Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2019. С. 63–69
DOI: 10.17076/mat972

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ДЕЛЕНИЯ СОВОКУПНОСТИ РАЗЛИЧИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЧАСТИ ЗАДАННЫХ РАЗМЕРОВ БЕЗ УЧЕТА ИХ ПОРЯДКА

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия

Решаются задачи прямого перечисления исходов схемы, нахождения их числа, задачи их нумерации и моделирования.

К л ю ч е в ы е с л о в а: деление совокупности на части; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE SCHEME OF DIVISION OF A POPULATION OF DISTINGUISHABLE ELEMENTS INTO PARTS OF GIVEN SIZES IRRESPECTIVE OF THEIR ORDER

The problems of a direct enumeration of the outcomes of the scheme, finding their number, problems of their numbering and modeling are solved.

K e y w o r d s: division of a population into parts; enumeration problem; modeling.

Введение

Изучается схема деления совокупности различимых элементов на части заданных размеров без учета их порядка. Решаются задачи явного перечисления всех исходов схемы, их нумерации во взаимно-однозначном соответствии с видом и моделирования. В качестве вспомогательной изучается по тем же направлениям частная схема деления совокупности различимых элементов на равные части без учета их порядка.

Рассматривается схема, близкая к классической схеме перестановок с повторением, возникающей при делении n различимых элементов на k различимых частей (групп) (в данном ниже порядке перечисления их размеров), численностями $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, что соответствует схеме размещений n различимых частиц по k различимым ячейкам с соответственно заданными уровнями их заполнения: $n_1, n_2, \ldots, n_k,\ (\sum_{i=1}^{k} n_i = n),\ n_i \geqslant 0$.

Для дальнейшего введем обозначения: s – число разных размеров заданных частей деления совокупности $\bar{n}$; t – максимальный размер части деления, μ_i – число частей размера i; $i = 1, 2, \ldots, t$.

В рассматриваемой здесь близкой схеме важен лишь состав частей деления совокупности без учета их порядка, что соответствует схеме размещения n различимых частиц по k неразличимым ячейкам с заданными уровнями их заполнения, перечисленными в возрастающем порядке: $n_1, n_2, \ldots, n_k,\ (\sum_{i=1}^{k} n_i = n),\ n_i \geqslant 0$.

Таким образом, рассматриваемая схема соответствует классической схеме перестановок с повторением с укрупненными исходами, полученными путем объединения ее исходов с одинаковыми составами частей деления.

В [1] для схемы перестановок с повторением были решены все задачи, поставленные здесь для данной схемы, для которой, называемой там схемой B или близкой, были приведены лишь программные алгоритмические пересчеты полученных для схемы перестановок с повторением результатов. В данной работе проводится прямой комбинаторный анализ данной схемы с получением для нее аналитических результатов.

Для краткости и удобства сравнения классической схемы (перестановок с повторением) с данной в дальнейшем будем называть первую схемой A, а исследуемую – просто схемой (как основной исследуемой) или схемой B так же, как они были названы в [1].

Анализ схемы будем строить на двухэтапном рассмотрении перечисления ее исходов, в котором сначала будем всеми способами делить совокупность всех ее n различимых элементов на s частей (s – число разных данных размеров частей в $\bar{n}$) пусть разных суммарных размеров одинаковых исходных частей деления по схеме A в порядке роста этих частей, потом каждую из этих s частей – всеми способами на соответствующие равные части составляющих их исходных размеров деления совокупности по изучаемой схеме B в порядке роста минимальных элементов в них, т. е. без учета их порядка. Тогда в результате второго этапа получим все исходы изучаемой схемы B.

Для проведения основных, определенных в названии статьи исследований схемы B введем дополнительные обозначения всех используемых здесь схем, перечислим их и будем отдельно рассматривать неизученные ранее схемы: схема A, исследованная в [1], схема C_{i_r}, частная по отношению к схеме B с делением совокупности $i_r\mu_{i_r}$ различимых элементов на μ_{i_r} равных частей размера $i_r \in \{n_1, n_1, \ldots, n_k\}$, $1 \leqslant i_r \leqslant s$, и схема S реализации принципа «каждый с каждым», подразумевающего все комбинации исходов одновременных действий (см. [2]) схем C_{i_r} по всем частям деления схемы A – первого этапа вышеописанной процедуры прямого перечисления исходов схемы B.

1. Вспомогательные результаты

1.1. Комбинаторный анализ схемы C_{i_r}

1.1.1. Численность, вид и перечисление исходов схемы C_{i_r}

При заданном размере i_r частей деления совокупности различимых $i_r\mu_{i_r}$ элементов будем записывать исход в фигурных скобках в виде наборов номеров элементов каждой части деления через запятую в круглых скобках в порядке роста минимальных номеров входящих в них элементов.

С учетом этой формы записи исходов прямое их перечисление будем конструировать последовательным перебором номеров элементов в круглых скобках. Тогда номера элементов в первых круглых скобках должны начинаться с 1, а остальные (i_r-1) номеров могут быть набраны $e_{1r} = C_{i_r\mu_{i_r}-1}^{i_r-1}$ способами по схеме сочетаний, для которой из [3] известна процедура их перечисления; номера элементов во вторых круглых скобках должны начинаться с минимального номера из номеров, не вошедших в первую скобку элементов, а остальные (i_r-1) номеров могут быть набраны $e_{2r} = C_{(\mu_{i_r}-1)i_r-1}^{i_r-1}$ способами и т. д., аналогично получаем, что номера элементов $(\mu_{i_r}-1)$-й круглой скобки начинаются с минимального номера элемента, не вошедшего в предыдущие круглые скобки, а остальные (i_r-1) номеров могут быть набраны $e_{(\mu_{i_r}-1)r} = C_{2i_r-1}^{i_r-1}$ способами, в последнюю μ_{i_r}-ю круглую скобку войдут оставшиеся i_r номеров элементов.

Из процедуры перечисления исходов схемы C_{i_r} следует явная формула числа всех ее исходов $N_{C_{i_r}}$:

$$N_{C_{i_r}} = \prod_{j=0}^{\mu_{i_r}-1} C_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}^{i_r-1} = \prod_{j=1}^{\mu_{i_r}-1} e_{jr}. \qquad (1)$$

Замечание 1. Число исходов в схеме C_{i_r}, очевидно, можно получить и из числа исходов с теми же параметрами в схеме A, уменьшив его в $\mu_{i_r}!$ раз, т. е.

$$N_{C_{i_r}} = (i_r\mu_{i_r})!/(i_r!)^{\mu_{i_r}}\mu_{i_r}!.$$

Изобразим на рис. 1 процедуру произведенного перебора всех исходов схемы соответствующим графом пошагового перебора комбинаций составов круглых скобок, добавляя на каждом шаге по одной. Ветвление графа происходит в виде пучков дуг, выходящих из каждого состояния (набора всех предыдущих круглых скобок) в количестве комбинаций с результатами вариантов набора следующей круглой скобки.

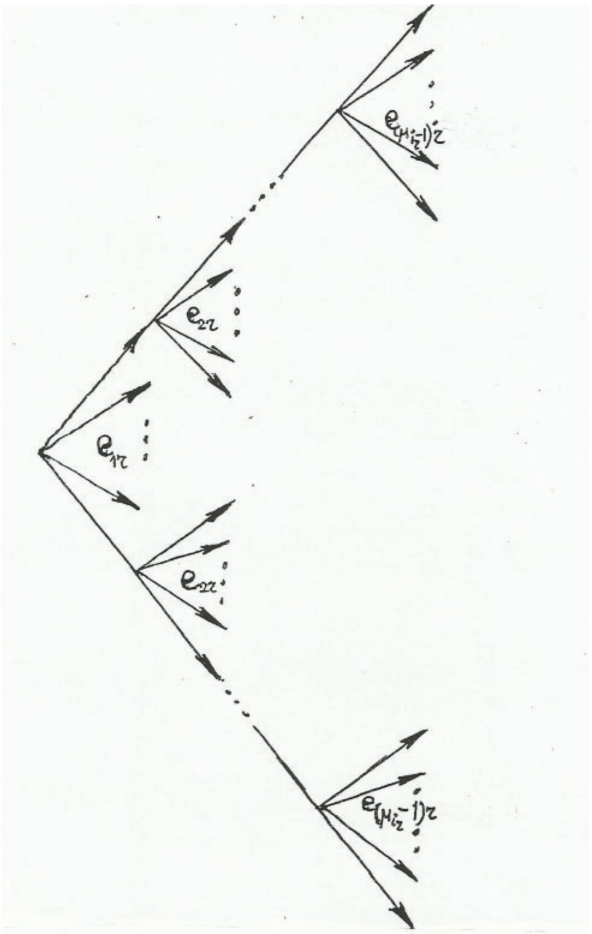

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы C_{i_r}
Fig. 1. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme C_{i_r}

На рис. 1 и в дальнейшем обозначаем через $m_{i+1} = e_{ir}$ число вариантов формирования i-й круглой скобки, т. е. размер пучка из каждого состояния на i-м шаге, $i = 1, 2, \ldots, s$, $r = 1, 2, \ldots, s$, оставив обозначение m_1 для числа исходов предшествующей схемы A.

1.1.2. Задача нумерации в схеме C_{i_r}

Схема C_{i_r} совпадает со схемой последовательных действий, для которой в [2] задача нумерации решена при выборе из совокупности μ_{i_r} наборов подряд идущих круглых скобок в исходе схемы C_{i_r}, содержащих по i_r элементов численностями вариантов таких наборов, или размеров пучков, т. е. $\bar{n}^* = (n_1^* = m_2 = e_{1r}, n_2^* = m_3 = e_{2r}, \ldots, n_r^* = m_{\mu_{i_r}+1} = 1)$. (Оставляем обозначение m_1 для числа исходов используемой первой схемы A).

Приведем численный пример решения задачи нумерации в схеме C_{i_r}.

Пример 1. Пусть в схеме C_{i_r} $n = 6$; $\bar{n} = \{2, 2, 2\}$. Тогда $k = 3, n_1^* = 5,\ n_2^* = 3,\ n_3^* = 1,$ и граф перечисления всех состояний по шагам будет иметь вид, представленный на рис. 2:

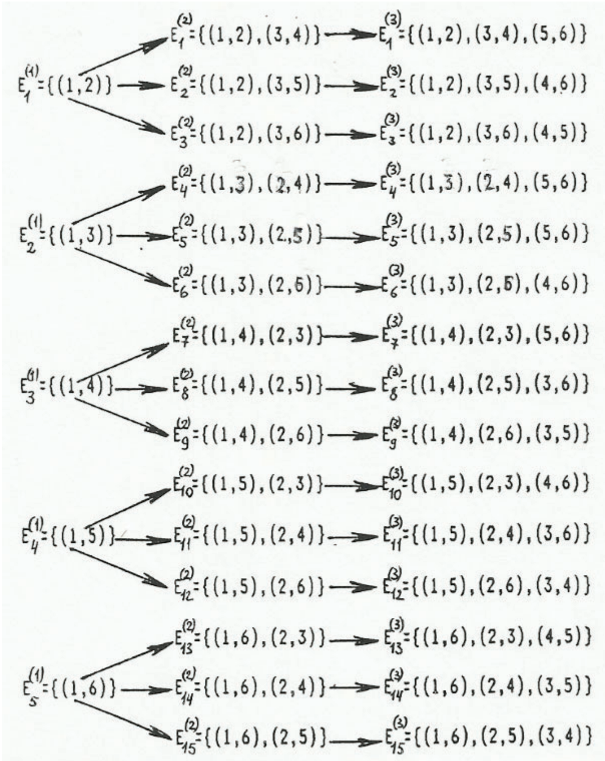

Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы C_{i_r} в примере 1
Fig. 2. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme C_{i_r} in example 1

Будем решать задачу нумерации в прямой и обратной постановках по найденным аналитическим формулам [2], сопоставляя результаты с визуально представленными на рис. 2 в графе.

Предварительно для числа исходов схемы $N_{C_{i_r}}$ проверим на примере формулу (1): $N_{C_{i_r}} = C_5^1 C_3^1 C_1^1 = 15$, что и подтверждается по рис. 2.

а) Прямая задача нумерации. Пусть по данному $N^{(3)} = 11$ требуется найти его вид $R^{(3)}$.

По графу (рис. 2) имеем вид $R^{(C)} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$. Найдем его с использованием формул (2) и (3) [2], где под n_i понимались размеры пучков, которые здесь обозначены через n_i^*, вычисленные выше:

$N^{(3)} = 11,\ N^{(2)} = [(11 + 1 - 1)/1] = 11,\ N^{(1)} = [(11 + 3 - 1)/3] = 4;$

$v_3 = 11\ mod\ 1 = 0,\ v_2 = 11\ mod\ 3 = 2,\ v_1 = 4\ mod\ 5 = 4;$

$j_1 = N^{(1)} = 4,\ j_2 = 2,\ j_3 = 1.$

Далее по схеме сочетаний [3] номеру $j_1 = 4$ соответствует исход $(1, 5)$; потом из оставшихся элементов с номерами $2, 3, 4, 6$ номеру $j_2 = 2$ соответствует исход $(2, 4)$, а оставшиеся элементы с номерами $3, 6$ образуют исход $(3, 6)$, из которых получаем вид окончательного исхода схемы $R^{(3)} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$, совпадающий с видом исхода по графу (рис. 2).

б) Обратная задача нумерации. Пусть по данному виду исхода $R^{(3)} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$ требуется найти его номер $N^{(3)}$.

По данному $R^{(3)}$ имеем составы круглых скобок, т. е. исходов $\bar{n}^*$ соответствующих схем сочетаний $C_5^1 = 5,\ C_3^1 = 3,\ C_1^1 = 1$, откуда по [3] известны их номера $(j_1, j_2, j_3) = (4, 2, 1)$. Тогда по [2] для номеров исходов на каждом шаге в графе перечисления исходов схемы C_{i_r} в решении обратной задачи получаем: $N^1 = 4,\ N^2 = (4 - 1)3 + 2 = 11,\ N^{(3)} = (11-1)1+1 = 11$, что совпадает с результатом по графу (рис. 2).

1.2. Численности исходов вспомогательных схем A, C_{i_r}, S

Численности перечисленных в заголовке схем $m_1 = N_A, m_{r+1} = N_{C_{i_r}}, N_S$ находятся из их вышеописанного комбинаторного смысла по формулам:

$$N_A = m_1 = \frac{n!}{\prod_{r=1}^{s}(i_r\mu_{i_r})!}, \tag{2}$$

формула (1) для $N_{C_{i_r}} = m_{r+1},\ r = 1, 2, \ldots, s$ получена выше,

$$N_S = \prod_{r=1}^{s} m_{r+1} = \prod_{r=1}^{s} N_{C_{i_r}} =$$

$$= \prod_{r=1}^{s}(i_r\mu_{i_r})!/(i_r!)^{\mu_{i_r}}\mu_{i_r}!. \tag{3}$$

2. Комбинаторный анализ схемы B

2.1. Вид исходов схемы

Параметры схемы можно задавать в виде перечня заданных размеров частей деления совокупности на части в возрастающем порядке $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ или вектором их вторых маркировок $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$, где t – максимальный заданный размер части деления совокупности, μ_i – число заданных частей деления размера $i,\ i = \overline{1, t};\ \sum_{i=1}^{t} i\mu_i = n$.

Исходы схемы будем задавать в фигурных скобках последовательностью составов частей в порядке увеличения их размеров, а элементы внутри каждой части будем перечислять по возрастанию номеров входящих в них элементов. Части одинакового размера будем писать в порядке роста минимальных номеров входящих в них элементов. Составы частей заключаем в круглые скобки. (Тогда указанное упорядочение скобок и номеров элементов в каждой скобке означает соответственно неразличимость частей и несущественность порядка элементов в каждой части и устанавливается для удобства сравнения исходов схемы.) Приведем пример записи параметров и исхода схемы.

Пример 2. Пусть $n = 10,\ \bar{n} = (3, 3, 4)$ или $\bar{\mu} = (0, 0, 2, 1)$ и элементы имеют номера от 0 до 9. Тогда один из исходов схемы B будем записывать в виде $\{(0, 7, 8), (2, 3, 5), (1, 4, 6, 9)\}$, который совпадает с одним из исходов схемы A при том же $\bar{n}$, т. к. в $\bar{n}$ размеры частей перечисляются здесь в неубывающем порядке.

Для сравнения исходов данной схемы (B) с исходами схемы A дадим их вид в схеме A: будем их задавать в фигурных скобках последовательностью составов частей (ячеек) в заданном порядке в форме возрастающих номеров попавших в них элементов (частиц), заключенных в круглые скобки. (Указанное упорядочение номеров элементов в каждой скобке означает несущественность их порядка в каждой части и устанавливается для удобства сравнения исходов схемы.) Приведем пример записи исхода схемы A.

Пример 3. Пусть $n = 10,\ \bar{n} = (4, 3, 3)$ и элементы имеют номера от 0 до 9. Тогда один из требуемых исходов будем записывать в виде $\{(1, 4, 6, 9), (2, 3, 5)(0, 7, 8)\}$, которому соответствует не совпадающий с ним по записи исход схемы B примера 2, т. к. в схеме A в $\bar{n}$ размеры частей перечислены здесь в невозрастающем порядке.

2.2. Число исходов схемы

Числа исходов N_A схемы A и схемы S соответственно представлены формулами (2) и (3), откуда в исследуемой схеме B (как в схеме двух последовательных действий из [2]) $N_B = N_A N_S$ или в явном виде

$$N_B = \frac{n!}{\prod_{r=1}^{s}(i_r\mu_{i_r})!}\prod_{r=1}^{s}\prod_{j=0}^{\mu_{i_r}-1} C_{i_r(\mu_{i_r}-j)-1}^{i_r-1}, \tag{4}$$

откуда с учетом формулы замечания 1 для $N_{C_{i_r}}$ и (3) получаем более простую формулу для N_B:

$$N_B = \frac{n!}{\prod_{r=1}^{s}(i_r)!^{\,\mu_{i_r}}\mu_{i_r}!}.$$

2.3. Перечисление исходов схемы

В [1] дан алгоритм перечисления исходов схемы, использующий перечень исходов схемы

A путем их перезаписи в форме исходов схемы B с отбраковкой повторяющихся. В результате получается трудноформализуемый и поэтому неудобный для дальнейшего анализа порядок перечисления исходов схемы B.

Предлагается процедура прямого перечисления исходов схемы, задающая закономерности упорядочения ее исходов. Она состоит в перечислении исходов двух последовательных действий схем A и S, состоящем из одновременного действия s схем типа C_{i_r}, $r = 1, 2, \ldots, s$. Таким образом, по [2] перечисление исходов схемы B совпадает с изученным в [2] в схеме $(s+1)$ последовательных действий, первым из которых является действие схемы A, а остальные s – относятся к последовательным действиям объединенных с поединичным добавлением действия схем C_{i_r}, начиная с $r = 1$ и до $r = s$, где вектор численностей этих действий $\bar{M} = (M_1, \ldots, M_{s+1})$ при $M_1 = m_1, M_2 = m_2, M_3 = m_2 m_3, \ldots, M_{s+1} = m_2 m_3 \cdots m_{s+1}$.

Для сопоставления значений исходных параметров схемы B с введенными по процедуре их прямого перечисления приведем соотношения между ними

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_{i_r} = k;\ \sum_{r=1}^{s} i_r \mu_{i_r} = n;\ \prod_{r=1}^{s} (i_r!)^{\mu_{i_r}} = \prod_{i=1}^{k} n_i!. \tag{5}$$

2.4. Задача нумерации

Как объяснено в п. 2.3, схема B представляет собой схему $(s+1)$ последовательных действий с вычисленными в п. 2.2 числами исходов $M_1, M_2, \ldots, M_{s+1}$. Задача нумерации для этого случая решена в [2]. Для выписывания решения задачи нумерации в нашем случае остается подставить значения чисел $M_1, M_2, \ldots, M_{s+1}$ в приведенные в [2] соответствующие формулы с учетом (5).

Замечание 2. По решенным задачам нумерации для составляющих схему и определяющих ее исход (по замечанию 1 из [2]) последних (со 2-го до $(s+1)$-го) одновременных действий, по их номерам внутри каждого действия виды исходов всех последовательных действий будем считать известными как полученные объединением результатов входящих в них одновременных действий (в круглых скобках) в порядке их получения.

Прямая задача нумерации

Пусть заданы параметры схемы B вектором $\bar{n}$ и номер $N^{(s+1)}$ ее исхода. Требуется определить его вид $R^{(s+1)}$.

Сформулируем задачу в терминах эквивалентной решенной задачи в схеме последовательных действий ([2]) с учетом (5): производится $(s+1)$ последовательных действий с известными числами всех возможных исходов каждого действия $M_1, M_2, \ldots, M_{s+1}$. По данному номеру исхода схемы $N^{(s+1)}$ найти его вид $R^{(s+1)}$. Однако проще после действия по схеме A (по замечанию 4 [2]) рассматривать решение задачи нумерации как объединенный результат ОД в терминах их параметров (m_i вместо M_i), т. к. параметры пучковой структуры графов перечисления исходов схем ОД и ПД совпадают (см. [2]).

Для этого сначала будем находить номера исходов $N^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, приводящих к конечному исходу с данным номером, по шагам по формулам:

$$N^{(i-1)} = \left[\frac{N^{(i)} + m_i - 1}{m_i} \right], \tag{6}$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z, и $i = s+1, s, \ldots, 1$.

Далее будем определять номера в пучках на каждом шаге по найденным в (6) номерам исходов в шагах процесса с обозначением: $N^{(i)}\ mod\ m_i = v_i$ из соотношения при любом целом $T \geqslant 0$

$$j_i = v_i + C_{T-v_i}^{T} m_i. \tag{7}$$

Отсюда в соответствии с замечанием 2 по результатам решенной прямой задачи нумерации для результатов формулы (7) получаем искомый вид исхода $R^{(s+1)}$ объединением известных исходов схем $\{C_{i_r}\}$ по принятой в п.1 форме.

Обратная задача нумерации

Пусть дан вид исхода $R^{(s+1)}$. Нужно найти его номер $N^{(s+1)}$.

Снова, как и при решении прямой задачи, сформулируем обратную задачу в терминах эквивалентной решенной в схеме последовательных действий ([2]) с учетом (5): производится $(s+1)$ последовательных действий с известными числами всех возможных исходов каждого действия $M_1, M_2, \ldots, M_{s+1}$. По данному виду исхода схемы $R^{(s+1)}$ найти его номер $N^{(s+1)}$.

Для решения задачи применяем соответствующую формулу вычисления искомого номера $N^{(s+1)}$ из [2], исходя из структуры графа перечисления исходов схемы (см. рис. 1), где j_i – (как и раньше) номер исхода в j-м пучке на i-м шаге или номер j-го исхода в i-м действии находится из заданного вида $R^{(s+1)}$ делением объединенного заданного исхода на s введенных выше частей в схеме A с использованием результата решения для каждой из них обратной задачи нумерации, т. е. приведением данного исхода схемы к траекторному виду (см. [1]). Тогда при $i = 1, 2, \ldots, s+1$

$$N^{(s+1)} = \sum_{l=1}^{s} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^{s+1} m_i + j_{s+1}. \qquad (8)$$

Пример 4. Решим задачу нумерации в схеме B при $n = 5$, $\bar{n} = (1,2,2)$, откуда вычисляем значения $s = 2, m_1 = 5!/1!4! = 5, m_2 = C_3^2 = 3, m_3 = C_1^1 = 1$, и предварительно строим граф прямого перечисления всех ее исходов для проверки результатов решения задачи нумерации по приведенным формулам, а это значит (по замечанию 2), что приведенные на графе виды исходов всех последовательных действий будем считать известными.

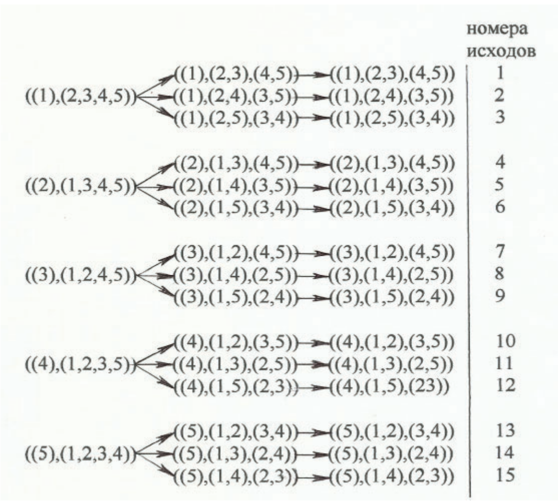

Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы B примера 4
Fig. 3. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme B in example 4.

Прямая задача нумерации

Дан номер исхода схемы $N^{(3)} = 11$. Найти вид исхода $R^{(3)}$ по (6), (7).

Решение. $N^{(2)} = [(11+3-1)/3] = 4, N^(1) = [(4+1-1)/1] = 4$; $v_3 = 11\ mod\ 3 = 2, v_2 = 4\ mod\ 1 = 0, v_1 = 4\ mod\ 5 = 4$; $j_3 = 2, j_2 = 1, j_1 = 4$, откуда (по замечанию 2) им соответствуют в исходе $R^{(3)}$ первая круглая скобка – (4), вторая – (1,3), третья – (2,5). В объединении это дает искомый исход $R^{(3)} = \{(4), (1,3), (2,5)\}$, совпадающий с результатом по графу на рис. 3.

Обратная задача нумерации

Дан вид исхода схемы $R^{(3)} = \{(4), (1,3), (25)\}$. Найти номер исхода $N^{(3)}$ по (8).

По результатам решения задачи нумерации для исходов составляющих схем, а именно исхода (4) для схемы A и исходов (13) и (25) для схем C_1 и C_2, получаем их соответствующие номера, которые в схеме B являются номерами пучков в графе перечисления исходов схемы B, т. е. $j_1 = 4, j_2 = 1, j_3 = 2$. Тогда по (8) находим $N^{(3)} = (4-1)\cdot 1\cdot 3 + (1-1)\cdot 3 + 2 = 11$, что совпадает с результатом по графу на рис. 3.

2.5 Вероятностное распределение исходов схемы

По третьей из формул (5) выражение для N_B представляется в виде

$$N_B = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i! \prod_{r=1}^{s} (\mu_{i_r})!},$$

из которого следует, что каждый исход схемы B соответствует $\prod_{r=1}^{s} (\mu_{i_r})!$ равновероятным исходам схемы A, откуда исходы схемы B тоже равновероятны с вероятностью каждого $1/N_B$.

2.6. Моделирование исходов схемы

Первый способ Шаги моделирования:

1) моделируем исход схемы A по [1];

2) записываем результат п.1) в установленной форме для исходов схемы B.

Второй способ (быстрое моделирование) Шаги моделирования:

1) делим отрезок [0,1] на N_B частей;

2) генерируем одно случайное число;

3) находим номер подотрезка попадания случайного числа и считаем его номером исхода схемы $N^{(k)}$ в перечне всех исходов;

4) по результату решения задачи нумерации находим по номеру $N^{(k)}$ вид исхода $R^{(k)}$.

Литература

1. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 2. С. 19–22.

2. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.

3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

Поступила в редакцию 20.01.2019

References

1. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok s povtoreniem i blizkoi skhemy [Combinatorial analysis of the permutation scheme with repetition and the close scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and controllers]. 2017. No. 2. P. 19–22.

2. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyy analiz skhemy odnovremennykh i posledovatel'nykh deiystvii [Combinatorial analysis of the scheme of simultaneous and sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and controllers]. 2016. No. 2. P. 35–41.

3. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyy analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

Received January 20, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Московский институт
электроники и математики
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: +79037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345