Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2018. С. 83–91
DOI: 10.17076/mat847

УДК 519.83

ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭКСПЛУАТАЦИИ БИОРЕСУРСОВ С ВЕКТОРНЫМИ ПЛАТЕЖАМИ

А. Н. Реттиева

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Исследована теоретико-игровая модель эколого-экономической системы в дискретном времени. В игре участвуют агенты (фирмы или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на конечном промежутке времени. Агенты эколого-экономической системы хотят добиться нескольких целей, поэтому используются векторные функции выигрышей. Предложены концепции определения оптимального некооперативного и кооперативного поведения в многокритериальной динамической игре. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного — арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Целью работы является определение кооперативного поведения участников и применение разработанной схемы для рационального использования биоресурсов водоемов Республики Карелия.

Ключевые слова: задача управления биоресурсами; многокритериальные игры; динамические игры; арбитражное решение Нэша.

A. N. Rettieva. ECOLOGY-ECONOMIC SYSTEM OF BIORESOURCE EXPLOITATION WITH VECTOR PAYOFFS

A discrete time game-theoretic model of an ecology-economic system is considered. Agents (firms or fishermen's artels) that exploit the fish stock on a finite planning horizon are the participants of the game. Agents wish to achieve several goals, hence the vector functions for players' payoffs are considered. The approaches to determining the optimal noncooperative and cooperative behavior in dynamic multicriteria games are constructed. The multicriteria Nash equilibrium is obtained via the Nash bargaining design (Nash products), and the cooperative equilibrium is determined by the Nash bargaining procedure for the entire planning horizon. The main goal of the paper is to define the cooperative behavior of the participants and to apply the procedure for sane exploitation of Karelian bioresources.

Keywords: bioresource management problem; multicriteria games; dynamic games; Nash bargaining solution.

Введение

Задачи рационального природопользования являются актуальными для Республики Карелия, обладающей большими запасами возобновляемых ресурсов. Одной из таких задач является определение оптимального поведения в случае несимметричности агентов эколого-экономической системы, т. к. возобновляемые ресурсы Республики Карелия подвергаются совместной эксплуатации различными экономическими субъектами.

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, более приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такая ситуация типична для водоемов Республики Карелия, где хозяйствующие субъекты несут различные затраты на эксплуатацию, что влечет за собой различие в ценах для конечного потребителя. При этом участники хотят одновременно и увеличить свою прибыль от продажи эксплуатируемого ресурса, и уменьшить издержки. Такая постановка задачи влечет введение вектор-функций выигрышей участников процесса эксплуатации ресурса и исследование многокритериальных игр.

Ллойд Шепли [7] в 1959 г. ввел понятие многокритериальной игры, т. е. игры с векторными функциями выигрышей участников, и расширил для таких игр концепцию равновесия по Нэшу, получив, таким образом, оптимальность по Парето (сильную и слабую). В последние годы много работ посвящено играм с векторными выигрышами и концепциям их решения. Например, в [8] предложено понятие идеального равновесия по Нэшу, а в [5] предложена концепция Е-равновесия. Классическим способом решения векторных игр является их скаляризация путем оптимизации взвешенной суммы критериев, который неприменим для несравнимых критериев. Тем не менее понятие равновесия по Парето является самой распространенной концепцией решения таких игр. В кооперативных многокритериальных играх для распределения общего кооперативного выигрыша используется естественное расширение вектора Шепли.

Однако все предложенные концепции решений используются только в статических многокритериальных играх. Малоисследованной проблемой является построение равновесий в динамических многокритериальных играх. В работе [6] было формализовано понятие многокритериального равновесия по Нэшу с использованием конструкции арбитражной схемы Нэша и предложены три варианта построения гарантированных выигрышей.

Главной целью представленной работы является исследование кооперативной динамической многокритериальной игры и формализация оптимального решения. Необходимость исследования кооперации связана с тем, что кооперативное поведение благоприятно влияет на эксплуатируемый ресурс. Для определения кооперативного поведения используется разработанный ранее подход построения кооперативного равновесия в теоретико-игровых моделях с несимметричными участниками [2]. А именно – кооперативные стратегии и выигрыши участников определяются из решения арбитражной схемы Нэша для всего периода продолжения игры. При этом точками статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий. Предложенная схема позволяет спрогнозировать поведение агентов эколого-экономической системы при заключении между ними кооперативного договора. При этом многокритериальный подход позволяет учесть специфику хозяйствующих субъектов и их влияние на эксплуатируемый возобновляемый ресурс.

Предложенные концепции решения апробированы для популяции сига озера Сямозеро. По имеющимся данным матричным методом оценки запаса была восстановлена численность популяции и параметры функции развития [3]. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Проведено сравнение стратегий игроков и размера эксплуатируемого ресурса для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Показано, что вариант определения гарантированных выигрышей с помощью равновесных по Нэшу решений является наилучшим для экологической ситуации.

Проведено сравнение состояния экологической системы и прибыли агентов при кооперативном и эгоистическом поведении. Численное моделирование показало, что использование арбитражной схемы для определения кооперативного поведения не только выгодно агентам эколого-экономической системы, что позволит мотивировать хозяйствующих субъектов заключать кооперативные договоры, но и, что самое главное, благотворно влияет на экологическую систему.

Динамические многокритериальные игры

Формализуем понятие динамической многокритериальной игры. Рассмотрим бикритериальную динамическую игру с двумя игроками в дискретном времени. Игроки эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть двух различных целей. Динамика развития возобновляемого ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, u_{2t}), \;\; x_0 = x, \qquad (1)$$

где $x_t \geqslant 0$ — размер ресурса в момент времени $t \geqslant 0$, $f(x_t, u_{1t}, u_{2t})$ — функция развития возобновляемого ресурса, $u_{it} \in U_i$ — стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени $t \geqslant 0$, $i = 1, 2$.

Вектор-функции выигрышей игроков на бесконечном промежутке планирования имеют вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_1^1 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^1(u_{1t}, u_{2t}) \\ J_1^2 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^2(u_{1t}, u_{2t}) \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} J_2^1 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^1(u_{1t}, u_{2t}) \\ J_2^2 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^2(u_{1t}, u_{2t}) \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $g_i^j(u_{1t}, u_{2t}) \geqslant 0$ — функции «мгновенного» выигрыша, $i, j = 1, 2$, $\delta \in (0, 1)$ — общий коэффициент дисконтирования.

Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре используется подход, предложенный в [6]. А именно — применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво. Предложены три варианта построения гарантированных выигрышей.

В первом из них все гарантированные выигрыши определяются из решений антагонистических игр. В частности, первый гарантированный выигрыш G_1^1 — это решение антагонистической игры, в которой первый игрок стремится максимизировать свой первый критерий, а второй — минимизировать его. Остальные гарантированные точки G_1^2, G_2^1, G_2^2 строятся аналогично.

Во втором способе гарантированные точки определяются из решений антагонистических игр с суммами критериев. То есть оба гарантированных выигрыша первого игрока G_1^1 и G_1^2 — это решение антагонистической игры, в которой первый игрок стремится максимизировать сумму своих критериев, а второй — минимизировать его. Аналогично и для второго игрока.

В третьем варианте гарантированные выигрыши строятся как равновесия по Нэшу в играх с первыми и вторыми критериями игроков соответственно.

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек статус-кво:

$$\begin{aligned} &H_1(u_{1t}, u_{2t}) = \\ &= (J_1^1(u_{1t}, u_{2t}) - G_1^1)(J_1^2(u_{1t}, u_{2t}) - G_1^2)\,, \\ &H_2(u_{1t}, u_{2t}) = \\ &= (J_2^1(u_{1t}, u_{2t}) - G_2^1)(J_2^2(u_{1t}, u_{2t}) - G_2^2)\,. \end{aligned}$$

Следующее определение дает предложенную концепцию некооперативного решения динамической многокритериальной игры [6].

Определение 1. Профиль стратегий (u_{1t}^N, u_{2t}^N) является многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (1), (2), если

$$\begin{aligned} H_1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \geqslant H_1(u_{1t}, u_{2t}^N) \ \ \forall u_{1t} \in U_1\,, \\ H_2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \geqslant H_2(u_{1t}^N, u_{2t}) \ \ \forall u_{2t} \in U_2\,. \end{aligned}$$

Следовательно, как и в классическом равновесии по Нэшу, игрокам невыгодно отклоняться от оптимальной стратегии. При этом они максимизируют произведение отклонений оптимальных выигрышей от гарантированных.

Многокритериальное кооперативное равновесие

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно. Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий. Первая точка — это сумма некооперативных выигрышей по первому критерию, вторая — сумма по второму критерию обоих участников соответственно.

Выигрыши игроков в многокритериальном равновесии по Нэшу (см. определение 1) примут вид

$$J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \\ J_1^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_1^2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \end{pmatrix},$$

$$J_2^N = \begin{pmatrix} J_2^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^1(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \\ J_2^{2N} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t g_2^2(u_{1t}^N, u_{2t}^N) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, следовательно, необходимо решить следующую задачу:

$$(V_1^{1c}+V_2^{1c}-J_1^{1N}-J_2^{1N})\cdot$$
$$\cdot(V_1^{2c}+V_2^{2c}-J_1^{2N}-J_2^{2N})=$$
$$=\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\sum_{i=1}^{2}g_i^1(u_{1t}^c,u_{2t}^c)-J_1^{1N}-J_2^{1N}\Big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\sum_{i=1}^{2}g_i^2(u_{1t}^c,u_{2t}^c)-J_1^{2N}-J_2^{2N}\Big)\to\max_{u_{1t}^c,u_{2t}^c}\,, \quad (4)$$

где J_i^{jN} — некооперативные выигрыши, определенные в (3), $i,j=1,2,\ i\neq j$.

Определение 2. Профиль стратегий (u_{1t}^c,u_{2t}^c) является многокритериальным кооперативным равновесием в игре (1), (2), если является решением задачи (4).

Многокритериальная задача управления возобновляемыми ресурсами

Исследуется динамическая многокритериальная модель управления биоресурсами. Два игрока (фирмы или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс на протяжении бесконечного промежутка времени. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1}=\varepsilon x_t-u_{1t}-u_{2t}\,,\ \ x_0=x\,, \qquad (5)$$

где $x_t\geqslant 0$ — размер популяции в момент времени $t\geqslant 0$, $\varepsilon\geqslant 1$ — коэффициент естественного роста, $u_{it}\geqslant 0$ — стратегия (вылов) игрока i в момент времени $t\geqslant 0$, $i=1,2$.

Игроки стремятся достичь двух целей — максимизировать доход от продажи ресурса и минимизировать затраты на эксплуатацию. Предполагается, что цена на рынке для участников различна, а затраты равны и зависят от интенсивности эксплуатации обоих игроков. Тогда вектор-функции выигрышей на бесконечном промежутке планирования примут вид

$$J_1=\begin{pmatrix} J_1^1=\sum\limits_{t=0}^{\infty}\delta^t p_1u_{1t}\\ J_1^2=-\sum\limits_{t=0}^{\infty}\delta^t cu_{1t}u_{2t}\end{pmatrix},$$
$$J_2=\begin{pmatrix} J_2^1=\sum\limits_{t=0}^{\infty}\delta^t p_2u_{2t}\\ J_2^2=-\sum\limits_{t=0}^{\infty}\delta^t cu_{1t}u_{2t}\end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $p_i\geqslant 0$ — рыночная цена за единицу ресурса для игрока i, $i=1,2$ $c\geqslant 0$ — затраты на эксплуатацию и $\delta\in(0,1)$ — общий коэффициент дисконтирования. Предполагается, что параметры таковы, что $\delta\varepsilon\geqslant 1$.

Гарантированные выигрыши и многокритериальное равновесие по Нэшу

Первый вариант

Используя результаты [6], заключаем, что гарантированные выигрыши для первых критериев обоих игроков равны нулю: $G_1^1=G_2^1=0$, а для вторых критериев принимают вид

$$G_2^2=G_1^2=G=-c\frac{\delta\varepsilon^2-1}{4\delta}x_0^2\,.$$

Вследствие того, что первые гарантированные выигрыши равны нулю, для определения многокритериального равновесия по Нэшу в задаче (5), (6) необходимо решить следующую задачу:

$$J_1^1(u_{1t},u_{2t})(J_1^2(u_{1t},u_{2t})-G)\to\max_{u_{1t}}\,,$$
$$J_2^1(u_{1t},u_{2t})(J_2^2(u_{1t},u_{2t})-G)\to\max_{u_{2t}}\,.$$

Используя принцип Беллмана и строя оптимальные стратегии в линейном виде, получим многокритериальное равновесие по Нэшу

$$u_{1t}^N=u_{2t}^N=\frac{(\delta\varepsilon^2-1)(\varepsilon-1)}{\varepsilon\delta^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1)}x_t\,, \qquad (7)$$

и размер ресурса при некооперативном поведении примет вид

$$x_t=\Big[\frac{\varepsilon^2\delta+\varepsilon-2}{\varepsilon\delta^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1)}\Big]^t x_0\,. \qquad (8)$$

Второй вариант

Используя результаты [6], заключаем, что гарантированные выигрыши принимают вид

$$G_i^1=\frac{p_i(\delta\varepsilon^2-1)}{2\delta(\varepsilon-1)}x_0-\frac{p_i^2(\delta\varepsilon^2-1)}{2c\delta(\varepsilon-1)^2}\,,$$
$$G_i^2=-\frac{c(\delta\varepsilon^2-1)}{4\delta}x_0^2+\frac{p_i^2(\delta\varepsilon^2-1)}{4c\delta(\varepsilon-1)^2}\,,\ i=1,2\,. \quad (9)$$

Для определения многокритериального равновесия по Нэшу в задаче (5), (6) необходимо решить задачу

$$\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t p_1u_{1t}-G_1^1\Big)\Big(-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t cu_{1t}u_{2t}-G_1^2\Big)\to\max_{u_{1t}}\,,$$
$$\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t p_2u_{2t}-G_2^1\Big)\Big(-\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t cu_{1t}u_{2t}-G_2^2\Big)\to\max_{u_{2t}}\,.$$

Аналогично, используя принцип Беллмана и строя оптимальные стратегии в линейном виде, получим многокритериальное равновесие по Нэшу

$$u_{1t}^N = \frac{(\delta\varepsilon^2-1)(\varepsilon-1)}{\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1)}x_t + \\ + \frac{\delta\varepsilon p_2 G_1^1(\varepsilon-1) - G_2^1 p_1(\delta\varepsilon^2-1)}{2p_1p_2(\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1))},$$

$$u_{2t}^N = \frac{(\delta\varepsilon^2-1)(\varepsilon-1)}{\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1)}x_t + \\ + \frac{\delta\varepsilon p_1 G_2^1(\varepsilon-1) - G_1^1 p_2(\delta\varepsilon^2-1)}{2p_1p_2(\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1))}, \qquad (10)$$

а размер ресурса при некооперативном поведении принимает вид

$$x_t = \Big[\frac{\delta\varepsilon^2+\varepsilon-2}{\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1)}\Big]^t x_0 + \frac{p_2G_1^1+p_1G_2^1}{2p_1p_2(\varepsilon-1)}\,. \qquad (11)$$

Третий вариант

В третьем варианте построения гарантированных выигрышей G_1^1 и G_2^1 являются равновесием по Нэшу в игре $\langle I, II, U_1, U_2, J_1^1, J_2^1\rangle$ и принимают вид

$$G_1^1 = \frac{p_1}{\delta}x_0\,,\ G_2^1 = \frac{p_2}{\delta}x_0\,. \qquad (12)$$

Аналогично, определяя равновесие по Нэшу в игре со вторыми критериями $J_1^2(u_{1t}, u_{2t})$ и $J_2^2(u_{1t}, u_{2t})$, получены вторые гарантированные выигрыши

$$G_1^2 = G_2^2 = -c\frac{\delta\varepsilon^2-1}{4\delta}x_0^2\,. \qquad (13)$$

Многокритериальное равновесие по Нэшу в данном случае имеет такой же вид, как и во втором варианте (10),(11), но с соответствующими гарантированными выигрышами (12),(13).

Сравнение некооперативных решений

Сравним стратегии игроков и размер популяции для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Оказывается, что существуют два случая в зависимости от параметров модели: в первом их них наихудшим для экологии вариантом является второй (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистической игры с суммами критериев), во втором — первый (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистических игр). При этом в обоих случаях наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников является третий вариант построения гарантированных выигрышей (равновесные по Нэшу решения).

Утверждение 1. *Если* $x_0 < \dfrac{\min\{p_1,p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$, *то*

$$x_t^{var2} \leqslant x_t^{var1} \leqslant x_t^{var3}\,, \\ u_{it}^{var2} \leqslant u_{it}^{var1} \leqslant u_{it}^{var3}\,,\ \ i=1,2.$$

Если $x_0 > \dfrac{\max\{p_1,p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$, *то*

$$x_t^{var1} \leqslant x_t^{var2} \leqslant x_t^{var3}\,, \\ u_{it}^{var1} \leqslant u_{it}^{var2} \leqslant u_{it}^{var3}\,,\ \ i=1,2.$$

Доказательство. Сравним размер популяции для всех вариантов построения гарантированных выигрышей. Обозначим $x_t^{var1} = \Big[\dfrac{\varepsilon^2\delta+\varepsilon-2}{\varepsilon\delta^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1)}\Big]^t x_0$ размер популяции при использовании первого варианта построения гарантированных выигрышей (8). Тогда во втором и третьем вариантах (11) размер популяции примет вид

$$x_t = x_t^{var1} + \frac{p_2G_1^1+G_2^1p_1}{2p_1p_2(\varepsilon-1)}\,,$$

с соответствующими гарантированными выигрышами, определенными в (9) и (12).

Для третьего варианта рассмотрим числитель дроби $\frac{p_2G_1^1+G_2^1p_1}{2p_1p_2(\varepsilon-1)}$, получим

$$p_2G_1^1 + G_2^1p_1 = \frac{2p_1p_2}{\delta}x_0 > 0\,,$$

следовательно, $x_t^{var3} > x_t^{var1}$, $i=1,2$.

Для второго варианта также рассмотрим числитель, получим

$$p_2G_1^1 + G_2^1p_1 = \frac{p_1p_2(\delta\varepsilon^2-1)}{2\delta(\varepsilon-1)}\Big(2x_0 - \frac{p_1+p_2}{c(\varepsilon-1)}\Big),$$

следовательно, при $x_0 \geqslant \dfrac{p_1+p_2}{2m(\varepsilon-1)}$ $x_t^{var2} \geqslant x_t^{var1}$, а при $x_0 \leqslant \dfrac{p_1+p_2}{2c(\varepsilon-1)}$ $x_t^{var2} \leqslant x_t^{var1}$.

Сравним стратегии игроков для всех вариантов построения гарантированных выигрышей. Обозначим $u_{1t}^{var1} = u_{2t}^{var1} = \dfrac{(\delta\varepsilon^2-1)(\varepsilon-1)}{\varepsilon\delta^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1)}x_t^{var1}$ некооперативные стратегии при использовании первого варианта построения гарантированных выигрышей (7). Тогда во втором и третьем вариантах (10) стратегии примут вид

$$u_{1t} = u_{1t}^{var1} + \frac{(\delta\varepsilon-1)G_1^1}{2p_1(\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1))},$$

$$u_{2t} = u_{2t}^{var1} + \frac{(\delta\varepsilon-1)G_2^1}{2p_2(\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1))},$$

с соответствующими гарантированными выигрышами, определенными в (9) и (12).

Для третьего варианта из (12) заметим, что числители выражений $\frac{(\delta\varepsilon-1)G_i^1}{2p_i(\delta\varepsilon^2-1+\delta\varepsilon(\varepsilon-1))}$, $i = 1,2$, положительны, следовательно, $u_{it}^{var3} > u_{it}^{var1}$, $i = 1,2$.

Для второго варианта построения гарантированных выигрышей аналогичные числители зависят от знака выражений $x_0 - \dfrac{p_1}{c(\varepsilon-1)}$ и $x_0 - \dfrac{p_2}{c(\varepsilon-1)}$, следовательно, $u_{it}^{var2} \geqslant u_{it}^{var1}$, $i = 1,2$, при $x_0 \geqslant \dfrac{\max\{p_1,p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$ и $u_{it}^{var2} \leqslant u_{it}^{var1}$ при $x_0 \leqslant \dfrac{\min\{p_1,p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$.

Теперь рассмотрим случай $x_0 \geqslant \dfrac{\max\{p_1,p_2\}}{c(\varepsilon-1)}$, заметим, что при этом выполнено $x_0 \geqslant \dfrac{p_1+p_2}{2c(\varepsilon-1)}$. Сравним стратегии и размер популяции во втором и третьем вариантах построения гарантированных выигрышей. Заметим, что при выполнении данных условий гарантированные выигрыши в третьем варианте (12) больше, чем во втором (9). Следовательно, $u_{it}^{var3} \geqslant u_{it}^{var2}$, $i = 1,2$, и $x_t^{var3} \geqslant x_t^{var2}$, откуда и получаем утверждение. □

Многокритериальное кооперативное равновесие

Используя первый вариант построения гарантированных выигрышей, определим выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу

$$J_1^{1N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_1 u_{1t}^N = p_1 \frac{\delta\varepsilon^2-1}{\delta\varepsilon-1} x\,,$$

$$J_2^{1N} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t p_2 u_{1t}^N = p_2 \frac{\delta\varepsilon^2-1}{\delta\varepsilon-1} x\,,$$

$$J_1^{2N} = J_2^{2N} = -c\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{1t}^N u_{2t}^N = -c\frac{(\delta\varepsilon^2-1)^2(\varepsilon-1)}{(\delta\varepsilon-1)^2(3-\varepsilon)} x^2\,.$$

Для построения многокритериального кооперативного равновесия необходимо решить следующую задачу:

$$(V_1^{1c} + V_2^{1c} - J_1^{1N} - J_2^{1N}) \cdot (V_1^{2c} + V_2^{2c} - J_1^{2N} - J_2^{2N}) \to \max_{u_{1t}^c, u_{2t}^c} \qquad (14)$$

или

$$\Big(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (p_1 u_{1t}^c + p_2 u_{2t}^c) - G_1 x\Big) \cdot \Big(-2c\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_{1t}^c u_{2t}^c - G_2 x^2\Big) \to \max_{u_{1t}^c, u_{2t}^c}\,, \qquad (15)$$

где $G_1 = \dfrac{(\delta\varepsilon^2-1)(p_1+p_2)}{\delta\varepsilon-1}$, $G_2 = -2c\dfrac{(\delta\varepsilon^2-1)^2(\varepsilon-1)}{(\delta\varepsilon-1)^2(3-\varepsilon)}$.

Используя принцип Беллмана и строя стратегии как и ранее в линейном виде, получим следующее утверждение.

Утверждение 2. *Кооперативные стратегии в многокритериальной игре (5), (6) имеют вид*

$$u_{1t}^c = u_{2t}^c = \frac{2cG_1 + 12\delta\varepsilon A + K}{6c(p_1+p_2) + 24\delta A} x_t\,, \qquad (16)$$

где

$$K = (2cG_1(cG_1 + 12\delta\varepsilon A) - 12(cG_2 p^2 + \delta A p(3c\varepsilon^2 + 2G_2)))^{\frac{1}{2}}\,,$$

а параметр A является решением следующего уравнения:

$$27A(c(p_1+p_2)+4\delta A)^2 = \frac{K^3}{2} + 4\delta A G_1 G_2(108\delta A + 45c(p_1+p_2)) + 18c^2 G_1(4\varepsilon\delta A G_1 + G_2(p_1+p_2)^2) - 27\varepsilon\delta A(c(p_1+p_2) - 4\delta A) \cdot ((c\varepsilon^2+3)(p_1+p_2) + 3c\varepsilon G_1)\,.$$

Динамика развития ресурса при кооперативном поведении принимает вид

$$x_t = \Big[\frac{3c\varepsilon(p_1+p_2) - 2cG_1 - K}{3c(p_1+p_2) + 12\delta A}\Big]^t x_0\,. \qquad (17)$$

Моделирование популяции сига озера Сямозеро

Для моделирования использовались фактические данные о многотычинковом сиге озера Сямозеро [4]. Для восстановления численности сига был использован матричный метод оценки запаса [1].

Полученные оценки размера популяции за длительный период позволили оценить параметры функции ее развития. Наиболее адекватной ситуации оказалась степенная функция развития [3]. В данной работе будем использовать линейную аппроксимацию функции развития популяции с параметром $\varepsilon = 1,3$.

Численное моделирование было проведено со следующими параметрами:

$$x_0 = 100000\,,\ \delta = 0{,}8\,,$$

$$c = 50\,,\ p_1 = 100\,,\ p_2 = 150\,.$$

На рисунке 1 показана динамика развития популяции, на рисунке 2 — вылов первого игрока для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Заметим, что, как это и было получено аналитически, наихудшим для экологической обстановки вариантом является первый, он ведет к перелову популяции. А самым лучшим вариантом построения гарантированных выигрышей является третий, когда гарантированные выигрыши — это равновесие по Нэшу, здесь и размер популяции, и интенсивности эксплуатации участников больше.

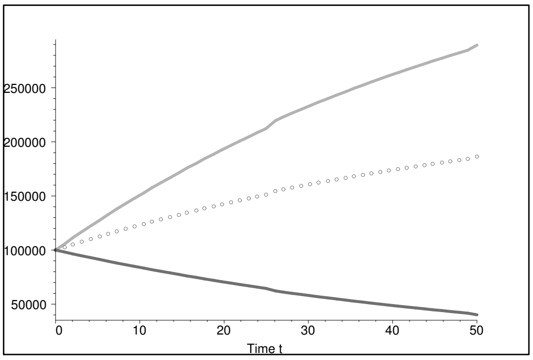

Рис. 1. Размер популяции: темная линия – 1 вариант, пунктир – 2 вариант, светлая линия – 3 вариант
Fig. 1. Size of population: dark line shows 1^{st} variant, dotted line – 2^{nd} variant, light line – 3^{rd} variant

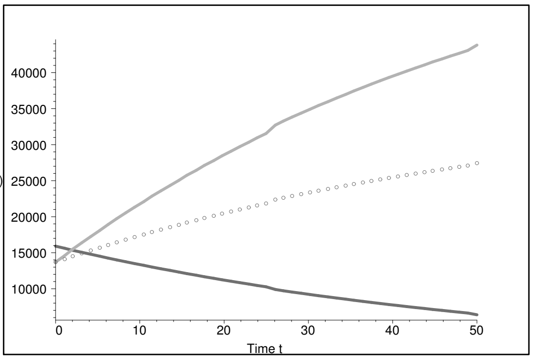

Рис. 2. Вылов первого игрока: темная линия – 1 вариант, пунктир – 2 вариант, светлая линия – 3 вариант
Fig. 2. Catch of player 1: dark line shows 1^{st} variant, dotted line – 2^{nd} variant, light line – 3^{rd} variant

На рисунке 3 представлена динамика развития популяции, а на рисунке 4 — вылов первого игрока при кооперативном и некооперативном поведении. Заметим, что при кооперации экологическая обстановка лучше, и при этом интенсивность эксплуатации игрока выше.

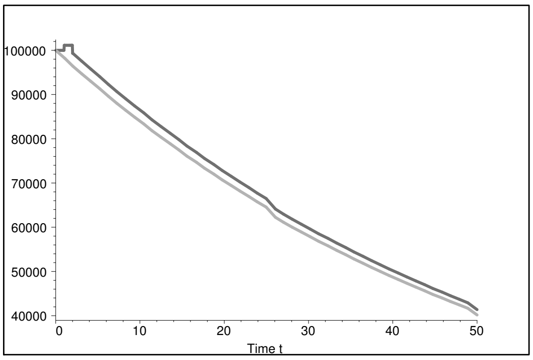

Рис. 3. Размер популяции: темная линия – кооперация, светлая – равновесие по Нэшу
Fig. 3. Size of population: dark line shows cooperation, light line – Nash equilibrium

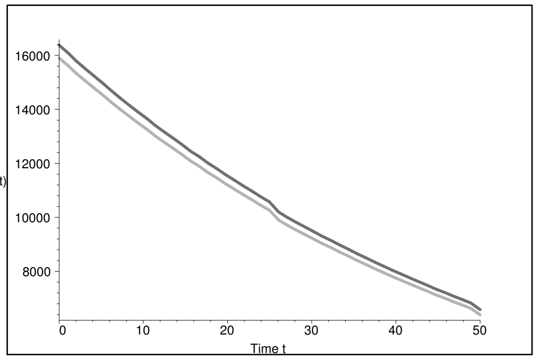

Рис. 4. Вылов первого игрока: темная линия – кооперация, светлая – равновесие по Нэшу
Fig. 4. Catch of player 1: dark line shows cooperation, light line – Nash equilibrium

Заключение

В работе исследованы многокритериальные динамические игры в дискретном времени и предложены подходы к определению равновесных стратегий. Для определения многокритериального некооперативного равновесия используются произведения Нэша, а для построения точек статус-кво предложены три варианта. Для иллюстрации предложенной концепции решения исследована динамическая многокритериальная модель управления эколого-экономической системой эксплуатации возобновляемого ресурса. Проведено сравнение стратегий агентов и размера эксплуатируемого ресурса для различных вариантов построения гарантированных выигрышей. Представлены два случая в зависимости от параметров модели: в первом случае наихудшим для экологической ситуации вариантом является второй (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистической игры с суммами критериев), во втором случае наихудшим для экологии вариантом является первый (когда гарантированные выигрыши определяются из решения антагонистических игр).

Исследовано кооперативное поведение в многокритериальных динамических играх. Для определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков была использована арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. При этом в качестве точки статус-кво выступает многокритериальное равновесие по Нэшу. Концепция решения применена для исследования кооперативного поведения в динамической многокритериальной модели управления эколого-экономической системой эксплуатации возобновляемого ресурса. Предложенная схема позволяет спрогнозировать поведение агентов при заключении между ними кооперативного договора. При этом многокритериальный подход позволяет учесть специфику хозяйствующих субъектов и их влияние на эксплуатируемый возобновляемый ресурс.

Для численного моделирования были использованы данные о популяции сига озера Сямозеро. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Показано, что применение арбитражной схемы для определения кооперативного поведения выгодно обоим агентам и при этом благоприятно влияет на состояние экологической системы. Исследованный многокритериальный подход позволяет спрогнозировать состояние эксплуатируемой популяции на длительный промежуток времени, что позволит управляющим структурам контролировать состояние экологических систем Республики Карелия и принимать меры во избежание перелова и гибели популяции.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00183_а, 16-41-100062 р_а).

Литература

1. *Абакумов А. И., Кольев Н. В., Максименко В. П., Горр С. В.* Матричный метод оценки запаса и прогнозирования вылова популяций морских организмов // Вопросы ихтиологии. 1994. Т. 34, № 3. С. 400–407.

2. *Реттиева А. Н.* Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 3. С. 72–87.

3. *Реттиева А. Н.* Эколого-экономическая система эксплуатации биоресурсов с асимметричными участниками // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2016. № 8. С. 91–97. doi: 10.17076/mat441

4. *Стерлигова О. П., Павлов В. Н., Ильмаст Н. В., Павловский С. А., Комулайнен С. Ф., Кучко Я. А.* Экосистема Сямозера (биологический режим, использование). Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2002. 119 с.

5. *Pusillo L., Tijs S.* E-equilibria for multicriteria games // Annals of ISDG. 2013. Vol. 12. P. 217–228.

6. *Rettieva A. N.* Multicriteria dynamic games // International Game Theory Review. 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.

7. *Shapley L. S.* Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Research Logistic Quarterly. 1959. Vol. 6. P. 57–61.

8. *Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M.* Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games // Mathematical Methods of Operations Research. 2000. Vol. 52. P. 65–77.

Поступила в редакцию 23.04.2018

References

1. *Abakumov A. I., Kol'ev N. V., Maksimenko V. P., Gorr S. V.* Matrichnii metod otsenki zapasa i prognozirovanie vylova populatsii morskikh organizmov [A matrix method for marine populations stock assessment and catching prediction]. *Voprosy ikhtiologii* [Journal of Ichthyology]. 1994. Vol. 34, no. 3. P. 400–407.

2. *Rettieva A. N.* Zadacha upravleniya bioresursami s asimmetrichnymi igrokami [Discrete-time bioresource management problem with asymmetric players]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya* [Mathematical Game Theory and its Applications]. 2013. Vol. 5, iss. 3. P. 72–87.

3. *Rettieva A. N.* Ecologo-economicheskaya systema ekspluatatsii bioresursov c asymmetrichnymi uchastnikami [Environmental-economic system of

bioresource use with assymetric agents]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 91–97. doi: 10.17076/mat441

4. *Sterligova O. P., Pavlov V. N., Il'mast N. V., Pavlovskii S. A., Komulainen S. F., Kuchko Ya. A.* Ecosistema Syamozera (biologicheskii rezhim, ispol'zovanie) [Ecosystem of Lake Syamozero: biological regime and use]. Petrozavodsk: KarRC RAS, 2002. 119 p.

5. *Pusillo L., Tijs S.* E-equilibria for multicriteria games. *Annals of ISDG*. 2013. Vol. 12. P. 217–228.

6. *Rettieva A.N.* Multicriteria dynamic games. *International Game Theory Review.* 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.

7. *Shapley L.S.* Equilibrium points in games with vector Payoffs. *Naval Research Logistic Quarterly.* 1959. Vol. 6. P. 57–61.

8. *Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M.* Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games. *Mathematical Methods of Operations Research.* 2000. Vol. 52. P. 65–77.

Received April 23, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Реттиева Анна Николаевна
зам. директора по научной работе, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: annaret@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTOR:

Rettieva, Anna
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Karelia, 185910, Russia
e-mail: annaret@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312