Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2018. С. 92–99
DOI: 10.17076/mat806

УДК 519.179.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ВЕРШИНЫ В УСЛОВНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ГРАФЕ

И. А. Чеплюкова

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими степенное распределение с положительным параметром τ. Изучаются случайные графы при условии, что сумма степеней вершин не превосходит n, а параметр τ есть случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[a, b], 1 \leqslant a < b < \infty$. Найдены предельные распределения максимальной степени вершины в различных областях изменения $N, n \to \infty$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: конфигурационный граф; предельное распределение; степень вершины.

I. A. Chepliukova. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE MAXIMUM VERTEX DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

We consider configuration graphs with N vertices. The degrees of the vertices are independent identically distributed random variables following the power-law distribution with a positive parameter τ. We study random graphs under the condition that the sum of vertex degrees does not exceed n and the parameter τ is a random variable uniformly distributed on the interval $[a, b], 1 \leqslant a < b < \infty$. We obtain the limit distributions of the maximum vertex degree for different relations between the parameters N and n tending to infinity.

K e y w o r d s: configuration graph; limit distribution; vertex degree.

Введение

В последнее время исследованию случайных графов, предназначенных для описания структуры и прогнозирования динамики развития сложных сетей коммуникаций, посвящено большое число работ (см., например, [8, 9]). Одна из наиболее известных таких моделей – конфигурационная модель с независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Построение конфигурационных графов можно разбить на два этапа. На первом этапе определяется степень каждой вершины в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуребер [10], число которых равно степени данной вершины. Все вершины и полуребра различны. На втором этапе построения происходит образование ребер: на каждом шаге выбираются два ребра равновероятно и, соединившись, образуют ребро. Если сумма степеней нечетна, то вводится вспомогательная вершина, степень которой равна 1. Очевидно, что при таком построении допустимы появления петель и кратных ребер.

Пусть N обозначает число вершин графа, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ – случайные величины, равные степеням вершин с номерами $1, 2, \ldots, N$ соответственно. Мы будем рассматривать модель конфигурационного графа, предложенную в [10]. В этой модели предполагается, что степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, распределение которых имеет вид:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \qquad (1)$$
$$i = 1, 2, \ldots, N, \qquad k = 1, 2, ...$$

Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали (см., например, [8]), что модели с распределением степеней вершин (1) адекватно описывают сети, при этом $\tau \in (1, 2)$. Однако исследования случайных графов при других значения параметра τ также вызывают интерес. В последнее время стали появляться работы (см., например, [7]), в которых отмечается, что по мере развития сетей распределения степеней вершин могут меняться и даже носить случайный характер.

В [2] рассматриваются условные конфигурационные графы при условии, что сумма степеней вершин графа известна и равна n, а параметр τ распределения (1) является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b], 0 < a < b < \infty$. Тогда из (1) следует, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, равные степеням вершин, имеют распределение

$$p_1 = \mathbf{P}\{\xi_i = 1\} =$$
$$= 1 - \frac{1}{(b-a)\ln 2}\left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b}\right), \qquad (2)$$

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{1}{(b-a)\ln k}\left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b}\right) -$$
$$-\frac{1}{(b-a)\ln(k+1)}\left(\frac{1}{(k+1)^a} - \frac{1}{(k+1)^b}\right), \quad (3)$$

где $k = 2, 3, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots, N$. Нетрудно видеть, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{a}{(b-a)k^{a+1}\ln k}. \qquad (4)$$

В [2] получены предельные распределения максимальной степени вершины таких условных конфигурационных графов в различных зонах изменения параметров N и n, при $N, n \to \infty$. В основе доказательств этих результатов лежит обобщенная схема размещения частиц по ячейкам [1]. В настоящей работе мы решаем подобную задачу для условных конфигурационных графов при условии, что сумма степеней всех вершин ограничена сверху.

Рассмотрим условные конфигурационные графы, степени вершин которых имеют распределение, определенное в равенствах (2) и (3) при $1 \leqslant a < b < \infty$, при условии, что сумма степеней всех вершин $\xi_1 + \ldots + \xi_N \leqslant n$. Пусть случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ равны степеням вершин с номерами $1, \ldots, N$ в таком условном графе. Эти случайные величины зависимы и для целых $k_1, \ldots, k_N \geqslant 1$ таких, что $k_1 + \ldots + k_N \leqslant n$, выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \qquad (5)$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N \leqslant n\}.$$

Совокупность двух наборов случайных величин $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_N)$, удовлетворяющих соотношению (5) и таких, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и $\eta_1 + \ldots + \eta_N \leqslant n$, в работе [5] названы аналогом обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам. Впервые такие условные конфигурационные графы с распределением степеней вершин (1) и фиксированным τ были исследованы в [4]. А для рассматриваемых условных графов с распределением (2) – (3) степеней вершин в [3] получены предельные распределения числа вершин заданной степени в различных зонах изменения параметров N и n при $N, n \to \infty$.

Обозначим через $\eta_{(N)}$ случайную величину, равную максимальной степени вершины в рассматриваемом графе. Для этой характеристики степенной структуры графа ниже будут доказаны предельные теоремы при N и n, стремящихся к бесконечности. Во втором разделе сформулированы основные результаты (теоремы 1 и 2), в третьем разделе получены вспомогательные утверждения (леммы 2–7), с помощью которых в последнем разделе доказываются теоремы.

Основные результаты

Введем необходимые обозначения:

$$B_N = \begin{cases} (N/\ln N)^{1/a}, & 1 < a < 2; \\ \sqrt{N \ln\ln N}, & a = 2; \\ \sigma\sqrt{N}, & a > 2, \end{cases}$$

$$m = \mathbf{E}\xi_1, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1,$$

$$H(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^x\ln k}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $n,N\to\infty$,

$$r^a=\frac{Na}{\gamma(b-a)\ln N}(1+o(1)),\quad 0<\gamma<\infty$$

и выполнено одно из условий:

1. $a=1, n/N\geqslant C_1>(b-H(b))/(b-1)$;

2. $a>1, (n-mN)/B_N\geqslant -C_2>-\infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}\leqslant r\}=e^{-\gamma}(1+o(1)).$$

Пусть

$$y=\frac{n-((b-H(b))/(b-1)+q(N))\,N}{N/\ln N},\qquad (6)$$

где стремящаяся к нулю числовая последовательность $q(N)$ задана условиями ниже сформулированной леммы 4.

Теорема 2. *Пусть* $n,N\to\infty, a=1, r=N/(\gamma(b-1)\ln N)(1+o(1)), 0<\gamma<\infty$. *Тогда при* $-\infty<C_3\leqslant y\leqslant C_4<\infty$,

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}\leqslant r\}\sim$$
$$\sim 1+\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{2y(b-1)}{\pi}+\frac{1}{2}\right)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}J_k(y),$$

где

$$J_k(y)=\frac{2^{k/2+1}\pi^{k/2}}{(b-1)^{k-1}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{y}\int_{B_k}\frac{(x_1\dots x_k)^{-2}dx_1\dots dx_k dx}{\pi^2+4(x-x_1-\dots-x_k)^2(b-1)^2},$$
$$B_k=\{x_i\geqslant\frac{1}{\gamma(b-1)}, i=1,\dots,k,$$
$$x_1+\dots+x_k\leqslant x\}.$$

Вспомогательные результаты

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\tilde{\xi}_1^{(r)},\dots,\tilde{\xi}_N^{(r)}$, распределение которых имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)}=k\}=\mathbf{P}\{\xi_1=k|\xi_1\leqslant r\},$$
$$k=1,2,\dots,\qquad i=1,2,\dots,N.$$

Положим также

$$\zeta_N=\xi_1+\dots+\xi_N,\quad \tilde{\zeta}_N^{(r)}=\tilde{\xi}_1^{(r)}+\dots+\tilde{\xi}_N^{(r)},$$
$$P_r=\mathbf{P}\{\xi_1>r\}.$$

В [6] показано, что для случайной величины $\eta_{(N)}$ следствием из равенства (5) является следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)}\leqslant r\}=(1-P_r)^N\frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_N^{(r)}\leqslant n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N\leqslant n\}}.$$

Учитывая, что предельные распределения суммы ζ_N получены в [3], из леммы 1 следует, что для оценки вероятностей $\mathbf{P}\{\eta_{(N)}\leqslant r\}$ необходимо знать асимптотическое поведение суммы $\tilde{\zeta}_N^{(r)}$ и вероятности P_r. Исследование этих величин приведено ниже в леммах 2–6.

Лемма 2. *Пусть* $n,N\to\infty, r^a=Na/(\gamma(b-a)\ln N)(1+o(1)), a\geqslant 1, 0<\gamma<\infty$. *Тогда справедливо*

$$NP_r\to\gamma.$$

Доказательство. Из (2), (3) и (4) получаем, что при $r\to\infty$

$$P_r=\sum_{k=r+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(b-a)\ln k}\left(\frac{1}{k^a}-\frac{1}{k^b}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(b-a)\ln(k+1)}\left(\frac{1}{(k+1)^a}-\frac{1}{(k+1)^b}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{(b-a)(r+1)^a\ln(r+1)}\left(1-\frac{1}{(r+1)^{(b-a)}}\right)=$$
$$=\frac{1+o(1)}{(b-a)r^a\ln r}.$$

Отсюда и следует утверждение леммы. □

Введем обозначения

$$E(t,\gamma)=\frac{1}{b-1}\int_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty}\exp\{ity\}\frac{1}{y^2}dy,\qquad (7)$$

$$I_0(x)=\frac{2(b-1)}{\pi^2+4(b-1)^2x^2},\qquad (8)$$

$$I_k(x)=\frac{2^{(k+2)/2}\pi^{k/2}}{(b-1)^{k-1}}\times$$
$$\times\int_{B_k}\frac{(x_1\cdots x_k)^{-2}dx_1\dots dx_k}{\pi^2+4(b-1)^2(x-x_1-x_2-\dots-x_k)^2},\qquad (9)$$

где $k=1,2,\dots$ и B_k определены в теореме 2.

Лемма 3. *Пусть* $N \to \infty, a = 1, r = N/(\gamma(b-1)\ln N)(1+o(1)), 0 < \gamma < \infty$. *Тогда распределение случайной величины*

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - \left(\frac{b-H(b)}{b-1} + q(N)\right) N\right) \frac{\ln N}{N},$$

где $q(N)$ *– стремящаяся к нулю последовательность, слабо сходится к распределению с плотностью*

$$g(x) = e^{E(0,\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(x).$$

При доказательстве этой леммы мы будем использовать лемму 3 [3]. Сформулируем ее в следующем утверждении.

Лемма 4. *Пусть* $N \to \infty, a = 1$. *Тогда распределение случайной величины*

$$\left(\zeta_N - \left(\frac{b-H(b)}{b-1} + q(N)\right) N\right) \frac{\ln N}{N},$$

где $q(N)$ *– стремящаяся к нулю последовательность, слабо сходится к распределению Коши с характеристической функцией* $\exp\{-\pi|t|/(2(b-1))\}$.

Теперь докажем лемму 3.

Доказательство. Пусть $\Psi_r(u)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - \left(\frac{b-H(b)}{b-1} + q(N)\right) N\right) \frac{\ln N}{N},$$

где стремящаяся к нулю числовая последовательность $q(N)$ определена в лемме 4. Через $\varphi(u)$ и $\tilde{\varphi}_r(u)$ обозначим характеристические функции случайных величин ξ_1 и $\tilde{\xi}_1^{(r)}$ соответственно. Тогда

$$\tilde{\varphi}_r(u) = \frac{\varphi(u) - \sum\limits_{k>r} e^{iuk} p_k}{1-P_r}. \tag{10}$$

Отсюда и из леммы 4 получаем, что для любого фиксированного u

$$\Psi_r(u) =$$

$$= \exp\left\{-i\frac{((b-H(b))/(b-1)+q(N))N}{N/\ln N} u\right\} \times$$

$$\times (1-P_r)^{-N} \left(\varphi\left(\frac{u}{N/\ln N}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k>r} p_k \exp\left\{i\frac{u\ln N}{N}k\right\}\right)^N =$$

$$= (1-P_r)^{-N} \exp\left\{-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\} \times$$

$$\times \left(1 - (1+o(1)) \sum_{k>r} p_k \exp\left\{i\frac{u\ln N}{N}k\right\}\right)^N. \tag{11}$$

Рассмотрим $\sum\limits_{k>r} p_k \exp\{iuk\ln N/N\}$. Заменяя $y = k\ln N/N$ и переходя к интегрированию, из (4) находим, что

$$\sum_{k>r} p_k \exp\left\{i\frac{u\ln N}{N}k\right\} = \frac{1+o(1)}{b-1} \times$$

$$\times \int\limits_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\}\ln N}{(\ln y + \ln N - \ln\ln N)Ny^2} dy =$$

$$= \frac{1+o(1)}{(b-1)N} \left(\int\limits_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \frac{\exp\{iuy\}\ln N dy}{(\ln y + \ln N - \ln\ln N)y^2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\}\ln N}{(\ln y + \ln N - \ln\ln N)y^2} dy \right), \tag{12}$$

где ε некоторая положительная постоянная, выбор которой будет ясен из дальнейшего. Нетрудно видеть, что при достаточно малом ε

$$\left| \int\limits_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \frac{\exp\{iuy\}\ln N}{(\ln y + \ln N - \ln\ln N)y^2} dy \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \exp\{iuy\} \frac{1+o(1)}{y^2} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{1/(\gamma(b-1))}^{N^\varepsilon} \frac{1+o(1)}{y^2} dy = -\gamma(b-1) + o(1)$$

и

$$\left| \int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\}\ln N}{(\ln y + \ln N - \ln\ln N)y^2} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{N^\varepsilon}^{\infty} \exp\{iuy\} \frac{1}{y^2} dy \right| = o(1).$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty} \frac{\exp\{iuy\}\ln N dy}{(\ln y+\ln N-\ln\ln N)y^2}$$

сходится и равен

$$\int\limits_{1/(\gamma(b-1))}^{\infty} \exp\{iuy\}\frac{1}{y^2}dy.$$

Отсюда и из соотношений (7), (11) и (12) находим, что

$$\Psi_r(u)=(1-P_r)^{-N}\exp\left\{-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\}\times$$
$$\times(1-(1+o(1))N^{-1}E(u,\gamma))^N(1+o(1)). \quad (13)$$

Кроме того, легко показать, что

$$P_r=\frac{1}{N}E(0,\gamma)(1+o(1)). \quad (14)$$

Отсюда и из (13) получаем, что

$$\Psi_r(u)=\exp\left\{-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}-\right.$$
$$\left.-E(u,\gamma)+E(0,\gamma)\right\}(1+o(1)). \quad (15)$$

Из (7) следует, что $E(u,\gamma)$ является преобразованием Фурье функции

$$f(y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2\pi}}{(b-1)y^2}, & y\geqslant\frac{1}{\gamma(b-1)};\\ 0, & y<\frac{1}{\gamma(b-1)}.\end{cases} \quad (16)$$

Разлагая $\exp\{-E(u,\gamma)\}$ в ряд по степеням $E(u,\gamma)$, из (7) и (15) находим, что

$$\Psi_r(u)=e^{E(0,\gamma)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\}(-1)^k\frac{E^k(u,\gamma)}{k!}(1+o(1)).$$

Согласно формуле обращения плотность такого распределения имеет вид:

$$g(x)=\frac{1+o(1)}{2\pi}e^{E(0,\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{iux-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\}E^k(u,\gamma)du.$$

Учитывая формулу обращения, нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{iux-\frac{\pi|u|}{2(b-1)}\right\}E^k(u,\gamma)du$$

есть плотность суммы случайных величин $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{k+1}$, где ν_1 имеет плотность распределения Коши:

$$g_1(x)=\frac{2(b-1)}{\pi^2+4(b-1)^2x^2},$$

а случайные величины $\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_{k+1}$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $f(x)$, определенной в (16).

Используя формулу свертки для k слагаемых, получаем, что $\Psi_r(u)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью:

$$g(x)=e^{E(0,\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}I_k,$$

где I_k заданы соотношениями (8) и (9), что и завершает доказательство леммы. □

Лемма 5. *Пусть* $N\to\infty, 1<a<2, r=(Na/(\gamma(b-a)\ln N))^{1/a}(1+o(1)), 0<\gamma<\infty$. *Тогда распределение случайной величины*

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)}-\left(1+\frac{H(a)-H(b)}{b-a}\right)N\right)\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{1/a}$$

слабо сходится к устойчивому закону с характеристической функцией

$$\exp\left\{-\frac{a}{(b-a)(a-1)}\Gamma(1-a)\left(\cos\frac{\pi a}{2}\right)|t|^a\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)\right\}.$$

Доказательство. При доказательстве леммы 4 [3] показано, что при $u\to 0$

$$\varphi(u)=1+iu\left(1+\frac{H(a)-H(b)}{b-a}\right)-$$
$$-\frac{1}{(b-a)(a-1)}\Gamma(1-a)\left(\cos\frac{\pi a}{2}\right)\frac{|u|^a}{\ln(1/|u|)}\times$$
$$\times\left(1-i\frac{u}{|u|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)(1+o(1)). \quad (17)$$

Из леммы 2 и соотношений (4), (10) и (17) находим, что при $u\to 0$

$$\tilde{\varphi}_r(u)=\left(\varphi(u)-P_r+O\left(\frac{u}{r^a\ln r}\right)\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{\gamma}{N}(1+o(1))\right)=$$

$$= 1 + iu\left(1 + \frac{H(a) - H(b)}{b-a}\right) -$$

$$-\frac{1}{(b-a)(a-1)}\Gamma(1-a)\left(\cos\frac{\pi a}{2}\right)\frac{|u|^a}{\ln(1/|u|)}\times$$

$$\times\left(1 - i\frac{u}{|u|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)(1+o(1)). \qquad (18)$$

Отсюда следует, что для любого фиксированного t

$$\ln\tilde{\varphi}_r^N\left(\frac{t}{(N/\ln N)^{1/a}}\right) =$$

$$= it(\ln N)^{1/a}N^{1-1/a}\left(1 + \frac{H(a)-H(b)}{b-a}\right) -$$

$$-\frac{a\Gamma(1-a)|t|^a}{(b-a)(a-1)}\left(\cos\frac{\pi a}{2}\right)\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)\times$$

$$\times(1+o(1)).$$

Лемма 5 доказана. □

Аналогично лемме 5, используя явный вид характеристической функции $\varphi(u)$, полученный при доказательстве леммы 5 [3], нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть* $N \to \infty, a = 2, r = (2N/(\gamma(b-2)\ln N))^{1/2}(1+o(1)), 0 < \gamma < \infty$. *Тогда распределение случайной величины*

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - mN\right)/\sqrt{N\ln\ln N}$$

слабо сходится к нормальному закону с характеристической функцией

$$\exp\{-t^2/(b-2)\}.$$

Лемма 7. *Пусть* $n, N \to \infty, a > 2, r = (aN/(\gamma(b-a)\ln N))^{1/a}(1+o(1)), 0 < \gamma < \infty$. *Тогда распределение случайной величины*

$$\left(\tilde{\zeta}_N^{(r)} - mN\right)/(\sigma\sqrt{N})$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Используя равенство

$$e^{iuk} = 1 + \delta(k), |\delta(k)| < ku,$$

из леммы 2, соотношений (4) и (10) находим, что при $u \to 0$

$$\tilde{\varphi}_r(u) = \left(\varphi(u) - \sum_{k>r}(1+\delta(k))p_k\right)\frac{1}{1-P_r} =$$

$$= \big(1 + ium - u^2(\sigma^2+m^2)/2 + O(u^3) - P_r +$$

$$+ O(u\sum_{k>r}kp_k)\Big)(1+\gamma/N(1+o(1))) =$$

$$= 1 + ium - u^2(\sigma^2+m^2)/2 +$$

$$+ O\left(u/N + u^3\right) + o\left(1/N\right).$$

Отсюда следует, что для любого фиксированного t

$$\ln\tilde{\varphi}_r^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) = \frac{itm\sqrt{N}}{\sigma} - \frac{t^2}{2} + o(1),$$

лемма 7 доказана.

Доказательства теорем

Пусть выполнены условия теоремы 1. Из лемм 1, 3 и 4 получаем, что при $a = 1$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} =$$

$$= (1-P_r)^N\frac{\int\limits_{-\infty}^{y} g(x)dx}{\int\limits_{-\infty}^{y} g_1(x)dx}(1+o(1)), \qquad (19)$$

где y определено в (6), плотность $g(x)$ задана в лемме 3 и $g_1(x)$ – плотность распределения Коши:

$$g_1(x) = \frac{2(b-1)}{\pi^2 + 4(b-1)^2x^2}.$$

Согласно условию теоремы 1 в этом случае

$$\frac{n}{N} \geqslant C_1 > \frac{b-H(b)}{b-1},$$

тогда из (6) нетрудно получить, что

$$y = \left(\frac{n}{N} - \frac{b - H(b) + q(N)}{b-1}\right)\ln N \to \infty.$$

Отсюда, из леммы 2 и соотношения (19) следует утверждение теоремы 1 при $a = 1$. Осталось доказать теорему 1 для случая $a > 1$. Из лемм 1, 2, 5 и леммы 4 [3] следует справедливость теоремы 1 при $1 < a < 2$. Из лемм 1, 2, 6 и леммы 5 [3] вытекает утверждение теоремы 1 при $a = 2$.

Пусть $a > 2$. Из лемм 1, 7 и центральной предельной теоремы получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1-P_r)^N \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} p(z)dz}{\int\limits_{-\infty}^{x} p(z)dz}(1+o(1)),$$

где $$x = (n - mN)/(\sigma\sqrt{N}),$$

а $p(z)$– плотность стандартного нормального распределения. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы 1 для случая $a > 2$. Теперь теорема 1 доказана полностью.

Пусть выполнены условия теоремы 2. Вычисляя интегралы, стоящие в правой части (19), находим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{y} g_1(x)dx = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{2y(b-1)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{y} g(x)dx = e^{E(0,\gamma)}\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{2y(b-1)}{\pi} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_{-\infty}^{y} I_k(x)dx\right),$$

где $E(0,\gamma)$ и $I_k(x)$ определены в соотношениях (8) и (9) соответственно. Отсюда и из (14), (19) вытекает утверждение теоремы 2.

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00005a).

Литература

1. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 209 с.

2. *Павлов Ю. Л.* Об условных конфигурационных графах со случайными распределениями степеней вершин // Труды Карельского научного центра РАН. 2016. № 8. С. 62–72. doi: 10.17076/mat313

3. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число циклов // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445

4. *Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В.* О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/ms8512

5. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

6. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

7. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

8. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 101145/316194.316229

9. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Volume One. Cambridge University Press, 2017. 337 p.

10. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0155-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 05.03.2018

References

1. *Kolchin V. F.* Random mapping. Springer. New York, 1986.

2. *Pavlov Yu. L.* Ob uslovnykh konfiguratsionnykh grafakh so sluchainymi raspredeleniyami stepenei vershin [On conditional configuration graphs with random distribution of vertex degrees]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 62–72. doi: 10.17076/mat313

3. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with bounded number of edges. *Discrete Mathematics and Applications* (in print).

4. *Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V.* On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *Sbornik: Mathematics.* 2016. Vol. 207, iss. 3. P. 400–417. doi: 10.1070/ms8512

5. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Mathematics and Applications.*

2012. Vol. 22, iss. 1. P. 101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

6. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum cell load. *Discrete Mathematics and Applications.* 2012. Vol. 22, iss. 3. P. 307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020

7. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters.* 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

8. *Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch.* On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communications.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 101145/316194.316229

9. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1. Cambridge University Press. 2017. 337 p.

10. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0155-53/6(3)00097-x

Received March 5, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна
старший научный сотрудник, к. ф.-м. н., доцент
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: chia@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: chia@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218