

УДК 004.01:006.72 (470.22)

## СРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

М. М. Лери

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,  
ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются случайные конфигурационные графы, где распределение степеней вершин является дискретным степенным распределением со случайным параметром, имеющим усеченное нормальное распределение на интервале  $(a, b)$ . Проводится анализ устойчивости таких графов к случайным и направленным разрушениям как с точки зрения сохранения связности, так и к разрушениям по типу «лесного пожара». В первом случае получены модели зависимости объема максимальной компоненты графа, а также вероятности его разрушения от процента удаленных вершин и начального размера графа. В случае «лесного пожара» основным объектом рассмотрения было число оставшихся в графе после «пожара» вершин. Наряду с двумя случаями «начала пожара» – случайным возгоранием и направленным поджогом вершины с наибольшей степенью – рассматривались два вида распространения пожара: с фиксированной вероятностью распространения огня по ребрам и со случайной. Для обоих видов внешнего воздействия проведено сравнение результатов с полученными ранее для случаев фиксированного значения параметра распределения степеней вершин и параметра, равномерно распределенного на отрезке  $[a, b]$ .

**Ключевые слова:** конфигурационный граф; степенное распределение; устойчивость; случайная среда; модель лесного пожара; имитационное моделирование.

### M. M. Leri. ON COMPARING CONFIGURATION GRAPHS ROBUSTNESS IN A RANDOM ENVIRONMENT

We consider configuration graphs with vertex degrees distributed independently according to the power law, with a truncated parameter  $\tau$  normally distributed on the interval  $(a, b)$ . By computer simulation we study the robustness of such graphs to both random and targeted destructions in the cases of preserving graph connectivity and «forest fire». In the first case, the models of the dependence of the size of the giant component and the probability of graph destruction on the initial graph size  $N$  and the percentage of removed vertices were obtained. In the case of the forest fire, the main interest was in the number of vertices remaining after the fire. Along with the two «fire starts» (random ignition and targeted lightning-up of the node with the highest degree), we considered the two fire propagation processes: with a fixed probability of fire transition through a graph edge and a random one. For both types of external destructive impacts, we compared the new results with the ones obtained previously for the configuration graphs with a fixed parameter of node degree distribution and the one uniformly distributed on the interval  $[a, b]$ .

**Key words:** configuration graph; power-law; robustness; random environment; forest fire model; simulation modeling.

## ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие и рост глобальных сетей передачи данных как в размере, так и в их количестве приводит к росту разнообразия задач, возникающих в результате всех этих процессов. Направления исследования варьируются от изучения структуры таких сетей (см., например, [6, 9, 10, 15]) до исследования их устойчивости к разного рода воздействиям, как случайным, так и целенаправленным, приводящим к разрушению сетевой структуры (см., например, [4, 7, 14]). Очевидно, что для математического представления данных сетей используются случайные графы. Изучение структуры и образования реальных сетей (см., например, [9, 15]) показало, что одной из наиболее подходящих для их описания моделей является предложенная в [6] конфигурационная модель случайных графов со случайными независимыми степенями.

Рассматриваются конфигурационные графы, число вершин которых равно  $N$ . Степени вершин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  такого графа представляют собой независимые случайные величины, общее распределение которых имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \tau > 1. \quad (1)$$

При построении графа степени вершин  $1, 2, \dots, N$ , являющиеся реализациями случайной величины  $\xi$ , определяют различные полурёбра графа [15], занумерованные в произвольном порядке. Равновероятное соединение всех полурёбер графа образует ребра. Такое соединение подразумевает, что сумма степеней вершин должна быть четной, поэтому в противном случае степень равновероятно выбранной вершины увеличивается на 1. Конфигурационные графы могут иметь петли, кратные ребра и циклы.

Несмотря на то что в большинстве работ [6, 7, 9, 10, 14, 15] рассматриваются графы с фиксированным значением параметра  $\tau$ , исследования последних лет показывают, что в связи с быстрым ростом и развитием сложных сетей, а также с увеличением их разнообразия не меньший интерес представляют собой модели случайных графов, распределения степеней вершин которых изменяются с возрастанием числа вершин или даже являются случайными [5]. Это привело к новой ветви в исследованиях – изучению случайных процессов в случайной среде [2].

В настоящей работе рассматриваются конфигурационные графы с распределением сте-

пеней вершин (1), где параметр  $\tau$  является случайной величиной, имеющей усеченное нормальное распределение на интервале  $(a, b)$  со следующей плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(F(b) - F(a))} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

где  $x \in (a, b)$ ,  $\mu = \frac{a+b}{2}$ ,  $\sigma = \frac{b-\mu}{3}$  (правило трех сигм),  $F(a)$  и  $F(b)$  – значения функции нормального распределения с параметрами  $\mu$ ,  $\sigma$  в точках  $a$  и  $b$  соответственно.

В работе проведена оценка устойчивости рассматриваемых конфигурационных графов к разрушающим воздействиям в условиях, когда эволюция графов происходит в случайной среде. В данном случае случайная среда подразумевает то, что степени вершин графа имеют распределение (1) со случайным параметром  $\tau$ , который выбирается отдельно для каждой вершины из распределения с плотностью (2). Цель настоящей работы состояла в сравнении полученных результатов с предыдущими: для графов с фиксированным значением параметра  $\tau$  [1, 11, 12] и со случайным  $\tau$ , равномерно распределенным на отрезке  $[a, b]$  [13].

Рассматривались два типа разрушающих воздействий: разрушение связности графа и «лесной пожар». Первый вид процесса состоит в последовательном удалении вершин графа вместе с инцидентными этим вершинам ребрами с целью разрушения его связности, тогда как «лесной пожар», начинаясь с некоторой вершины, распространяется по ребрам, как пожар или инфекция, поражая инцидентные вершины.

## РАЗРУШЕНИЕ СВЯЗНОСТИ

Одним из важных свойств конфигурационных графов является наличие и единственность гигантской компоненты связности в графах с параметром  $\tau \in (1, 2)$  (см., например, [15]), то есть компоненты, объем которой при  $N \rightarrow \infty$  пропорционален числу вершин графа  $N$ . Предыдущие исследования [11, 12] показали, что при  $\tau > 2$  наибольшая по объему компонента связности конфигурационного графа содержит значительно больше вершин, чем любая другая, хотя эта компонента и не является гигантской. Таким образом, через  $\eta_1$  обозначим процент вершин графа, вошедших в максимальную компоненту связности (независимо от того, является ли она гигантской), через  $\eta_2$  – процент вершин, вошедших во вторую по объему компоненту. Рас-

смаивались два типа разрушений: направленное и случайное. При направленном разрушении последовательно удалялись вершины с максимальными степенями и инцидентные им ребра, при случайном – тот же процесс происходил на равновероятно выбранных вершинах. Вершины, оказавшиеся в результате разрушения изолированными, также удалялись из графа. В качестве критерия разрушения, как и в более ранних работах (см., например, [11, 12]), рассматривалось наступление следующего события  $A : \{\eta_1 \leq 2\eta_2\}$ , которое означает, что граф считался разрушенным в том случае, если объем максимальной компоненты становился меньшим либо равным двум объемам второй по размеру компоненты графа. Через  $p = \mathbf{P}\{A\}$  обозначим вероятность события  $A$ .

Имитационные эксперименты проводились на графах размерности  $1000 \leq N \leq 10000$  с шагом 500 для трех интервалов  $[a, b]$ : (1, 2), [2, 3] и (1, 3], по 100 моделей для каждой пары  $(N, [a, b])$ . Выбор интервалов был продиктован следующими соображениями: конфигурационные графы с  $\tau \in (1, 2)$  используют для описания сложных сетей телекоммуникаций (см., например, [9, 10, 15]); графы с  $\tau \in [2, 3]$  показали себя устойчивыми к «лесному пожару» [1, 11–13]; а параметр  $\tau \in (1, 3]$  рассматривался как обобщающий. По полученным статистическим данным посредством методов регрессионного анализа были получены оценки зависимостей объема  $\eta_1$  максимальной компоненты связности, а также вероятности разрушения  $p$  от процента удаленных из графа вершин  $r$  при разных объемах графа  $N$  и значениях параметра распределения степеней вершин графа  $\tau \in [a, b]$  для трех интервалов  $[a, b]$ . В случае направленного разрушения были получены следующие регрессионные зависимости:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ \eta_1 &= 55,82 - 8,85r - 6,62 \ln r, \\ p &= -0,21 + 0,065r^{1,84}, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ \eta_1 &= -0,65 + 2,1r - 2,87 \ln r, \\ p &= 1,15 + 0,27 \ln r, \\ \tau \sim N(1, 3] : \\ \eta_1 &= 22,04 - 4,01r - 10,51 \ln r, \\ p &= -1,55 + 1,77r^{0,41} \end{aligned}$$

с коэффициентами детерминации не ниже 0,95 для всех приведенных выше моделей, где  $\tau \sim N(a, b)$  означает, что рассматриваются конфигурационные графы с распределением степеней вершин (1) и параметром  $\tau$ , имею-

щим плотность распределения (2). Значения  $r$  в моделях зависимости вероятности разрушения графа  $p$  имеют следующие ограничения:  $0,84 + 0,095 \ln N \leq r \leq 11,17 - 0,71 \ln N$  при  $\tau \sim N(1, 2)$ ,  $0,31 - 0,033 \ln N \leq r \leq 3,84 - 0,37 \ln N$  при  $\tau \sim N[2, 3]$ ,  $-1,48 + 0,25 \ln N \leq r \leq 7,73 - 0,6 \ln N$  при  $\tau \sim N(1, 3]$ , где значение  $R^2$  не опускается ниже 0,89 для всех моделей. Очевидно, что для значений  $r$  меньше нижней границы  $p = 0$ , а для  $r$  больше верхнего ограничения  $p = 1$ . Аналогичное верно для следующих моделей зависимости  $p$  от  $r$  и  $N$  для варианта случайных разрушений:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ \eta_1 &= 83,82 - 1,05r - 4,22 \ln r, \\ p &= -0,43 - 0,026 \ln N + 5,96 \cdot 10^{-6}r^3, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ \eta_1 &= 13,38 - 0,14r - 1,61 \ln r, \\ p &= 0,1 - 0,0000104N + 0,018r, \\ \tau \sim N(1, 3] : \\ \eta_1 &= 57,46 - 0,67r - 4,5 \ln r, \\ p &= 0,41 - 0,16 \ln N + 0,00053r^2. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов детерминации для всех приведенных выше моделей были не ниже 0,92, а ограничения на значения  $r$  в моделях для вероятности разрушения  $p$  были следующими ( $R^2 > 0,9$  для всех моделей):  $33,41 + 1,64 \ln N \leq r \leq 75,24 - 1,15 \ln N$  при  $\tau \sim N(1, 2)$ ,  $-46,16 + 9,96 \ln N \leq r \leq 69,48 - 1,14 \ln N$  при  $\tau \sim N[2, 3]$ ,  $0,29 - 0,031 \ln N \leq r \leq 55,9 - 0,28 \ln N$  при  $\tau \sim N(1, 3]$ .

Далее было проведено сравнение устойчивости рассматриваемых в настоящей работе конфигурационных графов с нормально распределенным параметром распределения степеней вершин и рассмотренных в предыдущих работах конфигурационных графов с фиксированным параметром  $\tau$  [11] и с  $\tau$ , равномерно распределенным на отрезке  $[a, b]$  [13], которые будем обозначать  $\tau \sim U[a, b]$ . На рисунках 1–6 представлены регрессионные зависимости объемов (в %) максимальных компонент  $\eta_1$  графа от процента удаленных из него вершин  $r$  для трех типов конфигурационных графов: с нормально распределенным параметром  $\tau \sim N(a, b)$ , фиксированным параметром  $\tau = \frac{a+b}{2}$  и равномерно распределенным  $\tau \sim U[a, b]$  в случаях направленного (рис. 1–3) и случайного (рис. 4–6) разрушений для трех интервалов: (1, 2) – рисунки 1 и 4, [2, 3] – рисунки 2 и 5 и (1, 3] – рисунки 3 и 6.

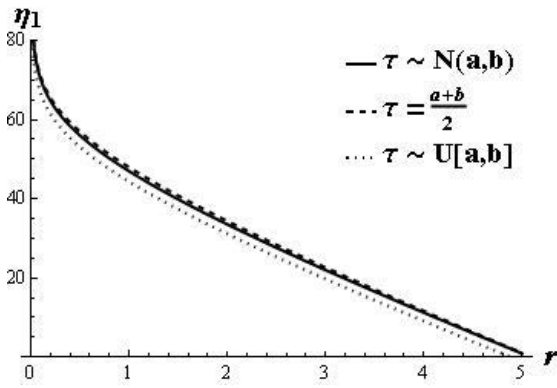


Рис. 1. Зависимости  $\eta_1$  от  $r$  при направленном разрушении для интервала (1, 2)  
 Fig. 1. Dependencies of  $\eta_1$  on  $r$  in the case of targeted attack on the interval (1, 2)

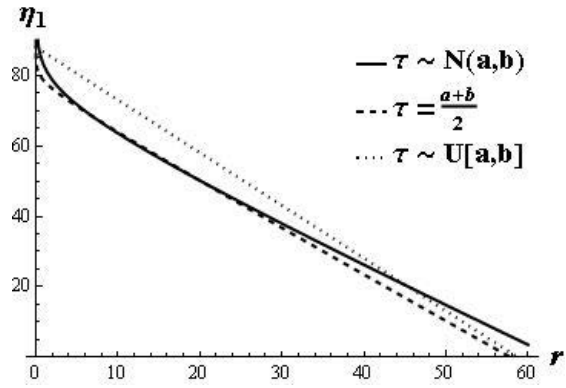


Рис. 4. Зависимости  $\eta_1$  от  $r$  при случайном разрушении для интервала (1, 2)  
 Fig. 4. Dependencies of  $\eta_1$  on  $r$  in the case of random breakdown on the interval (1, 2)

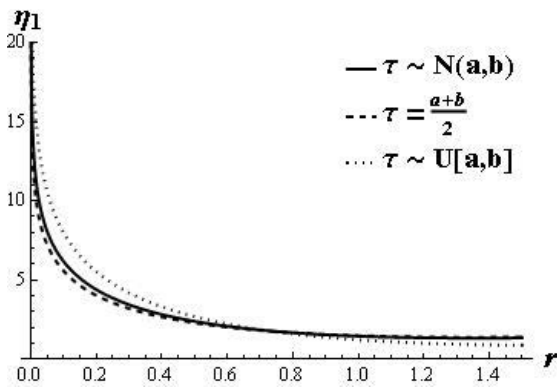


Рис. 2. Зависимости  $\eta_1$  от  $r$  при направленном разрушении для интервала [2, 3]  
 Fig. 2. Dependencies of  $\eta_1$  on  $r$  in the case of targeted attack on the interval [2, 3]

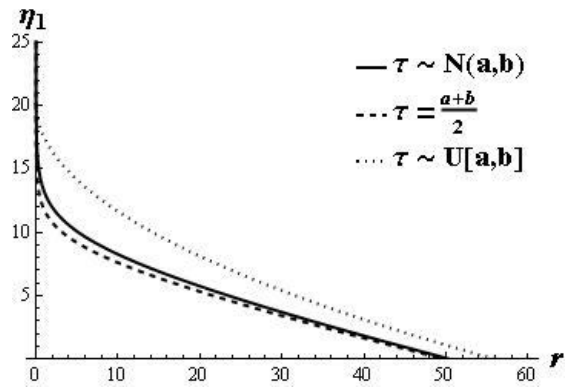


Рис. 5. Зависимости  $\eta_1$  от  $r$  при случайном разрушении для интервала [2, 3]  
 Fig. 5. Dependencies of  $\eta_1$  on  $r$  in the case of random breakdown on the interval [2, 3]

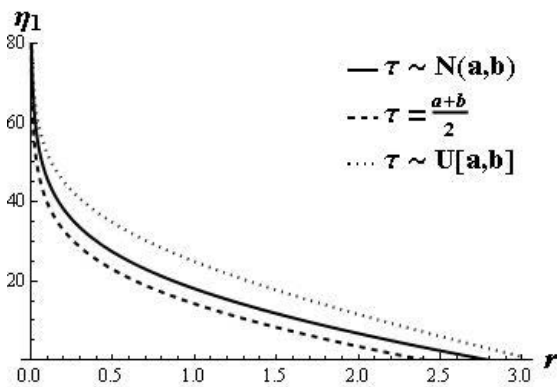


Рис. 3. Зависимости  $\eta_1$  от  $r$  при направленном разрушении для интервала (1, 3)  
 Fig. 3. Dependencies of  $\eta_1$  on  $r$  in the case of targeted attack on the interval (1, 3)

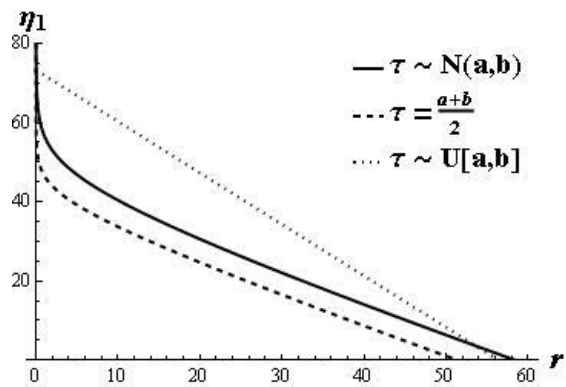


Рис. 6. Зависимости  $\eta_1$  от  $r$  при случайном разрушении для интервала (1, 3)  
 Fig. 6. Dependencies of  $\eta_1$  on  $r$  in the case of random breakdown on the interval (1, 3)

Вследствие того, что регрессионные модели обычно нивелируют отклонения, было проведено сравнение исходных результатов: объемов максимальной компоненты  $\eta_1$  и вероятностей разрушения графа  $p$  для каждой тройки

$([a, b], N, r)$ . В качестве нулевой была рассмотрена гипотеза о равенстве средних  $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$  двух рассматриваемых выборок  $H_0 : \bar{m}_1 = \bar{m}_2$ . В таблице 1 приведен процент отвергнутых гипотез.

Таблица 1. Сравнение объемов максимальной компоненты: процент отвергнутых гипотез  
Table 1. Comparison of the largest component sizes: the percentage of rejected hypotheses

вид разрушения type of destruction	сравниваемые графы compared graphs	$[a, b]$		
		(1, 2)	[2, 3]	(1, 3)
направленное разрушение targeted attack	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	11,5	92,6	19,5
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	56,4	98,7	52
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	60,7	99,6	75,4
случайное разрушение random breakdown	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	63,6	96,7	15,5
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	84,9	97,8	61,4
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	95,3	99,7	69,9

Результаты сравнения показывают, что, несмотря на видимую близость регрессионных зависимостей, отличие в динамике разрушения между тремя видами конфигурационных графов статистически значимо. Что подтверждается и результатами сравнения вероятностей разрушения графов (рис. 7–12 и табл. 2). На рисунках 7–12 представлены регрессионные зависимости вероятностей  $p$  разрушения графов от процента удаленных из него вер-

шин  $r$  и начальных объемов графов  $N$  (для некоторых моделей) для трех типов конфигурационных графов: с нормально распределенным параметром  $\tau \sim N(a, b)$ , фиксированным параметром  $\tau = \frac{a+b}{2}$  и равномерно распределенным  $\tau \sim U[a, b]$  в случаях направленного (рис. 7–9) и случайного (рис. 10–12) разрушений для трех интервалов: (1, 2) – рисунки 7 и 10, [2, 3] – рисунки 8 и 11 и (1, 3) – рисунки 9 и 12.

Таблица 2. Сравнение вероятностей разрушения графа: процент отвергнутых гипотез  
Table 2. Comparison of the probabilities of graph destruction: the percentage of rejected hypotheses

вид разрушения type of destruction	сравниваемые графы compared graphs	$[a, b]$		
		(1, 2)	[2, 3]	(1, 3)
направленное разрушение targeted attack	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	87,4	77,9	54,3
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	72	58,7	49,1
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	61,1	44,1	36,5
случайное разрушение random breakdown	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	94,6	61,5	69,7
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	89,8	39,9	76,5
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	87,6	22	68,2

Таким образом, необходимо отметить, что процесс разрушения на всех трех рассмотренных моделях конфигурационных графов происходит по-разному. Это касается как структурных изменений, так и вероятности разрушения графов. Согласно полученным результатам, на интервалах изменения параметров распределения степеней вершин [2, 3] и

(1, 3] конфигурационные графы с равномерно распределенным параметром более устойчивы как к направленному, так и к случайному разрушению, чем графы с нормально распределенным или с фиксированным параметром.

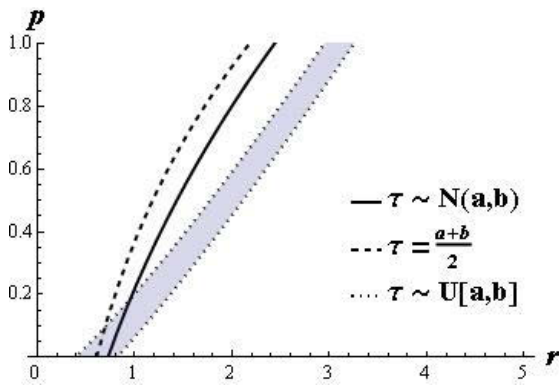


Рис. 7. Зависимости  $p$  от  $r$  и  $N$  при направленном разрушении для интервала (1, 2)  
 Fig. 7. Dependencies of  $p$  on  $r$  and  $N$  in the case of targeted attack on the interval (1, 2)

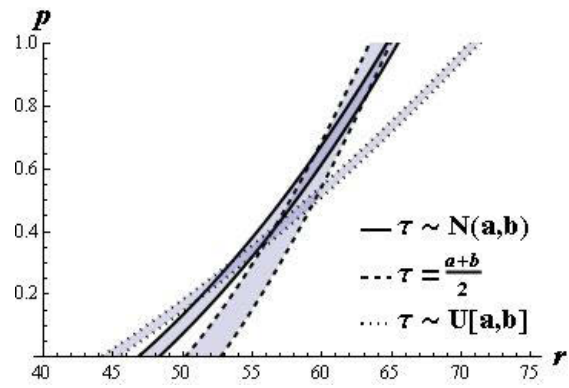


Рис. 10. Зависимости  $p$  от  $r$  и  $N$  при случайном разрушении для интервала (1, 2)  
 Fig. 10. Dependencies of  $p$  on  $r$  and  $N$  in the case of random breakdown on the interval (1, 2)

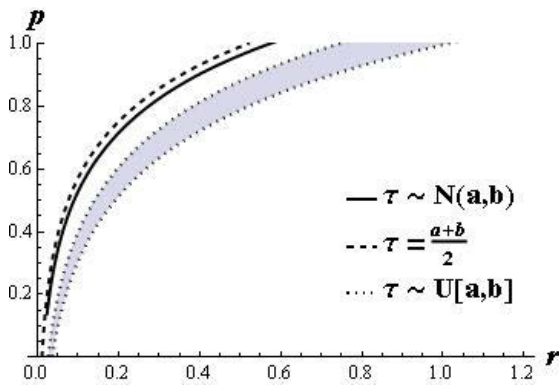


Рис. 8. Зависимости  $p$  от  $r$  и  $N$  при направленном разрушении для интервала [2, 3]  
 Fig. 8. Dependencies of  $p$  on  $r$  and  $N$  in the case of targeted attack on the interval [2, 3]

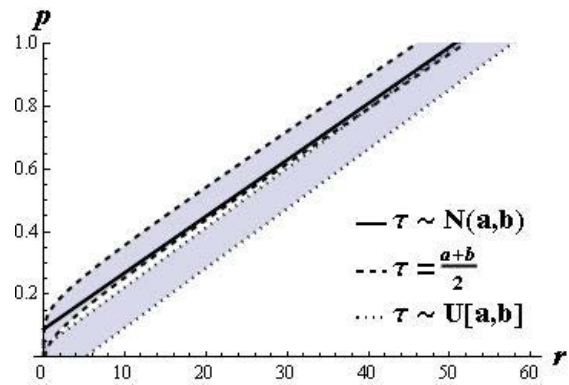


Рис. 11. Зависимости  $p$  от  $r$  и  $N$  при случайном разрушении для интервала [2, 3]  
 Fig. 11. Dependencies of  $p$  on  $r$  and  $N$  in the case of random breakdown on the interval [2, 3]

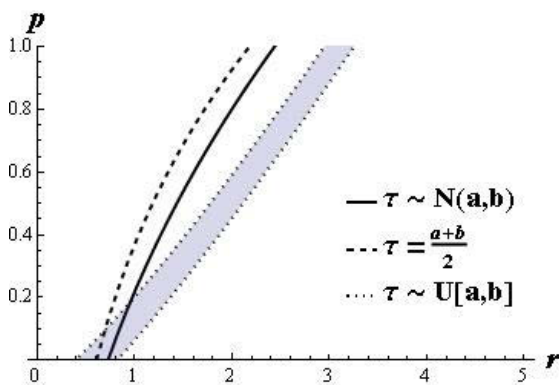


Рис. 9. Зависимости  $p$  от  $r$  и  $N$  при направленном разрушении для интервала (1, 3)  
 Fig. 9. Dependencies of  $p$  on  $r$  and  $N$  in the case of targeted attack on the interval (1, 3)

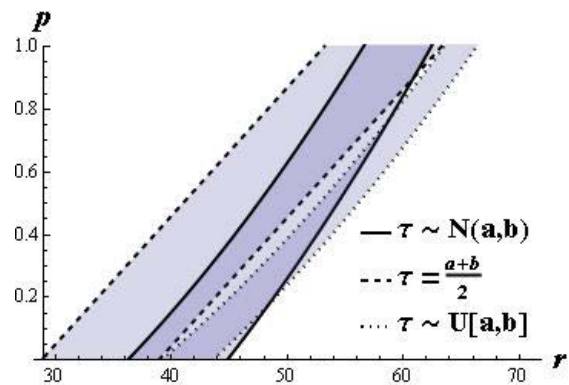


Рис. 12. Зависимости  $p$  от  $r$  и  $N$  при случайном разрушении для интервала (1, 3)  
 Fig. 12. Dependencies of  $p$  on  $r$  and  $N$  in the case of random breakdown on the interval (1, 3)

При этом наименее устойчивыми оказываются графы с фиксированным параметром. Однако в случае  $\tau \in (1, 2)$  и направленного разрушения наибольшую устойчивость проявляют графы с фиксированным параметром, а наименьшую – с равномерным. При случайном разрушении и  $\tau \in (1, 2)$  графы с равномерным параметром  $\tau$  начинают разрушаться раньше, но их разрушение происходит дольше, тогда как графы с фиксированным  $\tau$ , наоборот, начинают разрушаться позднее, но сам процесс происходит быстрее. Следует отметить, что графы с нормально распределенным параметром  $\tau$  всегда занимают промежуточное положение в вопросе их устойчивости к данному виду разрушений.

### «ЛЕСНОЙ ПОЖАР»

Далее рассматривался процесс разрушения, известный как «модель лесного пожара» (см., например, [4, 8]), а также используемый некоторыми авторами для изучения банковских кризисов [3]. Связь данного процесса разрушения с лесным пожаром состоит в следующем. Вершины конфигурационного графа интерпретируются как деревья, растущие на некоторой ограниченной территории, а ребра графа – это возможные пути перехода огня от одной вершины к другой. Возгорание всегда начинается с одной вершины графа: это может быть вершина с максимальной степенью, тогда речь идет о целенаправленном поджоге; либо это может быть случайно (равновероятно) выбранная вершина, тогда говорится о случайном возгорании. После возгорания первой вершины огонь переходит на инцидентные ей вершины по ребрам графа с некоторой вероятностью  $0 < p \leq 1$ . Эта вероятность может либо принимать фиксированное значение для всех ребер графа, либо быть равномерно распределенной на интервале  $(0, 1)$  и разной для каждого ребра.

Для согласования топологии конфигурационного графа с моделью «лесного пожара» будем использовать вспомогательные графы, вершины которых расположим в узлах квадратной целочисленной решетки размера  $100 \times 100$  (см. [1]), соединив их ребрами по принципу «ближайшего соседа». Степень любой вершины внутри решетки не будет превышать 8. Используя эти вспомогательные графы, в [1] была установлена зависимость числа  $N$  вершин конфигурационного графа от параметра  $\tau$  распределения степеней вершин:

$$N = [9256\tau^{-1,05}]. \quad (3)$$

Имитационное моделирование данного процесса разрушения проводилось для конфигурационных графов с распределением степеней вершин (1) и с параметром  $\tau$ , имеющим усеченное нормальное распределение (2) на трех интервалах  $(a, b)$ :  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  и  $[2, 3]$ . Объемы графов для каждого из интервалов  $(a, b)$  вычислялись из уравнения (3), где  $\tau = (a + b)/2$ . В случае фиксированных значений вероятности перехода огня по ребру графа  $0 < p \leq 1$  для каждой пары  $([a, b], p)$  было построено по 100 моделей и получены регрессионные зависимости числа оставшихся после пожара вершин  $n$  от  $p$  для каждого из трех интервалов  $[a, b]$ . Так, в случае целенаправленного поджога модели были следующими:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ n &= 5733,56 - 4720,65p - 129,19 \ln p, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ n &= 3829,6 - 627,63p + 87,51 \ln p, \\ \tau \sim N(1, 3) : \\ n &= 5299,18 - 3276,12p + 212,25 \ln p, \end{aligned}$$

где коэффициенты детерминации всех моделей равны 0,99. Аналогично для процесса случайного возгорания были получены следующие модели:

$$\begin{aligned} \tau \sim N(1, 2) : \\ n &= 8034,94 - 5754,33p + 544,56 \ln p, \\ \tau \sim N[2, 3] : \\ n &= 3586,94 - 97,98p + 15,7 \ln p, \\ \tau \sim N(1, 3) : \\ n &= 5395,22 - 2062,52p + 266,2 \ln p \end{aligned}$$

со значениями коэффициентов детерминации не ниже 0,98.

Далее на тех же графах рассматривался процесс случайного распространения огня, когда вероятность  $p$  перехода огня по ребру является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $(0, 1)$ . В этом случае были получены средние значения числа оставшихся в графе вершин  $\bar{n}$  (табл. 3).

По аналогии с разделом «Разрушение связности» было проведено сравнение устойчивости к пожару конфигурационных графов с нормально распределенным параметром  $\tau$  и рассмотренных в работах [11, 13] конфигурационных графов с  $\tau$  либо фиксированным, либо равномерно распределенным на отрезке  $[a, b]$ .

Таблица 3. Средние значения числа оставшихся в графе вершин  $\bar{n}$  для графов с нормально распределенным  $\tau$

Table 3. Average values of the number of vertices remaining in the graph  $\bar{n}$  for graphs with normally distributed  $\tau$

$\tau \sim N(a, b)$	целенаправленный поджог targeted lightning-up
(1, 2)	3392,5
[2, 3]	3487,2
(1, 3)	3535
$\tau \sim N(a, b)$	случайное возгорание random ignition
(1, 2)	4848,6
[2, 3]	3533,1
(1, 3)	4238,4

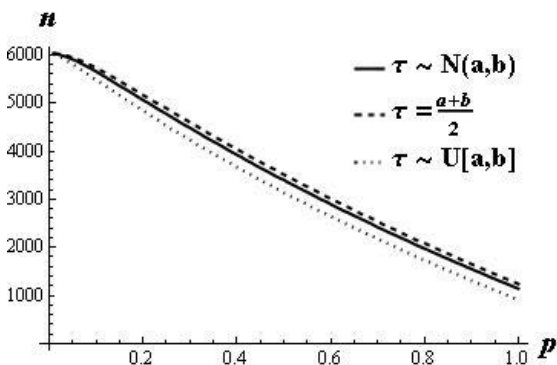


Рис. 13. Зависимости  $n$  от  $p$  при целенаправленном поджоге для интервала (1, 2)  
Fig. 13. Dependencies of  $n$  on  $p$  in the case of targeted lightning-up on the interval (1, 2)

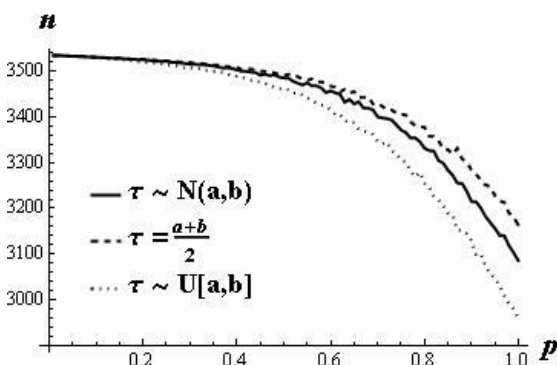


Рис. 14. Зависимости  $n$  от  $p$  при целенаправленном поджоге для интервала [2, 3]  
Fig. 14. Dependencies of  $n$  on  $p$  in the case of targeted lightning-up on the interval [2, 3]

На рисунках 13–18 показаны зависимости числа оставшихся после пожара вершин  $n$  от вероятности  $p$  перехода огня по ребру графа для трех рассматриваемых моделей конфигурационных графов: с нормально распределенным параметром  $\tau \sim N(a, b)$ , с фиксированным  $\tau = \frac{a+b}{2}$  и равномерно распределенным  $\tau \sim U[a, b]$  для трех интервалов  $(a, b)$ : (1, 2) – рисунки 13 и 16, [2, 3] – рисунки 14 и 17, (1, 3) – рисунки 15 и 18 при целенаправленном поджоге (рис. 13–15) и случайном возгорании (рис. 16–18).

С целью сравнения трех моделей графов для каждой пары значений  $((a, b), p)$  было проведено попарное сравнение выборок, состоящих каждая из 100 значений  $n$  (числа оставшихся после пожара вершин), то есть проверялась гипотеза о равенстве средних с уровнем значимости 0,05 по критерию Манна – Уитни из-за отсутствия нормальности сравниваемых выборок.

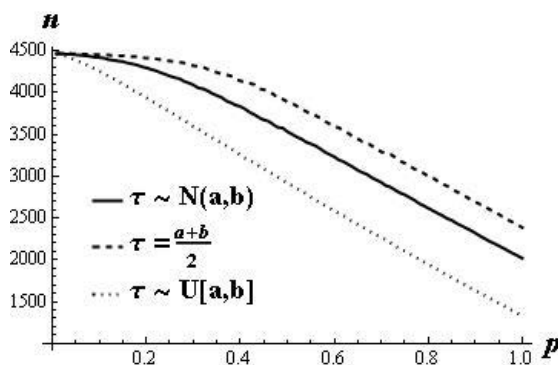


Рис. 15. Зависимости  $n$  от  $p$  при целенаправленном поджоге для интервала (1, 3)  
Fig. 15. Dependencies of  $n$  on  $p$  in the case of targeted lightning-up on the interval (1, 3)

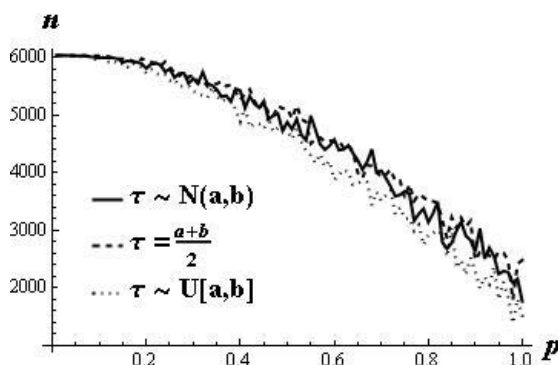


Рис. 16. Зависимости  $n$  от  $p$  при случайном возгорании для интервала (1, 2)  
Fig. 16. Dependencies of  $n$  on  $p$  in the case of random ignition on the interval (1, 2)



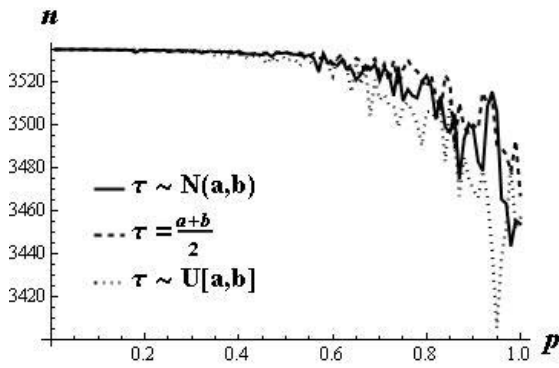


Рис. 17. Зависимости  $n$  от  $p$  при случайном возгорании для интервала  $[2, 3]$   
 Fig. 17. Dependencies of  $n$  on  $p$  in the case of random ignition on the interval  $[2, 3]$

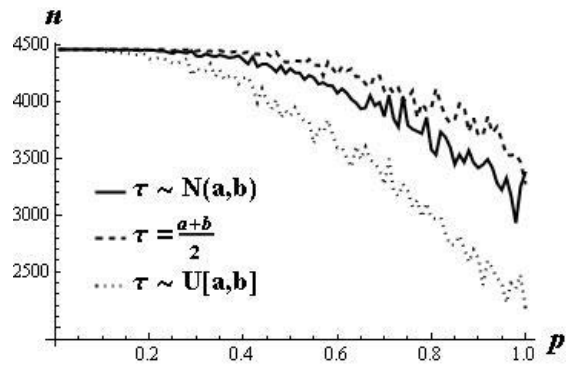


Рис. 18. Зависимости  $n$  от  $p$  при случайном возгорании для интервала  $(1, 3]$   
 Fig. 18. Dependencies of  $n$  on  $p$  in the case of random ignition on the interval  $(1, 3]$

В таблице 4 приведены проценты случаев, в которых эта гипотеза отвергалась для целенаправленного поджога и случайного возгорания.

Таблица 4. Сравнение числа оставшихся после пожара вершин для трех видов графов ( $0 < p \leq 1$  фиксировано)  
 Table 4. Comparison of the number of vertices remaining after the fire for three graph types ( $0 < p \leq 1$  is fixed)

вид разрушения type of destruction	сравниваемые графы compared graphs	$[a, b]$		
		(1, 2)	[2, 3]	(1, 3]
целенаправленный поджог targeted lightning-up	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	99	29	100
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	100	67	100
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	100	88	100
случайное возгорание random ignition	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau = (a + b)/2$	35	5	31
	$\tau \sim N(a, b)$ vs $\tau \sim U[a, b]$	61	4	51
	$\tau \sim U[a, b]$ vs $\tau = (a + b)/2$	64	1	49

Для сравнения числа оставшихся после пожара вершин при случайной вероятности перехода огня по ребру  $p$  приведем полученные ранее [1, 13] значения числа оставшихся вершин для графов с фиксированным  $\tau$  и с равномерно распределенным на отрезке  $[a, b]$  (табл. 5).

По аналогии со случаем фиксированного значения  $p$  для каждого интервала  $(a, b)$  было проведено сравнение числа оставшихся после пожара вершин попарно для трех видов графов. Результаты сравнения показали, что в случае целенаправленного поджога для интервалов (1, 2) и (1, 3] гипотеза о равенстве средних значений числа оставшихся после пожара вершин  $n$  отвергается, тогда как для интерва-

ла [2, 3] – нет. При случайном возгорании гипотеза о равенстве средних отвергается для всех трех интервалов.

Таким образом, проведенное исследование процесса разрушения по типу «лесного пожара» показало, что при случайном возгорании значимого различия в смысле числа оставшихся после пожара вершин между тремя рассмотренными моделями конфигурационных графов не наблюдается. Однако при целенаправленном поджоге описанного выше различия между тремя моделями не наблюдается только на интервале изменения параметра  $\tau \in [2, 3]$ . Кроме того, результаты показывают, что графы с фиксированным значением параметра  $\tau$  более устойчивы к «пожару»,

причем как к целенаправленному, так и к случайному возгоранию. Наименее устойчивыми в смысле числа оставшихся после пожара вершин оказываются графы с параметром  $\tau$ , равномерно распределенным на отрезке  $[a, b]$ .

Таблица 5. Средние значения числа оставшихся в графе вершин  $\bar{n}$  для графов с фиксированным и равномерно распределенным  $\tau$   
 Table 5. Average values of the number of vertices remaining in the graph  $\bar{n}$  for graphs with fixed and uniformly distributed  $\tau$

$(a, b)$	целенаправленный поджог targeted lightning-up	
	$\tau = (a + b)/2$	$\tau \sim U[a, b]$
(1, 2)	3516,8	3146,3
[2, 3]	3494,5	3464,4
(1, 3]	3890	2916,9
$(a, b)$	случайное возгорание random ignition	
(1, 2)	5027,4	4932,8
[2, 3]	3533,1	3532,5
(1, 3]	4403,6	3926,6

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-0005а). Исследования выполнены на научном оборудовании Центра коллективного пользования Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр Российской академии наук».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лери М. М. Пожар на конфигурационном графе со случайными переходами огня по ребрам // Информатика и ее применения. 2015. Т. 9, вып. 3. С. 67–73. doi: 10.14357/19922264150307
2. Afanasyev V. I., Boinghoff C., Kersting G., Vatutin V. A. Limit theorems for weekly branching processes in random environment // Journal of Theoretical Probability. 2012. Vol. 25, iss. 3. P. 703–732. doi: 10.1007/s10959-010-0331-6
3. Arinaminparty N., Kapadia S., Kay R. Size and complexity in model financial

systems // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2012. Vol. 109, no. 45. P. 18338–18343. doi: 10.1073/pnas.1213767109

4. Bertoin J. Fires on trees // Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques. 2012. Vol. 48, no. 4. P. 909–921. doi: 10.1214/11-AHP435

5. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86, iss. 24. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

6. Bollobas B. A. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European Journal of Combinatorics. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

7. Bollobas B., Riordan O. Robustness and vulnerability of scale-free random graphs // Internet Mathematics. 2004. Vol. 1, no. 1. P. 1–35. doi: 10.1080/15427951.2004.10129080

8. Drossel B., Schwabl F. Self-organized critical forest-fire model // Physical Review Letters. 1992. Vol. 69, iss. 11. P. 1629–1632. doi: 10.1103/PhysRevLett.69.1629

9. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 221 p.

10. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p.

11. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model // Austrian J. Stat. 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/ajs.v43i4.34

12. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs // Fundamenta Informaticae. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362

13. Leri M., Pavlov Yu. Random graphs' robustness in random environment // Austrian J. Stat. 2017. Vol. 46, no. 3-4. P. 89–98. doi: 10.17713/ajs.v46i3-4.674

14. Norros I., Reittu H. Attack Resistance of Power-law Random Graphs in the Finite Mean, Infinite Variance Region // Internet Mathematics. 2008. Vol. 5, no. 3. P. 251–266. doi: 10.1080/15427951.2008.10129162

15. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию 16.03.2018

## REFERENCES

1. Leri M. M. Pozhar na konfiguratsionnom grafe so sluchainymi perekhodami ognya po rebram [Fire in a configuration graph with random fire propagation on edges]. *Informatics and Applications*. 2015. Vol. 9, iss. 3. P. 67–73. doi: 10.14357/19922264150307
2. Afanasyev V. I., Boinghoff C., Kersting G., Vatutin V. A. Limit theorems for weekly branching processes in random environment. *Journal of Theoretical Probability*. 2012. Vol. 25, iss. 3. P. 703–732. doi: 10.1007/s10959-010-0331-6
3. Arinaminparty N., Kapadia S., May R. Size and complexity in model financial systems. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2012. Vol. 109, no. 45. P. 18338–18343. doi: 10.1073/pnas.1213767109
4. Bertoin J. Fires on trees. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*. 2012. Vol. 48, no. 4. P. 909–921. doi: 10.1214/11-AIHP435
5. Bianconi G., Barabasi A.-L. Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86, iss. 24. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632
6. Bollobas B. A. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European Journal of Combinatorics*. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
7. Bollobas B., Riordan O. Robustness and vulnerability of scale-free random graphs. *Internet Mathematics*. 2004. Vol. 1, no. 1. P. 1–35. doi: 10.1080/15427951.2004.10129080
8. Drossel B., Schwabl F. Self-organized critical forest-fire model. *Physical Review Letters*. 1992. Vol. 69, iss. 11. P. 1629–1632. doi: 10.1103/PhysRevLett.69.1629
9. Durrett R. Random Graph Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 221 p.
10. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p.
11. Leri M., Pavlov Yu. Power-law random graphs' robustness: Link saving and forest fire model. *Austrian J. Stat.* 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236.
12. Leri M., Pavlov Y. Forest fire models on configuration random graphs. *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 145, iss. 3. P. 313–322. doi: 10.3233/FI-2016-1362
13. Leri M., Pavlov Yu. Random graphs' robustness in random environment. *Austrian J. Stat.* 2017. Vol. 46, no. 3-4. P. 89–98. doi: 10.17713/ajs.v46i3-4.674
14. Norros I., Reittu H. Attack Resistance of Power-law Random Graphs in the Finite Mean, Infinite Variance Region. *Internet Mathematics*. 2008. Vol. 5, no. 3. P. 251–266. doi: 10.1080/15427951.2008.10129162
15. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, iss. 1-2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Received March 16, 2018

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Лери Марина Муксумовна**

научный сотрудник, к. т. н.  
Институт прикладных математических исследований  
КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр  
«Карельский научный центр РАН»  
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,  
Республика Карелия, Россия, 185910  
эл. почта: leri@krc.karelia.ru  
тел.: (8142) 781218

## CONTRIBUTOR:

**Leri, Marina**

Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences  
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,  
Karelia, Russia  
e-mail: leri@krc.karelia.ru  
tel.: (8142) 781218