится функция полезности  $U_i$   $i$ -го ареала, в которую входят: мера информированности  $I_i$  популяции о качестве рассматриваемого ареала, его истинная полезность  $V_i$  и затраты на перемещение к нему  $T_i$ . С учетом введенных функций полезности в пространстве  $\mathbb{R}^n$  выделяются области предпочтительной полезности рассматриваемых ареалов.

В представленной статье рассматриваются две задачи, связанные с моделированием поведения популяции при выборе ареала и при нахождении в нем. В задаче выбора рассмотрен одномерный случай, когда ареалы – концы отрезка, а популяция принадлежит ему. Далее рассматривается задача нахождения доли популяции в ареале, при которой ее численность максимальна.

### ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОПУЛЯЦИЕЙ АРЕАЛА. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Введем определение области предпочтительной полезности в  $\mathbb{R}^n$  [1].

**Определение 1.** Область предпочтительной полезности  $D_i$  ареала  $A_i$  – это множество точек  $M$  вида:  $D_i = \{M \in \mathbb{R}^n : \rho(M, A_i) = d_i, U_i(d_i) > U_j(d_j), i \neq j, j = 1, \dots, m\}$ .

Рассмотрим одномерный случай. Пусть два ареала расположены на концах отрезка  $[A_1; A_2]$  длины  $2l$  и имеют истинные полезности  $V_1$  и  $V_2$  соответственно. Популяция перемещается внутри отрезка  $[A_1; A_2]$ . Будем считать, что ареал  $A_2$  лучше, чем  $A_1$ , т. е.  $V_2 > V_1$ . Пусть  $d_1 = d_1(t)$  и  $d_2 = d_2(t)$  – расстояния от популяции  $M$  до первого и второго ареалов в момент времени  $t$ , тогда  $d_1(t) + d_2(t) = 2l$ . Таким образом, ставится задача выбора популяцией одного из ареалов, расположенных на концах рассматриваемого отрезка.

С учетом подхода [6] в настоящей работе предложены функции полезности, которые в применении к нашей задаче имеют следующий вид:

$$U_i(d_i) = I_i(d_i)V_i - T_i(d_i) + (1 - I_i(d_i))\bar{V}, i = 1, 2,$$

где  $U_i$  – полезность  $i$ -го ареала с точки зрения популяции, находящейся на расстоянии  $d_i$  от него,  $V_i$  – истинная полезность  $i$ -го ареала,  $I(d_i)$  – мера информированности популяции, находящейся на расстоянии  $d_i = d_i(t)$  от ареала  $A_i$ ,  $I(d_i)$  удовлетворяет условиям:  $I(0) = 1$ ,  $I(2l) = 0$ ,  $T(d_i)$  – затраты популяции на перемещение к  $i$ -му ареалу на расстояние  $d_i$ ,  $T(d_i)$  удовлетворяет следующим условиям:  $T(0) = 0$ ,  $T(2l) = 1$ ,  $\bar{V} = \frac{I_1(d_1)V_1 + I_2(d_2)V_2}{I_1(d_1) + I_2(d_2)}$  – средняя информированность популяции об ареалах.

**Определение 2.** Области  $D_1$  и  $D_2$  предпочтительной полезности ареалов, имеющих истинные полезности  $V_1$  и  $V_2$ , – это множества точек отрезка  $[A_1; A_2]$  вида:

$$D_1 = \{d_2 \in [0, 2l], U_1(2l - d_2) > U_2(d_2)\},$$

$$D_2 = \{d_2 \in [0, 2l], U_1(2l - d_2) < U_2(d_2)\}.$$

Несложно заметить, что  $D_1$  и  $D_2$  – отрезки, принадлежащие  $[A_1; A_2]$ .

Пусть  $I(d_i) = 1 - \frac{d_i}{2l}$ ,  $T(d_i) = \frac{d_i}{2l}$ . Таким образом, функции полезности  $U_i$  для ареалов  $A_1$  и  $A_2$  примут вид:  $U_i(d_i) = \left(1 - \frac{d_i}{2l}\right)V_i - \frac{d_i}{2l} + \frac{d_i}{2l} \left( \left(1 - \frac{d_1}{2l}\right)V_1 + \frac{d_1}{2l}V_2 \right)$ ,  $i = 1, 2$ .

В предложенных функциях полезности учитывается неполнота информации популяции об истинных полезностях  $V_i$  ареалов, что является следствием удаленности популяции  $M$  от ареала  $A_i$ .

Будем считать, что популяция движется с постоянной скоростью. Если в некоторый момент времени  $t$  выполняется условие  $U_1(d_1(t)) > U_2(d_2(t))$ , то популяция движется к ареалу  $A_1$ . В случае  $U_2(d_2(t)) > U_1(d_1(t))$  популяция движется к ареалу  $A_2$ .

Из вышесказанного следует, что для задания направления движения важно найти точку отрезка  $[A_1; A_2]$ , в которой  $U_1(d_1) = U_2(d_2)$ . Поскольку  $d_1 + d_2 = 2l$ , то получим равенство

$$U_1(2l - d_2) = U_2(d_2). \quad (1)$$

Будем считать, что  $d_2 = d_2(t)$  – координата в момент времени  $t$  движущейся на отрезке  $[A_1; A_2]$  популяции  $M$ . Уравнение (1), с учетом выражений для  $I(d_i)$  и  $T(d_i)$ , примет

следующий вид:  $\left(1 - \frac{d_1}{2l}\right)V_1 - \frac{d_1}{2l} + \frac{d_1}{2l} \left(\left(1 - \frac{d_1}{2l}\right)V_1 + \frac{d_1}{2l}V_2\right) = \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)V_2 - \frac{d_2}{2l} + \frac{d_2}{2l} \left(\frac{d_2}{2l}V_1 + \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)V_2\right)$ . После несложных преобразований, учитывая, что  $d_1 = 2l - d_2$ , получим

$$U_1(2l - d_2) = V_1 - \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right) + (V_2 - V_1) \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)^2,$$

$$U_2(d_2) = V_2 - \frac{d_2}{2l} - \left(\frac{d_2}{2l}\right)^2 (V_2 - V_1).$$

Таким образом, получили  $V_1 - \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right) + (V_2 - V_1) \left(1 - \frac{d_2}{2l}\right)^2 = V_2 - \frac{d_2}{2l} - \left(\frac{d_2}{2l}\right)^2 (V_2 - V_1)$ . Обозначим  $a = V_2 - V_1$ ,  $x = \frac{d_2}{2l}$ . После несложных преобразований получим квадратное уравнение:  $2ax^2 - 2(a - 1)x - 1 = 0$ . Найдем его корни:  $x_1 = \frac{a - 1 + \sqrt{1 + a^2}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{a - 1 - \sqrt{1 + a^2}}{2a}$ . Несложно показать, что  $x_1 > 0$  и  $x_2 < 0$ .

Таким образом, искомая точка  $C$ , принадлежащая отрезку, это точка с координатой  $d_2 = l \frac{a - 1 + \sqrt{1 + a^2}}{a}$ , т. е.  $C$  – это граница ОПП ареалов  $A_1$  и  $A_2$ .



Рис. 1. Области предпочтительной полезности  $D_1$  и  $D_2$  для двух ареалов  $A_1$  и  $A_2$

Fig. 1. Domains of preferred utility  $D_1, D_2$  for two patches  $A_1$  и  $A_2$

На рис. 1 показано деление отрезка  $[A_1; A_2]$  на области предпочтительной полезности двух ареалов, где найденная точка  $C$  – граница этих областей.

### НАХОЖДЕНИЕ ДОЛИ ПОПУЛЯЦИИ, МАКСИМИЗИРУЮЩЕЙ ЕЕ ЧИСЛЕННОСТЬ: КОНЕЧНОЕ $T$

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее динамику численности популяции в некотором ареале:

$$\dot{x} = x(ap - \mu(1 - p) - bp^2x), \quad (2)$$

где  $a$  – скорость роста популяции,  $\mu$  – скорость миграции популяции из ареала,  $b$  – коэффи-

циент внутривидовой конкуренции,  $p$  – вероятность того, что популяция останется в ареале. Ставится задача нахождения доли популяции  $p$ , максимизирующей численность популяции  $x(t, p)$  в некоторый фиксированный момент времени  $T$ . Решение  $x(t, p)$  уравнения (2), как функция параметра  $p$ , имеет вид:  $x(T, p)$

$$= \frac{((a + \mu)p - \mu)x_0}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)e^{(\mu - (a + \mu)p)T} + x_0bp^2}, \quad (3)$$

где  $x_0 = x(0, p)$ . Будем считать, что скорость роста популяции больше скорости миграции из ареала  $a > \mu$ . Введем обозначения:  $z = a + \mu$ ,  $y = bx_0$  и  $c = e^{\mu T}$ . Производная решения (3) после преобразований примет вид:  $x'_p(T, p) =$

$$\frac{yp(zp - 2\mu)c((1 - e^{zpT - \mu T}) + \frac{zT(zp - \mu)(zp - \mu - yp^2)}{yp(zp - 2\mu)})}{((zp - \mu - yp^2)c + yp^2e^{zpT})^2}.$$

Уравнение  $x'_p(T, p) = 0$  можно записать в виде

$$\frac{zT(zp - \mu)(zp - \mu - yp^2)}{yp(zp - 2\mu)} = e^{zpT - \mu T} - 1.$$

Обозначим  $f_1(p) = \frac{zT(zp - \mu)(zp - \mu - yp^2)}{yp(zp - 2\mu)}$  и  $f_2(p) = e^{zpT - \mu T} - 1$ .

**Теорема 1.** При любом  $x_0 > 0$  уравнение  $\frac{bx_0p^2}{bx_0p^2 + \mu - (a + \mu)p} = e^{-(a + \mu)pT + \mu T}$  имеет единственное решение.

*Доказательство.* Введем обозначения  $g_1(p) = \frac{bx_0p^2}{bx_0p^2 + \mu - (a + \mu)p}$  и  $g_2(p) = e^{-(a + \mu)pT + \mu T}$ . Рассмотрим функцию  $g_1(p)$ . Несложно показать, что эта функция имеет горизонтальную асимптоту  $g(p) = 1$ . Найдем ее вертикальные асимптоты, приравняв к нулю знаменатель. Рассмотрим дискриминант рассматриваемого квадратного уравнения  $D = z^2 - 4\mu bx_0$ . Возможны следующие ситуации для  $D$ :

1)  $D = 0$ . Тогда  $x_0 = \frac{z^2}{4\mu b}$ . Получим единственный корень  $p = \frac{a + \mu}{2bx_0}$ . Подставив  $x_0$  в  $p$ , получим  $p = \frac{2\mu}{a + \mu}$ . Таким образом,  $g_1(p) > 0$  при  $p \in (0, p_1)$  и  $g_1(p) < 0$  при  $p > p_1$ . Найдем производную функции  $g_1(p)$  и после несложных преобразований получим  $g'_1(p) = \frac{2\mu - p(a + \mu)}{(bx_0p^2 + \mu - (a + \mu)p)^2}$ . Очевидно, что слева от вертикальной асимптоты  $p$  функция  $g_1(p)$

возрастает, тогда  $g_1(p)$  и  $g_2(p)$  имеют единственную точку пересечения при  $p < \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

2)  $D > 0$ . Из этого следует, что  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ , и тогда  $g_1(p)$  имеет две вертикальные асимптоты  $p_{1,2} = \frac{a + \mu \pm \sqrt{D}}{2bx_0}$ . Несложно показать, что  $\frac{a + \mu - \sqrt{D}}{2bx_0} > \frac{\mu}{a + \mu}$ . Получим единственное пересечение  $g_1(p)$  и  $g_2(p)$  при  $p < \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

3)  $D < 0$ . В этом случае вертикальных асимптот нет. Очевидно, что  $g_1(p)$  и  $g_2(p)$  имеют единственную точку пересечения при  $p < \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

Таким образом, уравнение  $x'_p(T, p) = 0$  имеет единственное решение.  $\square$

**Теорема 2.** Если  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ , то при любом  $T > 0$  функция (3) имеет единственную точку максимума  $p^*$ , при этом  $p^* \in \left(\frac{2\mu}{z}, +\infty\right)$ .

*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что уравнение  $f_1(p) = 0$  имеет три различных корня, один из которых равен  $\frac{\mu}{z}$ .

Если  $p_1, p_2$  и  $p_3 = \frac{\mu}{z}$  – корни уравнения  $f_1(p) = 0$ , то  $p_1 \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ ,  $p_2 > \frac{2\mu}{z}$ . Так как дискриминант  $D = z^2 - 4\mu y > 0$ , то выполняется условие  $z^2 > 4\mu y$ . Тогда  $p_{1,2} = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\mu y}}{2y}$ . Несложно показать, что  $\frac{\mu}{z} < p_1 < \frac{2\mu}{z}$ ,  $p_2 > \frac{2\mu}{z}$ .

Определим знак функции  $f_1(p)$ . Эта функция имеет две вертикальные асимптоты  $p = 0$  и  $p = \frac{2\mu}{z}$ ,  $f_1(p) > 0$  при  $p \in \left(\frac{\mu}{z}, p_1\right) \cup \left(\frac{2\mu}{z}, p_2\right)$ ,  $f_1(p) < 0$  при  $p \in \left(0, \frac{\mu}{z}\right) \cup \left(p_1, \frac{2\mu}{z}\right) \cup \left(p_2, +\infty\right)$ .

Очевидно, что  $f_1(p) = f_2(p) = 0$  при  $p = \frac{\mu}{z}$ . Проверим, есть ли еще пересечения  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$ . Для этого построим уравнения касательных к этим функциям в точке  $p = \frac{\mu}{z}$ .

Найдем значение производной функции  $f_1(p)$  по параметру  $p$  при  $p = \frac{\mu}{z}$ . С учетом корней  $p_1$  и  $p_2$  получим  $f_1(p) = \frac{-zT(p-d)(p-p_1)(p-p_2)}{p(p-2d)}$ , где  $d = \frac{\mu}{z}$ .

Таким образом,

$$f'_1(p) = \frac{-zT\left(p^4 - 4dp^3 + 2d^2p^2 + 2d\frac{\mu}{y}p - 2d^2\frac{\mu}{y}\right)}{(p^2 - 2dp)^2},$$

из чего следует  $f'_1(d) = zT$ . Таким образом, получим уравнение касательной для функции  $f_1(p)$  в точке  $p = d$ :  $k_1 = zT(p - d)$ .

Найдем производную  $f_2(p)$  в точке  $p = d$ , получим  $f'_2(d) = zT$ . Очевидно, что уравнение касательной для  $f_2(p)$  при  $p = d$  также будет  $k_2 = k_1 = zT(p - d)$ .

Исследуем взаимное расположение графиков функций  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  при  $p \in (0, 2d)$ . Найдем точки пересечения общей касательной  $k = k_1 = k_2$  и  $f_1(p)$ . Для этого решим уравнение  $\frac{-(p-p_1)(p-p_2)}{p(p-2d)} = 1$ . После несложных преобразований получим  $2p^2 - \left(2d + \frac{z}{y}\right)p + \frac{\mu}{y} = 0$

и  $D = \left(2d - \frac{z}{y}\right)^2 > 0$ . Корни этого уравнения  $p_1 = \frac{z}{2y}$  и  $p_2 = d$ . Несложно показать, что  $2d < \frac{z}{2y}$ . Следовательно, пересечения  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  возможны только на промежутке  $p \in (2d, p_2)$ .

Определим наличие экстремумов функции  $f_1(p)$  на промежутке  $p \in (2d, p_2)$ . Рассмотрим числитель производной  $f'_1(p)$ :  $p^4 - 4dp^3 + 2d^2p^2 + 2d\frac{\mu}{y}p - 2d^2\frac{\mu}{y}$ . Введем обозначения:  $f_3(p) = p^4 - 4dp^3 + 2d^2p^2$  и  $f_4(p) = -2d\frac{\mu}{y}p + 2d^2\frac{\mu}{y}$ .

Рассмотрим функцию  $f_3(p)$ . Отличные от нуля корни уравнения  $f_3(p) = 0$  следующие:  $p_{1,2} = (2 \mp \sqrt{2})d$ . Точки экстремума этой функции –  $p_{1,2} = \frac{(3 \mp \sqrt{5})d}{2}$ . Точки перегиба этой функции  $p_{1,2} = \frac{(3 \mp \sqrt{6})d}{3}$ . Прямая  $f_4(p)$  пересекает ось  $p$  при  $p = \frac{\mu}{z}$ . Очевидно, что  $f_3(2d) > f_4(2d)$ . Следовательно, пересечений справа от точки  $p = 2d$  не будет. Таким образом, в момент времени  $T$  графики функций  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  пересекаются при  $p \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ , их точка пересечения является точкой максимума.  $\square$

**Теорема 3.** Если  $x_0 \in \left(\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b}\right)$ , то при любом  $T > 0$  решение (3) имеет единствен-

ную точку максимума  $p^*$ , при этом  $p^* \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ .

*Доказательство.* Из условия теоремы следует, что уравнение  $f_1(p) = 0$  имеет один корень  $p = \frac{\mu}{z}$ . Определим знак функции  $f_1(p)$ . Функция  $f_1(p)$  имеет две вертикальные асимптоты  $p = 0$  и  $p = \frac{2\mu}{z}$ ,  $f_1(p) > 0$  при  $p \in \left(\frac{\mu}{z}, \frac{2\mu}{z}\right)$ ,  $f_1(p) < 0$  при  $p \in \left(0, \frac{\mu}{z}\right) \cup \left(\frac{2\mu}{z}, +\infty\right)$ .

Найдем уравнения касательных для функций  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  в точке  $p = d$ . После несложных преобразований получим  $f'_1 = \frac{zT}{y} \frac{(-yp^4 - 4ydp^3 - 2yd^2p^2 - 2d\mu p + 2d^2\mu)}{(p^2 - 2dp)^2}$ ,

$f'_1\left(\frac{\mu}{z}\right) = f'_2\left(\frac{\mu}{z}\right) = zT$ ,  $f_1\left(\frac{\mu}{z}\right) = f_2\left(\frac{\mu}{z}\right) = 0$ . Получим общую касательную  $k = zT\left(p - \frac{\mu}{z}\right)$ .

Найдем пересечение общей касательной  $k$  и функции  $f_1(p)$ , для этого решим уравнение  $\frac{(zp - \mu - yp^2)}{yp\left(p - \frac{2\mu}{z}\right)} = 1$  относительно  $p$ . Получим корни  $p_1 = \frac{z}{2y}$  и  $p_2 = d$ . Несложно показать, что  $d < \frac{z}{2y} < 2d$ .

Проверим выпуклость функции  $f_1(p)$  в точке  $d$ . Числитель второй производной  $f''_1(p)$  после подстановки  $p = d$  примет вид  $2d^4(2yd^2 - \mu)$  и будет отрицательным в силу условия теоремы. Из чего следует, что в точке  $p = \frac{\mu}{z}$  функция  $f_1(p)$  будет выпукла вверх. Проверим наличие точек перегиба функции  $f_1(p)$ . Числитель второй производной функции  $f_1(p)$  примет вид  $-4yd^2p^4 + (8yd^3 + 6\mu d)p^3 - 24\mu d^2p^2 + 32\mu d^3p - 16\mu d$ . Введем обозначения  $f_5(p) = -4yd^2p^4 + (8yd^3 + 6\mu d)p^3 - 24\mu d^2p^2$  и  $f_6(p) = -32\mu d^3p + 16\mu d$ . Проверим, при каких условиях выполняется  $f_5(p) = f_6(p)$ . Рассмотрим уравнение  $f_5(p) = 0$ . Найдем отличные от нуля корни. Получим дискриминант  $D = 16y^2d^4 - 72y\mu d^2 + 9\mu^2$ . Решим уравнение  $D = 0$  относительно  $d^2$  и найдем его корни:  $d_{1,2}^2 = \frac{(9 \mp 6\sqrt{2})\mu}{4y}$ . Таким образом,  $D < 0$  при  $d^2 \in (d_1^2, d_2^2)$ . Так как  $d = \frac{\mu}{z}$ , то с учетом условия теоремы несложно показать, что  $d^2 \in (d_1^2, d_2^2)$ . Из чего следует, что  $D < 0$  и вещественных корней уравнение  $f_5(p) = 0$  не имеет.

Функция  $f_5(p)$  при  $p > 0$  отрицательна. Проверим эту функцию на экстремумы:  $f'_5 =$

$-6dp(2ydp^2 - (4yd^2 + 3\mu)p + 8\mu d) = 0$ . Найдем дискриминант:  $D = 16y^2d^4 - 40yd^2\mu + 9\mu^2$  и определим его знак, решив уравнение  $D = 0$  относительно  $d^2$ . Получим корни:  $d_1^2 = \frac{\mu}{4y}$  и  $d_2^2 = \frac{9\mu}{4y}$ . Тогда  $D < 0$  при  $d^2 \in (d_1^2, d_2^2)$ .

Очевидно, что  $\left(\frac{\mu}{z}\right)^2$  попадает в промежуток  $(d_1^2, d_2^2)$ . Следовательно,  $D < 0$  и точек экстремума нет.

Функция  $f_5(p)$  убывает при  $p > 0$ . Проверим  $f_5(p)$  на выпуклость:  $f''_5(p) = -12d(3ydp^2 - (4yd^2 + 3\mu)p + 4\mu d) = 0$ . Найдем дискриминант:  $D = 16y^2d^4 - 24y\mu d^2 + 9\mu^2 = (4yd^2 - 3\mu)^2 > 0$  и корни уравнения  $f''_5(p) = 0$   $p_1 = \frac{\mu}{z}$  и  $p_2 = \frac{z}{y}$ . Функция  $f_5(p)$  выпукла вверх при  $p_2 < p < p_1$ , выпукла вниз при  $p \in (p_1, p_2)$ . Очевидно, что  $f_5(2d) = f_6(2d)$ . Несложно показать, что  $f_1\left(\frac{z}{2y}\right) > 0$ . Следовательно, будет два пересечения функций  $f_3(p)$  и  $f_4(p)$  в двух точках  $p = 2d$  и  $p \in \left(d, \frac{z}{2y}\right)$ , из чего следует, что на промежутке  $p \in (d, 2d)$  будет одна точка перегиба. Касательная не пересекается с выпуклой вверх частью функции  $f_1(p)$  и, таким образом, не пересечет функцию в окрестности возможного максимума. Следовательно,  $f_1(p) = f_2(p)$  в одной точке  $p \in \left(\frac{z}{2y}, 2d\right)$ .  $\square$

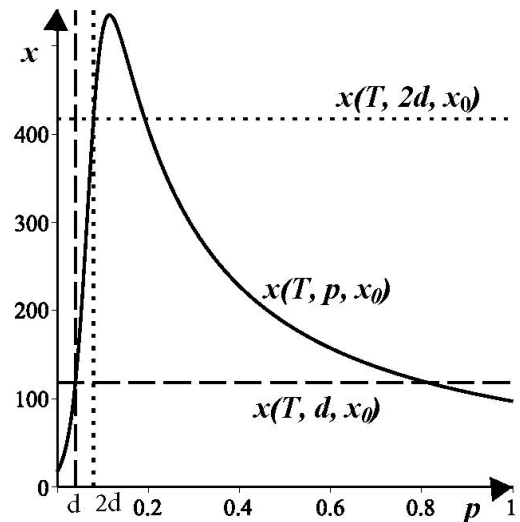


Рис. 2. Максимум решения (3) при  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 0.01$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $x_0 = 130$ ,  $T = 50$

Fig. 2. Maximum of solution (3) with  $x_0 < \frac{z^2}{4\mu b}$ ,  $a = 0.3$ ,  $b = 0.01$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $x_0 = 130$ ,  $T = 50$

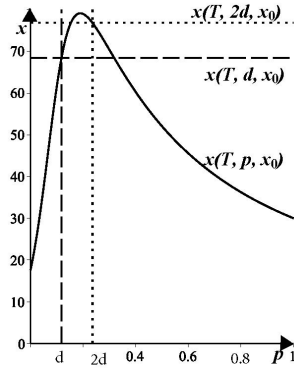


Рис. 3. Максимум решения (3) при  $x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$ ,  $a=0.3$ ,  $b=0.01$ ,  $\mu=0.04$ ,  $x_0=130$ ,  $T=50$

Fig. 2. Maximum of solution (3) with  $x_0 \in (\frac{z^2}{4\mu b}, \frac{z^2}{2\mu b})$ ,  $a=0.3$ ,  $b=0.01$ ,  $\mu=0.04$ ,  $x_0=130$ ,  $T=50$

На рис. 2 и 3 отражены условия существования максимума функции (3).

#### НАХОЖДЕНИЕ ДОЛИ ПОПУЛЯЦИИ, МАКСИМИЗИРУЮЩЕЙ ЕЕ ЧИСЛЕННОСТЬ: $T \rightarrow \infty$

Под оптимальной долей понимается та доля популяции в ареале, которая максимизирует  $X(T, p)$  при любом  $T > 0$ . Положение равновесия  $x^*$ , соответствующее уравнению (2), будем рассматривать как функцию параметра  $p$ :

$$x^*(p) = \frac{p(a + \mu) - \mu}{bp^2}, \quad (4)$$

для удобства введем обозначение  $g(p) = \frac{p(a + \mu) - \mu}{bp^2}$ . Несложно показать, что максимум функции (4) достигается при  $p_{max} = \frac{2\mu}{a + \mu}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $x_0 \geq g(p_{max})$ , тогда существует момент времени  $T_1$  такой, что если  $T > T_1$ , то  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ . Пусть  $x_0 < g(p)$ , тогда существует момент времени  $T_2$  такой, что если  $T > T_2$ , то  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ . Пусть  $g(p) \leq x_0 < g(p_{max})$ , тогда при любом  $T$  будет выполняться  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $g(p)$  на промежутке  $p \in [0, 1]$ . Очевидно, что функция  $g(p)$  монотонно возрастает на промежутке  $p \in [0, p_{max}]$  и монотонно убывает на промежутке  $p \in [p_{max}, 1]$ . При этом на промежутке  $p \in [0, \frac{\mu}{a + \mu}]$  она принимает отрицательные значения, а при  $p \in$

$[\frac{\mu}{a + \mu}, 1]$  – положительные,  $\frac{\mu}{a + \mu} < p_{max}$ . Найдем пересечение графика функции  $x(t, p)$  и прямой  $g(p_{max})$  при  $x_0 \geq g(p_{max})$ , получим 
$$\frac{((a + \mu)p - \mu)x_0}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)e^{(\mu - (a + \mu)p)T} + x_0bp^2} = \frac{p_{max}(a + \mu) - \mu}{bp_{max}^2},$$
 где  $p_{max} = \frac{2\mu}{a + \mu}$ , отсюда выразим

$$T_1 = \frac{\ln \left( \frac{((a + \mu)p - \mu)4x_0\mu b - x_0bp^2(a + \mu)^2}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)(a + \mu)^2} \right)}{\mu - (a + \mu)p}.$$

Нетрудно показать, что выражение, стоящее под знаком натурального логарифма, – положительно. Рассмотрим его числитель. Это парабола  $f_1(p) = -x_0b(a + \mu)^2p^2 + 4(a + \mu)x_0\mu b p - 4\mu^2x_0b$ , и ее вершина имеет координаты  $(\frac{2\mu}{a + \mu}, 0)$ . Следовательно, числитель отрицателен. Проверим знаменатель. Рассмотрим параболу  $f_2(p) = -x_0bp^2 + (a + \mu)p - \mu$ . Несложно показать, что максимум функции  $f_2(p)$  достигается при  $p = \frac{a + \mu}{2x_0b}$ . Проверим наличие точек пересечения  $f_2(p)$  с осью абсцисс. Решая квадратное уравнение  $f_2(p) = 0$ , получим дискриминант  $D = (a + \mu)^2 - 4x_0b\mu$ . Так как по условию  $x_0 \geq g(p_{max}) = \frac{(a + \mu)^2}{4b\mu}$ , то  $D < 0$  и  $f_2(p)$  не имеет точек пересечения с осью абсцисс. Таким образом, знаменатель тоже отрицателен, из чего следует, что выражение, стоящее под знаком логарифма, имеет положительный знак. Проверим знак логарифмического выражения. Обозначим  $g_1(p) = \frac{((a + \mu)p - \mu)4x_0\mu b - x_0bp^2(a + \mu)^2}{((a + \mu)p - \mu - x_0bp^2)(a + \mu)^2}$ . Несложно показать, что  $g_1(p) > 1$  при  $x_0 \geq g(p_{max})$  и  $p \leq \frac{\mu}{a + \mu}$ ,  $g_1(p) < 1$  при  $x_0 \geq g(p_{max})$  и  $p > \frac{\mu}{a + \mu}$ . В обоих случаях  $T_1 > 0$ .

Найдем точки пересечения функций  $x(t, p_{max})$  и  $g(p)$  при условии  $x_0 < g(p)$ . Выразим

$$T_2 = \frac{\ln \left( \frac{\mu b x_0 ((a + \mu)^2 p^2 - 4\mu(a + \mu)p + 4\mu^2)}{(\mu(a + \mu)^2 - 4bx_0\mu^2)((a + \mu)p - \mu)} \right)}{-\mu}.$$

Введем обозначение

$$g_2(p) = \frac{\mu b x_0 ((a + \mu)^2 p^2 - 4\mu(a + \mu)p + 4\mu^2)}{(\mu(a + \mu)^2 - 4bx_0\mu^2)((a + \mu)p - \mu)}.$$



Покажем, что  $g_2(p) > 0$ . Рассмотрим параболу  $(a + \mu)^2 p^2 - 4\mu(a + \mu)p + 4\mu^2$ . Вершина параболы имеет координаты  $\left(\frac{2\mu}{a + \mu}, 0\right)$ . Поскольку  $0 < x_0 < g(p)$ , то  $g_2(p) > 0$  и  $\ln g_2(p) < 0$  при  $x_0 < g(p) = \frac{(a + \mu)p - \mu}{bp^2}$ . Следовательно,  $T_2 > 0$ .

Несложно показать, что при  $g(p) \leq x_0 < g(p_{max})$  при любом  $T$  будет выполняться неравенство  $x(T, p_{max}) > x(T, p)$ .  $\square$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривалась задача выбора популяцией ареала для случая двух ареалов, расположенных на концах отрезка. Были предложены функции полезности рассматриваемых ареалов с учетом меры информированности об их качестве, их истинной полезности и затрат на перемещение к ним. С помощью введенных функций полезности на заданном отрезке получены области предпочтительной полезности. Также рассматривалась задача оптимизации численности популяции в ареале, и получены условия, при которых ее численность максимизируется.

## REFERENCES

1. Kirillov A. N., Danilova I. V. Dinamika raspredeleniya populyatsii po arealam [Dynamics of population distribution by patches]. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem* [Modeling and Analysis of Information Systems]. 2018. No. 3. P. 268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275
2. Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds. *Acta Biotheoretica*. 1970. Vol. 19. P. 16–36.
3. Krivan V. Optimal foraging and predator–prey dynamics. *Theor. Popul. Biol.* 1996. Vol. 49. P. 265–290.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Кириллов Александр Николаевич**  
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: krllv1812@yandex.ru  
тел.: (8142) 763370

**Данилова Инна Владимировна**  
старший преподаватель  
Институт математики и информационных технологий,  
Петрозаводский государственный университет  
пр. Ленина, 33, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: DanilovaInna1987@mail.ru

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А. Н., Данилова И. В. Динамика распределения популяции по ареалам // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. № 3. С. 268–275. doi: 10.18255/1818-1015-2018-3-268-275
2. Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds // *Acta Biotheoretica*. 1970. Vol. 19. P. 16–36.
3. Krivan V. Optimal foraging and predator–prey dynamics // *Theor. Popul. Biol.* 1996. Vol. 49. P. 265–290.
4. Krivan V., Eisner J. Optimal foraging and predator–prey dynamics, III // *Theor. Popul. Biol.* 2003. Vol. 63. P. 269–279.
5. Krivan V., Sikder A. Optimal foraging and predator–prey dynamics, II // *Theor. Popul. Biol.* 1999. Vol. 55. P. 111–126.
6. Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U. Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: departures from the ideal free distribution // *Oikos*. 2010. Vol. 119. P. 1469–1483.

Поступила в редакцию 24.04.2021

4. Krivan V., Eisner J. Optimal foraging and predator–prey dynamics, III. *Theor. Popul. Biol.* 2003. Vol. 63. P. 269–279.
5. Krivan V., Sikder A. Optimal foraging and predator–prey dynamics, II. *Theor. Popul. Biol.* 1999. Vol. 55. P. 111–126.
6. Shuichi M., Arlinghaus R., Dieckmann U. Foraging on spatially distributed resources with suboptimal movement, imperfect information, and travelling costs: departures from the ideal free distribution. *Oikos*. 2010. Vol. 119. P. 1469–1483.

Received April 24, 2021

## CONTRIBUTORS:

**Kirillov, Alexander**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: krllv1812@yandex.ru  
tel.: (8142) 766312

**Danilova, Inna**  
Institute of Mathematics and Information Technology,  
Petrozavodsk State University  
33 Lenina Ave., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: DanilovaInna1987@mail.ru

УДК 519.179.2, 519.876.5

## ДИАМЕТР КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ СО СТЕПЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

М. М. Лери

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются случайные конфигурационные графы с дискретным степенным распределением степеней вершин. Параметр распределения принимает фиксированные значения. Посредством имитационного моделирования найдены оценки диаметра графа. Предложены зависимости диаметра от объема графа и параметра распределения степеней вершин.

**Ключевые слова:** конфигурационный граф; степенное распределение; диаметр графа; имитационное моделирование.

### M. M. Leri. DIAMETER OF POWER-LAW CONFIGURATION GRAPHS

We consider random configuration graphs with a power-law distribution of vertex degrees. The distribution parameter takes fixed values. Estimates of the diameter of the graph were found by simulations. Relationships are suggested for the dependence of the graph diameter on its volume and the vertex degree distribution parameter.

**Keywords:** configuration graph; power-law distribution; graph diameter; simulations.

### ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия исследование структуры случайных графов стало одним из наиболее востребованных и перспективных направлений в силу того, что такие модели находят широкое применение для описания структуры реальных сетей (см., например, [6, 7, 9, 10]). Так, случайные графы, степени вершин которых представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины с общим законом распределения, нашли применение как модели для описания различных видов телекоммуникационных сетей, включая глобальную сеть Интернет (см., например, [7, 12]).

Понятно, что с течением времени и со стремительным развитием как информационно-коммуникационных технологий, так и техни-

ческих средств связи топология больших сетей быстро меняется. Поэтому при построении математических моделей таких сетей с целью дальнейшего изучения их функционирования необходимо принимать во внимание не только распределение степеней вершин случайного графа, используемого для моделирования сети, но и другие важные структурные характеристики. Изучению таких характеристик посвящено множество работ (см., например, [6, 10, 11]), однако поле деятельности еще далеко не исчерпано.

В настоящей работе рассматривается одна из таких структурных характеристик – диаметр графа. Исследование проводится посредством имитационного моделирования на так называемых конфигурационных графах, впервые предложенных Б. Боллобашем [2].

## КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ГРАФЫ

Пусть  $N$  – число вершин графа. Степени вершин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами со степенным распределением, заданным следующим равенством [12]:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad (1)$$

где  $k = 1, 2, \dots$ , и  $\tau > 1$  – параметр распределения степеней вершин. Для построения конфигурационной модели вначале задаются степени вершин графа в соответствии с распределением (1) с заранее заданным параметром  $\tau$ , определяя для каждой вершины число различных полуребер [12], занумерованных в произвольном порядке. Сумма степеней вершин рассматриваемого графа является случайной величиной, и если она оказывается нечетной, то степень равновероятно выбранной вершины увеличивается на 1, тем самым добавляя к ней одно полуребро. Далее все полуребра графа соединяются между собой попарно и равновероятно для образования ребер. Ясно, что такое построение допускает появление в графе петель, циклов и кратных ребер.

Известно (см., например, [6, 9, 12]), что структура конфигурационных графов со степенным распределением степеней вершин зависит от параметра распределения  $\tau$ . Так, при  $1 < \tau < 2$  в таких графах существует единственная так называемая гигантская компонента связности, число вершин в которой пропорционально  $N$  при  $N \rightarrow \infty$ , а объем любой другой из компонент этого графа бесконечно мал по сравнению с объемом гигантской компоненты. Более того, в [1] показано, что чем ближе значение параметра  $\tau$  к 1, тем выше вероятность того, что все вершины графа образуют одну компоненту связности, содержащую в себе все  $N$  вершин графа. При  $2 \leq \tau \leq 3$  в конфигурационном графе все еще можно выделить компоненту связности, число вершин в которой будет наибольшим по сравнению с другими компонентами графа, при этом общее число компонент возрастает с ростом  $N$ . Через  $\eta_1$  обозначим объем (число вершин) гигантской (или наибольшей) компоненты связности.

## ДИАМЕТР ГРАФА

Одной из важных числовых характеристик сетевой структуры и, соответственно, случайного графа является диаметр. Исследованию этой характеристики случайных графов посвящены работы многих авторов (см., например, [3, 4, 8]), однако они рассматривали графы других видов, отличных от рассматриваемых в настоящей работе.

Обозначим  $G = (V, E)$  неориентированный граф, где  $V$  – множество вершин, а  $E$  – множество ребер. Пусть  $v, u \in V$  и  $d(v, u)$  – длина простой цепи, соединяющей вершины  $v$  и  $u$  ( $v \neq u$ ) графа  $G$ .

В конфигурационном графе:

- $d(v, v) = 1$ , если при вершине  $v$  существует петля;
- $d(v, u) = \infty$ , если вершины  $v$  и  $u$  принадлежат разным компонентам связности;
- если в графе есть кратные ребра, то может существовать более одной цепи, соединяющей вершину  $v$  с  $u$ , но длины этих цепей будут равны.

Расстоянием от вершины  $v$  до вершины  $u$  называют длину цепи наименьшей длины:

$$\nu(v, u) = \min_{u \in V} d(v, u)$$

среди всех  $d(v, u) \neq \infty$ . Через  $\rho(v)$  обозначим максимальную длину кратчайшего пути до вершины  $v$  графа  $G$ :

$$\rho(v) = \max_{u \in V} \nu(v, u).$$

Для нахождения диаметра графа достаточно найти кратчайшие пути между всеми парами вершин, и наибольшая длина среди всех кратчайших путей и будет диаметром графа. В конфигурационных графах рассматриваются пути только внутри компонент связности. В настоящей работе для нахождения кратчайших путей был применен алгоритм Дейкстры [5]. Для фиксированной вершины  $v$  графа этот алгоритм находит  $\rho(v)$  – максимум среди всех кратчайших путей до этой вершины от всех остальных вершин графа. Тогда диаметр графа  $D(G)$  будет равен

$$D(G) = \max_{v \in V} \rho(v),$$

то есть наибольшему расстоянию между двумя любыми вершинами графа  $G$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе было поставлено несколько целей. Во-первых, оценить диаметр конфигурационного графа  $D$  и найти зависимость  $D$  от числа вершин графа  $N$  и параметра распределения степеней вершин  $\tau$ . Во-вторых, найти значения параметра  $\tau$  (или интервалы значений), при которых диаметр конфигурационного графа принимает 1) наибольшие значения  $D_{\max}$  и 2) наименьшие значения  $D_{\min}$ . И в-третьих, найти зависимости объема наибольшей компоненты при максимуме диаметра  $\eta_1(D_{\max})$

от  $N$ , а также объема наибольшей компоненты при минимуме диаметра  $\eta_1(D_{\min})$  от  $N$ . Исследование проводилось с помощью методов имитационного моделирования с последующей статистической обработкой данных посредством ПО Wolfram Mathematica 9.0.

Рассматривались конфигурационные графы размерностей  $1000 \leq N \leq 9500$  с шагом 500 (ограничение сверху продиктовано непредвиденным выходом из строя вычислительного кластера ЦКП). Значения параметра  $\tau$  изменялись от 1,01 до 3,0 с шагами: 0,01 для  $1,01 \leq \tau \leq 1,1$  и 0,1 для  $1,1 \leq \tau \leq 3,0$ . Для каждой пары значений  $(N, \tau)$  генерировалось 100 графов, то есть всего 52 200 графов.

В результате проведенного исследования получена следующая регрессионная зависимость диаметра конфигурационного графа  $D$  от объема графа  $N$  и параметра распределения степеней вершин  $\tau$ :

$$D = -5,27 + (1,48\tau + 0,05\tau^5 - 0,02\tau^6) \ln N \quad (2)$$

с коэффициентом детерминации  $R_1^2 = 0,93$ . Здесь и далее все коэффициенты регрессионных уравнений значимы на уровне значимости 0,05.

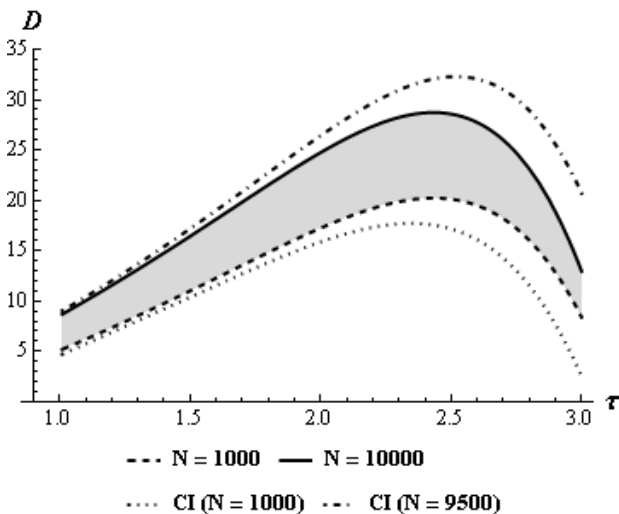


Рис. 1. Регрессионная зависимость  $D$  от  $N$  и  $\tau$   
Fig. 1. Regression dependence of  $D$  on  $N$  and  $\tau$

На рис. 1 обозначены нижняя граница доверительного интервала зависимости (2) при  $N = 1000$  ( $CI(N = 1000)$ ) и верхняя граница при  $N = 9500$  ( $CI(N = 9500)$ ). Интервалы были построены с целью рассмотрения возможности экстраполяции прогнозных значений диаметра графа до объема  $N = 10000$ . Для большей наглядности на рис. 2 представлены усредненные (по 100 экспериментам) экспериментальные значения  $D$  в зависимости от  $N$  и  $\tau$ .

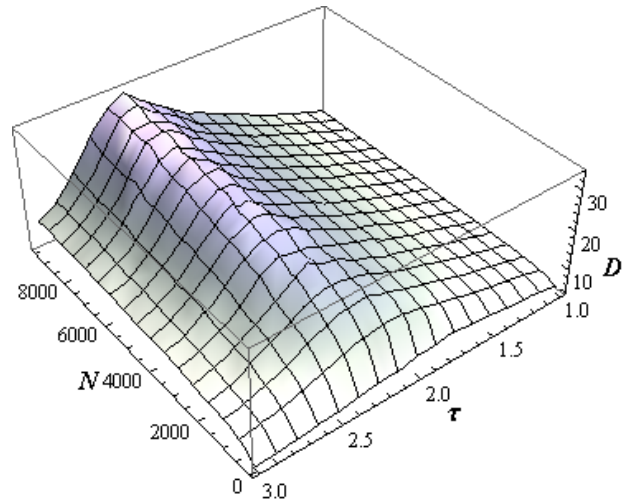


Рис. 2. График усредненных (по 100 экспериментам) экспериментальных значений  $D$  от  $N$  и  $\tau$   
Fig. 2. Dependence of averaged experimental  $D$  on  $N$  and  $\tau$

Конфигурационные графы с параметром  $\tau$  распределения (1) из интервала (1,2) представляют особый интерес вследствие того, что они подходят для моделирования сети Интернет в случае, когда в качестве узлов сети рассматриваются автономные системы [7, 12]. Поэтому была построена регрессионная зависимость  $D$  от  $N$  и  $\tau$  для  $1 < \tau < 2$ :

$$D = 2,52 + 0,63\tau^{1,83} \ln N \quad (R_2^2 = 0,97). \quad (3)$$

Как и ранее, на рис. 3 обозначены нижняя граница доверительного интервала зависимости (3) при  $N = 1000$  ( $CI(N = 1000)$ ) и верхняя граница при  $N = 9500$  ( $CI(N = 9500)$ ). На рис. 4 представлена зависимость усредненных (по 100 экспериментам) экспериментальных значений  $D$  от  $N$  и  $1 < \tau < 2$ .

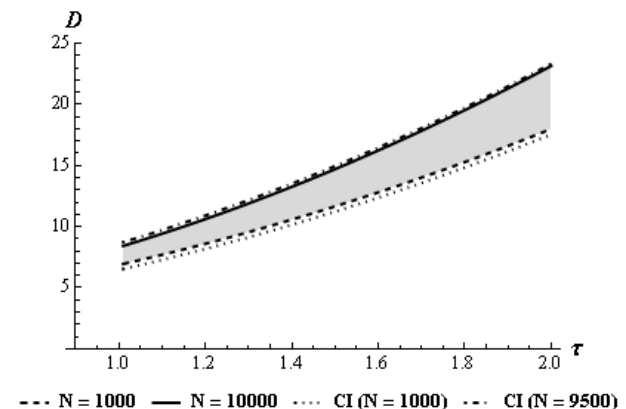


Рис. 3. Регрессионная зависимость  $D$  от  $N$  и  $1 < \tau < 2$   
Fig. 3. Regression dependence of  $D$  on  $N$  and  $1 < \tau < 2$

Далее при оценке значимости различия между коэффициентами корреляции  $r_1 = \sqrt{R_1^2}$  и  $r_2 = \sqrt{R_2^2}$  регрессионных моделей (2) и (3) соответственно, получаем, что при уровне значимости 0,05 нулевая гипотеза  $H_0 : r_1 = r_2$  отвергается, следовательно, различие между коэффициентами корреляции значимо.

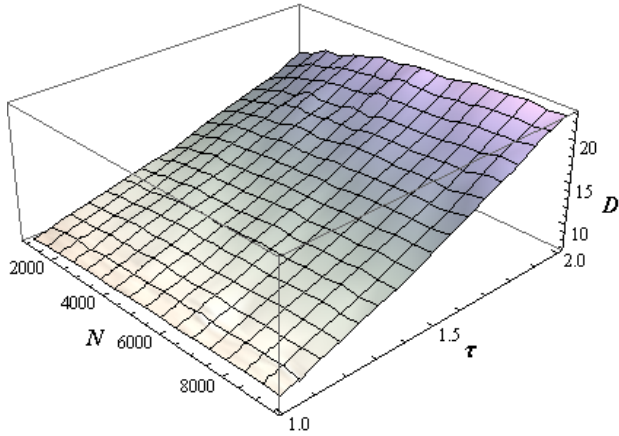


Рис. 4. График усредненных (по 100 экспериментам) экспериментальных значений  $D$  от  $N$  и  $1 < \tau < 2$   
 Fig. 4. Dependence of averaged experimental  $D$  on  $N$  and  $1 < \tau < 2$

По экспериментальным данным для каждой пары  $(N, \tau)$  вычислены средние значения диаметра  $D$  (из 100 экспериментов). Далее для каждого  $N$  были найдены  $D_{\max}$  и соответствующие им значения  $\tau$ , при которых достигается этот максимум  $D$ , а также значения  $D_{\min}$  и соответствующие им значения  $\tau$ , при которых этот минимум достигается (см. табл. 1 и 2 для  $D_{\max}$  и  $D_{\min}$  соответственно).

Таблица 1. Средние максимального значения диаметра  $D_{\max}$  для каждого значения  $N$ , соответствующие им значения  $\tau$  и  $\eta_1$   
 Tab. 1. Average maximum diameter values  $D_{\max}$  for each  $N$  and corresponding values of  $\tau$  and  $\eta_1$

$N$	$D_{\max}$	$\tau(D_{\max})$	$\eta_1(D_{\max})$
1000	18,11	2,1	395,68
1500	20,48	2,2	486,00
2000	22,06	2,3	505,82
2500	24,84	2,3	656,65
3000	24,42	2,4	507,67
3500	26,17	2,3	971,09
4000	26,32	2,4	770,50
4500	28,25	2,3	1100,54
5000	29,24	2,4	829,89
5500	28,82	2,3	1424,23
6000	29,80	2,3	1537,77
6500	31,04	2,4	1261,07
7000	30,56	2,4	1349,24
7500	32,44	2,4	1396,67
8000	31,59	2,4	1469,00
8500	31,92	2,4	1698,38
9000	33,65	2,4	1784,50
9500	34,12	2,4	1733,56

Таблица 2. Средние минимального значения диаметра  $D_{\min}$  для каждого значения  $N$ , соответствующие им значения  $\tau$  и  $\eta_1$

Tab. 2. Average minimum diameter values  $D_{\min}$  for each  $N$  and corresponding values of  $\tau$  and  $\eta_1$

$N$	$D_{\min}$	$\tau(D_{\min})$	$\eta_1(D_{\min})$
1000	7,11	1,01	967,22
1500	7,29	1,02	1450,55
2000	7,44	1,01	1938,81
2500	7,52	1,01	2423,66
3000	7,70	1,01	2912,20
3500	7,76	1,01	3400,05
4000	7,65	1,01	3889,38
4500	7,83	1,01	4376,89
5000	7,90	1,01	4864,05
5500	7,99	1,01	5351,65
6000	7,96	1,01	5842,73
6500	7,91	1,01	6327,08
7000	8,05	1,02	6815,16
7500	8,10	1,01	7314,74
8000	8,17	1,01	7792,54
8500	8,15	1,02	8275,15
9000	8,10	1,02	8774,20
9500	8,14	1,01	9254,34

Построены регрессионные зависимости:  $D_{\max}$  от  $N$  (см. табл. 1 и рис. 5):

$$D_{\max} = 6,97 \ln N - 30,59 \quad (R^2 = 0,99)$$

и  $D_{\min}$  от  $N$  (см. табл. 2 и рис. 6):

$$D_{\min} = 0,47 \ln N + 3,83 \quad (R^2 = 0,99).$$

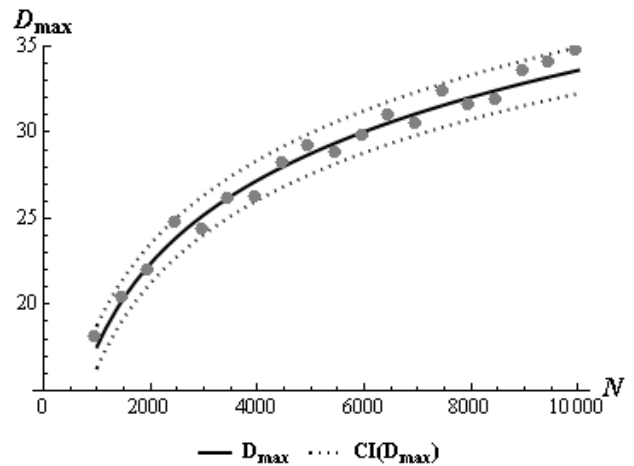


Рис. 5. Зависимость  $D_{\max}$  от  $N$ . Сплошной линией показана регрессионная зависимость, точечными линиями – доверительный интервал этой зависимости, серыми точками обозначены выборочные значения  $D_{\max}$

Fig. 5. Dependence of  $D_{\max}$  on  $N$ . Solid line shows regression dependence, dotted lines – confidence interval of this dependence, gray dots mark sample values  $D_{\max}$

Таким образом, в степенных конфигурационных графах с ростом объема графа  $N$  диа-

метр достигает наибольших размеров при значениях параметра  $2.3 \leq \tau \leq 2.4$ . При малых объемах ( $N < 2000$ ) это значение  $\tau$  может уменьшиться до 2.1 (см. значения  $\tau(D_{\max})$  в табл. 1). Кроме того, вне зависимости от размера графа, чем ближе значение параметра  $\tau$  к 1, тем меньше будет диаметр такого графа (см. значения  $\tau(D_{\min})$  в табл. 2).

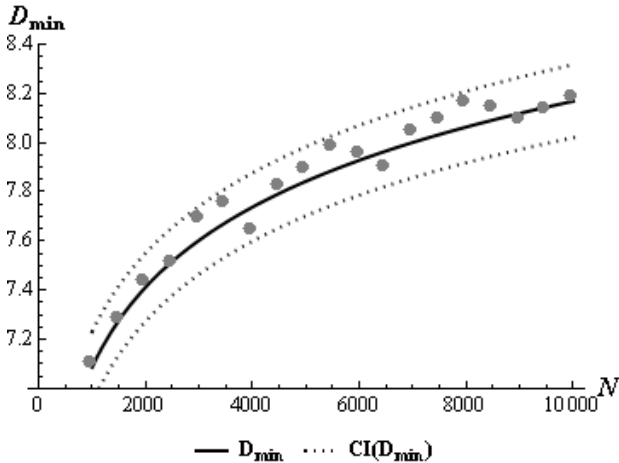


Рис. 6. Зависимость  $D_{\min}$  от  $N$ . Сплошной линией показана регрессионная зависимость, точечными линиями – доверительный интервал этой зависимости, серыми точками обозначены выборочные значения  $D_{\min}$

Fig. 6. Dependence of  $D_{\min}$  on  $N$ . Solid line shows regression dependence, dotted lines – confidence interval of this dependence, gray dots mark sample values  $D_{\min}$

Рассмотрим объемы наибольшей компоненты графа при максимуме и минимуме его диаметра. Средние значения этих величин приведены в последних столбцах таблиц 1 и 2:  $\eta_1(D_{\max})$  и  $\eta_1(D_{\min})$  соответственно. По этим данным легко вычислить значения этих же характеристик в %. Зависимости экспериментальных средних  $\eta_1(D_{\max})$  и  $\eta_1(D_{\max})$  в % от объема графа  $N$  показаны на рис. 7, а зависимости  $\eta_1(D_{\min})$  и  $\eta_1(D_{\min})$  в % от  $N$  – на рис. 8. Выборочные коэффициенты корреляции между значениями  $\eta_1$  и размером графа  $N$  равны следующим значениям:

$$\begin{aligned} r(\eta_1(D_{\max}), N) &= 0,95; \\ r(\eta_1(D_{\max})\%, N) &= -0,67; \\ r(\eta_1(D_{\min}), N) &= 0,99; \\ r(\eta_1(D_{\min})\%, N) &= 0,91. \end{aligned}$$

Были построены следующие зависимости объема наибольшей компоненты графа от числа вершин  $N$  при максимуме и минимуме диаметра графа:

- 1) зависимость между  $\eta_1(D_{\max})$  и  $N$  имеет вид линейной, размер наибольшей компоненты варьируется примерно от 390 до 2000 вершин (рис. 7, а), и регрессионная зависимость имеет вид:

$$\eta_1(D_{\max}) = 219,41 + 0,17N;$$

- 2) между  $\eta_1(D_{\max})$  в % и объемом графа  $N$  зависимость обратно пропорциональна, значения варьируются примерно от 16 до 40 % (рис. 7, б), и можно построить регрессионную зависимость следующего вида:

$$\eta_1(D_{\max})\% = 83,79 - 7,24 \ln N;$$

- 3) получена выраженная линейная зависимость  $\eta_1(D_{\min})$  от  $N$  (рис. 8, а):

$$\eta_1(D_{\min}) = 0,98N - 13,41;$$

- 4) значения объема наибольшей компоненты в %  $\eta_1(D_{\min})$  варьируются в небольшом интервале от 96,6 до 97,6%, однако имеют тенденцию к увеличению (рис. 8, б), и можно построить регрессионную зависимость следующего вида:

$$\eta_1(D_{\min})\% = 94,14 + 0,37 \ln N.$$

Таким образом, анализируя полученные в настоящей работе результаты совместно с выводами из [1], можно сказать, что в конфигурационных графах со степенным распределением степеней вершин чем ближе значение параметра  $\tau$  этого распределения к 1, тем меньше диаметр соответствующего графа. В этом случае графы являются более «связными», то есть в них существует гигантская компонента связности, в которую входит более 95 % вершин, однако кратчайшие расстояния между вершинами этой компоненты невелики, откуда и следует малый размер диаметра таких графов. Это также соответствует и так называемой «теории шести рукопожатий» (см., например, [6]). С ростом значения параметра  $\tau$  объем наибольшей компоненты графа уменьшается, однако его диаметр увеличивается, что связано, по-видимому, с появлением более длинных простых цепочек вершин. Максимального значения длина таких цепей, а соответственно, и диаметр графа, достигает примерно в середине следующего интервала изменения параметра:  $\tau \in [2, 3]$ , а затем начинает уменьшаться с приближением к его правой границе. Размер наибольшей компоненты в этом случае еще больше уменьшается, а число компонент связности значительно увеличивается.

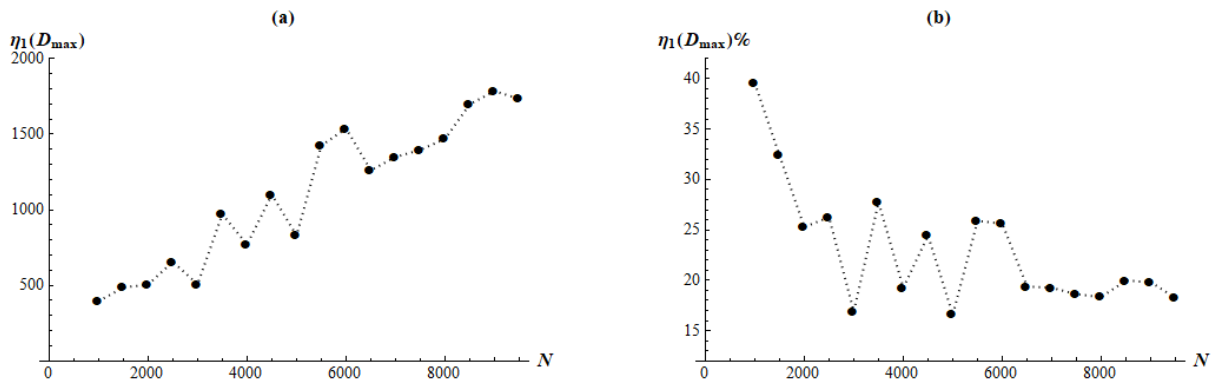


Рис. 7. Зависимости: (а)  $\eta_1(D_{\max})$  и (б)  $\eta_1(D_{\max})$  в % от  $N$   
 Fig. 7. Dependences of: (а)  $\eta_1(D_{\max})$  and (б)  $\eta_1(D_{\max})$  in % on  $N$

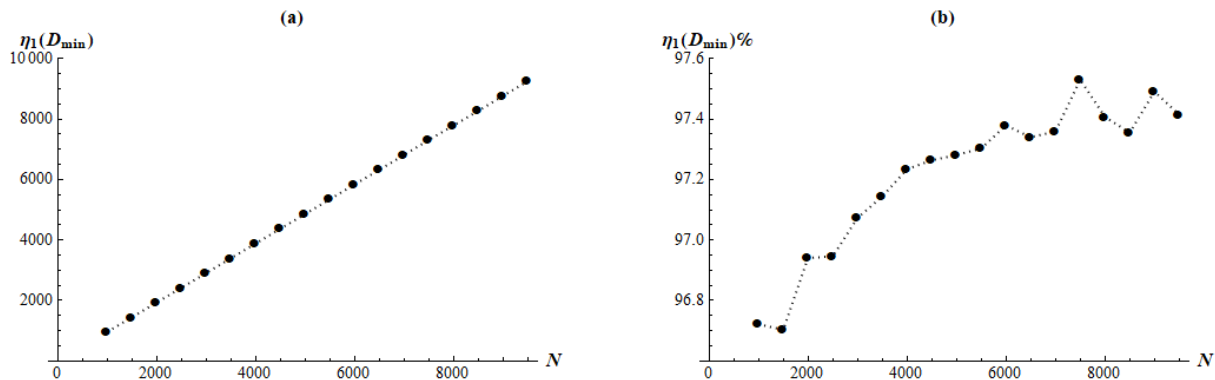


Рис. 8. Зависимости: (а)  $\eta_1(D_{\min})$  и (б)  $\eta_1(D_{\min})$  в % от  $N$   
 Fig. 8. Dependences of: (а)  $\eta_1(D_{\min})$  and (б)  $\eta_1(D_{\min})$  in % on  $N$

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Исследования выполнены на научном оборудовании Центра коллективного пользования Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лери М. М. Об условиях связности конфигурационных графов // Труды КарНЦ РАН. 2020. № 7. С. 71–75. doi: 10.17076/mat1227
2. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // Eur. J. Combin. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

3. Bollobas B., Riordan O. M. The diameter of a scale-free random graph // Combinatorica. 2004. Vol. 24, no. 1. P. 5–34. doi: 10.1007/s00493-004-0002-2
4. Chung F., Lu L. The average distances in random graphs with given expected degrees // Proc. of the National Acad. Sci. of the USA. 2002. Vol. 99, iss. 25. P. 15879–15882. doi: 10.1073/pnas.252631999
5. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numer. Math. 1959. Vol. 1, iss. 1. P. 269–271. doi: 10.1007/BF01386390
6. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 221 p.
7. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology // Comp. Comm. Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229
8. Fernholz D., Ramachandran V. The diameter of sparse random graphs // Random Struct.

Alg. 2007. Vol. 31, iss. 4. P. 482–516.  
doi: 10.1002/rsa.20197

9. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. Hofstad R. Random graphs and complex networks. 2018. Vol. 2. 314 p. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf> (дата обращения: 25.04.2021).

11. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks // SIAM Rev. 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 26.04.2021

## REFERENCES

1. Leri M. M. Ob usloviyakh svyaznosti konfiguratsionnykh grafov [On conditions of configuration graphs' connectivity]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 71–75. doi: 10.17076/mat1227

2. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Combin.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

3. Bollobas B., Riordan O. M. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*. 2004. Vol. 24, no. 1. P. 5–34. doi: 10.1007/s00493-004-0002-2

4. Chung F., Lu L. The average distances in random graphs with given expected degrees. *Proc. of the National Acad. Sci. of the USA*. 2002. Vol. 99, iss. 25. P. 15879–15882. doi: 10.1073/pnas.252631999

5. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numer. Math.* 1959. Vol. 1, iss. 1. P. 269–271. doi: 10.1007/BF01386390

6. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 221 p.

7. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationships of the internet topology. *Comp. Comm. Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

8. Fernholz D., Ramachandran V. The diameter of sparse random graphs. *Random Struct. Alg.* 2007. Vol. 31, iss. 4. P. 482–516. doi: 10.1002/rsa.20197

9. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

10. Hofstad R. Random graphs and complex networks. 2018. Vol. 2. 314 p. URL: <https://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCNII.pdf> (accessed: 25.04.2021).

11. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev.* 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received April 26, 2021

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Лери Марина Муксумовна**

научный сотрудник, к. т. н.

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»

ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910

эл. почта: [leri@krc.karelia.ru](mailto:leri@krc.karelia.ru)

тел.: (8142) 781218

## CONTRIBUTOR:

**Leri, Marina**

Institute of Applied Mathematical Research,

Karelian Research Centre,

Russian Academy of Sciences

11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,

Karelia, Russia

e-mail: [leri@krc.karelia.ru](mailto:leri@krc.karelia.ru)

tel.: (8142) 781218



УДК 519.857

## ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

А. А. Нестеренко, В. М. Хаметов

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия*

В статье приведено решение задач об оптимальной остановке с конечным и с бесконечным горизонтом в ситуации, когда наблюдается случайное блуждание, а функция полезности наблюдателя – экспоненциальная. Для этих задач найдено: i) явное решение соответствующего уравнения Беллмана; ii) граница, отделяющая внутренность области остановки от области продолжения наблюдений; iii) оптимальное правило остановки.

Ключевые слова: момент остановки; правило остановки; случайное блуждание; экспоненциальная функция полезности; конечный горизонт; бесконечный горизонт.

### A. A. Nesterenko, V. M. Khametov. OPTIMAL STOPPING OF RANDOM WALK WITH EXPONENTIAL UTILITY FUNCTION

The article provides solutions for optimal stopping problems for finite and infinite horizons in the case of random walk with exponential utility function. For these problems we found: i) explicit solution of the corresponding Bellman equation; ii) solution of free boundary problem; iii) optimal stopping rule.

Key words: optimal stopping; optimal stopping rule; random walk; exponential utility function; finite horizon; infinite horizon.

### ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена одному из важных направлений теории оптимального стохастического управления – теории оптимальной остановки случайных последовательностей. Особенностью этой теории является то, что управление используется всего один раз для остановки наблюдаемой последовательности. Остановка осуществляется в момент времени, в который ожидаемое значение функции полезности наблюдателя максимально. Этот момент времени обычно называют оптимальным,

а соответствующее значение ожидаемой полезности – ценой.

Теория оптимальных правил остановки имеет многочисленные приложения в различных областях науки и техники. Приведем некоторые из них: 1) в статистике [1] – это процедуры последовательного анализа; 2) в экономике [7, 9] – построение расчета: i) американского опциона, ii) наискорейшего обнаружения разладки производственного процесса; 3) в радиосвязи и радиолокации – создание процедур обнаружения сигналов и т. д.

Приведем краткий обзор результатов, посвященных проблемам, затрагиваемым в статье. В [1], по-видимому, впервые сформулирована и решена задача последовательной проверки простых гипотез по наблюдениям за случайной последовательностью. В предположении, что рассматривается задача проверки двух простых гипотез, а наблюдается последовательность независимых случайных величин, выведено рекуррентное соотношение относительной апостериорной вероятности принятия одной из этих гипотез. Затем с применением вышеуказанного рекуррентного соотношения в работе при заданной функции риска выведено рекуррентное соотношение беллмановского типа относительно апостериорного риска. Решение этого соотношения и, следовательно, оптимальное правило остановки построены для некоторых частных случаев в предположении, что горизонт бесконечен. В [3, 4], с опорой на [1], приведено несколько примеров задач об оптимальной остановке, допускающих явное решение.

В монографиях [2, 5, 10] последовательно излагается общая теория оптимальных правил остановки для марковских случайных последовательностей как для конечного, так и для бесконечного горизонтов. В них установлены условия применимости принципа Беллмана для урезанной цены оптимальной остановки, что позволило вывести рекуррентное соотношение беллмановского типа для урезанной цены в случае конечного горизонта. Кроме того, был обоснован предельный переход (когда горизонт стремится к бесконечности) в рекуррентном соотношении, которому удовлетворяет урезанная цена оптимальной остановки. Последнее дало возможность вывести нелинейное уравнение, которому удовлетворяет цена оптимальной остановки для случая бесконечного горизонта. Эти утверждения позволили установить условия: i) существования областей остановки и продолжения наблюдений, ii) оптимальности момента остановки. В указанных работах содержатся также несколько точно решаемых примеров конкретных задач об оптимальной остановке: а) задача о секретаре/о разборчивой невесте для случая конечного горизонта, б) последовательная проверка простых гипотез, возникающих в финансовой математике, когда горизонт бесконечен.

В [7, 9] доказано, что задача расчета опционов американского типа на полном биномиальном рынке сводится к решению задачи об оптимальной остановке. В [9] для опциона call (put) и случая бесконечного горизонта построено оптимальное правило остановки. В [8, 9]

изложен мартингалльный подход к построению решения задачи об оптимальной остановке.

Анализ вышеуказанных работ показал, что для нахождения решения задачи об оптимальной остановке необходимо уметь: i) находить решение рекуррентного соотношения беллмановского типа относительно урезанной цены в случае конечного горизонта и нелинейного уравнения относительно цены в случае бесконечного горизонта, ii) строить границу, разделяющую область продолжения наблюдений от внутренности области остановки. Эти проблемы оказались труднорешаемыми, поскольку граница остановки описывается либо в терминах решений рекуррентных соотношений беллмановского типа относительно урезанной цены для конечного горизонта, либо в терминах решения нелинейного уравнения, которому удовлетворяет цена для бесконечного горизонта.

Помимо случаев, когда задача об оптимальной остановке допускает решения, приведенные в [1, 3, 9, 10], относительно недавно появились статьи, где установлены условия, при выполнении которых она имеет эффективное решение. Так, в [11] описано и обосновано, что в случаях бесконечного горизонта для случайного блуждания с функцией полезности, совпадающей с платежным обязательством типа call, оптимальное правило остановки состоит в нахождении точки максимума полинома Апеля. Кроме того, в [12, 13] для американского опциона с конечным горизонтом по наблюдениям за геометрическим случайным блужданием, когда платежное обязательство монотонно и непрерывно, установлена единственность границы, отделяющей внутренность области остановки от области продолжения наблюдений.

В этой статье для ситуации, когда наблюдается случайное блуждание, а функция полезности наблюдателя – экспоненциальная, для случаев конечного и бесконечного горизонтов дается и обосновывается явный вид решения соответствующих задач об оптимальной остановке. Уточним, что имеется в виду. Для задачи с конечным горизонтом, постановка которой приведена в разделе 1, в разделе 2 предложена и обоснована методика, позволяющая явно предъявить решение рекуррентного соотношения для урезанной цены (теорема 1), которое, в свою очередь, позволило построить в явном виде границу, отделяющую внутреннюю область остановки от области продолжения наблюдений, т. е. свободную границу (теорема 2). Последнее позволило установить простые условия оптимальности момента останов-

ки. Для случая бесконечного горизонта (раздел 3): i) выведено нелинейное уравнение, которому удовлетворяет цена, ii) установлен явный вид его решения (теорема 3). Этот результат позволил найти явный вид свободной границы, отделяющей внутренность области останковки от области продолжения наблюдений, которая состоит из одной точки (теорема 3), а также сформировать простые и легко проверяемые условия оптимальности момента останковки (теорема 3). Все доказательства вынесены в приложения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ С КОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

В этом разделе сформулирована задача об оптимальной останковке случайного блуждания, когда функция полезности наблюдателя – экспоненциальная, а горизонт конечен. Кроме того, здесь приведены известные результаты из теории оптимальных правил останковки в терминах рассматриваемой задачи.

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, F, P)$  задана частичная последовательность случайных величин  $\{X_n^{0,x}\}_{n \in N_0}$  (где  $N_0 \triangleq \{0, \dots, N\}$ , горизонт  $N < \infty$ ):

$$X_{n+1}^{0,x} = X_n^{0,x} + p_{n+1}, \quad X_n^{0,x}|_{n=0} = x, \quad (1)$$

здесь  $x \in R^1$  – любое,  $\{p_n\}_{n \geq 1}$  – последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения  $F_p(x)$ . Ясно, что частичная последовательность  $\{X_n^{0,x}\}_{n \in N_0}$  является однородной марковской и описывает случайное блуждание на  $R^1$ . Зададим фильтрацию:  $\mathcal{F}_n \triangleq \sigma\{p_1, \dots, p_n\}$ ,  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{F}_0$  – тривиальная  $\sigma$ -алгебра.

Положим, что для любого  $n \in N_0$  значение полезности для наблюдателя определяется по формуле

$$f_n = \beta^n (1 - e^{-\delta X_n^{0,x}}), \quad (2)$$

где  $\beta \in (0, 1]$  – коэффициент дисконтирования, а  $\delta \in (0, \infty)$  – коэффициент неприятия риска.

Пусть  $\tau$  – момент останковки относительно фильтрации  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in N_0}$ , а  $T_n^N$  – множество моментов останковки  $\tau$  таких, что  $0 \leq n \leq \tau(\omega) \leq N$  для любого  $\omega \in \Omega$ . Очевидно, что если  $\tau \in T_0^N$ , то имеет место равенство  $f_\tau \triangleq f_n|_{n=\tau} = \sum_{l=0}^N f_l I_{\{\tau=l\}}$ , где  $I_{\{\tau=l\}} \triangleq \begin{cases} 1, & \tau = l, \\ 0, & \tau \neq l. \end{cases}$

Предположим, что для любого  $x \in R^1$  выполняется условие:

$$E \max_{n \in N_0} \beta^n \left( 1 - e^{-\delta(x + \sum_{i=1}^n p_i)} \right) < \infty. \quad (3)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу об оптимальной останковке, рассматриваемую в статье

$$E \beta^\tau \left( 1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}} \right) \rightarrow \sup_{\tau \in T_0^N}. \quad (4)$$

Через  $v_0^N(x)$  обозначим величину

$$v_0^N(x) \triangleq \sup_{\tau \in T_0^N} E \beta^\tau \left( 1 - e^{-\delta(x + \sum_{i=1}^{\tau} p_i)} \right),$$

которую называют ценой оптимальной останковки. Момент останковки  $\tau^0$  такой, что

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau \in T_0^N} E \beta^\tau \left( 1 - e^{-\delta(x + \sum_{i=1}^{\tau} p_i)} \right) \\ &= E \beta^{\tau^0} \left( 1 - e^{-\delta(x + \sum_{i=1}^{\tau^0} p_i)} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

называют оптимальным моментом останковки. Наша задача состоит в нахождении цены  $v_0^N(x)$  и построении оптимального правила останковки.

Пусть  $v_n^N(x)$  –  $\mathcal{F}_n$ -измеримая случайная величина, определенная формулой

$$v_n^N(x) \triangleq \sup_{\tau \in T_n^N} E \left[ \beta^\tau \left( 1 - e^{-\delta X_\tau^{(n,x)}} \right) \right], \quad (6)$$

где  $X_\tau^{(n,x)} \triangleq x + \sum_{i=n+1}^{\tau} p_i$ ,  $n \in N_0$ . Ее называют урезанной ценой в момент времени  $n$ . Поскольку  $T_{n-1}^N \supseteq T_n^N$  ( $T_n^{N+1} \supseteq T_n^N$ ), то из (5) для любых  $x \in R^1$  следует неравенство

$$v_{n-1}^N(x) \geq v_n^N(x) \quad (v_n^{N+1}(x) \geq v_n^N(x)). \quad (7)$$

Из теории оптимальных правил останковки [6, 10] известно, что если выполнено условие (3), то для любого  $x \in R^1$  урезанная цена удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} v_n^N(x) = \max \{ \beta^n (1 - e^{-\delta x}), \beta E [v_{n+1}^N(x + p_1)] \}, \\ v_n^N(x)|_{n=N} = \beta^N (1 - e^{-\delta x}). \end{cases} \quad (8)$$

Также известно [10], что

$$v_n^N(x) = \beta^n v_0^{N-n}(x). \quad (9)$$

Пусть  $k = N - n$  и  $v^k(x) \triangleq v_0^k(x)|_{k=N-n}$ . Тогда из (8) следует, что  $v^k(x)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} v^k(x) = \max \{ 1 - e^{-\delta x}, \beta E [v^{k-1}(x + p_1)] \}, \\ v^k(x)|_{k=0} = 1 - e^{-\delta x}. \end{cases} \quad (10)$$

Из (10) следует, что для любого  $x \in R^1$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} v^k(x) &\geq 1 - e^{-\delta x}, \\ v^k(x) &\geq \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того, из (7) и (9) следует, что для любого  $x \in R^1$

$$v^{k+1}(x) \geq v^k(x), \quad (12)$$

т. е. последовательность монотонно не убывает. Отметим еще, что (10) позволяет для каждого  $k \in N_0$  разбить пространство  $R^1$  на две области:

$$\begin{aligned} i) \quad \Gamma_k &\triangleq \left\{ x \in R^1 : v^k(x) = 1 - e^{-\delta x} \right\} \\ &= \left\{ x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} \geq \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

которую называют множеством остановки [10], и

$$\begin{aligned} ii) \quad C_k &\triangleq \left\{ x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} < \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right] \right\} \\ &= \left\{ x \in R^1 : v^k(x) = \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

которую называют множеством продолжения наблюдений [10]. Очевидно, что для любого  $k \in N_0$

$$\Gamma_k \cap C_k = \emptyset, \quad (15)$$

$$\Gamma_k \cup C_k = R^1. \quad (16)$$

Из (10) и определения областей  $\Gamma_k$  и  $C_k$  следует, что для любых  $(k, x) \in N_0 \times R^1$

$$v^k(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\delta x}, & x \in \Gamma_k, \\ \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right], & x \in C_k. \end{cases} \quad (17)$$

Из последнего равенства следует, что  $v^k(x)$  допускает представление

$$\begin{aligned} v^k(x) &= (1 - e^{-\delta x}) I_{\Gamma_k}(x) \\ &+ \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right] I_{C_k}(x), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $I_B \triangleq \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B \end{cases}$  — индикатор множества

$B \subseteq R^1$ . Заметим, что (18) с учетом (16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v^k(x) &= (1 - e^{-\delta x}) \\ &+ \left( \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right] - 1 + e^{-\delta x} \right) I_{C_k}(x). \end{aligned}$$

Кроме того, из (12)–(16) следует, что последовательности  $\{\Gamma_k\}_{k \in N_0}$  и  $\{C_k\}_{k \in N_0}$  монотонны, и имеют место включения

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_k \subseteq \dots \subseteq \Gamma_N = R^1, \quad (19)$$

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \dots \supseteq C_k \supseteq \dots \supseteq C_N = \emptyset.$$

Для любого  $k \in N_0$  область  $\Gamma_k \subseteq R^1$  разобьем на две непересекающиеся подобласти:

i)  $\partial \Gamma_k \triangleq \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} = \beta E [v^{k-1}(x + p_1)]\}$  — множество граничных точек области  $\Gamma_k$ ,

ii)  $\text{int} \Gamma_k \triangleq \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} > \beta E [v^{k-1}(x + p_1)]\}$  — внутренность множества  $\Gamma_k$ . Очевидно, что  $\Gamma_k = \partial \Gamma_k \cup \text{int} \Gamma_k$ .

Заметим, что  $\partial \Gamma_k \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда существует хотя бы один корень уравнения

$$1 - e^{-\delta x} = \beta E \left[ v^{k-1}(x + p_1) \right], \quad (20)$$

который обозначим через  $x(k) \in R^1$ . Очевидно, что если точка  $x(k) \in \partial \Gamma_k$ , то она является граничной точкой области  $\Gamma_k$ , которая отделяет область  $C_k$  от множества  $\text{int} \Gamma_k$ . Последовательность  $\{x(k)\}_{k \in N_0}$  называют свободной границей [9, 10].

Таким образом, проблема построения решения задачи об оптимальной остановке (4) сводится: i) к нахождению решения рекуррентного соотношения (10), ii) к построению свободной границы.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОНЕЧНОГО ГОРИЗОНТА

В этом разделе приведено решение задачи об оптимальной остановке случайного блуждания с дисконтированной экспоненциальной функцией полезности наблюдателя и конечным горизонтом, сформулированной в пункте 1. Здесь устанавливается: i) явный вид решения рекуррентного соотношения (10) (теорема 1), ii) условия существования оптимального правила остановки (теорема 2).

Пусть  $\varphi(\delta) \triangleq E [e^{-\delta p_1}]$  — производящая функция моментов случайной величины  $p_1$  [9, 10]. Предположим, что она удовлетворяет условию:

$$\forall \delta \in (0, \infty) : \quad 0 < \varphi(\delta) < \infty. \quad (21)$$

**Теорема 1.** Пусть наблюдается случайное блуждание, заданное соотношениями (1), а функция полезности имеет вид (2), причем выполнены условия (3), (21). Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для любых  $(k, x) \in N_0 \times R^1$  и  $\delta \in (0, \infty)$  рекуррентное соотношение (10) имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} v^k(x) &= 1 - e^{-\delta x} \\ &+ \max \left[ \beta^k (1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}) - 1 + e^{-\delta x}, 0 \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

2) Для любых  $k \in N_0$  и  $\delta \in (0, \infty)$  области  $\partial\Gamma_k$ ,  $\text{int } \Gamma_k$  и  $C_k$  допускают представления соответственно:

$$\partial\Gamma_k = \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} = \beta^k(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x})\}, \quad (23)$$

$$\text{int } \Gamma_k = \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} > \beta^k(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x})\}, \quad (24)$$

$$C_k = \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} < \beta^k(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x})\}.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении 1.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и для любого  $\delta \in (0, \infty)$ :

$$1) E|p_1|e^{-\delta p_1} < \infty,$$

$$2) E|p_1|^2e^{-\delta p_1} < \infty.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Пусть  $\beta = 1$ ,  $|Ep_1| < \infty$ , а  $\delta \in (0, \infty)$ . Тогда для любого  $k \in N_0$  множество  $\Gamma_k = \bar{R}^1 (\triangleq R^1 \cup \{\infty\}) (x(k) = -\infty)$ , а  $\tau^0 = 0$ .

2) Пусть  $\beta \in (0, 1)$ ,  $|Ep_1| < \infty$ , а  $\{(\beta, \delta) \in (0, 1) \times (0, \infty) : \beta\varphi(\delta) \geq 1\} \neq \emptyset$ . Тогда для любого  $k \in N_0$   $\Gamma_k = R^1$ , а  $\tau^0 = 0$ .

3) Пусть  $\beta \in (0, 1)$ ,  $|Ep_1| < \infty$ , а  $\{(\beta, \delta) \in (0, 1) \times (0, \infty) : \beta\varphi(\delta) < 1\} \neq \emptyset$ . Тогда:

i) частичная последовательность  $\{x(k)\}_{k \in N_0}$ , где

$$x(k) \triangleq \frac{1}{\delta} \ln \frac{1 - \beta^k \varphi^k(\delta)}{1 - \beta^k}, \quad (25)$$

монотонно не возрастает и описывает эволюцию свободной границы;

ii) для любого  $k \in N_0$  область остановки имеет вид  $\Gamma_k = \{x \in R^1 : x \geq x(k)\}$ ;

iii) оптимальное правило остановки  $\tau^0$  является пороговым и имеет вид

$$\tau^0 = \inf \left\{ k \in N_0 : X_k^{0,x} \geq x(k) \right\} \wedge N. \quad (26)$$

Теорема 2 доказана в приложении 2.

### 3. ЗАДАЧА С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

В этом разделе приведено решение задачи об оптимальной остановке в предположениях, что: i) наблюдается случайное блуждание, ii) наблюдатель руководствуется дисконтированной экспоненциальной функцией полезности, iii) горизонт бесконечен.

Пусть горизонт  $N = \infty$ . Наблюдается случайная последовательность  $\{X_n^{0,x}, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ , заданная соотношениями (1). Пусть  $T_0^\infty$  – множество конечных марковских моментов относительно фильтрации  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ . Предположим, что функция полезности наблюдателя имеет

вид  $\beta^\tau (1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}})$ . Наша задача состоит в следующем:

$$E \left[ \beta^\tau \left( 1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}} \right) \right] \rightarrow \sup_{\tau \in T_0^\infty}. \quad (27)$$

Обозначим

$$v(x) \triangleq \sup_{\tau \in T_0^\infty} E \left[ \beta^\tau \left( 1 - e^{-\delta X_\tau^{0,x}} \right) \right]. \quad (28)$$

Функцию  $v(x)$ , определенную в (28), называют ценой оптимальной остановки в задаче с бесконечным горизонтом. Момент остановки  $\tau^0 \in T_0^\infty$  называют оптимальным, если  $v(x) = E \left[ \beta^{\tau^0} \left( 1 - e^{-\delta X_{\tau^0}^{0,x}} \right) \right]$ .

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого раздела.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теорем 1–2,  $\beta \in (0, 1)$  и

$$E \sum_{n \geq 0} \beta^n \left( 1 - e^{-\delta \sum_{i=1}^n p_i} \right) < \infty. \quad (29)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Цена оптимальной остановки  $v(x)$  для любых  $x \in R^1$  допускает представление

$$v(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} v^k(x), \quad (30)$$

где  $\{v^k(x)\}_{k \geq 1}$  – последовательность, элементы которой – урезанные цены, удовлетворяющие (10) и допускающие представление (22). Кроме того, для любых  $x \in R^1$  и  $\delta \in (0, \infty)$  цена  $v(x)$  удовлетворяет уравнению

$$v(x) = \max \left\{ 1 - e^{-\delta x}, \beta E v(x + p_1) \right\}. \quad (31)$$

2) Пусть  $\delta_{1/\beta} > 0$  – корень уравнения  $\varphi(t) = \frac{1}{\beta}$ , а  $\delta \in (0, \delta_{1/\beta})$  – любое. Тогда для любых  $x \in R^1$  решение задачи (27) имеет вид

$$v(x) = 1 - e^{-\delta x} + \max \{ A^* e^{-\delta_{1/\beta} x} - 1 + e^{-\delta x}, 0 \}, \quad (32)$$

$$\tau^0 = \inf \left\{ k \geq 0 : X_k^{(0,x)} \geq x_r \right\}, \quad (33)$$

где  $(A^*, x_r) \in R^2$ :

$$A^* = -\frac{\delta}{\delta_{1/\beta}} \left( \frac{\delta_{1/\beta} - \delta}{\delta} \right)^{\frac{\delta_{1/\beta} - \delta}{\delta}}, \quad (34)$$

$$x_r = \frac{1}{\delta} \ln \frac{\delta_{1/\beta} - \delta}{\delta}. \quad (35)$$

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении 3.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведен новый пример построения решения задачи об оптимальной остановке случайного блуждания с экспоненциальной функцией полезности, содержательная часть которого состоит в том, что в этом случае удастся найти явное решение рекуррентного соотношения беллмановского типа, которое соответствует вышеуказанной задаче как с конечным, так и с бесконечным горизонтом.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Доказательство теоремы 1 опирается на вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1, а семейство  $\{\tilde{v}^k(x)\}_{k \in N_0}$  скалярных борелевских функций, определенных на  $R^1$ , удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \tilde{v}^k(x) = \beta E [\tilde{v}^{k-1}(x + p_1)], \\ \tilde{v}^k(x)|_{k=0} = 1 - e^{-\delta x}. \end{cases} \quad (36)$$

Тогда для любых  $(k, x) \in N_0 \times R^1$  и  $\delta \in (0, \infty)$  уравнение (36) имеет единственное решение:

$$\tilde{v}^k(x) = \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right), \quad (37)$$

где  $\varphi(\delta)$  – производящая функция моментов случайной величины  $p_1$ .

*Доказательство.* Проведем его по индукции. Очевидно, что при  $k = 0$  предположение индукции выполнено. Пусть теперь  $k = 1$ . Тогда из (36) следует, что  $\tilde{v}^1(x) = \beta E [1 - e^{-\delta(p_1+x)}] = \beta (1 - \varphi(\delta) e^{-\delta x})$ . Пусть теперь

$$\tilde{v}^{k-1}(x) = \beta^{k-1} \left(1 - \varphi^{k-1}(\delta) e^{-\delta x}\right). \quad (38)$$

Установим, что  $\tilde{v}^k(x)$  имеет вид (37). Действительно, подставляя (38) в (36), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{v}^k(x) &= \beta E [\tilde{v}^{k-1}(x + p_1)] \\ &= \beta^k E \left[1 - \varphi^{k-1}(\delta) E e^{-\delta(x+p_1)}\right] \\ &= \beta^k \left(1 - \varphi^{k-1}(\delta) E e^{-\delta p_1} e^{-\delta x}\right) \\ &= \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right). \end{aligned}$$

Основной шаг индукции обоснован, а с ним и утверждение леммы, поскольку единственность решения (36) очевидна.  $\square$

*Доказательство теоремы 1.* Доказательство пункта 1. Рассмотрим рекуррентное соотношение (10), решение которого допускает представление (18). К (10) применим метод индукции. Отсюда следует существование единственного решения (10).

Из (12)–(16) следует, что для любых  $k \in N_0$  имеется три возможности: а)  $C_k = \emptyset$  ( $\Gamma_k = R^1$ ), б)  $C_k = R^1$  ( $\Gamma_k = \emptyset$ ), в)  $C_k \neq \emptyset$  и  $\Gamma_k \neq \emptyset$ . Рассмотрим их.

Возможность 1. Из (17) следует, что для любых  $k \in N_0$  величина  $v^k(x) = 1 - e^{-\delta x}$ . Поэтому из (18) следует, что для любого  $l \in \{k, \dots, N\}$  множество  $\Gamma_l = R^1$ . Стало быть, для любых  $l \in \{k, \dots, N\}$  и  $x \in R^1$  функция  $v^l(x) = 1 - e^{-\delta x}$ .

Возможность 2. Из (14) следует, что  $v^k(x) = \beta E [v^{k-1}(x + p_1)]$ . Из (19) получаем для любого  $0 \leq m \leq k$  включение  $C_m \subseteq C_k$ . Поэтому из (13) следует, что  $v^k(x)|_{m=0} = 1 - e^{-\delta x}$ . А в силу леммы 1  $v^m(x)$  для любого  $x \in C_m$  допускает представление

$$v^m(x) = \beta^m \left[1 - \varphi^m(\delta) e^{-\delta x}\right]. \quad (39)$$

Возможность 3. Из (13) и условия  $C_k \neq \emptyset$  в силу (19) следует, что имеет место включение  $C_0 \subseteq C_1 \subseteq \dots \subseteq C_{k-1} \subseteq C_k \neq \emptyset$ . Поэтому  $C_{k-1} \neq \emptyset$  и из леммы 1 имеем для любого  $x \in C_{k-1}$ :

$$v^{k-1}(x) = \beta^{k-1} \left(1 - \varphi^{k-1}(\delta) e^{-\delta x}\right). \quad (40)$$

Поскольку  $C_k \neq \emptyset$ , то для любого  $x \in C_k$  имеет место равенство  $v^k(x) = \beta E [v^{k-1}(x + p_1)]$ .

Значит, проведя выкладку, аналогичную (39), получим, что при  $x \in C_k (\neq \emptyset)$

$$v^k(x) = \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right). \quad (41)$$

Стало быть, (13) с учетом (40) и (41) дает для любого  $x \in R^1$  следующий вид урезанной цены  $v^k(x)$ :

$$v^k(x) = 1 - e^{-\delta x} + \left[\beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right) - 1 + e^{-\delta x}\right] I_{C_k}(x). \quad (42)$$

Поскольку  $C_k \neq \emptyset$ , то из (42) для любого  $x \in C_k$  следует соотношение

$$\begin{aligned} 0 &< v^k(x) - 1 + e^{-\delta x} \\ &= \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta) e^{-\delta x}\right) - 1 + e^{-\delta x}. \end{aligned} \quad (43)$$

Следовательно, (42), с учетом (43), для любого  $x \in R^1$  примет вид (22). Пункт 1) теоремы доказан полностью.

Доказательство пункта 2. Пусть  $C_k \neq \emptyset$ . Тогда из пункта 1 теоремы 1 и (42) следует, что для любого  $x \in R^1$  имеет место равенство

$$v^k(x) - 1 + e^{-\delta x} = \begin{cases} 0, & x \notin C_k, \\ \beta^k \left(1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}\right) - 1 + e^{-\delta x}, & x \in C_k. \end{cases}$$

Отсюда, из (11) и определения  $C_k$  следует равенство

$$C_k = \{x \in R^1 : v^k(x) - 1 + e^{-\delta x} > 0\} = \{x \in R^1 : \beta^k (1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}) - 1 + e^{-\delta x} > 0\}. \quad (44)$$

Определение  $\Gamma_k (\triangleq R^1/C_k)$  и (44) дают

$$\Gamma_k = \{x \in R^1 : \beta^k (1 - \varphi^k(\delta)e^{-\delta x}) \leq 1 - e^{-\delta x}\}. \quad (45)$$

Из (45) и определений  $\partial\Gamma_k$  и  $\text{int}\Gamma_k$  следуют (23) и (24).  $\square$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

При доказательстве теоремы 2 нам потребуются следующие свойства производящей функции моментов  $\varphi(\delta)$  случайной величины  $p_1$ .

**Лемма 2.** Пусть для любого  $\delta \in (0, \infty)$  выполнены условия:

- а)  $0 < \varphi(\delta) < \infty$ ,
- б)  $0 < E[p_1^2 e^{-\delta p_1}] < \infty$ .

Тогда справедливы следующие утверждения.

1)  $\varphi(0) = 1$ .

2) Существуют и конечны первая и вторая правые производные  $\varphi(\delta)$  в точке 0, причём: i)  $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} = -Ep_1$ , ii)  $\frac{d^2\varphi(0)}{d\delta^2} = Ep_1^2$ .

3) Для любого  $\delta \in (0, \infty)$  функция  $\varphi(\delta)$  строго выпукла и для любого  $\beta \in (0, 1]$  существует единственный корень  $\delta_{1/\beta}$  уравнения

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{\beta}. \quad (46)$$

*Доказательство.* Из условий а) и б) очевидным образом следуют утверждения 1 и 2. Кроме того, из условия б) вытекает для любого  $\delta \in (0, \infty)$  неравенство  $\frac{d^2\varphi(\delta)}{d\delta^2} = Ep_1^2 > 0$ . Поэтому очевидно, что  $0 < \frac{d^2\varphi(\delta)}{d\delta^2} < \infty$ . Значит, производящая функция  $\varphi(\delta)$  – строго выпукла. Поскольку  $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} = -Ep_1$ , то имеется два возможных варианта поведения функции  $\varphi(\delta)$ .

Вариант 1. Пусть  $Ep_1 \leq 0$ . Тогда  $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} \geq 0$  и  $\frac{d\varphi(\delta)}{d\delta}$  не убывает. Следовательно,  $\varphi(\delta)$  – непрерывная монотонно неубывающая функция. Поэтому существует единственный корень уравнения (46).

Вариант 2. Если  $Ep_1 > 0$ , то  $\frac{d\varphi(0)}{d\delta} < 0$ . Раз для любых  $\delta \in (0, \infty)$  вторая производная  $\frac{d^2\varphi(\delta)}{d\delta^2} > 0$ , то существует  $0 < \delta_0 < \infty$ :

$\min_{\delta \in (0, \infty)} \varphi(\delta) = \varphi(\delta_0)$  (где  $\frac{d\varphi(\delta_0)}{d\delta} = 0$ , а  $\frac{d^2\varphi(\delta_0)}{d\delta^2} > 0$ ).

Стало быть, для любых  $\delta > \delta_0$  функция  $\varphi(\delta)$  является непрерывной и монотонно неубывающей. Поэтому существует единственное решение уравнения (46).  $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Сначала заметим, что из утверждения 2 теоремы 1 следует, что множество граничных точек  $\partial\Gamma_k \neq \emptyset$ , если и только если уравнение (20) разрешимо относительно  $x \in R^1$ .

1) Пусть  $\beta = 1$ ,  $|Ep_1| < \infty$ ,  $\delta \in (0, \infty)$ ,  $x(k)$  – корень уравнения, а  $k \in N_0$  – любое. Тогда, в силу условий, (20) примет вид  $x(k) = \frac{1}{\delta} \ln [\varphi^k(\delta) - 1]$ . Отсюда в силу леммы 2 следует, что  $x(k) = -\infty$ . Поэтому  $\Gamma_k = \bar{R}^1$ , а  $\tau^0 = 0$ .

2) Пусть  $|Ep_1| < \infty$ , а множество пар  $(\beta, \delta) \in (0, 1) \times (0, \infty)$  такое, что  $\beta\varphi(\delta) \geq 1$ . Тогда из (23) и (24) следует, что относительно любых  $x \in R^1$  выполняется неравенство  $(0 <) 1 - \beta^k \geq (1 - \beta^k \varphi^k(\delta))e^{-\delta x}$ . Значит,  $\Gamma_k = R^1$ . Следовательно,  $\tau^0 = 0$ .

3) Пусть  $|Ep_1| < \infty$ ,  $\beta \in (0, 1]$ , а  $\delta \in (0, \delta_{1/\beta})$ , где  $0 < \delta_{1/\beta}$  – решение уравнения  $\varphi(\delta) = \frac{1}{\beta}$ . Тогда очевидно, что в этом случае  $1 - \beta^k \varphi^k(\delta) > 0$ , поскольку  $\beta\varphi(\delta) < 1$ . Из этого следует, что существуют  $x \in R^1$  такие, что  $\partial\Gamma_k \neq \emptyset$ . Значит, уравнение  $1 - \beta^k = (1 - \beta^k \varphi^k(\delta))e^{-\delta x}$  имеет для любого  $k \in N_0$  единственное решение (25). При этом  $\Gamma_k = \{x \in R^1 : x \geq x(k)\}$ , а  $\tau^0$  имеет вид (26).  $\square$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Доказательство теоремы 3 опирается на два вспомогательных утверждения. Сначала выведем уравнение, которому удовлетворяет цена в задаче об оптимальной остановке с бесконечным горизонтом, а также некоторые свойства его решения.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия теорем 1 и 2. Предположим, что для любого  $x \in R^1$  выполнено условие (29). Тогда для любого  $x \in R^1$  справедливы следующие утверждения.

1) Цена  $v(x)$  удовлетворяет (30) и (31).

2) Справедливы неравенства

$$v(x) \geq 1 - e^{-\delta x}, \quad (47)$$

$$v(x) \geq \beta E v(x + p_1). \quad (48)$$

3) Решение уравнения (31) допускает представление (32) – (35).

*Доказательство.* 1) Сначала докажем, что имеет место (30), т. е. обоснуем возможность осуществления поточечного предельного перехода для последовательности  $\{v^k(x)\}_{k \in N_0}$ . Для этого заметим, что: i) для любых  $(k, x) \in N_0 \times R^1$ ,

$$|v^k(x)| \leq \sum_{n \geq 0} \beta^n \left( 1 + E e^{-\delta \left( x + \sum_{k=1}^n p_k \right)} \right),$$

ii) последовательность  $\{v^k(x)\}_{k \in N_0}$  – монотонная, в силу (6) – неубывающая. Поэтому существует поточечный предел, обозначаемый  $v(x) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} v^k(x)$ . Теперь рассмотрим рекуррентное соотношение (9) и обоснуем возможность предельного перехода в нем. Действительно, в силу теоремы о монотонной сходимости и вышеуказанных замечаний получаем, что  $v(x)$  удовлетворяет уравнению (31).

2) Неравенства (47) и (48) следуют из неравенств (10), (11) и устанавливаются с помощью предельного перехода при  $k \rightarrow \infty$ .

3) Для доказательства (32)–(35) нам придется ввести ряд новых объектов. Из рекуррентного соотношения (31) следует, что  $R^1$  можно разбить на две непересекающиеся области:

i) область остановки  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma &\triangleq \{x \in R^1 : v(x) = 1 - e^{-\delta x}\} \\ &= \{x \in R^1 : 1 - e^{-\delta x} \geq \beta E v(x + p_1)\}, \end{aligned} \quad (49)$$

ii) область продолжения наблюдений

$$\begin{aligned} C &\triangleq \{x \in R^1 : v(x) = \beta E [v(x + p_1)]\} \\ &= \{x \in R^1 : \beta E [v(x + p_1)] > 1 - e^{-\delta x}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\Gamma \cap C = \emptyset$ ,  $\Gamma \cup C = R^1$ . В силу (31) и (49) для любого  $x \in R^1$

$$v(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\delta x}, & x \in \Gamma, \\ \beta E [v(x + p_1)], & x \in C, \end{cases}$$

или, что то же,

$$v(x) = (1 - e^{-\delta x}) I_\Gamma(x) + \beta E [v(x + p_1)] I_C(x). \quad (50)$$

Отсюда следует, что решение (50) допускает представление:

$$\begin{aligned} v(x) &= 1 - e^{-\delta x} + [\beta E [v(x + p_1)] - 1 + e^{-\delta x}] I_C(x) \\ &= 1 - e^{-\delta x} + \max [\beta E [v(x + p_1)] - 1 + e^{-\delta x}, 0]. \end{aligned}$$

□

**Лемма 4.** Пусть  $\omega^k(x)$  для любых  $k \in N_0$  и  $x \in R^1$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \omega^k(x) = \beta E [\omega^{k-1}(x + p_1)], \\ \omega^k(x)|_{k=0} = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}, \end{cases} \quad (51)$$

где  $\delta_{1/\beta}$  – единственный корень уравнения  $\varphi(\delta) = \frac{1}{\beta}$ ,  $A^*$  – некоторая константа. Тогда существует  $\omega(x)$  такое, что  $\omega(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega^k(x) = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}$ , которое является единственным решением уравнения

$$\omega(x) = \beta E [\omega(x + p_1)]. \quad (52)$$

*Доказательство.* Доказательство проведем по индукции. Из (51) следует, что

$$\begin{aligned} \omega^1(x) &= \beta E [A^* e^{-\delta_{1/\beta}(x+p_1)}] \\ &= \beta A^* e^{-\delta_{1/\beta} x} E e^{-\delta_{1/\beta} p_1} \\ &= \beta \varphi(\delta_{1/\beta}) A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\beta \varphi(\delta_{1/\beta}) = 1$ , то  $\omega^1 = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}$ . Пусть  $\omega^{k-1} = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}$ . Установим, что  $\omega^k = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}$ . Из рекуррентного соотношения (51) следует искомое равенство

$$\begin{aligned} \omega^k(x) &= \beta E [A^* e^{-\delta_{1/\beta}(x+p_1)}] \\ &= A^* e^{-\delta_{1/\beta} x} \beta \varphi(\delta_{1/\beta}) \\ &= A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\omega(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega^k(x) = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}. \quad (53)$$

Очевидно, что  $A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}$  – решение (52). Единственность следует из единственности предела. □

*Доказательство теоремы 3.* 1) В силу монотонности последовательности функций  $\{v^k(x)\}_{k \in N_0}$  (см. (12)) для любого  $x \in R^1$  существует предел

$$\begin{aligned} v(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} v^k(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( v^k(x) \Big|_{k=N-n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in T_n^N} E \beta^\tau (1 - e^{\delta X_\tau}). \end{aligned}$$

При этом, в силу условий,  $|v(x)| < \infty$ , поэтому из утверждения леммы 3 следует, что цена  $v(x)$  удовлетворяет уравнению (31). Кроме того, из леммы 3 следует, что для любого  $x \in R^1$  величина  $v(x)$  допускает представление (32). Из (32) следует, что имеется три возможности: 1)  $\Gamma = \emptyset$  ( $C = R^1$ ), 2)  $\Gamma = R^1$  ( $C = \emptyset$ ), 3)  $\Gamma \neq \emptyset$  и  $C \neq \emptyset$  ( $\Gamma \cup C = R^1$ ).



В случае 1 из (50) для любого  $x \in R^1$  получаем  $v(x) = 1 - e^{-\delta x}$ .

В случае 2 из (31) и (50) следует, что  $v(x)$  удовлетворяет (52). Заметим также, что в силу леммы 4 решение уравнения (52) существует, единственно и имеет вид (53).

В случае 3 из условия  $C \neq \emptyset$  для любого  $x \in R^1$  получаем (50). Поэтому, согласно лемме 4, для любого  $x \in C$  цена имеет вид (53), а решение (31) можно представить в виде  $v(x) = 1 - e^{-\delta x} + \max(A^* e^{-\delta_{1/\beta} x} - 1 + e^{-\delta x}, 0)$ .

Для завершения доказательства теоремы 3 нам осталось найти значения  $A^*$  и границу области остановки, которую обозначим через  $x_r$ . Ранее отмечалось, что  $\partial\Gamma \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда разрешимо (относительно  $x$ ) уравнение

$$1 - e^{-\delta x} = A^* e^{-\delta_{1/\beta} x}. \quad (54)$$

Его решение — это и есть граница  $x_r$ . Кроме того, известно [9, 10], что в точке  $x_r$  должно выполняться условие «гладкого склеивания», которое в данном случае имеет вид

$$\delta e^{-\delta x_r} = -\delta_{1/\beta} A^* e^{-\delta_{1/\beta} x_r}. \quad (55)$$

Легко убедиться в том, что (54) и (55) образуют систему, вообще говоря, нелинейных уравнений относительно  $(A^*, x_r)$ . Очевидно, что она имеет единственное решение, которое имеет вид (32)–(35). Равенство (35) очевидно.  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматлит, 1960. 328 с.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы. Киев: Наукова думка, 1977. 252 с.
3. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 496 с.

## REFERENCES

1. Wald A. Posledovatelnyi analiz [Sequential analysis]. Moscow: Fizmatlit, 1960. 328 p.
2. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. Upravlyaemye sluchainye protsessy [Controlled random processes]. Kiev: Naukova dumka, 1977. 252 p.
3. De Groot M. Optimal'nye statisticheskie resheniya [Optimal statistical decisions]. Moscow: Mir, 1974. 496 p.
4. Dynkin E. B., Yushkevich A. A. Teoremy i zadachi o protsessakh Markova [Theorems and problems on Markov processes]. Moscow: Nauka, 1967. 232 p.

4. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967. 232 с.

5. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977. 168 с.

6. Розов А. К. Оптимальные правила остановки и их применение. СПб.: Политехника, 2009. 212 с.

7. Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008. 496 с.

8. Хаметов В. М., Шелемех Е. А., Ясонов Е. В. Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом // Управление большими системами. 2014. Вып. 52. С. 6–22.

9. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998. 544 с.

10. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. М.: Физматлит, 1976. 272 с.

11. Ширяев А. Н., Новиков А. А. Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, вып. 2. С. 373–382.

12. Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S. Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. I. // Theory Probability and Math. Statist. 2005. Vol. 71. P. 93–103.

13. Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S. Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. II // Theory Probability and Math. Statist. 2006. Vol. 72. P. 47–58.

Поступила в редакцию 10.08.2020

5. Robbins G., Sigmund D., Chao I. Teoriya optimal'nykh pravil ostanovki [Theory of optimal stopping rules]. Moscow: Nauka, 1977. 168 p.

6. Rozov A. K. Optimal'nye pravila ostanovki i ikh primeniya [Optimal stopping rules and their application]. St. Petersburg: Politekhnik, 2009. 212 p.

7. Felmer G., Shid A. Vvedenie v stokhasticheskie finansy. Diskretnoe vremya [An introduction to stochastic finance. Discrete time]. Moscow: MTsNMO, 2008. 496 p.

8. Khametov V. M., Shelemekh E. A., Yasonov E. V. Algoritm resheniya zadachi ob optimal'noi ostanovke s konechnym gorizontom

[Algorithm for solving the problem of optimal stopping with a finite horizon]. *Upravlenie bol'shimi sistemami* [Managing large systems]. 2014. Iss. 52. P. 6–22.

9. *Shiryayev A. N.* Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki. T. 2. Teoriya [Foundations of stochastic financial mathematics. Vol. 2. Theory]. Moscow: Fazis, 1998. 544 p.

10. *Shiryayev A. N.* Statisticheskii posledovatel'nyi analiz. Optimal'nye pravila ostanovki [Statistical sequential analysis. Optimal stopping rules]. Moscow: Fizmatlit, 1976. 272 p.

11. *Shiryayev A. N., Novikov A. A.* Ob odnom effektivnom sluchae resheniya zadachi ob

optimal'noi ostanovke dlya sluchainykh bluzhdanii [An effective case of solving the optimal stopping problem for random walks]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya* [Probability Theory and its Applications]. 2004. Vol. 49, iss. 2. P. 373–382.

12. *Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. I. *Theory Probability and Math. Statist.* 2005. Vol. 71. P. 93–103.

13. *Jonsson A., Kukush A. G., Silvestrov D. S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for American type option. II. *Theory Probability and Math. Statist.* 2006. Vol. 72. P. 47–58.

Received August 10, 2020

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Нестеренко Александр Александрович**

аспирант

Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

ул. Мясницкая, 20, Москва, Россия, 101000

эл. почта: aanesterenko@hse.ru

тел.: +79686582745

**Хаметов Владимир Минирович**

д. ф.-м. н., профессор

Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

ул. Мясницкая, 20, Москва, Россия, 101000

эл. почта: khametovvm@mail.ru

тел.: (495) 7729590

## CONTRIBUTORS:

**Nesterenko, Alexander**

National Research University Higher School of Economics

20 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia

e-mail: aanesterenko@hse.ru

tel.: +79686582745

**Khametov, Vladimir**

National Research University Higher School of Economics

20 Myasnitskaya St., 101000 Moscow, Russia

e-mail: khametovvm@mail.ru

tel.: (495) 7729590

УДК 519.179.4

## АСИМПТОТИКА ЧИСЛА РЕБЕР ИНТЕРНЕТ-ГРАФА

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы с  $N$  вершинами. Степени вершин независимы и одинаково распределены по закону, зависящему от неизвестной медленно меняющейся функции. Степень каждой вершины имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. Такие модели можно использовать для описания топологии различных сетей коммуникаций и сети Интернет. В статье доказана локальная предельная теорема для числа ребер графа при  $N \rightarrow \infty$ .

Ключевые слова: конфигурационный граф; степень вершины; предельное распределение; медленно меняющаяся функция; число ребер.

### Yu. L. Pavlov. ASYMPTOTICS OF THE NUMBER OF EDGES OF AN INTERNET GRAPH

We consider configuration graphs with  $N$  vertices. The degrees of the vertices are independent and identically distributed according to a distribution law that depends on an unknown slowly varying function. The degree of a vertex has a finite expectation and an infinite variance. Such models can be used to describe various communication networks and Internet topologies. The paper proves the local limit theorem for the number of edges in a graph as  $N \rightarrow \infty$ .

Key words: configuration graph; vertex degree; limit distribution; slowly varying function; number of edges.

### ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования сложных сетей коммуникаций широко используются методы теории случайных графов (см., например, [5]). Наблюдения за реальными сетями показали, что большинство из них обладают схожими свойствами. К таким сетям относятся транспортные, электрические, телефонные, социальные сети, сети сотрудничества ученых и, конечно, сеть Интернет. Оказалось, что число узлов сети, имеющих степень не меньше, чем  $k$ , при достаточно больших  $k$  обычно пропорционально  $k^{-\tau}$ , где  $\tau > 0$ . Более того, было показано, что в случайных графах, служащих моделя-

ми таких сетей, степени вершин можно считать независимыми одинаково распределенными целочисленными случайными величинами. Обозначим  $\xi$  случайную величину, равную степени любой вершины графа. Результаты наблюдений позволили установить, что распределение  $\xi$  можно задать следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = \frac{h(k)}{k^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

где  $h(x)$  – медленно меняющаяся функция. По определению (см., например, [1]), медленно меняющаяся функция определена для всех  $x \geq 0$  и положительна. Следовательно, как

видно из (1),  $\mathbf{P}\{\xi = k\} > 0$  для всех натуральных  $k$ . Обозначим

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k)}{k^\tau} - \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Было обнаружено, что для большинства сетей значения параметра  $\tau$  принадлежат интервалу (1, 2). Из (1) и (2) следует, что

$$m = \mathbf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{h(k)}{k^{\tau-1}} - \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau-1}} + \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau} \right).$$

Это значит, что при  $\tau \in (1, 2)$  распределение (1) имеет конечное математическое ожидание  $m$ . Аналогично можно показать, что дисперсия  $\xi$  бесконечна.

Одним из наиболее часто используемых для моделирования сетей видов случайных графов является так называемый конфигурационный граф. Конструкция конфигурационных графов была предложена в [4]. Пусть граф содержит  $N$  вершин. Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее полуребер, т. е. ребер, для которых смежные вершины еще не определены. Все полуребра различимы. Ребра графа образуются путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом. Для обеспечения четности суммы степеней вершин в случае необходимости в граф вводится вспомогательная вершина единичной степени или дополнительное полуребро добавляется к какой-нибудь равновероятно выбранной вершине. Известно [6], что появление такой вершины вместе с инцидентным ей ребром не влияет на асимптотические свойства графа при  $N \rightarrow \infty$ . Нетрудно видеть, что такая конструкция графа допускает появление петель и кратных ребер. Конфигурационные графы с распределением (1) независимых степеней вершин при  $\tau \in (1, 2)$  нередко используются для моделирования сети Интернет, поэтому иногда их называют Интернет-графами.

Во многих публикациях рассматриваются графы, в которых известен явный вид медленно меняющейся функции  $h(x)$  распределения (1). В частности, в [6] предполагалось, что

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

откуда следует, как нетрудно проверить, что  $h(x) = 1$ . В ряде работ рассматривались условные конфигурационные графы при условии,

что известны не только явный вид медленно меняющейся функции, но и число ребер. Кроме того, в некоторых публикациях предполагалось, что параметр распределения степеней вершин  $\tau$  является случайной величиной с заданным распределением. В этом случае получались конфигурационные графы со случайными распределениями случайных степеней вершин. В статье [3] проведено обобщение таких работ за счет рассмотрения моделей, в которых при  $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^q},$$

где  $d > 0$ ,  $g \geq 1$ ,  $q \geq 0$ ,  $g + q > 1$ . Это значит, что медленно меняющаяся функция сводилась к степени логарифма. Подробное исследование конфигурационных графов с неизвестной функцией  $h(x)$  только начинается (см., например, [2]). Один из успешно применяемых методов исследования свойств условных конфигурационных графов основан на использовании обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам. Рассматривались также условные графы при условии, что число ребер точно не известно, но ограничено сверху. Такие модели соответствуют сетям, в которых число возможных связей имеет технические ограничения. В таких случаях используется аналог обобщенной схемы, отличающийся тем, что сумма участвующих в схеме независимых случайных величин не равна точно известной величине, а ограничена. Применительно к конфигурационным графам эти суммы являются суммами степеней вершин графа, т. е. удвоенному числу ребер. Таким образом для получения асимптотических результатов с помощью обобщенной схемы размещения необходимо исследовать предельное поведение числа ребер.

В статье рассматриваются конфигурационные графы с  $N$  вершинами и распределением (1) случайных независимых степеней вершин при  $\tau \in (1, 2)$ . В следующем разделе найдены предельные распределения наибольших членов вариационного ряда степеней вершин и числа вершин заданной степени. Главным результатом статьи является доказанная в последнем разделе локальная предельная теорема для числа ребер такого графа.

## СТРУКТУРА СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Обозначим  $\xi_1, \dots, \xi_N$  степени вершин  $1, \dots, N$  соответственно. Все эти случайные величины независимы и одинаково распределены по закону (1). Рассмотрим вариационный ряд

$$\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(N)},$$

полученный для случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_N$  расположением их в неубывающем порядке.

**Теорема 1.** Пусть  $N \rightarrow \infty$  и последовательность  $r = r(N)$  выбрана так, что

$$\frac{Nh(r)}{r^\tau} \rightarrow \gamma,$$

где  $\gamma$  – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного целого неотрицательного  $s$

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N-s)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma} \sum_{i=0}^s \frac{\gamma^i}{i!}.$$

*Доказательство.* Из (1) находим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_{(N-s)} \leq r\} \\ &= \sum_{i=0}^s \binom{N}{i} \mathbf{P}^{N-i}\{\xi \leq r\} \mathbf{P}^i\{\xi > r\} \\ &= \sum_{i=0}^s \frac{N!}{i!(N-i)!} \left(1 - \frac{h(r)}{r^\tau}\right)^{N-i} \frac{h^i(r)}{r^{i\tau}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из условий теоремы следует, что  $r \rightarrow \infty$  и для любого фиксированного  $i$

$$\begin{aligned} & \frac{N!}{i!(N-i)!} \left(1 - \frac{h(r)}{r^\tau}\right)^{N-i} \frac{h^i(r)}{r^{i\tau}} \\ &= \frac{1}{i!} \left(\frac{Nh(r)}{r^\tau}\right)^i \left(1 - \frac{h(r)}{r^\tau}\right)^N (1 + o(1)) \\ & \rightarrow \frac{\gamma^i e^{-\gamma}}{i!}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3) получаем утверждение теоремы 1.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Если  $r$  фиксировано, то равномерно относительно  $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$  в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{Np_r(1-p_r)}} e^{-u_r^2/2}.$$

2. Если  $r \rightarrow \infty$ , то равномерно относительно  $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$  в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1)).$$

*Доказательство.* Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k}$$

$$\begin{aligned} & \times \mathbf{P}\{\xi_1 = r, \dots, \xi_k = r, \xi_{k+1} \neq r, \dots, \xi_N \neq r\} \\ &= \binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если  $r$  фиксировано, то  $Np_r(1-p_r) \rightarrow \infty$ . Следовательно, для оценки вероятности (4) можно использовать нормальное приближение биномиальной вероятности

$$\begin{aligned} & \binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k - Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}\right\}, \end{aligned}$$

справедливое равномерно относительно  $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$  в любом фиксированном конечном интервале. Отсюда и из (4) следует первое утверждение теоремы 2.

Если  $r \rightarrow \infty$ , то для доказательства второго утверждения теоремы 2 достаточно к вероятности (4) применить пуассоновское приближение биномиальной вероятности, которое при  $p_r \rightarrow 0$  также выполняется равномерно относительно  $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$  в любом фиксированном конечном интервале.  $\square$

## ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА РЕБЕР

Обозначим  $\zeta_N$  сумму степеней вершин графа:  $\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ . Разумеется, число ребер графа равно половине суммы степеней, поэтому для оценки предельного поведения числа ребер достаточно найти асимптотику  $\zeta_N$ .

Введем стремящуюся к бесконечности при  $N \rightarrow \infty$  последовательность  $B_N$ , удовлетворяющую условию

$$B_N \sim (Nh(B_N))^{1/\tau}. \quad (5)$$

Пусть  $g(x)$  означает плотность распределения устойчивого закона с показателем  $\tau$  и характеристической функцией

$$\varphi(t) = \exp\left\{-c|t|^\tau \left(1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2}\right)\right\}, \quad (6)$$

где

$$c = -\frac{\Gamma(2-\tau)}{\tau-1} \cos \frac{\pi\tau}{2}, \quad (7)$$

$\Gamma(x)$  – гамма-функция.

**Теорема 3.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\sup_k \left| B_N \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - g\left(\frac{k - Nm}{B_N}\right) \right| \rightarrow 0.$$

*Доказательство.* Обозначим  $F_\xi(x)$  функцию распределения случайной величины  $\xi$ . Из (1) видно, что при  $x < 0$

$$F_\xi(x) = 0, \quad (8)$$

а если  $x \geq 0$ , то

$$F_\xi(x) = 1 - \sum_{k \geq x} p_k. \quad (9)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sum_{k \geq x} p_k = \frac{h([x])}{([x])^\tau}.$$

Отсюда и из определения медленно меняющейся функции получаем, что при  $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{k \geq x} p_k = \frac{h(x)}{x^\tau} (1 + o(1)),$$

поэтому из (9) находим, что

$$F_\xi(x) = 1 - \frac{h(x)}{x^\tau} (1 + o(1)). \quad (10)$$

Согласно теореме 2.6.1 книги [1], для того чтобы закон распределения  $F(x)$  принадлежал области притяжения устойчивого закона с показателем  $\tau$ ,  $0 < \tau < 2$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $|x| \rightarrow \infty$

$$F(x) = \frac{c_1 + o(1)}{|x|^\tau} w(|x|), \quad x < 0,$$

$$F(x) = 1 - \frac{c_2 + o(1)}{x^\tau} w(x), \quad x > 0,$$

где  $w(x)$  – медленно меняющаяся функция, а  $c_1, c_2$  – константы такие, что  $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_1 + c_2 > 0$ . Соотношения (8) и (10) означают, что функция  $F_\xi(x)$  принадлежит области притяжения некоторого устойчивого закона  $G(x)$  с показателем  $\tau$ , при этом  $c_1 = 0, c_2 = 1, w(x) = h(x)$ . Найдем явный вид характеристической функции  $\varphi_G(t)$  функции распределения  $G(x)$ . Для этого используем теорему 2.2.2 [1]. В указанной теореме установлены необходимые и достаточные условия того, чтобы функция распределения была устойчивой. Эти условия представляют собой общий вид логарифма характеристической функции

распределения. Зависимость параметров данной функции от  $\tau, c_1, c_2$  также найдена в ходе доказательства теоремы 2.2.2. Используя эти результаты, получаем, что логарифм характеристической функции  $\varphi_G(t)$  устойчивого закона  $G(x)$  имеет вид:

$$\ln \varphi_G(t) = idt - c|t|^\tau \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2} \right), \quad (11)$$

где  $d$  – некоторая константа, а  $c$  определено в (7). В (11) параметр  $d$  можно сделать равным нулю, подобрав для  $G(x)$  нужным образом нормирующие множители в определении области притяжения. Обозначим  $\varphi_\xi(t)$  характеристическую функцию случайной величины  $\xi$ . Поскольку математическое ожидание  $m$  случайной величины  $\xi$  конечно, из теоремы 2.6.5 [1] следует, что в достаточно малой окрестности нуля

$$\begin{aligned} \ln \varphi_G(t) \\ = itm - c|t|^\tau q(t) \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где функция  $q(t)$  при  $t \rightarrow 0$  является медленно меняющейся. В ходе доказательства теоремы 2.6.5 [1] показано, что при  $t \rightarrow 0$

$$q(t) = h\left(\frac{1}{|t|}\right). \quad (13)$$

Очевидно, что  $\varphi_\xi(0) = 1$ . Пусть  $t \neq 0$  и фиксировано. Из (5), (12), (13) находим, используя определение медленно меняющейся функции, что при  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi_\xi^N \left( \frac{t}{B_N} \right) \exp \left\{ -\frac{itNm}{B_N} \right\} \\ = \exp \left\{ -c \frac{|t|^\tau}{h(B_N)} h\left(\frac{B_N}{|t|}\right) \left( 1 - \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2} \right) \right\} \\ \rightarrow \exp \left\{ -c|t|^\tau \left( 1 - i \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\tau}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Это соотношение показывает, что распределение суммы  $(\zeta_N - Nm)/B_N$  слабо сходится к устойчивому закону с показателем  $\tau$ , плотностью распределения  $g(x)$  и характеристической функцией (6). Для того чтобы доказать локальную сходимост к этому закону и, следовательно, завершить доказательство теоремы 3, можно воспользоваться теоремой 4.2.1 [1]. Согласно этой теореме, для того, чтобы локальная сходимост имела место, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения  $F_\xi(x)$  принадлежала области притя-

жения устойчивого закона  $G(x)$  и шаг распределения  $\xi$  был максимальным. Принадлежность области притяжения была доказана выше. В распределении (1) медленно меняющаяся функция  $h(x)$  положительна при всех  $x \geq 0$ , поэтому шаг распределения  $\xi$  равен единице и максимален.  $\square$

*Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. *Павлов Ю. Л.* Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе // Матема-

тический сборник. 2021. Т. 212 (принято к публикации).

3. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
4. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // *Eur. J. Combin.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
5. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
6. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

*Поступила в редакцию 28.03.2021*

## REFERENCES

1. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters-Noordhoff, 1971. 443 p.
2. *Pavlov Yu. L.* Maksimal'noe derevo sluchainogo lesa v konfiguratsionnom grafe [Maximum random forest tree in a configuration graph] *Matematicheskii sbornik* [Math. Coll. Articles]. 2021. Vol. 212 (accepted for publication).
3. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *SB MATH*. 2018. Vol. 209, iss. 2. P. 258–275. doi: 10.1070/SM8832

4. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Combin.* 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
5. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
6. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

*Received March 28, 2021*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Павлов Юрий Леонидович**  
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 781218

## CONTRIBUTOR:

**Pavlov, Yury**  
Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 781218

УДК 519.179.4

## О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ДЕРЕВА В ЛЕСЕ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА СО СТЕПЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Е. В. Хворостянская

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматривается критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с  $N$  частиц, число прямых потомков которого имеет распределение  $p_k = (k + 1)^{-\tau} - (k + 2)^{-\tau}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Для соответствующего леса Гальтона–Ватсона с  $N$  деревьями и  $n$  некорневыми вершинами получено предельное распределение максимального объема дерева при  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0$  или  $n/N \rightarrow \infty, n/N^\tau \rightarrow 0$ .

Ключевые слова: лес Гальтона–Ватсона; максимальный объем дерева; предельное распределение.

### E. V. Khvorostyanskaya. ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM TREE SIZE IN A GALTON–WATSON FOREST WITH A POWER-LAW DISTRIBUTION

We consider a critical Galton–Watson branching process starting with  $N$  particles where the number of offsprings has the distribution  $p_k = (k + 1)^{-\tau} - (k + 2)^{-\tau}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . The limit distribution of the maximum tree size is obtained for the corresponding Galton–Watson forest with  $N$  trees and  $n$  non-root vertices as  $N, n \rightarrow \infty$ , such that  $n/N \rightarrow 0$  or  $n/N \rightarrow \infty, n/N^\tau \rightarrow 0$ .

Keywords: Galton–Watson forest; maximum tree size; limit distribution.

Пусть  $\mathfrak{F}_N$  – лес Гальтона–Ватсона, порожденный критическим процессом Гальтона–Ватсона  $G_N$  с  $N$  начальными частицами, занумерованными числами  $1, \dots, N$ , в котором число прямых потомков одной частицы задается случайной величиной  $\xi$  с распределением

$$p_k = \mathbf{P} \{ \xi = k \}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad p_0 > 0. \quad (1)$$

Процесс  $G_N$  индуцирует на подмножестве  $F_{N,n}$  своих траекторий, имеющих  $N + n$  вершин, условное распределение вероятностей при условии, что число вершин равно  $N + n$ .

Построенный таким образом лес Гальтона–Ватсона с  $N$  деревьями и  $n$  некорневыми вершинами обозначим через  $\mathfrak{F}_{N,n}$ . Подробно такие леса изучались в [6], и при условии существования конечного третьего момента распределения (1) и  $N, n \rightarrow \infty$  были получены предельные распределения максимального объема дерева, числа деревьев заданного объема, высоты дерева. Некоторые другие характеристики таких лесов рассматривались также в [7, 10, 12]. В [3] доказано, что условие  $\mathbf{E}\xi^3 < \infty$  можно заменить более слабым:  $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ .



Пусть далее  $\mathfrak{F}_{N,n}$  – лес Гальтона–Ватсона, порожденный критическим ветвящимся процессом  $G_N$ , в котором число прямых потомков одной частицы имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P} \{ \xi = k \} = \frac{1}{(k+1)^\tau} - \frac{1}{(k+2)^\tau}, \quad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ . Учитывая, что рассматриваемый ветвящийся процесс является критическим и (2), несложно показать, что

$$m = \mathbf{E} \xi = \zeta(\tau) - 1 = 1, \quad (3)$$

где  $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана. Отсюда следует, что значение параметра  $\tau$  распределения (2) определяется равенством  $\zeta(\tau) = 2$  и  $\tau \approx 1.728$ .

Для такого случайного леса в [9] получено предельное распределение максимального объема дерева в случае, когда  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$ . Здесь и далее  $C, C_1, C_2, \dots$  обозначают произвольные положительные постоянные. Идея рассмотреть такой ветвящийся процесс появилась в связи с возможностью применения ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона при исследовании Интернет-графов [11], одной из наиболее известных и изученных моделей которых [8, 13] является модель с распределением степеней вершин

$$q_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

В [13] показано, что для большинства реальных сетей характерны значения параметра  $\tau$ , принадлежащие интервалу (1, 2). Заметим, что для таких значений  $\tau$  распределение (4) имеет бесконечный второй момент и полученные ранее результаты для лесов Гальтона–Ватсона в этом случае неприменимы. Сдвиг на 1 в распределении (2) обусловлен тем, что степень вершины в лесе Гальтона–Ватсона на 1 больше числа прямых потомков соответствующей частицы ветвящегося процесса.

В настоящей работе доказаны предельные теоремы для максимального объема дерева леса  $\mathfrak{F}_{N,n}$  в других зонах изменения параметров  $N, n$  (теоремы 1, 2).

Обозначим через  $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$  случайные величины, равные объемам деревьев леса из  $\mathfrak{F}_{N,n}$ .

В [6] показано, что классу лесов  $\mathfrak{F}_{N,n}$  соответствует ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона  $G$ , распадающийся на  $N$  независимых процессов  $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(N)}$ , начинающихся с одной частицы, в котором случайные величи-

ны  $\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \dots$ , равные числу прямых потомков одной частицы, имеют распределение

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad (5)$$

где

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k. \quad (6)$$

Пусть  $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(N)}$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, равные числу частиц, существовавших в процессах  $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(N)}$  до их вырождения,  $\nu_N$  – случайная величина, равная общему числу частиц, существовавших в процессе  $G$  до его вырождения:

$$\nu_N = \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \dots + \nu^{(N)}.$$

Справедливо равенство [6]

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \{ \nu_1(\mathfrak{F}) = k_1, \dots, \nu_N(\mathfrak{F}) = k_N \} \\ &= \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = k_1, \dots, \nu^{(N)} = k_N \mid \nu_N = N + n \}. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство (7) означает, что случайные величины  $\nu_1(\mathfrak{F}), \nu_2(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$  и  $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(N)}$  образуют обобщенную схему размещения [4]. Использование метода обобщенной схемы размещения позволяет свести задачу с зависимыми случайными величинами к изучению сумм независимых случайных величин, при этом, как известно, параметр распределения независимых случайных величин может быть выбран любым наиболее удобным для решения задачи способом. Будем считать далее, что параметр  $\lambda$  распределения (5) равен решению  $\lambda^*$  уравнения

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \quad (8)$$

Пусть  $\eta(\mathfrak{F})$  – случайная величина, равная максимальному объему дерева в лесе  $\mathfrak{F}_{N,n}$ :

$$\eta(\mathfrak{F}) = \max_{1 \leq k \leq N} \nu_k(\mathfrak{F}).$$

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0$ ,  $N \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r + 1 \} \rightarrow \infty$ ,  $N \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r + 2 \} \rightarrow \gamma$ , где  $\gamma$  – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) = r + 1 \} \rightarrow e^{-\gamma},$$

$$\mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) = r + 2 \} \rightarrow 1 - e^{-\gamma}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow \infty, n/N^\tau \rightarrow 0$ . Тогда

$$\mathbf{P} \{ \beta \eta(\mathfrak{F}) - u \leq z \} \rightarrow e^{-e^{-z}},$$

где

$$\beta = \ln(F(\lambda)/\lambda), \quad (9)$$

а  $u$  выбрано так, что

$$NC(\tau)\beta^{1/\tau}u^{-(1+1/\tau)}e^{-u} = 1, \quad (10)$$

$$C(\tau) = \frac{\Gamma(1/\tau) \cos(\pi(2-\tau)/2\tau)}{\pi\tau (\Gamma(1-\tau) \cos(\pi\tau/2))^{1/\tau}}.$$

Докажем сначала вспомогательные утверждения (леммы 2–7), а затем с их помощью получим теоремы 1, 2.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины  $\nu_r^{(1)}, \dots, \nu_r^{(N)}$  такие, что

$$\mathbf{P} \{ \nu_r^{(i)} = k \} = \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = k \mid \nu^{(1)} \leq r+1 \}, \quad (11)$$

где  $i = 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots$

Обозначим  $\nu_{r,N} = \nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(N)}$ ,  $P_r = \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} > r+1 \}$ . Из (7) следует, что

$$\mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) \leq r \} = (1-P_r)^N \frac{\mathbf{P} \{ \nu_{r,N} = N+n \}}{\mathbf{P} \{ \nu_N = N+n \}}. \quad (12)$$

Таким образом, для получения предельного распределения случайной величины  $\eta(\mathfrak{F})$  достаточно найти асимптотику бинома  $(1-P_r)^N$  и вероятностей  $\mathbf{P} \{ \nu_{r,N} = N+n \}$ ,  $\mathbf{P} \{ \nu_N = N+n \}$ .

Пусть далее  $\xi_1, \xi_2, \dots$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение (2),  $\eta_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ .

Согласно [5, лемма 2.1.3] справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Для  $N \geq 0, N+n \geq 1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \{ \nu_N = N+n \} \\ &= \frac{N}{N+n} \mathbf{P} \{ \xi_1(\lambda) + \dots + \xi_{N+n}(\lambda) = n \}. \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0, N\mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r+1 \} \rightarrow \infty, N\mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r+2 \} \rightarrow \gamma$ , где  $\gamma$  – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$NP_{r-1} \rightarrow \infty, NP_r \rightarrow \gamma.$$

*Доказательство.* Согласно [9, лемма 2] существует единственное решение  $\lambda^*$  уравнения (8)

и  $\lambda^* \rightarrow 0$  при  $n/N \rightarrow 0$ . Учитывая (6) и соотношения  $\lambda^*, n/N \rightarrow 0$ , из (8) находим, что

$$\lambda^* = \frac{p_0 n}{p_1 N} (1 + o(1)). \quad (13)$$

С помощью леммы 1 получаем равенство

$$\begin{aligned} P_r &= \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r+2 \} \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(r+2)\mathbf{P} \{ \xi_1(\lambda) + \dots + \xi_{r+1+l}(\lambda) = r+l \}}{(r+1+l)\mathbf{P} \{ \xi_1(\lambda) + \dots + \xi_{r+2}(\lambda) = r+1 \}}. \end{aligned}$$

Используя (5), отсюда находим, что

$$\begin{aligned} P_r &= \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r+2 \} \\ &\times \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^{l-1} \frac{(r+2)\mathbf{P} \{ \eta_{r+1+l} = r+l \}}{(r+1+l)\mathbf{P} \{ \eta_{r+2} = r+1 \}}. \end{aligned} \quad (14)$$

При фиксированных  $r$  с помощью (2), (13), (14) несложно получить соотношение

$$P_r = \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r+2 \} (1 + o(1)). \quad (15)$$

Покажем, что (15) верно и при  $r \rightarrow \infty$ . Используя [9, лемма 1] и (3), находим, что при  $r \rightarrow \infty$  для  $l = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \{ \eta_{r+1+l} = r+l \} \\ &= \frac{g(-(r+1+l)^{-1/\tau})}{(r+1+l)^{1/\tau}} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $g(x)$  – плотность устойчивого распределения с показателем  $\tau$  и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -\Gamma(1-\tau) |t|^\tau \left( 1 - \frac{it}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2} \right) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right\}.$$

Из (13), (14), (16) получаем соотношение (15).

Аналогично можно показать, что

$$P_{r-1} = \mathbf{P} \{ \nu^{(1)} = r+1 \} (1 + o(1)). \quad (17)$$

Из (15), (17) и условий леммы следуют соотношения  $NP_{r-1} \rightarrow \infty, NP_r \rightarrow \gamma$ .  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow \infty, n/N^\tau \rightarrow 0, r = (u+z)/\beta + O(1)$ , где  $z$  – фиксированное число,  $a, \beta, u$  заданы соответственно соотношениями (9), (10). Тогда

$$NP_r \rightarrow e^{-z}.$$

*Доказательство.* Согласно [9, лемма 2] существует единственное решение  $\lambda^*$  уравнения (8) и  $\lambda^* \rightarrow 1$  при  $n/N \rightarrow \infty$ . Используя (2), находим, что

$$F(\lambda) = 1 - (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+2)^\tau}, \quad (18)$$

при этом, учитывая (3), несложно показать, что справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+2)^\tau} = 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau-1}} + O(1-\lambda). \quad (19)$$

Используя свойство функции Лерча  $\Phi(z, s, v) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+v)^{-s} z^k$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^{1-s} \Phi(z, s, v) = \Gamma(1-s), \quad \text{Re } s < 1 \quad (20)$$

[1, равенство (1.11.12)], находим, что при  $\lambda \rightarrow 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau-1}} = \frac{\Gamma(2-\tau)}{(1-\lambda)^{2-\tau}} (1+o(1)). \quad (21)$$

С помощью (18), (19) и формулы Тейлора получаем, что

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = 1 - \frac{2(1-\lambda)}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+2)^{\tau-1}} + O(1-\lambda).$$

Отсюда и из (8), (21) при  $n/N \rightarrow \infty$  следует равенство

$$\lambda^* = 1 - \left( \frac{N}{2\Gamma(2-\tau)n} \right)^{1/(\tau-1)} (1+o(1)). \quad (22)$$

С помощью леммы 1 и равенств (5) находим, что

$$P_r = \frac{1}{F(\lambda)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{r+1+l}=r+l\}}{r+1+l} \left( \frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^{r+l}.$$

Используя (9), (18), (19), (21) и формулу Тейлора, при  $\lambda \rightarrow 1$  получаем, что

$$\begin{aligned} \beta &= (1-\lambda) \left( 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+2)^\tau} \right) + O((1-\lambda)^2) \\ &= \Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau (1+o(1)). \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая (22) и (23), находим, что при выполнении условий леммы  $N\beta^{1/\tau} =$

$((\Gamma(2-\tau))^{-1/\tau} N^\tau / 2n)^{1/(\tau-1)} (1+o(1)) \rightarrow \infty$ , и из (10) следует, что  $u \rightarrow \infty$ . Тогда

$$r\beta = u + z + O(\beta) \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Следовательно, справедливы соотношения (16), при этом, используя [2, равенство (2.3.1) и теорема 2.4.5], можно показать, что при  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\pi} \left( \Gamma(1-\tau) \cos \frac{\pi\tau}{2} \right)^{-1/\tau} \\ &\times \left( \frac{\Gamma(1/\tau)}{\tau} \cos \frac{\pi(2-\tau)}{2\tau} + O(x) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда

$$P_r = C(\tau) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-(r+l)\beta}}{(r+l)^{1+1/\tau}} (1+o(1)). \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что при любом фиксированном  $h$  выполнены неравенства

$$\int_{r+1}^{\infty} \frac{e^{-v\beta} dv}{v^h} \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-(r+l)\beta}}{(r+l)^h} \leq \int_r^{\infty} \frac{e^{-v\beta} dv}{v^h}, \quad (27)$$

при этом согласно [6, лемма 2.2.4] при  $x \rightarrow \infty$

$$\int_x^{\infty} y^h e^{-y} dy = x^h e^{-x} (1+o(1)).$$

С помощью этого соотношения, учитывая (23) и (24), несложно показать, что

$$\int_r^{\infty} \frac{e^{-v\beta} dv}{v^h}, \quad \int_{r+1}^{\infty} \frac{e^{-v\beta} dv}{v^h} = \frac{1+o(1)}{\beta r^h e^{r\beta}}. \quad (28)$$

Отсюда и из (10), (24), (26), (27) получаем равенство

$$P_r = \frac{C(\tau)(1+o(1))}{\beta r^{1+1/\tau} e^{r\beta}} = \frac{e^{-z}}{N} (1+o(1)),$$

из которого следует утверждение леммы.  $\square$

Обозначим через  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  характеристические функции случайных величин  $\nu^{(1)}$  и  $(\nu_N - N\mathbf{E}\nu^{(1)})/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$  соответственно.

**Лемма 4.** Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N^\tau \rightarrow 0$ . Тогда равномерно по  $t$  в любом конечном интервале

$$\psi(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

*Доказательство.* Получим утверждение леммы, следуя доказательству леммы 2.3.1 из [6]. Найдем разложение  $\ln \varphi(u)$  по формуле Тейлора в окрестности  $u_0 = 0$ . Согласно [6, лемма 1.3.2] для производящей функции  $f(z)$  случайной величины  $\nu^{(1)}$  справедливо равенство

$$f(z) = zF_\lambda(f(z)), \quad (29)$$

где

$$F_\lambda(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) u^k = \frac{F(\lambda u)}{F(\lambda)}. \quad (30)$$

С помощью (29), (30) и равенства  $\varphi(u) = f(e^{iu})$  находим, что

$$\varphi(u) = e^{iu} F_\lambda(\varphi(u)). \quad (31)$$

Используя (31), несложно показать, что

$$\varphi'(u) = \frac{i\varphi(u)}{1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u))},$$

и с помощью этого равенства получаем следующие соотношения:

$$(\ln \varphi(u))' = \frac{i}{1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u))}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (\ln \varphi(u))'' &= -\frac{e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u))}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^2} \\ &\quad - \frac{e^{iu} \varphi(u) F''_\lambda(\varphi(u))}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^3}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (\ln \varphi(u))''' &= \frac{ie^{iu} F''_\lambda(\varphi(u))}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^2} \\ &\quad - \frac{2ie^{iu} F'_\lambda(\varphi(u))}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^3} \\ &\quad - \frac{3ie^{iu} \varphi(u) F''_\lambda(\varphi(u))}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^4} \\ &\quad - \frac{ie^{iu} \varphi^2(u) F'''_\lambda(\varphi(u))}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^4} \\ &\quad - \frac{3ie^{2iu} \varphi(u) F'_\lambda(\varphi(u)) F''_\lambda(\varphi(u))}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^4} \\ &\quad - \frac{3ie^{2iu} \varphi^2(u) (F''_\lambda(\varphi(u)))^2}{(1 - e^{iu} F'_\lambda(\varphi(u)))^5}. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая (2) и (30), несложно показать, что

$$\begin{aligned} F'_\lambda(z) &= \frac{S_1(\lambda z)}{zF(\lambda)}, \quad F''_\lambda(z) = \frac{S_2(\lambda z) - S_1(\lambda z)}{z^2 F(\lambda)}, \\ F'''_\lambda(z) &= \frac{S_3(\lambda z) - 3S_2(\lambda z) + 2S_1(\lambda z)}{z^3 F(\lambda)}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k z^k p_k = -(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} \\ &\quad + (2-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^\tau}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} S_2(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k p_k = -(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}} \\ &\quad + (4-2z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} - (4-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^\tau}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} S_3(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k p_k = -(1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-3}} \\ &\quad + (6-3z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-2}} \\ &\quad - (12-3z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^{\tau-1}} + (8-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)^\tau}. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя свойства характеристических функций и (2), (5), (8), (32), (33), (35), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\nu^{(1)} &= \frac{n+N}{N}, \\ \mathbf{D}\nu^{(1)} &= \left( \frac{n+N}{N} \right)^3 \left( \frac{S_2(\lambda)}{F(\lambda)} - \left( \frac{S_1(\lambda)}{F(\lambda)} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0$ . Используя (6), (13), (36), (37), (39), находим, что

$$\mathbf{E}\nu^{(1)} = 1 + n/N, \quad N\mathbf{D}\nu^{(1)} = n(1 + o(1)). \quad (40)$$

Из (2), (6), (35)–(38) при  $z \rightarrow 1$  и  $\lambda \rightarrow 0$  получаем равенства

$$\begin{aligned} F'_\lambda(z) &= \frac{p_1}{p_0} \lambda (1 + O(\lambda)), \\ F''_\lambda(z), F'''_\lambda(z) &= O(\lambda^2). \end{aligned}$$

Отсюда и из (34) следует, что при  $u \rightarrow 0$  выполнено неравенство  $\left| (\ln \varphi(u))''' \right| \leq C_1 \lambda$ , и с помощью формулы Тейлора находим, что

$$\ln \varphi(u) = iu \mathbf{E}\nu^{(1)} - u^2 \mathbf{D}\nu^{(1)} / 2 + O(\lambda u^3). \quad (41)$$

Учитывая (13), (40), (41) и равенство

$$\psi(t) = \exp\left\{-\frac{itN\mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right\} \varphi^N\left(\frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}\right), \quad (42)$$

нетрудно видеть, что  $\ln \psi(t) = -t^2/2 + O(n^{-1/2})$  при любом фиксированном  $t$ , что доказывает утверждение леммы при  $n/N \rightarrow 0$ .

Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $0 < C_2 \leq n/N \leq C_3 < \infty$ . Согласно [9, лемма 2] из (8) следует, что  $0 < C_4 \leq \lambda \leq C_5 < 1$ . Учитывая (35)–(39), получаем неравенства

$$\begin{aligned} 0 < C_6 \leq F'_\lambda(z), F''_\lambda(z), F'''_\lambda(z) \leq C_7 < \infty, \\ 0 < C_8 \leq \mathbf{D}\nu^{(1)} \leq C_9 < \infty. \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку, как несложно проверить, функция  $F'_\lambda(z)$  возрастает по  $z$  и справедливо соотношение  $F'_\lambda(1) = n/(N+n) \leq C_{10} < 1$ , при достаточно малых значениях  $u$  имеет место неравенство  $|1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi(u))| \geq C_{11} > 0$ , и из (34) следует, что  $|(\ln \varphi(u))''| \leq C_{12} < \infty$ . Учитывая это неравенство, по формуле Тейлора при  $u \rightarrow 0$  получаем соотношение

$$\ln \varphi(u) = iu\mathbf{E}\nu^{(1)} - u^2\mathbf{D}\nu^{(1)}/2 + O(u^3). \quad (44)$$

С помощью (42) и (44) находим, что  $\ln \psi(t) = -t^2/2 + O(N^{-1/2})$  при любом фиксированном  $t$ . Отсюда следует утверждение леммы в случае  $0 < C_2 \leq n/N \leq C_3 < \infty$ .

Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow \infty$ ,  $n/N^\tau \rightarrow 0$ . Используя (20), (22), (36), (37), (39), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\nu^{(1)} &= \frac{n}{N}(1+o(1)), \\ \mathbf{D}\nu^{(1)} &= \frac{\tau}{2}(2\Gamma(2-\tau))^{\frac{1}{\tau-1}} \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{2\tau-1}{\tau-1}}(1+o(1)). \end{aligned} \quad (45)$$

Пусть  $t$  фиксировано и  $u = t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ . Учитывая (45) и формулу Тейлора, нетрудно видеть, что

$$\varphi(u) = 1 + O\left(\frac{(N/n)^{1/2(\tau-1)}}{\sqrt{N}}\right). \quad (46)$$

С помощью (19), (20), (36)–(38) несложно показать, что при  $z \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} S_1(z) &= 1 - 2\Gamma(2-\tau)(1-z)^{\tau-1}(1+o(1)), \\ S_2(z) &= \tau\Gamma(2-\tau)(1-z)^{-(2-\tau)}(1+o(1)), \\ S_3(z) &= \tau\Gamma(3-\tau)(1-z)^{-(3-\tau)}(1+o(1)). \end{aligned} \quad (47)$$

Используя (18)–(20), (22), (35), (45)–(47), находим, что

$$1 - \lambda\varphi(u) = (1-\lambda)(1+o(1)),$$

и справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F'_\lambda(\varphi(u)) &= 1 - 2\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{\tau-1}(1+o(1)) \\ &+ O\left(\frac{(N/n)^{1/2(\tau-1)}}{\sqrt{N}}\right) = 1 - \frac{N}{n}(1+o(1)), \\ 1 - e^{iu}F'_\lambda(\varphi(u)) &= \frac{N}{n}(1+o(1)), \\ F''_\lambda(\varphi(u)) &= S_2(\lambda\varphi(u))(1+o(1)) \\ &= \tau\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^{-(2-\tau)}(1+o(1)) \\ &= \frac{\tau}{2}(2\Gamma(2-\tau))^{\frac{1}{\tau-1}} \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{2-\tau}{\tau-1}}(1+o(1)), \\ F'''_\lambda(\varphi(u)) &= S_3(\lambda\varphi(u))(1+o(1)) \\ &= \tau\Gamma(3-\tau)(1-\lambda)^{-(3-\tau)}(1+o(1)) \\ &= \frac{\tau(2-\tau)}{2}(2\Gamma(2-\tau))^{\frac{2}{\tau-1}} \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{3-\tau}{\tau-1}}(1+o(1)). \end{aligned} \quad (48)$$

С помощью соотношений (48) из (34) получаем равенство

$$(\ln \varphi(u))''' = -iC_{13} \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{3\tau-1}{\tau-1}}(1+o(1)) \quad (49)$$

и по формуле Тейлора находим, что

$$\begin{aligned} \ln \varphi(u) &= iu\mathbf{E}\nu^{(1)} - \frac{u^2\mathbf{D}\nu^{(1)}}{2} \\ &+ O\left(u^3 \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{3\tau-1}{\tau-1}}\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Отсюда и из (42), (45) следует равенство

$$\begin{aligned} \ln \psi(t) &= -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{N} \left(\frac{n}{N^\tau}\right)^{1/2(\tau-1)}\right) \\ &= -\frac{t^2}{2} + o(1). \end{aligned}$$

□

**Лемма 5.** Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N^\tau \rightarrow 0$ . Тогда для всех целых неотрицательных  $l$  равномерно относительно  $u_N = (l - N\mathbf{E}\nu^{(1)})/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$  в любом конечном фиксированном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu_N = l\} = \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}(1+o(1)).$$

*Доказательство.* С помощью равенств

$$2\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}\mathbf{P}\{\nu=l\} = \int_{-\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}^{\pi\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N}\psi(t)dt,$$

$$\sqrt{2\pi}e^{-u_N^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt$$

разность

$$R_N = 2\pi \left( \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \mathbf{P} \{ \nu=l \} - \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (51)$$

можно представить в виде суммы  $R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ , где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-itu_N} (\psi(t) - e^{-t^2/2}) dt,$$

$$I_2 = - \int_{|t|>A} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int_{A < |t| \leq \varepsilon \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi(t) dt,$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} < |t| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi(t) dt,$$

положительные постоянные  $A, \varepsilon$  будут выбраны позднее.

В силу леммы 4 для любого фиксированного  $A$  выполнено соотношение  $I_1 \rightarrow 0$ .

Для интеграла  $I_2$  справедлива оценка

$$|I_2| \leq 2 \int_A^{\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad (52)$$

и его можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ .

Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0$ , и пусть  $A < |t| \leq \varepsilon \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  выполнено соотношение (41), с помощью которого находим, что

$$\ln \varphi \left( \frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) = \frac{it\mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} - \frac{t^2}{2N} \left( 1 + O \left( \frac{\lambda|t|}{\sqrt{N} (\mathbf{D}\nu^{(1)})^{3/2}} \right) \right).$$

Отсюда и из (13), (40) следует неравенство

$$\left| \varphi \left( \frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) \right| \leq e^{-C_1 t^2/N}. \quad (53)$$

С помощью (42), (53) получаем, что

$$|I_3| \leq 2 \int_A^{\infty} e^{-C_1 t^2} dt, \quad (54)$$

и интеграл  $I_3$  можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ .

Используя лемму 1 и (5), (6), (13), находим, что

$$|\varphi(u)| = \left| \frac{e^{iu} p_0}{F(\lambda)} \left( 1 + \frac{e^{iu} \lambda p_1}{F(\lambda)} \right) + \frac{1}{F(\lambda)} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^{iuk}}{k} \left( \frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^{k-1} \mathbf{P} \{ \eta_k = k+1 \} \right| \leq 1 - \frac{\lambda p_1}{p_0} (1 - \cos u) + C_2 \lambda^2.$$

Следовательно, при  $\varepsilon \leq |u| \leq \pi$

$$|\varphi(u)| \leq e^{-C_3 n/N}, \quad (55)$$

и с помощью (40), (42) получаем, что

$$|I_4| \leq C_4 \sqrt{n} e^{-C_3 n} \rightarrow 0. \quad (56)$$

Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $0 < C_5 \leq n/N \leq C_6 < \infty$ . Используя (43), (44), находим, что в области интегрирования  $I_3$  выполнено соотношение (53), с помощью которого и (42) получаем оценку (54). Следовательно, интеграл  $I_3$  можно сделать сколь угодно малым, выбрав  $A$  достаточно большим. Для  $\varepsilon \leq |u| \leq \pi$  справедливо неравенство

$$|\varphi(u)| \leq e^{-C_7}. \quad (57)$$

С помощью (42), (43), (57) несложно показать, что

$$|I_4| \leq C_8 \sqrt{N} e^{-C_7 N}$$

и  $I_4 \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Остается оценить интегралы  $I_3, I_4$  в случае  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow \infty, n/N^\tau \rightarrow 0$ . Область интегрирования  $I_3$  разобьем на две части

$$S^{(1)} = \left\{ A \leq |t| \leq \varepsilon_1 \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \left( \frac{N}{n} \right)^{\frac{\tau}{\tau-1}} \right\}, \quad (58)$$

$$S^{(2)} = \left\{ \varepsilon_1 \left( \frac{N}{n} \right)^{\frac{\tau}{\tau-1}} < \frac{|t|}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \leq \varepsilon \right\},$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon$  могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Пусть  $t \in S^{(1)}$ . Учитывая (45), по формуле Тейлора находим, что для  $u = t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$

$$\varphi(u) = 1 + O \left( \varepsilon_1 \left( \frac{N}{n} \right)^{1/(\tau-1)} \right)$$

и с помощью (22) несложно проверить, что

$$1 - \lambda\varphi(u) = C_9 \left(\frac{N}{n}\right)^{1/(\tau-1)} (1 + o(1)).$$

Используя эти соотношения и (18), (19), (21), (22), (34), (35), (47) получаем, что верны равенства (48)–(50).

Из (45) и (50) следует, что

$$\ln \varphi \left( \frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) = \frac{it\mathbf{E}\nu^{(1)}}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} - \frac{t^2}{2N} (1 + O(\varepsilon_1))$$

и при выборе достаточно малого  $\varepsilon_1$  справедливо неравенство

$$\left| \varphi \left( \frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) \right| \leq e^{-C_{10}t^2/N}. \quad (59)$$

Учитывая (42), (45), (59), получаем, что

$$\left| I_3^{(1)} \right| \leq 2 \int_{S^{(1)}} e^{-C_{10}t^2} dt \leq 2 \int_A^\infty e^{-C_{10}t^2} dt. \quad (60)$$

Следовательно, интеграл  $I_3^{(1)}$  можно сделать сколь угодно малым выбором подходящих  $\varepsilon_1$  и  $A$ .

Пусть  $t \in S^{(2)}$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  и  $u = t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$  с помощью (18), (19), (21), (29), (30) находим, что

$$f(e^{iu}) = e^{iu} (\lambda + \Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau (1+o(1)))^{-1} \times (\lambda f(e^{iu}) + \Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau (1+o(1))).$$

Отсюда получаем равенство

$$f(e^{iu}) = \frac{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau (1+o(1))}{1-e^{iu} + \Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau (1+o(1))},$$

и, представив  $f(e^{iu})$  в виде  $f(e^{iu}) = 1 - \alpha(u)$ , можно показать, что

$$1 - \alpha(u) = \frac{(1 + \lambda\alpha(u)/(1-\lambda))^\tau (1+o(1))}{1 + (1-e^{iu})(1+o(1))/\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau}.$$

Логарифмируя последнее равенство и учитывая, что  $\alpha(u)$  можно сделать сколь угодно малым выбором  $\varepsilon$ , получаем соотношение

$$\tau \ln \left( 1 + \frac{\lambda\alpha(u)}{1-\lambda} \right) = \ln \left( 1 + \frac{(1-e^{iu})(1+o(1))}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau} \right) + o(1).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha(u) = (1-\lambda)(1+o(1)) \times \left( -1 + \left( 1 + \frac{(1-e^{iu})(1+o(1))}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau} \right)^{1/\tau} \right).$$

Обозначим

$$\varphi = \arg \left( 1 + \frac{(1-e^{iu})(1+o(1))}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau} \right).$$

Тогда

$$\alpha(u) = (1-\lambda)(1+o(1)) \times \left( -1 + \left( 1 + \frac{u^2(1+o(1))}{(1-\lambda)^{2\tau} \Gamma^2(2-\tau)} \right)^{1/2\tau} \times \left( \cos \frac{\varphi}{\tau} + i \sin \frac{\varphi}{\tau} \right) \right).$$

Отсюда находим, что

$$f(e^{iu}) = 1 - \left( |u|^{1/\tau} q \left( \cos \frac{\varphi}{\tau} + i \sin \frac{\varphi}{\tau} \right) - (1-\lambda) \right) (1+o(1)), \quad (61)$$

где

$$q = \left( \frac{(1-\lambda)^{2\tau}}{u^2} + \frac{(1+o(1))}{\Gamma^2(2-\tau)} \right)^{1/2\tau}. \quad (62)$$

Учитывая (22), нетрудно видеть, что в области  $S^{(2)}$  справедливы неравенства

$$C_{11} < \frac{|u|}{(1-\lambda)^\tau} \leq C_{12} \left( \frac{n}{N} \right)^{\tau/(\tau-1)}.$$

Отсюда и из (62) следует, что

$$0 < C_{13} \leq q \leq C_{14} < \infty,$$

и поскольку, как несложно проверить,

$$\operatorname{tg} \varphi = - \left( \Gamma(2-\tau) \frac{(1-\lambda)^\tau}{u} + \frac{u}{2} \right)^{-1} (1+o(1)), \quad (63)$$

выполнено неравенство

$$\cos(\varphi/\tau) \geq C_{15} > 0.$$

С помощью этих соотношений из (61) и равенства  $\varphi(u) = f(e^{iu})$  получаем, что

$$|\varphi(u)|^2 = 1 - 2q|u|^{1/\tau} \cos \frac{\varphi}{\tau} (1+o(1)) + 2(1-\lambda)(1+o(1)). \quad (64)$$

Если  $|u|/(1-\lambda)^\tau \rightarrow \infty$ , то из (64) легко получить неравенство

$$|\varphi(u)|^2 \leq 1 - C_{16}|u|^{1/\tau} \leq e^{-C_{16}|u|^{1/\tau}}. \quad (65)$$

Пусть  $C_{17} < |u|/(1-\lambda)^\tau \leq C_{18} < \infty$ . Рассмотрим разность

$$\beta(u) = q \cos \frac{\varphi}{\tau} - \frac{1-\lambda}{|u|^{1/\tau}}.$$

Положим,

$$\operatorname{tg} x = \frac{|u|}{\Gamma(2-\tau)(1-\lambda)^\tau}.$$

Очевидно, что  $0 < C_{19} \leq x \leq C_{20} < \pi/2$ . Используя (62) и (63), находим, что

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \frac{1-\lambda}{|u|^{1/\tau}} \left( (1+\operatorname{tg}^2 x(1+o(1)))^{\frac{1}{2\tau}} \cos \frac{x}{\tau} - 1 \right) \\ &= \frac{1-\lambda}{(|u| \cos x)^{1/\tau}} \left( \cos \frac{x}{\tau} - (\cos x)^{1/\tau} + o(1) \right). \end{aligned}$$

С помощью формулы Тейлора можно показать, что справедливы неравенства

$$\cos \frac{x}{\tau} - (\cos x)^{1/\tau} > \frac{x^2}{2\tau^2} \left( \tau - 1 - \frac{\tau x^2}{12} \right) > C_{21} > 0.$$

Следовательно,  $\beta(u) \geq C_{22}$ , и из (64) получаем (65).

С помощью (42), (45), (65) находим, что

$$\begin{aligned} |I_3^{(2)}| &\leq 2 \int_{S^{(2)}} |\psi_r(t)| dt \\ &\leq C_{23} \left( \frac{n}{N^\tau} \right)^{\frac{2\tau-1}{2(\tau-1)}} N^\tau \exp \left\{ -C_{24} \left( \frac{N^\tau}{n} \right)^{\frac{1}{\tau-1}} \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

Несложно показать, что если  $n/N \rightarrow \infty$ ,  $n/N^\tau \rightarrow 0$ , то найдется такое  $y$ ,  $1 < y < \tau$ , что  $0 < C_{25} < n/N^y < C_{26} < \infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} |I_3^{(2)}| &\leq C_{23} \left( \frac{n}{N^\tau} \right)^{\frac{2\tau-1}{2(\tau-1)}} \\ &\times \exp \left\{ - \left( \frac{N^\tau}{n} \right)^{\frac{1}{\tau-1}} \left( C_{24} - \frac{C_{27} \ln N}{N^{(\tau-y)/(\tau-1)}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (67)$$

и  $I_3^{(2)} \rightarrow 0$ . Из оценок  $I_3^{(1)}$ ,  $I_3^{(2)}$  следует, что интеграл  $I_3$  можно сделать сколь угодно малым, выбрав  $A$  достаточно большим.

При  $\varepsilon \leq |u| \leq \pi$ , учитывая соотношение  $\lambda \rightarrow 1$ , нетрудно видеть, что справедливо неравенство (57). С помощью (42), (45), (57) получаем, что

$$|I_4| \leq C_{28} \left( \frac{n}{N^\tau} \right)^{\frac{2\tau-1}{2(\tau-1)}} N^\tau e^{-C_{29}N} \rightarrow 0. \quad (68)$$

Из полученных оценок интегралов  $I_1 - I_4$  и равенства (51) следует утверждение леммы.  $\square$

Обозначим через  $\psi_r(t)$  характеристическую функцию случайной величины  $(\nu_{r,N} - N\mathbf{E}\nu^{(1)})/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ . Используя (11), несложно показать, что

$$\begin{aligned} \psi_r(t) &= (1-P_r)^{-N} \psi(t) \left( 1 - \varphi^{-1} \left( \frac{t}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right) \right) \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \frac{it(k+r+1)}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right\} \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k+r+1 \right\}^N. \end{aligned} \quad (69)$$

**Лемма 6.** Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0$ ,  $NP_{r-1} \geq C > 0$ ,  $NP_r/\ln n = O(1)$ , или выполнены условия леммы 3. Тогда равномерно относительно  $t$  в любом конечном интервале

$$\psi_r(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

*Доказательство.* Пусть  $n, N \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0$ ,  $NP_{r-1} \geq C > 0$ ,  $NP_r/\ln n = O(1)$ . Учитывая (40), (69) и лемму 4, получаем, что при любом фиксированном  $t$

$$\begin{aligned} \psi_r(t) &= (1-P_r)^{-N} e^{-t^2/2} (1+o(1)) \\ &\times \left( 1 - P_r + o \left( \frac{1}{N} \right) - Q(t)(1+o(1)) \right)^N, \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \exp \left\{ \frac{it(k+r+1)}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \right\} - 1 \right) \\ &\times \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k+r+1 \right\}. \end{aligned} \quad (71)$$

Поскольку  $|e^{ix} - 1| < |x|$ , выполнено соотношение

$$\begin{aligned} Q(t) &\leq \frac{|t|}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} (r+2) \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = r+2 \right\} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+r+1}{r+2} \frac{\mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k+r+1 \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = r+2 \right\}}. \end{aligned}$$

С помощью леммы 1 и равенств (5) несложно показать, что

$$\begin{aligned} Q(t) &\leq \frac{|t|}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} (r+2) \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = r+2 \right\} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^{k-1} \frac{\mathbf{P} \left\{ \eta_{k+r+1} = k+r \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \eta_{r+2} = r+1 \right\}}. \end{aligned}$$

Учитывая (13), (15), (40), отсюда находим, что при любом  $r$  выполнено неравенство

$$|Q(t)| \leq \frac{C_1 |t| r P_r}{\sqrt{n}}. \quad (72)$$



При фиксированных  $t$ ,  $r$  из (72) и условия  $NP_r/\ln n = O(1)$  следует соотношение

$$Q(t) = o(1/N). \quad (73)$$

Используя лемму 1 и равенства (5), (15), находим, что

$$P_r = \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)}\right)^{r+1} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{r+2}=r+1\}}{(r+2)F(\lambda)}(1+o(1)). \quad (74)$$

Пусть  $r \rightarrow \infty$ . С помощью (6), (13), (16), (25), (74) получаем соотношение

$$P_r = \left(\frac{n}{Np_1}\right)^{r+1} \frac{C_2(1+o(1))}{r^{1+1/\tau}} \rightarrow 0. \quad (75)$$

Аналогично можно показать, что

$$P_{r-1} = \left(\frac{n}{Np_1}\right)^r \frac{C_3(1+o(1))}{r^{1+1/\tau}}.$$

С помощью этого соотношения и  $NP_{r-1} \geq C > 0$  находим, что

$$r \leq C_4 \ln n / \ln(N/n). \quad (76)$$

Из (72), (76) и условия  $NP_r/\ln n = O(1)$  следует (73). Учитывая (70), (73), (75), получаем утверждение леммы.

Пусть выполнены условия леммы 3. Используя (45), (69) и леммы 3 и 4, получаем, что при любом фиксированном  $t$

$$\psi_r(t) = e^{-t^2/2} \left(1 - Q(t) + o\left(\frac{1}{N} + Q(t)\right)\right)^N, \quad (77)$$

где  $Q(t)$  определено в (71). С помощью леммы 1 и (9), (16), (24), (25), (71) находим, что

$$|Q(t)| \leq \frac{C_5}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} \sum_{k=1}^{\infty} (r+k)^{-1/\tau} e^{-(r+k)\beta}.$$

Отсюда и из (27), (28), (45) получаем неравенство

$$|Q(t)| \leq \frac{C_6(N/n)^{(2\tau-1)/2(\tau-1)}}{\beta r^{1/\tau} e^{r\beta} \sqrt{N}},$$

при этом, учитывая условия леммы 3, несложно показать, что

$$\left(\beta r^{1/\tau} e^{r\beta}\right)^{-1} \leq \frac{C_7 \ln(N^\tau/n)}{N(N/n)^{\tau/(\tau-1)}}.$$

Следовательно,  $Q(t) = o(1/N)$ , и из (77) получаем утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 7.** Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда для всех целых неотрицательных  $l$  равномерно относительно  $u_N = (l - N\mathbf{E}\nu^{(1)})/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$  в любом конечном фиксированном интервале

$$\mathbf{P}\{\nu_{r,N} = l\} = \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}(1+o(1)).$$

*Доказательство.* Используя формулу обращения, разность

$$R_N = 2\pi \left( \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \mathbf{P}\{\nu_{r,N}=l\} - \frac{e^{-u_N^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right) \quad (78)$$

можно представить в виде суммы  $R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ , где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-itu_N} \left( \psi_r(t) - e^{-t^2/2} \right) dt,$$

$$I_2 = - \int_{|t|>A} e^{-itu_N} e^{-t^2/2} dt,$$

$$I_3 = \int_{A < |t| \leq \varepsilon \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi_r(t) dt,$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} < |t| \leq \pi \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} e^{-itu_N} \psi_r(t) dt,$$

положительные постоянные  $A$ ,  $\varepsilon$  будут выбраны позднее.

В силу леммы 6 для любого фиксированного  $A$  справедливо соотношение  $I_1 \rightarrow 0$ . Для интеграла  $I_2$  выполнено (52), и этот интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ .

Оценим интегралы  $I_3$ ,  $I_4$  в случае, когда  $N, n \rightarrow \infty$  так, что  $n/N \rightarrow 0$ ,  $NP_{r-1} \geq C > 0$ ,  $NP_r/\ln n = O(1)$ . Пусть  $A < |t| < \varepsilon \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}$ . С помощью (42), (53), (69) при достаточно малом  $\varepsilon$  и  $NP_r = O(1)$  получаем, что

$$|\psi_r(t)| \leq C_1 e^{-C_2 t^2}. \quad (79)$$

Следовательно,

$$|I_3| \leq 2C_1 \int_A^\infty e^{-C_2 t^2} dt,$$

и выбором достаточно большого  $A$  интеграл  $I_3$  можно сделать сколь угодно малым.

Пусть  $NP_r \rightarrow \infty$ . При  $t/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \rightarrow 0$  с помощью (42), (53), (69), (74), (75) находим, что

$$|\psi_r(t)| \leq e^{-C_3 t^2} \left( 1 + \frac{C_4 |t| P_r}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}} + C_5 Q(t) \right)^N, \quad (80)$$

где  $Q(t)$  определено в (71).

При фиксированных  $r$  область интегрирования  $I_3$  разобьем на две части

$$S^{(1)} = \left\{ A < |t| < \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} / \ln n \right\},$$

$$S^{(2)} = \left\{ \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} / \ln n \leq |t| < \varepsilon \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \right\}.$$

Учитывая (40), (72) и соотношение  $NP_r / \ln n = O(1)$ , нетрудно видеть, что для  $t \in S^{(1)}$  справедливы соотношения

$$\frac{|t|P_r}{\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}}}, |Q(t)| = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Отсюда и из (80) следует (79) и

$$\left| I_3^{(1)} \right| \leq 2 \int_{S^{(1)}} |\psi_r(t)| dt \leq C_6 \int_A^\infty e^{-C_7 t^2} dt. \quad (81)$$

При  $|t|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} < \varepsilon$  и достаточно малом  $\varepsilon$  с помощью (40), (42), (53), (69) получаем, что

$$|\psi_r(t)| \leq (1-P_r)^{-N} \left( e^{-C_8 t^2/N} + P_r \right)^N \leq \exp \{ -C_8 t^2 + C_9 NP_r \}. \quad (82)$$

Учитывая соотношения  $NP_r / \ln n = O(1)$ , (40) и (82), для  $t \in S^{(2)}$  находим, что

$$|\psi_r(t)| \leq e^{-C_{10}n/\ln^2 n}$$

и, следовательно,

$$\left| I_3^{(2)} \right| \leq 2 \int_{S^{(2)}} |\psi_r(t)| dt \leq C_{11} \sqrt{n} e^{-C_{10}n/\ln^2 n} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (81) получаем, что интеграл  $I_3$  можно сделать сколь угодно малым, выбрав подходящие  $A, \varepsilon$ .

При  $r \rightarrow \infty$  область интегрирования  $I_3$  разобьем на две части

$$S^{(1)} = \left\{ A < |t| < \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \ln(N/n) / \ln^2 n \right\},$$

$$S^{(2)} = \left\{ \ln(N/n) / \ln^2 n \leq |t| / \sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} < \varepsilon \right\}.$$

Заметим, что в соответствии с (76) выполнено соотношение  $\ln n / \ln(N/n) \rightarrow \infty$ .

Нетрудно видеть, что в области  $S^{(1)}$  справедливо  $|t|P_r/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} = o(1/N)$ , а из (72), (76) находим, что  $Q(t) = O(1/N)$ . Отсюда и из (80) получаем (79), и, следовательно, имеет место оценка (81). При  $t \in S^{(2)}$ , учитывая соотношения  $NP_r / \ln n = O(1)$ , (40) и (82), несложно показать, что

$$|\psi_r(t)| \leq \exp \{ -C_{12}t^2 + C_{13}NP_r \} \leq \exp \{ -C_{14}n \ln^2(N/n) / \ln^4 n \}.$$

Тогда

$$\left| I_3^{(2)} \right| \leq \sqrt{n} \exp \{ -C_{14}n \ln^2(N/n) / \ln^4 n \} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (81) следует, что интеграл  $I_3$  можно сделать сколь угодно малым, выбрав подходящие  $A, \varepsilon$ .

Пусть  $\varepsilon \leq |t|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \leq \pi$ . С помощью (42), (55), (69), (75) и соотношения  $NP_r / \ln n = O(1)$  можно показать, что

$$|\psi_r(t)| \leq (1-P_r)^{-N} \left( e^{-C_{15}n/N} + P_r \right)^N \leq e^{-C_{16}n}$$

и имеет место оценка (56).

Пусть выполнены условия леммы 3. Область интегрирования  $I_3$  разобьем на две части в соответствии с (58). В области  $S^{(1)}$  с помощью (42), (45), (59), (69) и леммы 3 находим, что  $|\psi_r(t)| \leq C_{17}e^{-C_{18}t^2}$  и с точностью до константы справедливо (60). В области  $S^{(2)}$  выполнено соотношение (65). Используя (42), (45), (65), (69) и лемму 3, несложно показать, что

$$|\psi_r(t)| \leq C_{19}e^{-C_{20}N|u|^{1/\tau}} \leq e^{-C_{21}(N^\tau/n)^{1/(\tau-1)}},$$

и, учитывая (45), получаем, что справедливы неравенства (66), (67), откуда следует соотношение  $I_3^{(2)} \rightarrow 0$ . Отсюда и из (60) находим, что  $I_3$  можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого  $A$ .

При  $\varepsilon \leq |t|/\sqrt{N\mathbf{D}\nu^{(1)}} \leq \pi$  справедливо неравенство (57). С помощью (42), (45), (57), (69) и леммы 3 можно показать, что выполнено (68).

Утверждение леммы следует из полученных оценок интегралов  $I_1 - I_4$  и равенства (78).  $\square$

Теперь можем доказать теоремы 1, 2.

Пусть выполнены условия теоремы 1. Из леммы 2 следуют соотношения

$$NP_{r-1} \rightarrow \infty, NP_r \rightarrow \gamma. \quad (83)$$

Аналогично равенствам (15), (16) можно показать, что

$$NP_{r+1} = N\mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = r + 3 \right\} (1 + o(1)) = C_1 \frac{n}{N} NP_r (1 + o(1)).$$

Отсюда и из (83) следует соотношение

$$NP_{r+1} \rightarrow 0.$$

С помощью этого соотношения, (12), (40), (83) и лемм 5, 7 нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) \leq r + 1 \} &\rightarrow e^{-\gamma}, \\ \mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) \leq r + 2 \} &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (84)$$

Покажем, что  $\mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) \leq r \} \rightarrow 0$ . Учитывая лемму 5 и соотношения (12), (40), находим, что если  $NP_{r-1}/\ln n \geq C_2 > 1/2$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) \leq r + 1 \} &\leq \frac{(1 - P_{r-1})^N}{\mathbf{P} \{ \nu_N = n + N \}} \\ &\leq C_3 \exp \{ -NP_{r-1} + (\ln n)/2 \} \\ &\leq C_3 \exp \{ -C_4 NP_{r-1} \} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если  $NP_{r-1}/\ln n \leq 1/2$ , то, используя леммы 5, 7 и соотношения (12), (83), получаем, что

$$\mathbf{P} \{ \eta(\mathfrak{F}) \leq r + 1 \} = (1 - P_{r-1})^N (1 + o(1)) \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (84) следует утверждение теоремы 1.

Утверждение теоремы 2 несложно получить из соотношений (12), (39) и лемм 3, 5, 7.

*Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 297 с.
2. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

## REFERENCES

1. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. 316 p.
2. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters Neordhoff Publ., 1971. 438 p.
3. Kazimirov N. I., Pavlov Yu. L. A remark on Galton–Watson forests. *Discrete Mathematics and Applications*. 2000. Vol. 10, iss. 1. P. 49–62. doi: 10.4213/dm320
4. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 252 p.

3. *Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л.* Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона // *Дискретная математика*. 2000. Т. 12, вып. 1. С. 47–59. doi: 10.4213/dm320

4. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

5. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 208 с.

6. *Павлов Ю. Л.* Случайные леса. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 1996. 259 с.

7. *Павлов Ю. Л., Челюкова И. А.* Предельные распределения числа вершин в слоях просто генерируемого леса // *Дискретная математика*. 1999. Т. 11, вып. 1. С. 97–112. doi: 10.4213/dm366

8. *Павлов Ю. Л., Челюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // *Дискретная математика*. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

9. *Хворостянская Е. В.* О предельном распределении максимального объема дерева в лесе Гальтона–Ватсона // *Труды КарНЦ РАН*. 2020. № 7. С. 89–97. doi: 10.17076/mat1236

10. *Челюкова И. А.* Возникновение гигантского дерева в случайном лесе // *Дискретная математика*. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 111–126. doi: 10.4213/dm408

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. *Myllari T.* Limit distributions for the number of leaves on a random forest // *Advances in Applied Probability*. 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922. doi: 10.1239/aap/1037990959

13. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1–2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

*Поступила в редакцию 23.04.2021*

5. *Kolchin V. F.* Random mappings. New York: Springer, 1986. 206 p.

6. *Pavlov Yu. L.* Random forests. Utrecht: VSP, 2000. 122 p.

7. *Khvorostyanskaya E. V.* О предельном распределении максимального объема дерева в лесе Гальтона–Ватсона [On the limit distribution of the maximum tree size in the Galton–Watson forest]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 89–97. doi: 10.17076/mat1236

8. *Cheplyukova I. A., Pavlov Yu. L.* Limit distributions of the number of vertices in strata of a simply generated forest. *Discrete Mathematics*

*and Applications*. 1999. Vol. 9, iss. 2. P. 137–154.  
doi: 10.4213/dm366

9. *Cheplyukova I. A., Pavlov Yu. L.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–463.  
doi: 10.4213/dm1008

10. *Cheplyukova I. A.* The emergence of a giant tree in a random forest. *Discrete Mathematics and Applications*. 1998. Vol. 8, iss. 1. P. 17–33.  
doi: 10.4213/dm408

11. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

12. *Myllari T.* Limit distributions for the number of leaves on a random forest. *Advances in Applied Probability*. 2002. Vol. 34, iss. 4. P. 904–922.  
doi: 10.1239/aap/1037990959

13. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received April 23, 2021

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Хворостянская Елена Владимировна**

старший научный сотрудник, к. ф.-м. н.

Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»

ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910

эл. почта: cher@krc.karelia.ru

тел.: (8142) 781218

### CONTRIBUTOR:

**Khvorostyanskaya, Elena**

Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,

Russian Academy of Sciences

11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia

e-mail: cher@krc.karelia.ru

tel.: (8142) 781218

УДК 519.115:519.2

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ С ФИКСИРОВАННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ИХ МИНИМАЛЬНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия

В схемах равновероятного размещения  $r$  частиц по  $n$  ячейкам изучаются вероятностные распределения минимальных уровней заполнения ячеек, чисел ячеек с фиксированным минимальным уровнем заполнения и числа пустых ячеек. Рассматриваемые схемы отличаются разными парными качествами ячеек и частиц по их различимости.

Ключевые слова: варианты размещения частиц; число пустых ячеек; вероятностное распределение минимального заполнения ячеек.

### N. Yu. Enatskaya. PROBABILITY ANALYSIS OF THE SCHEMES OF PARTICLE ALLOCATION TO CELLS WITH A FIXED MINIMUM FILLING VALUE

Schemes of equiprobable allocation of  $r$  particles to  $n$  cells are studied for the probability distributions of minimum cell fill levels, numbers of cells with a fixed minimum fill level, and the number of empty cells. The schemes have different paired qualities of cells and particles in terms of their distinguishability.

Keywords: particle allocation variants; number of empty cells; probability distribution of the minimal numbers of elements per cells.

### ВВЕДЕНИЕ

Вероятностные распределения указанных для исследования характеристик определяются в следующих четырех схемах размещения частиц по ячейкам, характеризующихся разными парными качествами ячеек и частиц в них:

схема  $A$  – размещение различных частиц по различным ячейкам;

схема  $B$  – размещение различных частиц по неразличимым ячейкам;

схема  $C$  – размещение неразличимых частиц по различным ячейкам;

схема  $D$  – размещение неразличимых частиц по неразличимым ячейкам.

Вероятностный анализ схем проводится на основе процедур прямого перечисления благоприятных исходов схем для допустимых значений изучаемых характеристик со следующими обозначениями:

$U$  – минимальный уровень заполнения ячеек в исходе схемы;

$\mu_k$  – число ячеек с минимальным уровнем заполнения  $U = k$ , где  $k$  – целое  $\geq 0$ ;

$\mu_0$  – число пустых ячеек.

Для всех схем считаем, что  $r \geq nk$ .

Укажем диапазоны изменения возможных значений  $k$ ,  $\mu_k$  изучаемых характеристик. Очевидно, что

$$k = \overline{0, [r/n]}, \quad (1)$$

где  $[Z]$  – целая часть числа  $Z$ ,

$$\mu_k = \overline{l, L}, \quad (2)$$

где для  $\mu_k$  при заданном значении  $k$  величины  $l$  и  $L$  очевидно определяются из условий  $r - \mu_k k \geq (n - \mu_k)(k + 1)$ , т. е.  $\mu_k$  ячеек с  $k$  частицами, а остальные  $(n - \mu_k)$  ячеек с более чем  $k$  частицами, откуда  $r \geq \mu_k k + (n - \mu_k)(k + 1)$ , а  $L = n$ , когда  $r = nk$ , или  $L = n - 1$ , когда  $r > nk$ , что можно записать следующими формулами для значений  $l$  и  $L$ :

$$l = \max(1, n(k + 1) - r),$$

$$J = 1 - C_n^{n+r-nk}, \quad L = n - J. \quad (3)$$

Число пустых ячеек равно 0 при  $U = k > 0$ .

Вероятностный анализ характеристик схем начнем с нахождения распределения случайной величины (с. в.)  $U$  с учетом разных качеств ячеек и частиц (по их различимости):

а) при различимости ячеек будем различать варианты наборов составов частиц в ячейках (для различимых частиц) или их количеств (для неразличимых частиц);

б) при различимости частиц будем различать наборы составов частиц в ячейках с учетом порядка этих наборов (для различимых ячеек) или без учета их порядка (для неразличимых ячеек).

Теперь по приведенным общим соображениям будем находить вероятностные распределения исследуемых характеристик в каждой схеме со спецификой, определяемой качествами ячеек и частиц.

## 1. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ А

**Теорема 1.** Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при  $k$ , удовлетворяющего (1), выполняется соотношение

$$P(U = k) = \frac{M_A(k)}{n^r}$$

$$= \frac{1}{n^r} \sum_{i=l}^L \sum_{\{\bar{w}\}} \left( \frac{r!}{\prod_{j=1}^n w_j!} \right) \left( \frac{n!}{\prod_{a=0}^r q_a!} \right), \quad (4)$$

где  $M_A(k)$  – число исходов события ( $U = k$ ), т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по  $k$  частиц, а

в остальных ячейках больше, чем по  $k$ , последняя сумма производится по перечислению всех наборов  $\{\bar{w}\}$  уровней заполнения ячеек  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$  в данном их порядке при каждой фиксации числа  $i$  ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения  $k$ , а  $\bar{q} = (q_0, \dots, q_r)$  – вторая маркировка уровней заполнения ячеек, где  $q_a$  – число ячеек с уровнем заполнения  $a$ ,  $a = \overline{0, r}$ .

*Доказательство.* Число исходов  $N_A$  схемы А размещения различных частиц по различным ячейкам известно:  $N_A = n^r$ . Вероятность  $P(U = k)$  для допустимых по (1) значений  $k$  будем искать в виде  $M_A(k)/n^r$ . Число исходов  $M_A(k)$  определяется по процедуре их перечисления в следующем порядке:

- 1) перечисляем все допустимые по (2) и (3) значения  $\mu_k$  ячеек, содержащих ровно по  $k$  частиц;
- 2) для каждого значения  $\mu_k = i$  из 1) перечисляем все размеры превышения заданного уровня заполнения остальных  $(n - i)$  ячеек по схеме сочетаний с повторением без пустых ячеек при размещении по ним  $(r - nk)$  неразличимых частиц числом способов  $C_{r-nk-1}^{n-i-1}$  в виде  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ , где компоненты превышений перечисляются в порядке нумерации ячеек, и на местах выбранных в 1)  $i$  ячеек стоят нули;
- 3) прибавляя ко всем компонентам каждого вектора из 2)  $\bar{m}$  по  $k$ , получаем все наборы требуемых размеров уровней заполнения ячеек  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ ;
- 4) для каждого  $\bar{w}$  вычисляем  $\bar{q}$ ;
- 5) по результатам 3) и 4) по схеме перестановок с повторением находим число размещений  $r$  различных частиц по  $n$  различным ячейкам во всех заданных вектором  $\bar{w}$  количествах при фиксированном значении  $i$ , обеспечивающих выполнение события ( $U = k$ ) – это первый сомножитель в круглых скобках в (4), и число делений  $n$  ячеек на группы ячеек с совпадающими уровнями заполнения – это второй сомножитель в круглых скобках в (4).

Тогда

$$M_A(k) = \sum_{i=l}^L \sum_{\{\bar{w}\}} \frac{r!}{\prod_{j=1}^n w_j!} \frac{n!}{\prod_{a=0}^r q_a!},$$

а перечисление всех наборов  $\{\bar{w}\}$  при каждой фиксации числа  $i$  ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения  $k$  следует из перечисления исходов схемы сочетаний с повторением в количестве  $C_{r-nk-1}^{n-i-1}$  в связи с перебором наборов размеров превышений уровня заполнения ячеек, описанным в п. 2) перечисления благоприятных исходов события ( $U = k$ ), что приводит к формуле (4).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в.  $\mu_k$  при заданном значении  $k$  с. в.  $U$ , т. е.

$$P(\mu_k = i/U = k) = (1/M_A(k)) \sum_{\{\bar{w}^*\}} \frac{r!}{\prod_{j=1}^n w_j!} \frac{n!}{\prod_{a=0}^r q_a!}, \quad (5)$$

где сумма производится по перечислению всех наборов  $\{\bar{w}^*\} = \{\bar{w}\} : \sum_{j=1}^n I(w_j - k) = n - i$  при  $I(Z) = 0$ , когда  $Z = 0$ , и  $I(Z) = 1$ , когда  $Z > 0$ . Тогда при  $j = 0$

$$P(\mu_0 = j) = P(U \neq 0),$$

$$\text{и при } j > 0 \quad (6)$$

$$P(\mu_0 = j) = P(\mu_0 = j/U = 0)P(U = 0).$$

□

**Замечание 1.** а) Очевидно, что  $\sum_k M_A(k) = n^r$ .

б) Формулы (6) верны для всех схем  $A - D$ .

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

**Пример 1.** Пусть  $n = 3$ ,  $r = 3$ . Общее число исходов схемы  $N_A = 3^3 = 27$ ;  $k = 0, [3/3] = 0, 1$ ; по (2) и (3) при  $k = 0$   $i = \bar{l}, \bar{L}$ , где  $l = \max(1, 3 - 3) = 1$ ,  $L = 2$ , а при  $k = 1$   $i = \bar{l}, \bar{L}$ , где  $l = \max(1, 6 - 3) = 3$ ,  $L = 3$ .

Для наглядности и проверки результатов расчетов в примере приведем граф полного перечисления исходов схемы на рисунке 1.

Для  $k = 0$ ,  $i = 1$  при любой фиксации одной ячейки с уровнем заполнения 0 получаем одинаковые по составу наборы уровней заполнения  $\bar{w} = (0, 1, 2)$ , для которых  $\bar{q} = (1, 1, 1, 0)$ ;

для  $k = 0$ ,  $i = 2$  при любой фиксации двух ячеек с уровнем заполнения 0 получаем одинаковые по составу наборы уровней заполнения  $\bar{w} = (0, 0, 3)$ , для которых  $\bar{q} = (2, 0, 0, 1)$ ; тогда находим

$$M_A(0) = \frac{3!}{0!1!2!} \frac{3!}{1!1!1!0!} + \frac{3!}{0!0!3!} \frac{3!}{2!0!0!1!} = 18 + 3 = 21.$$

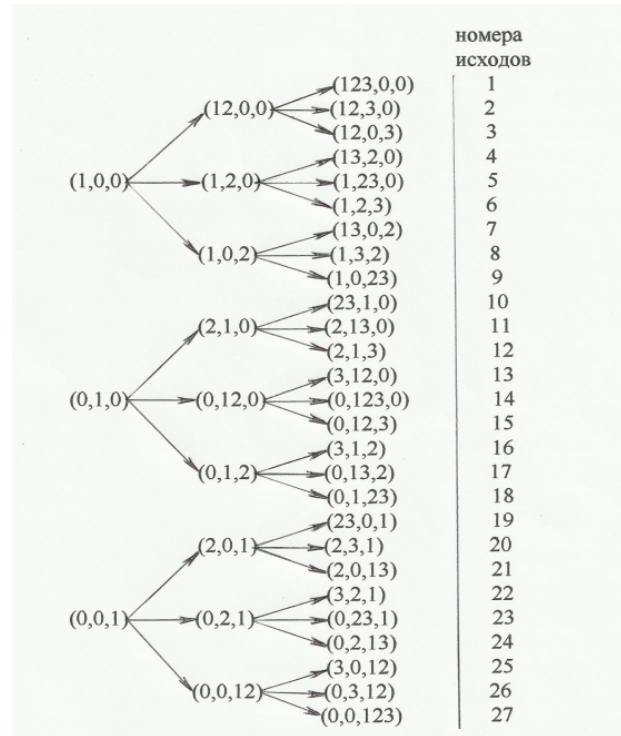


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы  $A$  в примере 1

Fig. 1. Enumeration graph of outcomes of the scheme  $A$  in example 1

Отсюда по (4) получаем  $P(U = 0) = 21/27 = 7/9$ .

Для  $k = 1$ ,  $i = 3$  при фиксации трех ячеек с уровнем заполнения 1 получаем один набор уровней заполнения  $\bar{w} = (1, 1, 1)$ , для которого  $\bar{q} = (0, 3, 0, 0)$ ; тогда находим

$$M_A(1) = \frac{3!}{1!1!1!} \frac{3!}{0!3!0!0!} = 6.$$

Проверка по замечанию 1:  $M_A(0) + M_A(1) = 27 = 3^3$ .

В результате получено:  $P(U = 0) = 7/9$ ;  $P(U = 1) = 2/9$  – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (5) находим условные распределения для с. в.  $\mu_k$ :

$$P(\mu_0 = 1/U = 0) = 18/21 = 6/7;$$

$$P(\mu_0 = 2/U = 0) = 3/21 = 1/7;$$

$$P(\mu_1 = 3/U = 1) = 6/6 = 1.$$

Тогда число пустых ячеек  $\mu_0$  имеет по (6) распределение

$$P(\mu_0 = 0) = 6/27 = 2/9;$$

$$P(\mu_0 = 1) = 18/27 = 6/9;$$

$$P(\mu_0 = 2) = 3/27 = 1/9.$$

Все полученные результаты совпадают с расчетами по графу на рисунке 1.

## 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ В

**Теорема 2.** Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при  $k$ , удовлетворяющего (1), выполняется соотношение

$$P(U = k) = \frac{M_B(k)}{N_B} = \frac{1}{N_B} \sum_{i=l}^L \sum_{\{\bar{w}\}} \frac{r!}{\prod_{j=1}^n w_j! \prod_{a=1}^{n^*} q_a!}, \quad (7)$$

где число исходов  $N_B$  схемы В размещения различных частиц по неразличимым ячейкам,  $M_B(k)$  – число исходов события ( $U=k$ ), т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по  $k$  частиц, а в остальных ячейках больше, чем по  $k$ , а последняя сумма производится по перечислению всех наборов  $\{\bar{w}\}$  уровней заполнения ячеек  $\bar{w}$  в порядке их возрастания при каждой фиксации числа  $i$  ячеек с их заданным минимальным уровнем заполнения  $k$ , а  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_{n^*})$  – вторые маркировки уровней заполнения ячеек по всем положительным заполнениям  $n^* \leq r$ .

**Доказательство.** Число исходов  $N_B$  схемы В размещения различных частиц по неразличимым ячейкам  $N_B$  получено в [1]. Вероятность  $P(U = k)$  для допустимых по (1) значений  $k$  будем искать в виде  $M_B(k)/N_B$ . Число исходов  $M_B(k)$  определяется по процедуре их перечисления в следующем порядке:

- 1) при заданном по (1) числе  $k$  по всем допустимым по (2) и (3) значениям  $i$  ячеек с минимальным уровнем заполнения  $k$  перечисляем все размеры превышения заданного уровня заполнения остальных  $(n-i)$  ячеек по схеме деления остальных  $(r-nk)$  частиц, считая их номера от 1 до  $(r-nk)$ , на  $(n-i)$  непустых частей по [2] и проводя по ним перечисление всех разных упорядоченных по возрастанию наборов размеров этих превышений по всем  $(n-i)$  ячейкам, в виде  $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$ , где первые  $i$  компонент = 0;
- 2) прибавляя ко всем компонентам каждого вектора из 1)  $\bar{m}$  по  $k$ , получаем все наборы требуемых размеров уровней заполнения ячеек  $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ , среди которых проводим вторые маркировки по всем положительным размерам заполнения  $n^* \leq r$  вида  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_{n^*})$ ;
- 3) по результату 2) по схеме из [3] находим число размещений  $r$  различных частиц

по  $n$  различным ячейкам во всех заданных вектором  $\bar{w}$  количествах при фиксированном значении  $i$ , обеспечивающих выполнение события ( $U = k$ ).

Тогда в связи с неразличимостью ячеек, учитывая делением на  $\prod_{a=1}^{n^*} q_a!$  неразличимость перестановок составов ячеек, совпадающих по уровням  $\geq 1$  заполнения ячеек, получаем число исходов схемы

$$M_B(k) = \sum_{i=l}^L \sum_{\{\bar{w}\}} \frac{r!}{\prod_{j=1}^n w_j! \prod_{a=1}^{n^*} q_a!},$$

где первая сумма производится по значениям  $i$ , а вторая – по перечислению всех наборов  $\{\bar{w}\}$  при каждом значении  $i$  с их заданным минимальным уровнем заполнения  $k$ , которое следует из перечисления исходов указанной схемы из [2] в связи с перебором наборов размеров превышений уровня заполнения ячеек, описанным в п. 1) перечисления благоприятных исходов события ( $U = k$ ) (значение  $k$  меняется по (1)).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в.  $\mu_k$  при заданном значении  $k$  с. в.  $U$ , т. е.

$$P(\mu_k = i/U = k) = (1/M_B(k)) \sum_{\{\bar{w}^*\}} \frac{r!}{\prod_{j=1}^n w_j! \prod_{a=1}^{n^*} q_a!}, \quad (8)$$

где сумма производится по перечислению всех наборов  $\{\bar{w}^*\} = \{\bar{w}\} : \sum_{j=1}^n I(w_j - k) = n - i$  при  $I(Z) = 0$ , когда  $Z = 0$ , и  $I(Z) = 1$ , когда  $Z > 0$ .

Тогда вероятностное распределение с. в.  $\mu_0$  снова находится по (6).  $\square$

**Замечание 2.** Очевидно, что  $\sum_k M_B(k)$  – число исходов схемы В.

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

**Пример 2.** Пусть  $n = 3$ ,  $r = 4$ . Общее число исходов схемы  $N_B$  по [1] равно 14 и можно проверить по графу перечисления (см. рис. 2);  $k = 0, [4/3] = 0, 1$ ; по (2) и (3) при  $k = 0$   $i = \bar{l}, \bar{L}$ , где  $l = \max(1, 3 - 4) = 1$ ,  $L = 2$ , а при  $k = 1$   $i = \bar{l}, \bar{L}$ , где  $l = \max(1, 6 - 4) = 2$ ,  $L = 2$ .

Для  $k = 0$ ,  $i = 1$  получаем все  $\bar{w}$  – это  $\bar{w} = (0, 1, 3)$  с  $\bar{q} = (1, 1)$  и  $\bar{w} = (0, 2, 2)$  с  $\bar{q} = (2)$ .



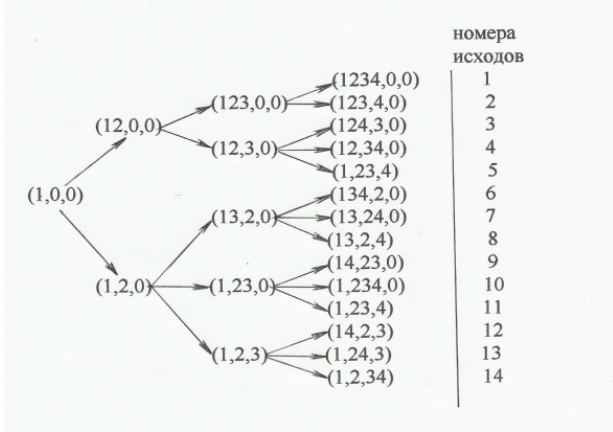


Рис. 2. Граф перечисления всех исходов схемы  $B$  в примере 2

Fig. 2. Enumeration graph of all outcomes of the scheme  $B$  in example 2

Для  $k = 0$ ,  $i = 2$  получаем все  $\bar{w}$  – это  $\bar{w} = (0, 0, 4)$  с  $\bar{q} = (1)$ . Отсюда по (7) находим

$$\begin{aligned}
 P(U = 0) &= (1/14) \left( \frac{4!}{0!1!3!1!1!} + \frac{4!}{0!2!2!2!} + \frac{4!}{0!0!4!1!} \right) \\
 &= (1/14)(4+3+1) = 8/14 = 4/7 \quad (M_B(0)=8).
 \end{aligned}$$

Для  $k = 1$ ,  $i = 2$  получаем все  $\bar{w}$  – это  $\bar{w} = (1, 1, 2)$  с  $\bar{q} = (2, 1)$ . Отсюда по (7) находим

$$P(U = 1) = (1/14) \frac{4!}{1!1!2!2!1!} = 6/14 = 3/7 \quad (M_B(1) = 6).$$

По замечанию 2 число исходов схемы есть  $M_B(0) + M_B(1) = 14$ .

В результате получено:  $P(U = 0) = 4/7$ ;  $P(U = 1) = 3/7$  – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (8) находим условные распределения для с. в.  $\mu_k$ :

$$\begin{aligned}
 P(\mu_0 = 1/U = 0) &= 7/8; \\
 P(\mu_0 = 2/U = 0) &= 1/8; \\
 P(\mu_1 = 1/U = 1) &= 0/6 = 0; \\
 P(\mu_1 = 2/U = 1) &= 6/6 = 1; \\
 P(\mu_1 = 3/U = 1) &= 0/6 = 0.
 \end{aligned}$$

Тогда число пустых ячеек  $\mu_0$  имеет по (6) распределение

$$\begin{aligned}
 P(\mu_0 = 0) &= 6/14; \\
 P(\mu_0 = 1) &= 7/14; \\
 P(\mu_0 = 2) &= 1/14.
 \end{aligned}$$

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ $C$

Подобная схема исследовалась в [5].

**Теорема 3.** Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при  $k$ , удовлетворяющего (1), выполняется соотношение

$$P(U = k) = \frac{M_C(k)}{C_{n+r-1}^r}$$

при  $r = nk$  и

$$\begin{aligned}
 P(U = k) &= \frac{M_C(k)}{C_{n+r-1}^r} \\
 &= \frac{1}{C_{n+r-1}^r} \sum_{i=l}^L C_n^i C_{r-nk-1}^{n-i-1} \quad (9)
 \end{aligned}$$

при  $r > nk$ , где  $M_C(k)$  – число исходов события ( $U = k$ ), т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по  $k$  частиц, а в остальных ячейках больше, чем по  $k$  частиц.

*Доказательство.* Число исходов  $N_C$  схемы  $C$  размещения неразличимых частиц по различным ячейкам известно:  $N_C = C_{n+r-1}^r$ . Вероятность  $P(U = k)$  для допустимых по (1) значений  $k$  будем искать в виде  $M_C(k)/C_{n+r-1}^r$ , где число  $M_C(k)$  определяется по процедуре их перечисления в следующем порядке:

- 1) перечисляем все допустимые по (2) и (3) фиксации  $i$  ячеек, содержащих ровно по  $k$  частиц числом способов  $C_n^i$ ;
- 2) для каждой фиксации 1) перечисляем все размещения остальных  $(r - nk)$  частиц по остальным  $(n - i)$  ячейкам по схеме сочетаний с повторением без пустых ячеек числом способов  $C_{r-nk-1}^{n-i-1}$ . Они и определяют все возможные благоприятные событию ( $U = k$ ) исходы при данной фиксации ровно  $i$  ячеек с минимальным уровнем заполнения  $k$ .

Тогда  $M_C(k) = 1$  при  $r = nk$  и

$$M_C(k) = \sum_{i=l}^L C_n^i C_{r-nk-1}^{n-i-1}$$

при  $r > nk$ , что и приводит к формуле (9).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в.  $\mu_k$  при заданном значении  $k$  с. в.  $U$ , т. е.  $P(\mu_k = i/U = k) = (1/M_C(k))$  при  $r = nk$  и

$$P(\mu_k = i/U = k) = (1/M_C(k)) C_n^i C_{r-nk-1}^{n-i-1} \quad (10)$$

при  $r > nk$ . Тогда вероятностное распределение с. в.  $\mu_0$  снова находится по (6).  $\square$

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

**Пример 3.** Пусть  $n = 3$ ,  $r = 4$ . Общее число исходов схемы  $N_A = C_6^4 = 15$ ;  $k = \overline{0, [4/3]} = \overline{0, 1}$ ; по (2) и (3) при  $k = 0$   $i = \overline{l, L}$ , где  $l = \max(1, 3 - 4) = 1$ ,  $L = 2$ , а при  $k = 1$   $i = \overline{l, L}$ , где  $l = \max(1, 6 - 4) = 2$ ,  $L = 2$ .

Для наглядности и проверки результатов расчетов в примере приведем граф полного перечисления исходов схемы на рисунке 3, где исходы будем задавать в виде перечня уровней заполнения ячеек в порядке их нумерации.

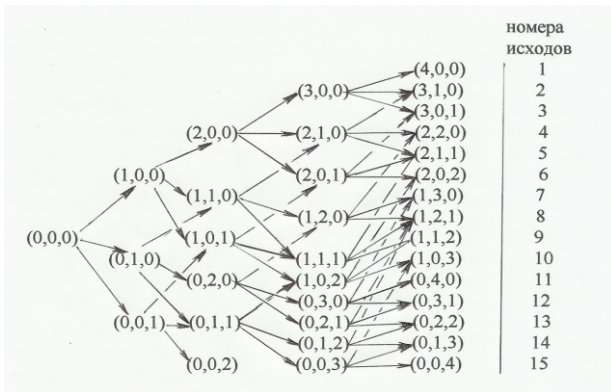


Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы  $C$  в примере 3

Fig. 3. Enumeration graph of outcomes of the scheme  $C$  in example 3

По формуле (9) при  $k = 0$  получаем

$$P(U = 0) = (1/15)(C_3^1 C_3^1 + C_3^2 C_3^0)$$

$$= (9 + 3)/15 = 12/15 = 4/5 \quad (M_C(0) = 12),$$

а при  $k = 1$

$$P(U = 1) = (1/15)C_3^2 C_0^0 = 3/15 = 1/5$$

$$(M_C(1) = 3).$$

В результате получено:  $P(U = 0) = 4/5$ ;  $P(U = 1) = 1/5$  – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (10) находим условные распределения для с. в.  $\mu_k$ :

$$P(\mu_0 = 1/U = 0) = 9/12 = 3/4;$$

$$P(\mu_0 = 2/U = 0) = 3/12 = 1/4;$$

$$P(\mu_1 = 2/U = 1) = 3/3 = 1.$$

Тогда число пустых ячеек  $\mu_0$  имеет по (6) распределение

$$P(\mu_0 = 0) = 3/15 = 1/5;$$

$$P(\mu_0 = 1) = 9/15 = 3/5;$$

$$P(\mu_0 = 2) = 3/15 = 1/5.$$

Все полученные результаты совпадают с расчетами по графу на рисунке 3.

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ $D$

**Теорема 4.** Для вероятностного распределения минимального заполнения ячеек при  $k$ , удовлетворяющего (1), выполняется соотношение

$$P(U = k) = \frac{M_D(k)}{N^*(r, n)} = \frac{1}{N^*(r, n)} \sum_{i=l}^L N(r - nk, n - i), \quad (11)$$

где  $N^*(r, n)$  – число исходов схемы  $D$  размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам, а число исходов в той же схеме без пустых ячеек обозначено через  $N(r, n)$ ,  $M_D(k)$  – число исходов события ( $U = k$ ), т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по  $k$  частиц, а в остальных ячейках больше, чем по  $k$  частиц.

**Доказательство.** В [4] получены число исходов схемы  $D$  размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам  $N^*(r, n)$  и число исходов в той же схеме без пустых ячеек  $N(r, n)$  (в обозначениях [4]). Вероятность  $P(U = k)$  для допустимых по (1) значений  $k$  будем искать в виде  $M_D(k)/N^*(r, n)$ , где  $M_D(k)$  – число благоприятных исходов события ( $U = k$ ), т. е. все варианты размещения частиц в схеме, когда в части ячеек по  $k$  частиц, а в остальных ячейках больше, чем по  $k$  частиц. Число  $M_D(k)$  определяется по процедуре их перечисления: при заданном по (1) числе  $k$  при всех допустимых по (2) и (3) значениях  $i \in [l, L]$ , считая, что во всех  $n$  ячейках уже находится по  $k$  частиц, размещаем  $(r - nk)$  остальных частиц по любым  $(n - i)$  ячейкам без пустых известным из [4] числом  $N(r - nk, n - i)$  (в принятых там обозначениях) способами, определяющими при каждом значении  $i$  благоприятное число исходов события  $U = k$ .

Тогда

$$M_D(k) = \sum_{i=l}^L N(r - nk, n - i),$$

что и приводит к формуле (11).

Отсюда получаем вероятностное распределение с. в.  $\mu_k$  при заданном значении  $k$  с. в.  $U$ , т. е.

$$P(\mu_k = i/U = k) = (1/M_D(k))N(r - nk, n - i). \quad (12)$$

Тогда вероятностное распределение с. в.  $t_0$  снова находится по (6).  $\square$

Приведем числовой пример расчета вероятностных распределений приведенных характеристик.

**Пример 4.** Пусть  $n = 3$ ,  $r = 4$ . Общее число исходов схемы по [4]  $N^*(r, n) = 4$ ,  $k = 0$ ,  $[4/3] = \overline{0, 1}$ ; по (2) и (3) при  $k = 0$   $i = \overline{l, L}$ , где  $l = \max(1, 3 - 4) = 1$ ,  $L = 2$ , а при  $k = 1$   $i = \overline{l, L}$ , где  $l = \max(1, 6 - 4) = 2$ ,  $L = 2$ .

Для наглядности и проверки результатов расчетов в примере приведем граф полного перечисления исходов схемы на рисунке 4, где исходы будем задавать в виде перечня в возрастающем порядке уровней заполнения ячеек.

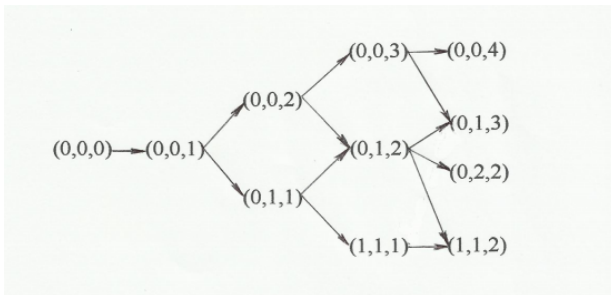


Рис. 4. Граф перечисления исходов схемы  $D$  в примере 4

Fig. 4. Enumeration graph of outcomes of the scheme  $D$  in example 4

Очевидно, при  $k = 0$ ,  $i = 1$  по уровням заполнения ячеек получаем два исхода:  $(0, 1, 3)$  и  $(0, 2, 2)$ , а при  $k = 0$ ,  $i = 2$  один исход:  $(0, 0, 4)$ , откуда по (11) при  $k = 0$  получаем

$$P(U = 0) = (1/4)(2 + 1) = 3/4 \quad (M_D(0) = 3),$$

а при  $k = 1$ ,  $i = 2$  получаем один исход:  $(1, 1, 2)$ , откуда по (11) получаем

$$P(U = 1) = 1/4 \quad (M_D(1) = 1).$$

В результате получено:  $P(U = 0) = 3/4$ ;  $P(U = 1) = 1/4$  – вероятностное распределение минимального уровня заполнений в схеме. Отсюда по (12) находим условные распределения для с. в.  $\mu_k$ :

$$P(\mu_0 = 1/U = 0) = 2/3;$$

$$P(\mu_0 = 2/U = 0) = 1/3;$$

$$P(\mu_1 = 2/U = 1) = 1.$$

Тогда число пустых ячеек  $\mu_0$  имеет по (6) распределение

$$P(\mu_0 = 0) = 1/4;$$

$$P(\mu_0 = 1) = 1/2;$$

$$P(\mu_0 = 2) = 1/4.$$

Все полученные результаты совпадают с расчетами по графу на рисунке 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н. Ю. Комбинаторное представление схемы размещения различных частиц по неразличимым ячейкам // Дискретная математика. 2017. Т. 29, № 1. С. 86–93. doi: 10.4213/dm1410
2. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ подстановок с фиксированным числом циклов // Труды КарНЦ РАН. 2020. № 7. С. 110–119. doi: 10.17076/mat1171
3. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы деления совокупности различных элементов на части заданных размеров без учета их порядка // Труды КарНЦ РАН. 2019. № 7. С. 63–69. doi: 10.17076/mat972
4. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В. Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.
5. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы домино и случай фиксированной минимальной цифры на фишке домино // Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 86–93. doi: 10.17076/mat562

Поступила в редакцию 09.12.2020

## REFERENCES

1. Enatskaya N. Yu. Kombinatornoe predstavlenie skhemy razmeshchenia razlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Combinatorial representation of the scheme of distinguishable particles arrangement to indistinguishable cells]. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics]. 2017. Vol. 29, no. 1. P. 126–135. doi: 10.4213/dm1410
2. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz podstanovok s fiksirovannym chislom tsiklov [Combinatorial analysis of the permutations with

a fixed number of cycles]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2020. No. 7. P. 110–119. doi: 10.17076/mat1171

3. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy deleniya sovokupnosti razlichimykh elementov na chasti zadannykh razmerov bez ucheta ikh poryadka [Combinatorial analysis of the scheme of division of a population of distinguishable elements into parts of given sizes irrespective of their order]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2019. No. 7. P. 63–69. doi: 10.17076/mat972

4. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V.* Analiz skhemy razmeshcheniya nerazlichimyykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Analysis of a scheme of allocating indistinguishable particles to indistinguishable cells]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 143–154.

5. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy domino i sluchai fiksirovannoi minimal'noi tsifry na fishke domino [Combinatorial analysis of the scheme of domino and case of fixed minimal figure on board of domino]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 86–93. doi: 10.17076/mat562

*Received December 09, 2020*

#### **СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:**

**Энатская Наталия Юрьевна**  
доцент Департамента прикладной  
математики, к. ф.-м. н.  
Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Московский институт  
электроники и математики  
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458  
эл. почта: nat1943@mail.ru  
тел.: +79037411345

#### **CONTRIBUTOR:**

**Enatskaya, Natalia**  
National Research University  
Higher School of Economics,  
Moscow Institute of Electronics and Mathematics  
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia  
e-mail: nat1943@mail.ru  
tel.: +79037411345

УДК 519.115:519.2

## КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК ОПРЕДЕЛЕННОГО ВИДА СЕРИЙ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия

Изучается схема перестановок размера  $n$  с  $r$  подряд идущими сериями возрастающих элементов. Решаются задачи нахождения количества исходов схемы, строится процедура их перечисления с использованием  $r$  последовательных схем сочетаний набора разных составов серий растущих номеров элементов перестановок, решается задача нумерации для исходов схемы и обсуждается их моделирование.

Ключевые слова: схема перестановок; схема сочетаний; серия растущих номеров элементов.

### N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME FOR A CERTAIN TYPE OF SERIES

The article deals with a permutation scheme of size  $n$  with  $r$  successive series of increasing elements. I solve the problems of finding the number of outcomes of the scheme, and design the procedure for their enumeration using  $r$  successive schemes of combinations of an array of different compositions of series of increasing serial numbers of permutation elements. The numbering problem for outcomes of the scheme is solved, and their simulation is discussed.

Key words: permutation scheme; combination scheme; series of increasing serial numbers of elements.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается схема перестановок со всеми  $r$  подряд идущими с ее начала заданных размеров сериями элементов, где *сериями* будем называть последовательности заданных размеров  $> 1$  возрастающих элементов перестановки. Последовательность убывающих элементов в конце перестановки будем называть ее *хвостом* (элементы хвоста не могут располагаться по-другому, т. к. иначе там возникнут серии).

Пространство элементарных исходов схемы состоит из части равновероятных исходов схе-

мы перестановок (см. [4]), удовлетворяющих заданным последовательным размерам и расположению серий, а каждый исход нашей схемы является исходом схемы перестановок, поэтому вероятность появления исходов нашей схемы среди всех исходов схемы перестановок определяется отношением соответствующих численностей их исходов.

Решаются задачи нахождения количества исходов схемы, строится процедура их перечисления с использованием последовательных зависимых схем сочетаний набора разных составов серий с определенными ограничениями, диктуемыми возможностью существова-

ния схемы, решается задача нумерации для исходов схемы и обсуждается их моделирование.

Введем необходимые начальные определения и обозначения данных параметров схемы: для краткости номера элементов перестановки будем иногда называть элементами;  $n$  – размер изучаемой перестановки;  $r$  – число серий возрастающих ее элементов,  $n \geq 2r$ ;  $l = \overline{1, r}$ ;  $k_l$  – длина  $l$ -й серии,  $k_l > 1$ ,  $\sum_{l=1}^r k_l \leq n$ ;  $M_l$  – максимальное значение элемента в  $l$ -й серии;  $S_l$  – последовательность элементов с 1-й по  $l$ -ю серию.

Серия называется *промежуточной*, если  $1 \leq l < r$ ; при  $l = r$  – *завершающей*, если хвоста нет, в противном случае – *незавершающей*, при  $l = 1$  – *первой*, а при  $l = r$  – *последней*.

В основе анализа схемы лежит прямое перечисление ее исходов, использующее соответствующие результаты схем сочетаний [3] и обобщенных схем последовательных действий [1] (действиями здесь являются последовательные зависимые наборы серий, начиная с первой) с учетом специфики – ограничений рассматриваемой схемы, которые здесь приведем в виде очевидных утверждений, и это будет служить аргументацией дальнейших комбинаторных рассуждений и выводов:

- 1) длина серии  $> 1$ ;
- 2) при  $\sum_{i=1}^r k_i = n$  перестановка состоит только из  $r$  серий заданных размеров;
- 3) при  $\sum_{i=1}^r k_i < n$  перестановка состоит из  $r$  серий заданных размеров, идущих подряд, после которых стоят остальные элементы в убывающем порядке – хвост перестановки;
- 4) хвост не может содержать элемент  $n$ , т. к. в противном случае он (как убывающая последовательность) должен начинаться с  $n$ , а тогда (как максимальный элемент) он должен войти в последнюю серию, поэтому хвост должен начинаться со своего наибольшего элемента, меньшего последнего в последней серии (в частности, при  $r = 1$  для первой-последней серии заданной длины  $k_1 < n$  она должна заканчиваться числом  $n$ , а в случае  $k_1 = n$  такая перестановка одна:  $(1, 2, \dots, n)$ );
- 5)  $i$ -я промежуточная серия а) не может содержать со своими предшествующими сериями, составляющими вместе множество элементов  $S_i$ , все элементы от 1 до  $M_i$  (т. е.  $\{1, 2, \dots, M_i\} \notin S_i$  или  $\sum_{j=1}^i k_j < M_i$ ), т. к. иначе для следующей серии не найдется первый элемент  $< M_i$ ; б) она

не может состоять только из элементов  $> M_{i-1}$ , т. к. иначе для нее не найдется первый элемент  $< M_{i-1}$ ;

- б) последняя серия содержит максимальный элемент из не вошедших к ее набору в предыдущие серии, т. к. если она завершающая, то это очевидно из того, что в нее входят все остальные элементы, а если она незавершающая, то хвост перестановки, как убывающая последовательность, должен с него начинаться, но это невозможно, т. к. тогда этот элемент должен относиться к последней серии;
- 7) для последней завершающей серии заданной длины  $k_r$  при  $\sum_{i=1}^r k_i = n$  выполняется условие  $\{1, 2, \dots, M_r\} \in S_r$ , тогда такая серия – единственная и имеет вид последовательности всех ее не вошедших в предыдущие серии возрастающих элементов;
- 8) для последней незавершающей серии заданной длины  $k_r$  при  $\sum_{i=1}^r k_i < n$ , составляющих вместе множество элементов  $S_r$ , все элементы – от 1 до  $M_r$ , т. е.  $\{1, 2, \dots, M_r\} \notin S_r$  или  $\sum_{i=1}^r k_i < M_r$ , т. к. иначе для хвоста не найдется первый элемент  $< M_r$ .

Перечисление исходов схемы с вычислением их числа будем производить последовательным набором составов серий заданных размеров в заданном порядке по схемам сочетаний с ограничениями, обеспечивающими существование исходов схемы, обсужденными выше, с однозначным добавлением хвоста перестановки. По [1] для анализа схемы по предлагаемым направлениям достаточно определить пошаговые пучковые структуры графа перечисления исходов схемы по мере совершения последовательных действий – наборов серий. Поэтому в общем случае будем находить в качестве размеров пучков на каждом  $i$ -м шаге числа вариантов наборов  $i$ -х серий в зависимости от уже имеющихся предыдущих серий.

Введем обозначения:  $T_i$  и  $T_i^*$  – схемы перечисления составов серий после  $i$ -й итерации, если она последняя или промежуточная соответственно;  $N_i$  – число исходов в  $i$ -й итерации,  $\{N^{(i)}\} = (N_1^{(i)}, \dots, N_{N_{i-1}}^{(i)})$  – пучковая структура  $i$ -й итерации. Считаем  $N_0 = 1$ , откуда  $N^{(1)} = (N_1^{(1)})$ , а  $N_i = \sum_{j=1}^{N_{i-1}} N_j^{(i)}$ .

Для наглядности анализа и ссылок на соответствующие общие вышеприведенные закономерности изучим подробно случаи  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r > 2$ , где различие размеров пучков внутри итерации проявляется при  $r > 1$ .

## 1. АНАЛИЗ СХЕМЫ ПРИ $r = 1$

### 1.1. Перечисление исходов схемы и вычисление их числа

При  $k_1 = n$  одна перестановка  $1, 2, \dots, n$  является исходом нашей схемы.

При  $k_1 < n$  исход схемы состоит из двух наборов элементов подряд: возрастающих элементов первой серии и убывающих – хвоста перестановки.

По 4) и 7) из введения при  $k_1 < n$  серия содержит элемент  $n$ , а остальные ее элементы набираются всеми равновероятными способами (см. [3]) по схеме сочетаний (схема  $T_1$ ) с числом вариантов  $N_1 = C_{n-1}^{k_1-1}$ , к каждому из которых однозначно дописывается элемент  $n$  и хвост перестановки из остальных элементов в убывающем порядке. Число исходов схемы  $N = N_1 = C_{n-1}^{k_1-1}$ , т. к. первая серия однозначно определяет исход схемы.

### 1.2. Задача нумерации (ЗН)

**Прямая ЗН.** Пусть дан номер исхода схемы  $N^*$  и  $k_1 < n$ . Требуется найти его вид  $R^*$ .

#### Шаги решения:

- 1) по решенной в [3] ЗН по  $N^* = N_1^*$  – номеру исхода схемы сочетаний получаем из элементов без  $n$  вид  $R_1^*$  исхода схемы  $T_1$ ;
- 2) добавляя к результату 1) сначала элемент  $n$ , а потом все остальные элементы, не вошедшие в исход схемы  $T_1$ , в убывающем порядке, получаем искомым вид исхода  $R^*$ .

**Обратная ЗН.** Пусть дан вид исхода схемы  $R^*$ . Требуется найти его номер  $N^*$ .

#### Шаги решения:

- 1) первые  $k_1$  чисел из  $R^*$  с исключением элемента  $n$  дают нам вид  $R_1^*$  исхода схемы сочетаний  $T_1$  из элементов  $1, 2, 3, \dots, n-1$ ;
- 2) по решенной ЗН в [3] для схемы сочетаний из результата 1) получаем его номер, который совпадает с искомым номером исхода схемы  $N^*$  в силу однозначно определенного исходом схемы  $T_1$  видом хвоста.

Покажем решение ЗН на примере.

**Пример 1.** Пусть  $n = 5$ ,  $k_1 = 4$ . Приведем по [3] граф полного перечисления исходов схемы для визуальной проверки алгоритмического решения ЗН. Число исходов схемы по п. 1.1  $N = C_4^3 = 4$ .

$R_1^*$	$R^*$	$N^*$
(123)	→ (12354)	1
(124)	→ (12453)	2
(134)	→ (13452)	3
(234)	→ (23451)	4

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы в примере 1

Fig. 1. Enumeration graph of outcomes of the scheme in example 1

**Прямая ЗН.** Пусть  $N^* = 4$ , найти его вид  $R^*$ .

#### Шаги решения:

- 1)  $N^* = 4 \Rightarrow R_1^* = (2, 3, 4)$ ;
- 2)  $R^* = (2, 3, 4, 5, 1)$ ,

что совпадает с результатом по рис. 1.

**Обратная ЗН.** Пусть  $R^* = (2, 3, 4, 5, 1)$ , найти его номер  $N^*$ .

#### Шаги решения:

- 1)  $R_1^* = (2, 3, 4)$ ;
- 2)  $R_1^* \Rightarrow N^* = 4$ ,

что совпадает с результатом по рис. 1.

## 2. АНАЛИЗ СХЕМЫ ПРИ $r = 2$ . ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИХ ЧИСЛА

Исход схемы состоит из наборов подряд идущих возрастающих элементов первой, второй серий и убывающих – хвоста перестановки, если он есть, причем последний однозначно определяется первыми двумя сериями.

Первая серия размера  $k_1$  по 5) из введения набирается всеми способами по схеме сочетаний с запретом одной – подряд идущих начальных номеров элементов числом способов  $N_1 = C_n^{k_1} - 1$  (схема  $T_1^*$ ); вторая серия размера  $k_2$ , если хвоста нет, однозначно определяется первой и число исходов  $N = N_1 = N_2$  или, если хвост есть, должна (по 6) из введения) заканчиваться максимальным из оставшихся элементов после набора первой серии, среди которых выбираются ее остальные элементы по схеме  $T_2$  сочетаний с исходами ( $T_2$ ), начинающимися каждый с одного из оставшихся к ее набору элементов  $< M_1$  всеми способами, т. е. из элементов множества  $\{\bar{d}\} = \{1, 2, \dots, M_1\} - S_1$  мощности  $d$  числом способов

$$N_2 = \sum_{(T_1^*)} \sum_{m=1}^d C_{n-k_1-1-m}^{k_2-2} \quad (1)$$

по операции суммы по перечислению исходов схемы  $T_1^*$  с вариациями возрастающих значений из множества  $\{\bar{d}\}$  первых фиксированных элементов второй серии в количестве  $d$ . Тогда число исходов схемы  $N = N_2$ , т. к. хвост перестановки однозначно определяется составами серий.

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы задается на первой итерации размером единственного пучка ( $N_1$ ), а второй – значениями слагаемых внутренней суммы (1), соответствующими всем разным фиксациям по внешней сумме составов первой серии.

Результат решения задачи нумерации в схеме при известной пучковой структуре графа перечисления ее исходов приведен в [1].

Дадим числовой пример перечисления и расчета числа исходов схемы и пучковой структуры ее графа перечисления исходов.

**Пример 2.** Пусть  $n = 7$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ .

Вычислим значения  $N_1 = C_7^2 - 1 = 20$  и  $N_2 = N$ .

Приведем по [3] для визуальной проверки расчетов (и в силу большого размера) начальный фрагмент графа перечисления всех исходов схемы для первых двух составов первой серии: (13) и (14) исходов перестановки.

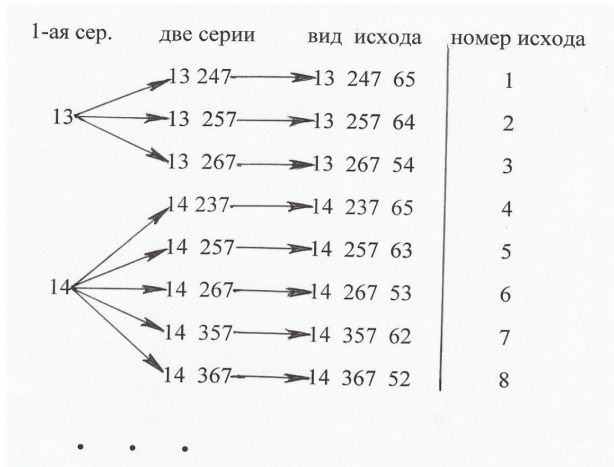


Рис. 2. Фрагмент графа перечисления исходов к примеру 2

Fig. 2. A fragment of the enumeration graph of outcomes for example 2

При первой серии (13) получаем  $\{\bar{d}\} = (2)$ , откуда  $d = 1$ ; при второй серии (14) получаем  $\{\bar{d}\} = (2, 3)$ , откуда  $d = 2$ . Найдем численности исходов второй итерации  $N_1^{(2)}$ ,  $N_2^{(2)}$  по данному фрагменту при приведенных фиксациях состава первой серии, представляющие размеры пучков его второй итерации и состав-

ляющие в сумме число исходов всего фрагмента  $N_2$ .

Из (1) находим  $N_1^{(1)} = C_{7-2-1-1}^{3-2} = 3$ ;  $N_2^{(1)} = C_{7-2-1-1}^{3-2} + C_{7-2-1-2}^{3-2} = 5$ , откуда  $N = 3 + 5 = 8$ . А пучковая структура графа при начальной пучковой структуре фрагмента (2) состоит для первой итерации из (3,5), а для второй – (1,1,1,1,1,1,1).

### 3. АНАЛИЗ СХЕМЫ ПРИ $r > 2$

#### 3.1. Перечисление исходов схемы и вычисление их числа

Исход схемы состоит из  $r$  наборов размера  $(k_1, \dots, k_r)$  возрастающих номеров элементов каждой из подряд идущих  $r$  серий и убывающих элементов хвоста перестановки при  $\sum_{i=1}^r k_i \leq n$  или его отсутствии при  $\sum_{i=1}^r k_i = n$ .

Из комбинаторного разбора схемы во введении следует логика перечисления исходов схемы как исходов обобщенной схемы последовательных действий – итераций (см. [1]) наборов серий с добавлением хвоста перестановки и определения числа вариантов всех исходов нашей схемы как суммы размеров пучков предпоследней итерации в графе перечисления ее исходов.

Здесь все серии являются промежуточными, кроме  $r$ -й.

Первая серия размера  $k_1$  набирается из  $n$  элементов всеми способами по схеме сочетаний  $T_1^*$  с запретом (по 5) из введения) одной – подряд идущих начальных элементов – числом способов:

$$N_1 = C_n^{k_1} - 1;$$

$i$ -е серии при  $i = \overline{2, r-1}$  набираются из оставшихся элементов для каждой по перечислению всеми вариантами составов предыдущих серий по схеме  $T_{i-1}^*$  варьированием минимального элемента в каждой по их возрастанию из множества  $\{\bar{d}\}$ , введенного в п. 2 с заменой здесь  $S_1$  на  $S_{i-1}$  числом способов:

$$N_i = \sum_{(T_{i-1}^*)} \sum_{m=1}^d \left( C_{n-\sum_{j=1}^{i-1} k_j - m}^{k_i - 1} - I(A^*) \right) \quad (2)$$

по операции суммы по перечислению исходов схемы  $T_{i-1}^*$  с вариациями возрастающих значений из множества  $\{\bar{d}\}$  первых фиксированных элементов  $(i-1)$ -й серии в количестве  $d$ , и где событие  $A = (\sum_{j=1}^i k_j = M_i)$ ,  $I(A^*) = 1$  при  $A^* = A$ ;  $I(\bar{A}^*) = 0$  при  $A^* = \bar{A}$ , обеспечивающее выполнение свойства 5) из введения для промежуточной серии.



Последняя  $r$ -я серия набирается числом вариантов, рассчитываемых аналогично промежуточной по (2), с заменой  $i$  на  $r$ , – суммирования во внешней сумме (2) по перечислению по схеме  $T_{r-1}^*$  и – слагаемого во внутренней сумме (2) на

$$C_{n-\sum_{j=1}^{r-1} k_j - m - 1}^{k_r - 2}$$

т. к. при наборе состава последней серии он должен включать максимальный из оставшихся к ее набору элемент. В результате получаем для числа  $N_r$  вариантов ее набора следующие формулы:  $N_r = N_{r-1}$ , если хвоста нет, или, если он есть,

$$N_r = \sum_{(T_{i-1}^*)} \sum_{m=1}^d \left( C_{n-\sum_{j=1}^{r-1} k_j - m - 1}^{k_i - 2} - I(A^*) \right) \quad (3)$$

с числом исходов схемы  $N = N_r$ , т. к. хвост перестановки однозначно определяется составами  $r$  серий, или  $N = N_r = N_{r-1}$ , если хвоста нет.

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы задается на начальной итерации размером единственного пучка ( $N_1$ ), а остальных – значениями слагаемых внутренней суммы (2) для промежуточных итераций или (3) – для последней итерации, соответствующих всем разным фиксациям по внешней сумме составов серий.

Приведем числовой пример перечисления и расчета числа исходов схемы и пучковой структуры ее графа перечисления исходов по одной первой серии.

**Пример 3.** Пусть  $n = 7$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 2$  и пусть первая серия есть (1,5). Тогда допустимые наборы второй серии легко визуальнo перечисляются: (2,3,6), (2,3,7), (2,4,6), (2,4,7), (2,6,7), (3,4,6), (3,4,7), (3,6,7), (4,6,7). Число исходов  $N_3 = N_2$ , т. к. последняя завершающая серия однозначно определяется первыми двумя при данных примера  $k_1 + k_2 + k_3 = n$ . Таким образом, из первой серии (1,5) имеем следующие 9 исходов нашей схемы перестановок: (15 236 47), (15 237 46), (15 246 37), (15 247 36), (15 267 34), (15 346 27), (15 347 26), (15 367 24), (15 467 23), где серии разделены промежутками и перечисляются без запятых.

Вычислим теперь число исходов фрагмента схемы  $N = N_2$  с заданной первой серией (15) по формуле (3):

$$\begin{aligned} & (C_{7-2-1}^{3-1} - 1) + (C_{7-2-2}^{3-1} - 0) + (C_{7-2-3}^{3-1} - 0) \\ & = (C_4^2 - 1) + C_3^2 + C_2^2 = 9, \end{aligned} \quad (4)$$

что совпадает с полученным выше результатом.

Пучковая структура фрагмента графа по итерациям при начальной структуре (1) на первой итерации – (5,3,1), а на второй – (1,1,1,1,1,1,1,1,1).

### 3.2. Задача нумерации (ЗН)

Исходы нашей схемы являются результатом реализации обобщенной схемы последовательных действий, для которой результаты решения ЗН приведены в [1] по известной из п. 3.1 пучковой структуре графа перечисления ее исходов, определяемой числами вариантов этих действий – наборов серий перестановок, и вычисляются по п. 3.1 алгоритмически. В частном случае п. 1 приведено решение ЗН в прямой и обратной постановках с численным примером.

### 3.3. Вероятность появления исходов схемы в схеме перестановок и вероятностное распределение исходов схемы

При равновероятном распределении исходов схемы перестановок вероятность  $p$  появления исходов нашей схемы среди ее исходов равна отношению численности исходов нашей схемы, определенной формулой (4), ко всем  $n!$  исходам схемы перестановок, т. е.  $p = N/n!$ .

Допустимыми исходами схемы перестановок для нашей схемы являются перестановки с заданным числом  $r$  заданного вида серий, остальные – недопустимыми.

Для определения вероятностного распределения исходов нашей схемы (см. [2]) в графе перечисления исходов схемы перестановок для учета ограничений, связанных с заданным видом исходов нашей схемы, удаляем траектории, ведущие к недопустимым в ней итоговым исходам с пропорциональным пересчетом итерационных переходных вероятностей из всех промежуточных состояний процесса с иллюстрацией на нижеследующем численном примере.

**Пример 4.** Пусть  $n = 4$ ,  $r = 2$ . В порядке перечисления всех исходов схемы перестановок по МГ (см. [4, 5]) перечислим исходы перестановок с данным числом серий  $r = 2$ , это исходы 2314, 2413, 3412, 1342, 1423. Тогда после удаления недопустимых исходов с  $r \neq 2$  и пропорциональным пересчетом вероятностей итерационных переходов для оставшихся состояний получим граф перечисления исходов нашей схемы, по которому вычисляем вероятности итоговых исходов схемы:  $P(2314) = P(2413) = (1/2)(1/2) = 1/4$ ,  $P(3412) = P(1342) = P(1423) = (1/2)(1/3) = 1/6$ .

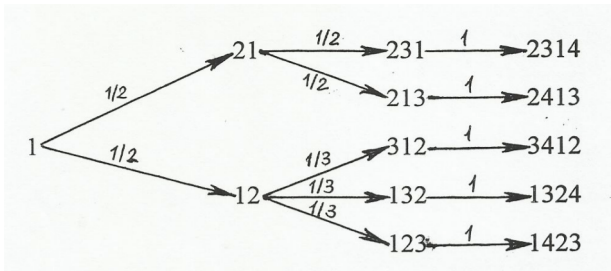


Рис. 3. Граф перечисления схемы при  $r = 2$   
 Fig. 3. Enumeration graph of the scheme at  $r = 2$

Проверка на распределение вероятностей:  
 $2/4 + 3(1/6) = 1$ .

### 3.4. Моделирование исходов схемы

Предлагается при найденном выше числе исходов схемы проводить моделирование ее исхода методом (см. [1]), состоящим в разыгрывании его случайного номера с полученным по п. 3.3 его вероятностным распределением, и далее находить вид исхода нашей схемы с этим номером по результату решения прямой ЗН по п. 3.2.

## REFERENCES

1. Enatskaya N. Yu. Analiz kombinatornykh skhem v doasimptoticheskoi oblasti izmeneniya parametrov [Analysis combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameters]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2018. No. 7. P. 117–133. doi: 10.17076/mat750
2. Enatskaya N. Yu. Veroyatnostnye modeli kombinatornykh skhem [Probabilistic models of combinatorial schemes]. *Vestnik YuUrGU MMP* [Bull. South Ural St. Univ.] 2020. Vol. 13, no. 3. P. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312
3. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of

## ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // Труды КарНЦ РАН. 2018. № 7. С. 117–133. doi: 10.17076/mat750
2. Энатская Н. Ю. Вероятностные модели комбинаторных схем // Вестник ЮУрГУ ММП. 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. doi: 10.14529/mmp200312
3. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.
4. Энатская Н. Ю., Колчин А. В. Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.
5. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 8. С. 15–21.

Поступила в редакцию 09.12.2020

the combination scheme]. *Promyshlennyye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

4. Enatskaya N. Yu., Kolchin A. V. Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of the permutation scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 80–86.

5. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, and Diagnostics]. 2016. No. 8. P. 15–21.

Received December 09, 2020

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна  
 доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики  
 ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458  
 эл. почта: nat1943@mail.ru  
 тел.: +79037411345

## CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia  
 National Research University  
 Higher School of Economics,  
 Moscow Institute of Electronics and Mathematics  
 34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia  
 e-mail: nat1943@mail.ru  
 tel.: +79037411345

## ХРОНИКА

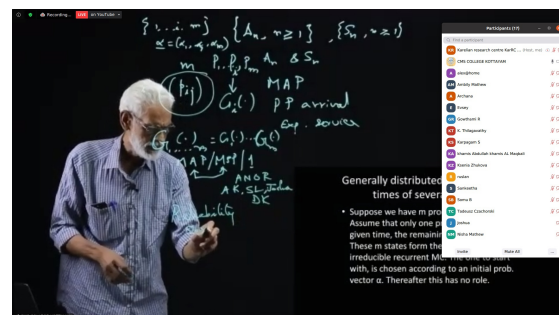
### ВТОРОЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР SMARTY – STOCHASTIC MODELING AND APPLIED RESEARCH OF TECHNOLOGY

(Петрозаводск, 16–20 августа 2020 г.)

С 16 по 20 августа 2020 г. в Институте прикладных математических исследований КарНЦ РАН прошел Второй международный семинар по стохастическому моделированию и прикладным исследованиям технологических систем – The Second International Workshop on Stochastic Modeling and Applied Research of Technology: SMARTY 2020. Организаторами семинара выступили ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводский государственный университет и CMS College Kottayam (Индия). В рамках семинара были представлены работы как теоретической, так и прикладной направленности по ключевым направлениям прикладной теории вероятностей, теории массового обслуживания, стохастического моделирования, теории игр, искусственного интеллекта. Основной акцент в программе семинара был сделан на приложениях указанных методов к широкому спектру технических систем, в первую очередь – систем цифровой среды, а также технологии производства.

Как и в 2018 году, семинар 2020 года прошел в гибридном формате, что позволило принять участие многим ученым. В ходе семинара свои доклады с использованием видеоконференц-связи представили специалисты из России, США, Канады, Индии, Израиля, Австрии и Швеции. Ключевыми докладчиками семинара 2020 года стали Jim Dai (Institute for Data and Decision Analytics iDDA, The Chinese University of Hong Kong, Shenzhen), Miklós Telek (Department of Networked Systems and Services, Technical University of Budapest), Konstantin Avrachenkov (Sophia Antipolis, INRIA). При этом «команда» исследователей из Петрозаводска имела возможность личного общения в стенах гостеприимного института.

Петрозаводск был выбран местом проведения семинаров SMARTY не случайно. Научные школы по прикладной теории вероятностей, теории игр, активное участие аспирантов и студентов, широкие международные связи – все это позволяет проводить мероприятия на высоком научном уровне.



Завершением семинара 20 августа стала молодежная школа SMARTY Youth Camp, в рамках которой студенты, молодые исследователи и все желающие могли прослушать тематические лекции, представить свои работы и получить комментарии ведущих специалистов.

Для привлечения широкой аудитории слушателей семинар был представлен в социальных медиа (группа в социальной сети ВКонтакте <https://vk.com/smarty.karelia> и YouTube канал SMARTY Karelia). «Живая» трансляция выступлений и организация удаленных докладов в режиме видеоконференции позволили преодолеть ограничения физического присутствия и увеличить число участников. В течение трех рабочих дней семинара представлен 31 ключевой, приглашенный и секционный доклад. В качестве рабочего языка был выбран английский, что позволило активно вовлечь в обсуждение всех участников семинара SMARTY.

Традиционно материальным результатом мероприятия стал опубликованный сборник трудов семинара на платформе CEUR (<http://ceur-ws.org/Vol-2792/>, индексируется в Scopus), а также видеозаписи пленарных докладов, лекций и выступлений участников на канале YouTube SMARTY Karelia.



Успех семинара стал возможен благодаря неравнодушию и личному участию членов локального оргкомитета Т. Е. Морозовой, Р. С. Некрасовой, А. В. Бородиной, Н. Н. Никитиной, О. В. Лукашенко, Р. В. Разумчика, К. А. Жуковой, И. В. Пешковой и многих других.

В дальнейшем планируется проводить семинар SMARTY на регулярной основе по четным годам. В этой связи хочется отметить, что семинар SMARTY 2022 года принят в число сателлитных мероприятий Международного конгресса математиков 2022, который во второй раз в истории пройдет в России, в г. Санкт-Петербурге. В 2021 году, юбилейном для Карельского научного центра РАН, планируется проведение молодежной школы SMARTY Youth Camp 2021.

*А. С. Румянцев*

## УТРАТЫ

### ВАЛЕРИЙ ДМИТРИЕВИЧ КУКИН (1942–2021)



26 февраля 2021 г. ушел из жизни старейший сотрудник Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН Валерий Дмитриевич Кукин.

Валерий Дмитриевич родился 26 февраля 1942 года в г. Вязники Владимирской области в семье летчика и учительницы. Окончив среднюю школу с золотой медалью, поступил в Горьковский университет им. Н. И. Лобачевского на механико-математический факультет. Вузовская специализация – теория функций комплексного переменного. После окончания университета с 1966 г. работал по специальности (математик), стаж научной работы 46 лет, из них 6 лет – в Карельском институте лесной промышленности и самые плодотворные 40 лет – в Карельском филиале АН СССР (позже – КарНЦ РАН).

За время работы на научном поприще В. Д. Кукин создал ряд математических моделей и их программных реализаций, среди которых: имитационная модель производственного процесса лесозаготовительного предприятия; модель оптимальной расстановки опор для раскряжевки хлыстов; модель дискретной сортировки твердых пород по размерам фракций и методика ее оптимизации; имитационная модель динамики взаимодействия тяговых механизмов с грунтом для обоснования параметров проектируемых машин. В течение ряда лет участвовал в полевых исследованиях на лесных дорогах Карелии с целью определения нормативных данных для автоматизации проектирования сетей дорог низких категорий. Принимал участие в постановке и решении на ЭВМ задач прикладного содержания для Института биологии КарНЦ РАН. В частности, была построена регрессионная имитационная модель свето- и газообмена для парниковых культур. Под руководством Г. А. Борисова принимал участие в разработке систем автоматизированного проектирования осушительных каналов и сетей лесовозных дорог. Позднее совместно с В. И. Кузиной разработаны: модель очередности освоения больших лесосырьевых баз для новых экономических условий в России; модель транспортной сети, метод ее оптимизации и программное обеспечение на основе решения потоковой задачи Штейнера.

Основные направления научных исследований В. Д. Кукина лежат в области моделирования поисковых процессов, дискретной оптимизации. Получены важные результаты в алгоритмическом решении потоковой задачи Штейнера. Разработанные методы применялись для оптимизации коммуникационных сетей (дорог и линий электропередачи) на стадии проектирования. В последние годы созданы: эволюционный метод решения потоковой задачи Штейнера; способ кодирования топологии дерева; генетические операторы; компо-

зитный алгоритм. В этой разработке применяется не имеющий аналогов алгоритм исчерпывающего и избыточного перебора полных топологий.

В. Д. Кукин читал лекции по теории массового обслуживания студентам ПетрГУ, неоднократно был руководителем производственной практики и дипломных работ. Совместно с В. И. Кузиной подготовил серию справочно-методических пособий для пользователей ПК (текстовый процессор «Лексикон», MS-DOS версий 3.30, 5.0, 6.2–6.22) и проводил соответствующие практические занятия с сотрудниками Карельского научного центра РАН.

На протяжении всех лет учебы и работы В. Д. Кукин активно участвовал в общественной жизни. Со школьных лет руководил выпуском стенгазет и фотомонтажей, готовил тематические выпуски, посвященные великим композиторам, проводил музыкальные лекции и литературные викторины. Валерий Дмитриевич был организатором соревнований отдела/института по настольному теннису, выступал в командных соревнованиях различного уровня (вплоть до всесоюзных Академиад), а также в личных – городских и республи-

канских. Его хобби – туризм, настольный теннис, музыка (он окончил музыкальную школу по классу фортепиано), литературоведение (личная библиотека насчитывает свыше 3000 томов), фотография, филателия. В. Д. Кукин награжден Почетной грамотой Президиума РАН и профсоюза работников РАН.

В списке его научных трудов более 50 печатных работ. До последнего дня Валерий Дмитриевич занимался научной деятельностью. Уже после его ухода из жизни вышло учебное пособие «Потоковая задача Штейнера. Эволюционный подход» (на основе серии авторских публикаций в журнале «Известия РАН. Теория и системы управления»), в котором излагается эволюционный подход к решению дискретно-непрерывной потоковой задачи Штейнера для транспортной сети, обобщаются результаты исследований, проведенных автором во время работы в ИПМИ КарНЦ РАН.

Друзья, коллеги и ученики Валерия Дмитриевича будут хранить самую добрую память о нем.

*Коллектив лаборатории МПТС ИПМИ  
КарНЦ РАН*

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ Серия «Математическое моделирование и информационные технологии»

(требования к работам, представляемым к публикации  
в «Трудах Карельского научного центра Российской академии наук»)

«Труды Карельского научного центра Российской академии наук» (далее – Труды КарНЦ РАН) публикуют результаты завершённых оригинальных исследований в различных областях современной науки: теоретические и обзорные статьи, сообщения, материалы о научных мероприятиях (симпозиумах, конференциях и др.), персоналии (юбилеи и даты, потери науки), статьи по истории науки. Представляемые работы должны содержать новые, ранее не публиковавшиеся данные.

Статьи проходят обязательное рецензирование. Решение о публикации принимается редакционной коллегией серии или тематического выпуска Трудов КарНЦ РАН после рецензирования, с учетом научной значимости и актуальности представленных материалов. Редакционные коллегии серий и отдельных выпусков Трудов КарНЦ РАН оставляют за собой право возвращать без регистрации рукописи, не отвечающие настоящим правилам.

При получении редакцией рукопись регистрируется (в случае выполнения авторами основных правил ее оформления) и направляется на отзыв рецензентам. Отзыв состоит из ответов на типовые вопросы «Анкет» и может содержать дополнительные расширенные комментарии. Кроме того, рецензент может вносить замечания и правки в текст рукописи. Авторам высылаются электронная версия «Анкет» и комментарии рецензентов. Доработанный экземпляр автор должен вернуть в редакцию вместе с первоначальным экземпляром и ответом на все вопросы рецензента не позднее, чем через месяц после получения рецензии.

Журнал имеет полноценную электронную версию на базе Open Journal System (OJS), позволяющую перевести предоставление и редактирование рукописи, общение автора с редколлегией серий и рецензентами в электронный формат и обеспечивающую прозрачность процесса рецензирования при сохранении анонимности рецензентов (<http://journals.krc.karelia.ru/>).

Редакционный совет журнала «Труды Карельского научного центра РАН» (Труды КарНЦ РАН) определил для себя в качестве одного из приоритетов полную открытость издания. Это означает, что пользователям на условиях свободного доступа разрешается: читать, скачивать, копировать, распространять, печатать, искать или находить полные тексты статей журнала по ссылке без предварительного разрешения от издателя и автора. Учредители журнала берут на себя все расходы по редакционно-издательской подготовке статей и их опубликованию.

Содержание номеров Трудов КарНЦ РАН, аннотации и полнотекстовые электронные варианты статей, а также другая полезная информация, включая настоящие Правила, доступны на сайтах – <http://transactions.krc.karelia.ru>; <http://journals.krc.karelia.ru>

Почтовый адрес редакции: 185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11, КарНЦ РАН, редакция Трудов КарНЦ РАН. Телефон: (8142) 762018.

### ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСИ

Статьи публикуются на русском или английском языке. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.

Статьи должны быть подписаны всеми авторами.

Объем рукописи (включая таблицы, список литературы, подписи к рисункам, рисунки) не должен превышать: для обзорных статей – 30 страниц, для оригинальных – 25, для сообщений – 15, для хроники и рецензий – 5–6. Объем рисунков не должен превышать 1/4 объема статьи. Рукописи

большого объема (в исключительных случаях) принимаются при достаточном обосновании по согласованию с ответственным редактором.

Рукописи присылаются в электронном виде, а также в двух экземплярах, напечатанных на одной стороне листа формата А4. Все страницы, включая список литературы и подписи к рисункам, должны иметь сплошную нумерацию в нижнем правом углу. Страницы с рисунками не нумеруются.

#### **ОБЩИЙ ПОРЯДОК РАСПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТЕЙ СТАТЬИ**

Элементы статьи должны располагаться в следующем порядке: *УДК* курсивом на первой странице, в левом верхнем углу; заглавие статьи на русском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; инициалы, фамилии всех авторов на русском языке полужирным шрифтом; полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже на русском языке курсивом (если авторов несколько и работают они в разных учреждениях, то следует отметить арабскими цифрами соответствие фамилий авторов учреждениям, в которых они работают; если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно); аннотация на русском языке; ключевые слова на русском языке; инициалы, фамилии всех авторов на английском языке полужирным шрифтом; название статьи на английском языке заглавными буквами полужирным шрифтом; аннотация на английском языке; ключевые слова на английском языке; текст статьи (статьи экспериментального характера, как правило, должны иметь разделы: **Введение. Материалы и методы. Результаты и обсуждение. Выводы** либо **Заключение. Литература**); благодарности и указание источников финансирования выполненных исследований; списки литературы: с библиографическими описаниями на языке и алфавите оригинала (**Литература**) и транслитерированный в латиницу с переводом названий русскоязычных источников на английский язык (**References**).

Дополнительные сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью на русском и английском языке; полный почтовый адрес каждой организации (страна, город) на русском и английском языке; должности, ученые звания, ученые степени авторов; адрес электронной почты для каждого автора; телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

ЗАГЛАВИЕ СТАТЬИ должно точно отражать содержание статьи и содержать не более 8–10 значащих слов.

АННОТАЦИЯ должна быть лишена вводных фраз, содержать только главную информацию статьи, не превышать объем – 15 строк.

Отдельной строкой приводится перечень КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ. Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой, в конце фразы ставится точка.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ должны содержать сведения об объекте исследования с обязательным указанием латинских названий и сводок, по которым они приводятся, авторов классификаций и пр. Транскрипция географических названий должна соответствовать атласу последнего года издания. Единицы физических величин приводятся по Международной системе СИ. Желательна статистическая обработка всех количественных данных. Необходимо возможно точнее обозначать местонахождения (в идеале – с точным указанием географических координат).

ИЗЛОЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ должно заключаться не в пересказе содержания таблиц и графиков, а в выявлении следующих из них закономерностей. Автор должен сравнить полученную им информацию с имеющейся в литературе и показать, в чем заключается ее новизна. Следует ссылаться на табличный и иллюстративный материал так: на рисунки, фотографии и таблицы в тексте (рис. 1, рис. 2, табл. 1, табл. 2 и т. д.), фотографии, помещаемые на наклейках (рис. I, рис. II). Обсуждение завершается формулировкой основного вывода, которая должна содержать конкретный ответ на вопрос, поставленный во Введении. Ссылки на литературу в тексте даются номерами в квадратных скобках.

ТАБЛИЦЫ нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица имеет свой заголовок. Заголовки таблиц, заголовки и содержание столбцов, строк, а также примечания приводятся на русском и английском языках. Диаграммы и графики не дублировать таблицы. Материал таблиц должен быть понятен без дополнительного обращения к тексту. Все сокращения, использованные в таблице, должны быть пояснены в Примечании, расположенном под ней. При повторении цифр в столбцах нужно их повторять, при повторении слов – в столбцах ставить кавычки. Таблицы могут быть книжной или альбомной ориентации.



ПОДПИСИ К РИСУНКАМ приводятся на русском и английском языках, должны содержать достаточно полную информацию, для того чтобы приводимые данные могли быть понятны без обращения к тексту (если эта информация уже не дана в другой иллюстрации). Аббревиации расшифровываются в подрисуночных подписях, детали на рисунках следует обозначать цифрами или буквами, значение которых также приводится в подписях.

СОКРАЩЕНИЯ. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т. п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных.

БЛАГОДАРНОСТИ. В этой рубрике выражается признательность частным лицам, сотрудникам учреждений и фондам, оказавшим содействие в проведении исследований и подготовке статьи, а также указываются источники финансирования работы.

ЛИТЕРАТУРА. Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ Р 7.0.5–2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления ([http://www.bookchamber.ru/GOST\\_P\\_7.0.5.-2008](http://www.bookchamber.ru/GOST_P_7.0.5.-2008)). Список работ представляется в алфавитном порядке. Все ссылки даются на языке оригинала (названия на японском, китайском и других языках, использующих нелатинский шрифт, пишутся в русской транскрипции). Сначала приводится список работ на русском языке и на языках с близким алфавитом (украинский, болгарский и др.), а затем – работы на языках с латинским алфавитом. В списке литературы между инициалами ставится пробел.

ТРАНСЛИТЕРИРОВАННЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (References). Приводится отдельным списком, повторяя все позиции основного списка литературы. Описания русскоязычных работ указываются в латинской транслитерации, рядом в квадратных скобках помещается их перевод на английский язык. Выходные данные приводятся на английском языке (допускается транслитерация названия издательства). При наличии переводной версии источника можно указать ее библиографическое описание вместо транслитерированного. Библиографические описания прочих работ приводятся на языке оригинала. Для составления списка рекомендуется использование бесплатных онлайн-сервисов транслитерации, вариант BSI.

Внимание! С 2015 года каждой статье, публикуемой в «Трудах Карельского научного центра РАН», редакцией присваивается уникальный идентификационный номер цифрового объекта (DOI) и статья включается в базу данных Crossref. **Обязательным условием является указание в списках литературы DOI для тех работ, у которых он есть.**

**Электронные версии статей выпусков серии «Математическое моделирование и информационные технологии» принимаются в формате .tex (LaTeX 2ε) с использованием стилевого файла, который находится по адресу <http://transactions.krc.karelia.ru/section.php?id=755>. Статья в файле с расширением .pdf загружается на сайт журнала <http://journals.krc.karelia.ru>. Исходный файл с расширением .tex и необходимые рисунки загружаются на 4 шаге «Загрузка дополнительных файлов».**



**Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences**  
**No. 6, 2021**  
**“MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES”**

**TABLE OF CONTENTS**

D. A. Bespalov, Yu. L. Pavlov. ON THE MAXIMUM VERTEX DEGREE OF A CONDITIONAL INTERNET GRAPH. . . . .	5
K. V. Grudova. DIFFERENCE SCHEME OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CO <sub>2</sub> TRANSPORT IN SANDY FOREST SOIL. . . . .	13
A. V. Ivanov. ON METRIZATION OF THE FUNCTOR OF IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES. . . . .	20
A. S. Ivanova. CONTROLLED DYNAMICS IN THE PROBLEM OF PRESERVING THE STRUCTURE OF A TWO-SPECIES BIOCOMMUNITY . . . . .	26
A. N. Kirillov, I. V. Danilova. THE BEHAVIOR OF A POPULATION WHEN CHOOSING A PATCH: A ONE-DIMENSIONAL CASE . . . . .	35
M. M. Leri. DIAMETER OF POWER-LAW CONFIGURATION GRAPHS . . . . .	42
A. A. Nesterenko, V. M. Khametov. OPTIMAL STOPPING OF RANDOM WALK WITH EXPONENTIAL UTILITY FUNCTION . . . . .	49
Yu. L. Pavlov. ASYMPTOTICS OF THE NUMBER OF EDGES OF AN INTERNET GRAPH . . . . .	59
E. V. Khvorostyanskaya. ON THE LIMIT DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM TREE SIZE IN A GALTON – WATSON FOREST WITH A POWER-LAW DISTRIBUTION . . . . .	64
N. Yu. Enatskaya. PROBABILITY ANALYSIS OF THE SCHEMES OF PARTICLE ALLOCATION TO CELLS WITH A FIXED MINIMUM FILLING VALUE. . . . .	77
N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION SCHEME FOR A CERTAIN TYPE OF SERIES. . . . .	85
<b>CHRONICLE</b>	
A. S. Rumyantsev. The second International seminar SMARTY – Stochastic Modeling and Applied Research of Technology (Petrozavodsk, August 16–20, 2020) . . . . .	91
<b>BEREAVEMENTS</b>	
Valery D. Kukin (1942–2021) . . . . .	93
INSTRUCTIONS FOR AUTHORS . . . . .	95

Научный журнал

**Труды Карельского научного центра  
Российской академии наук**  
№ 6, 2021

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

*Печатается по решению Ученого совета  
Федерального исследовательского центра  
«Карельский научный центр Российской академии наук»*

Выходит 12 раз в год

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
Регистрационная запись ПИ № ФС 77-72429 от 28.02.2018 г.

Редактор А. И. Мокеева  
Компьютерная верстка М. М. Лери

Подписано в печать 21.06.2021. Дата выхода 30.06.2021. Формат 60x84<sup>1/8</sup>.  
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 7,5. Усл. печ. л. 11,6.  
Тираж 100 экз. Заказ 660. Цена свободная

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»  
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

Оригинал-макет: Редакция научного издания «Труды КарНЦ РАН»

Типография: Редакционно-издательский отдел КарНЦ РАН  
185003, г. Петрозаводск, пр. А. Невского, 50