Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2018. С. 25–33
DOI: 10.17076/mat771

УДК 515.12

ПОЧТИ ВПОЛНЕ ЗАМКНУТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КВАЗИ-F-КОМПАКТЫ

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия

Введено понятие почти вполне замкнутого отображения, обобщающее определение вполне замкнутости. Показано, что свойство почти вполне замкнутости сохраняется при композиции и переходе к пределу счетной обратной трансфинитной последовательности почти вполне замкнутых отображений компактов с первой аксиомой счетности. Определен класс квази-F-компактов (включающий в себя класс компактов Федорчука), для которого установлены утверждения, обобщающие и усиливающие некоторые полученные ранее теоремы об F-компактах.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: почти вполне замкнутое отображение; компакт Федорчука; квази-F-компакт; резольвента.

A. V. Ivanov. ALMOST FULLY CLOSED MAPPINGS AND QUASI-F-COMPACTA

The notion of an almost fully closed mapping, which generalizes the definition of a fully closed map, is introduced. It is shown that the composition of almost fully closed mappings of compacta with the first axiom of countability is also almost fully closed, and so is the limit of a countable inverse transfinite sequence of the same mappings. A class of quasi-F-compacta (which contains the class of Fedorchuk compacta) is defined. For this class, some statements are proved that generalize and strengthen the known theorems on F-compacta.

K e y w o r d s: almost fully closed mapping; Fedorchuk compactum; quasi-F-compactum; resolution.

Понятие вполне замкнутого отображения неразрывно связано с одноименным методом построения контрпримеров в теории компактных пространств, который был разработан В. В. Федорчуком в 60–70-е годы прошлого века (см. [6]). Метод вполне замкнутых отображений (впоследствии переименованный усилиями западных математиков в «метод резольвент») показал исключительную эффективность в решении многих задач общей топологии, что естественно привело к определению и исследованию класса компактов, которые могут быть построены этим методом. Такие компакты получили название компактов Федорчука, или F-компактов. По определению, компакт X называется F-компактом, если он допускает разложение в специальный вполне упорядоченный обратный спектр (F-спектр) с вполне замкнутыми соседними проекциями. Наименьшая длина F-спектра, дающего в пределе X, называется спектральной высотой $sh(X)$ F-компакта X (подробные определения приведены ниже).

Вполне замкнутые отображения были введены как инструмент решения конкретных задач общей топологии, однако впоследствии оказалось, что этот класс обладает уникальными категорными свойствами, которые определяются топологической независимостью прообразов точек при вполне замкнутом отображении (см. обзор В. В. Федорчука [6], II. 1–4). В то же время свойство вполне замкнутости не сохраняется при операциях с отображениями. Так, композиция вполне замкнутых отображений может не быть вполне замкнутой. Также не являются вполне замкнутыми, вообще говоря, произвольные проекции F-спектра, что создает определенные трудности при построении контрпримеров и исследовании класса F-компактов. В связи с этим представляется естественным сформулировать обобщение определения вполне замкнутости с тем, чтобы избавиться от указанных недостатков и в то же время сохранить (по возможности) инструментарий, разработанный для вполне замкнутых отображений. Вариантом решения этой задачи является предложенное в работе понятие почти вполне замкнутого отображения[1].

Определение вполне замкнутого отображения допускает ряд равносильных формулировок. Самая краткая из них такова: отображение[2] $f : X \to Y$ вполне замкнуто, если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset X$ пересечение $f(A) \cap f(B)$ конечно. Определение почти вполне замкнутого отображения получается из приведенного выше определения заменой строгого неравенства $|f(A) \cap f(B)| < \omega_0$ на нестрогое $|f(A) \cap f(B)| \leqslant \omega_0$. Однако при этом оказывается, что композиция почти вполне замкнутых отображений компактов с первой аксиомой счетности всегда почти вполне замкнута. Кроме того, почти вполне замкнутыми являются и все предельные проекции F-спектров длины $\leqslant \omega_1$. По аналогии с F-компактами могут быть определены квази-F-компакты как пределы квази-F-спектров, определение которых отличается от определения F-спектра заменой требования вполне замкнутости соседних проекций на почти вполне замкнутость. Также по аналогии определяется спектральная высота $qsh(X)$ квази-F-компакта X.

Для квази-F-компактов справедливы утверждения, обобщающие и усиливающие полученные ранее теоремы для F-компактов. В их числе теорема 1, утверждающая, что произведение квази-F-компактов Z_1, Z_2 не может быть квази-F-компактом счетной спектральной высоты, если $qsh(Z_i) = \gamma_i$ и для каждого $i = 1, 2$ существует ординал $\gamma_i - 3$. Из этой теоремы следует, что произведение неметризуемых F-компактов конечной спектральной высоты всегда не является F-компактом счетной спектральной высоты. Тем самым получено усиление основного результата [7], где аналогичное утверждение об антимультипликативности доказано для F-компактов спектральной высоты 3.

В [3] доказана теорема, утверждающая, что если компакт X допускает вполне замкнутое отображение f на метрический компакт K и слои f метризуемы, то такое отображение почти единственно. Более точно, почти все нетривиальные слои любого другого аналогичного отображения обязательно совпадают со слоями f. Оказывается, что такое же утверждение справедливо и для почти вполне замкнутых отображений (теорема 2). Причем класс компактов, который охватывает теорема 2, шире класса F-компактов спектральной высоты 3, о котором фактически идет речь в теореме из [3]. Это следует из существования F-компакта с $qsh(X) = 3 < sh(X) = 4$ (пример 2). Заметим, что вопрос о соотношении классов F-компактов и квази-F-компактов остается открытым.

В работе идет речь исключительно о компактах с первой аксиомой счетности и вполне упорядоченных обратных спектрах, длина которых не превосходит ω_1. За пределами этой области многие из доказанных утверждений перестают быть верными. Однако такое ограничение соответствует сфере применения метода вполне замкнутых отображений. Подавляющее большинство построенных этим методом примеров имеет спектральную высоту $\leqslant \omega_1$. Сказанное в полной мере относится и к содержательным общим теоремам об F-компактах (см. [2, 4–6]).

Определение 1. *Отображение $f : X \to Y$ будем называть почти вполне замкнутым, если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $F_1, F_2 \subset X$*

$$|f(F_1) \cap f(F_2)| \leqslant \omega_0.$$

Определение квази-F-спектра аналогично определению F-спектра (см. [7]), с той лишь

[1]Термин «почти вполне замкнутое отображение» уже использовался в [6], но там он имеет технический характер и (в случае отображений компактных хаусдорфовых пространств) равносилен вполне замкнутости.

[2]В статье рассматриваются только компактные хаусдорфовы пространства (компакты), все отображения предполагаются непрерывными.

разницей, что требование вполне замкнутости соседних проекций заменяется на почти вполне замкнутость.

Определение 2. *Непрерывный вполне упорядоченный обратный спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma\}$ (γ – ординал) называется квази-F-спектром (F-спектром), если X_0 есть точка, все соседние проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$, $\alpha + 1 < \gamma$ почти вполне замкнуты (вполне замкнуты), а слои $(\pi^{\alpha+1}_\alpha)^{-1}(x)$, $x \in X_\alpha$ этих проекций метризуемы.*

Отметим, что все пространства X_α квази-F-спектра длины $\gamma \leqslant \omega_1$ являются компактами с первой аксиомой счетности (см. [4]).

Определение 3. *Компакт X называется квази-F-компактом (F-компактом – см. [7]), если существует квази-F-спектр (F-спектр), дающий в пределе X. Наименьшая длина γ такого квази-F-спектра называется спектральной высотой $qsh(X)$ квази-F-компакта X.*

Определение спектральной высоты квази-F-компакта аналогично определению спектральной высоты $sh(X)$ F-компакта как наименьшей длины F-спектра, предел которого равен X (см. [7]). Всякий F-компакт X является квази-F-компактом, и $qsh(X) \leqslant sh(X)$. В [2] показано, что для любого ординала $\alpha \leqslant \omega_1$, не представимого в виде $\beta + 1$, где β – предельный ординал, существует F-компакт спектральной высоты α.

Очевидно, что ограничение почти вполне замкнутого отображения на любое замкнутое подмножество почти вполне замкнуто. Поэтому для любого квази-F-спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma\}$ и любого замкнутого подмножества A его предела $X = \lim S$ спектр

$$S_A = \{A_\alpha = \pi_\alpha(A), (\pi^\alpha_\beta)|_{A_\alpha} : \alpha, \beta < \gamma\}$$

также является квази-F-спектром. Поскольку $\lim S_A = A$, отсюда следует, что любое замкнутое подмножество A квази-F-компакта X также является квази-F-компактом и $qsh(A) \leqslant qsh(X)$.

Следующее предложение устанавливает важный в дальнейшем критерий почти вполне замкнутости.

Предложение 1. *Отображение $f : X \to Y$ почти вполне замкнуто тогда и только тогда, когда для любого непрерывного отображения $g : X \to K$ компакта X в метрический компакт K*

$$|\{y : |g(f^{-1}(y))| > 1\} \leqslant \omega_0.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует отображение $g : X \to K$ такое, что множество $A = \{y : |g(f^{-1}(y))| > 1\}$ несчетно. Зафиксируем метрику на K и для каждого $n \in N$ положим

$$A_n = \{y : diam\ g(f^{-1}(y)) \geqslant 1/n\}.$$

Существует $k \in N$ такое, что $|A_k| > \omega_0$. Несчетное индексированное точками y семейство множеств $T_k = \{g(f^{-1}(y)) : y \in A_k\}$ имеет в пространстве $\exp(g(X))$ непустых замкнутых подмножеств $g(X)$ с топологией Вьеториса точку полного накопления D. При этом $diam\ D \geqslant 1/k$. Возьмем в D две различные точки t_1, t_2 и их окрестности Ot_1, Ot_2 в $g(X)$ с непересекающимися замыканиями. Так как D – точка полного накопления семейства T_k, несчетное подсемейство элементов T_k пересекает обе окрестности Ot_1 и Ot_2: $g(f^{-1}(y)) \cap Ot_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$ при $y \in A' \subset A_k$, $|A'| > \omega_0$.

Положим $F_i = g^{-1}([Ot_i])$, $i = 1, 2$. По построению имеем $A' \subset f(F_1) \cap f(F_2)$, $|A'| > \omega_0$. Получено противоречие с почти вполне замкнутостью f.

Достаточность. Предположим, что отображение f не является почти вполне замкнутым. Тогда существуют замкнутые непересекающиеся подмножества $F_1, F_2 \subset X$ такие, что $|f(F_1) \cap f(F_2)| > \omega_0$. Возьмем непрерывную функцию $g : X \to [0, 1]$, которая разделяет F_1 и F_2: $g(F_1) = \{0\}$, $g(F_2) = \{1\}$. Тогда для любой точки $y \in f(F_1) \cap f(F_2)$ получаем, что $\{0, 1\} \subset g(f^{-1}(y))$. Следовательно, множество $\{y : |g(f^{-1}(y))| > 1\}$ – несчетно. $\square$

Следующее предложение является обобщением утверждения, доказанного в [6] для вполне замкнутых отображений (см. [6], предложение II.3.10).

Предложение 2. *Если $f : X \to Y$ – почти вполне замкнутое отображение компакта X на метрический компакт Y с метризуемыми слоями $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, то X метризуем тогда и только тогда, когда*

$$|\{y : |f^{-1}(y)| > 1\}| \leqslant \omega_0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $|\{y : |f^{-1}(y)| > 1\}| > \omega_0$. Предположим, что $w(X) \leqslant \omega_0$. Тогда существует вложение $X \subset I^{\omega_0} = \prod_{n \in N} I_n$ (I – единичный отрезок). Пусть $g_n = \pi_n|_X$, где $\pi_n : I^{\omega_0} \to I_n$ – проекция произведения на сомножитель. В силу предложения 1, для каждого n множество $A_n = \{y : |g_n(f^{-1}(y))| > 1\}$ имеет мощность $\leqslant \omega_0$. Следовательно, множество $A = \cup A_n$ также не более чем счетно. Возьмем точку $y \in Y$ такую, что $y \notin A$ и $|f^{-1}(y)| > 1$. В множестве $f^{-1}(y)$ выберем две различные точки

x_1, x_2. По построению, для каждого $n \in N$ получаем $\pi_n(x_1) = \pi_n(x_2)$. Но это невозможно, поскольку x_1, x_2 – различные точки I^{ω_0}.

Достаточность. Пусть множество $B = \{y : |f^{-1}(y)| > 1\}$ счетно (в случае конечного B отображение f вполне замкнуто и утверждение предложения 2 следует из предложения II.3.10 работы [6]). Занумеруем точки B натуральными числами: $B = \{y_i : i \in N\}$. В каждом слое $f^{-1}(y_i)$ выберем счетную базу $\sigma_i = \{U^i_k : k \in N\}$ (U^i_k – открытые подмножества $f^{-1}(y_i)$). Для каждой пары $U^i_k, U^i_n \in \sigma_i$ такой, что $[U^i_k] \subset U^i_n$, выберем открытое в X множество V^i_{kn} так, что $V^i_{kn} \cap f^{-1}(y_i) = U^i_k$ и $[V^i_{kn}] \cap (f^{-1}(y_i) \setminus U^i_n) = \varnothing$.

Пусть $\nu = \{W_j : j \in N\}$ – счетная база Y. Рассмотрим счетное семейство

$$\sigma = \{V^i_{kn} \cap f^{-1}(W_j) : i, j, k, n \in N\} \cup$$

$$\{f^{-1}(W_j) : j \in N\}$$

и покажем, что конечные пересечения его элементов образуют базу X. Метризуемость компакта X тем самым будет доказана.

Пусть $x \in X$ и Ox – окрестность точки x. Если $f(x) \notin B$, то $f(x) \in f^\sharp(Ox)$ и, следовательно, найдется $W_j \in \nu$ такое, что $x \in f^{-1}(W_j) \subset Ox$.

Пусть теперь $f(x) = y_i$. Покажем, что для любой точки $z \in X, z \neq x$ существует множество $G \in \sigma$ такое, что $x \in G$, а $z \notin [G]$. Если $f(z) \neq y_i$, то существует $W_j \in \nu$ такое, что $y_i \in W_j$, $f(z) \notin [W_j]$. Тогда в качестве G можно взять $f^{-1}(W_j)$.

Если же $z \in f^{-1}(y_i)$, выберем $U^i_k, U^i_n \in \sigma_i$ так, что $x \in U^i_k \subset [U^i_k] \subset U^i_n$ и $z \notin U^i_n$. Тогда по построению $x \in V^i_{kn}$ и $z \notin [V^i_{kn}]$. Следовательно, множество $G = V^i_{kn} \cap f^{-1}(W_j)$, где $y_i \in W_j$, удовлетворяет сформулированным выше требованиям.

Итак, мы можем утверждать, что

$$\cap\{[G] : x \in G, G \in \sigma\} = \{x\}.$$

Отсюда в силу компактности X следует, что найдется конечный набор множеств $G_i \in \sigma, i = 1, \ldots, m$ такой, что $x \in \cap G_i \subset Ox$. $\square$

Следующее предложение обобщает предложение 3 из [7], в котором установлено аналогичное утверждение для спектров с вполне замкнутыми соседними проекциями.

Предложение 3. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma\}$, $\gamma \leqslant \omega_1$ – вполне упорядоченный непрерывный обратный спектр из компактов с первой аксиомой счетности с почти вполне замкнутыми соседними проекциями $\pi^{\alpha+1}_\alpha, \alpha + 1 < \gamma$. Тогда все проекции спектра S, включая предельные проекции π_α, почти вполне замкнуты.*

Доказательство. Почти дословное повторение доказательства предложения 3 из [7]. При этом достаточно лишь заметить, что счетное замкнутое подмножество в компакте с первой аксиомой счетности (как и конечное подмножество) имеет тип G_δ. $\square$

Следствие 1. *Все проекции (включая предельные) квази-F-спектра (в частности, F-спектра) длины $\leqslant \omega_1$ почти вполне замкнуты.*

Следствие 2. *Композиция почти вполне замкнутых отображений компактов с первой аксиомой счетности почти вполне замкнута.*

Следующий пример показывает, что требование первой аксиомы счетности у рассматриваемых пространств существенно.

Пример 1. *Существуют вполне замкнутые отображения f и g, композиция которых не является почти вполне замкнутой.*

Пусть X – дискретное объединение двух экземпляров одноточечной компактификации несчетного дискретного пространства. Будем считать, что топология одноточечной компактификации задана на отрезке $[0, 1]$ и при этом 0 – единственная ее неизолированная точка. Таким образом, $X = [0, 1]_1 \cup_d [0, 1]_2$. (Точки двух экземпляров отрезка $[0, 1]_i$, $i = 1, 2$ будем различать соответствующим индексом i.)

Пусть Y – фактор-пространство X по разбиению, единственным нетривиальным элементом которого является пара $\{0_1, 0_2\}$, а $f : X \to Y$ – факторное отображение. Очевидно, что f вполне замкнуто. Зададим разбиение на Y, нетривиальными элементами которого являются пары $\{t_1, t_2\}, t \in (0, 1]$. Пусть Z – фактор-пространство Y по этому разбиению, а $g : Y \to Z$ – соответствующее факторное отображение. Поскольку Y является одноточечной компактификацией дискретного пространства, для любой пары непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset Y$ одно из множеств обязательно конечно. Следовательно, любое сюръективное отображение Y вполне замкнуто.

Итак, мы получили два вполне замкнутых отображения f и g, композиция которых не является почти вполне замкнутой, поскольку отображение $g \circ f$ склеивает точки $t_1, t_2 : t \in [0, 1]$ несчетных непересекающихся замкнутых подмножеств $[0, 1]_1, [0, 1]_2 \subset X$. $\square$

Согласно следствию 1, пределы счетных трансфинитных обратных последовательностей вполне замкнутых отображений компактов с первой аксиомой счетности почти вполне замкнуты. В связи с этим утверждением естественно возникает следующий

Вопрос 1. Верно ли, что любое почти вполне замкнутое отображение (компактов с первой аксиомой счетности) можно представить как предельную проекцию непрерывного вполне упорядоченного спектра с вполне замкнутыми соседними проекциями?

Этот вопрос имеет прямое отношение к основному вопросу статьи о соотношении классов F-компактов и квази-F-компактов:

Вопрос 2. Существуют ли квази-F-компакты (с первой аксиомой счетности), не являющиеся F-компактами?

Определение 4. *Квази-F-спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma\}$ будем называть неприводимым, если для каждой пары индексов α, β, где $\alpha \geqslant \beta+2$, отображение π^α_β имеет хотя бы один неметризуемый слой $(\pi^\alpha_\beta)^{-1}(x)$, $x \in X_\beta$.*

Предложение 4. *Для любого счетного квази-F-спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma\}$ существует неприводимый квази-F-спектр $S' = \{Y_\delta, p^\delta_{\delta'} : \delta, \delta' < \gamma'\}$ длины $\gamma' \leqslant \gamma$, имеющий тот же предел:* $\lim S' = \lim S$.

Доказательство. Построим по рекурсии трансфинитную последовательность индексов α_δ. Положим $\alpha_0 = 0$. Предположим, что для всех $\delta < \varkappa$ уже указаны индексы $\alpha_\delta < \gamma$ так, что:

1) $\alpha_\delta < \alpha_{\delta'}$ при $\delta < \delta'$;

2) для любого предельного $\varkappa' < \varkappa$ $\sup\{\alpha_\delta : \delta < \varkappa'\} = \alpha_{\varkappa'}$;

3) прообразы точек (слои) $(\pi^{\alpha_{\delta+1}}_{\alpha_\delta})^{-1}(x)$ метризуемы для любого $x \in X_{\alpha_\delta}$ при $\delta + 1 < \varkappa$;

4) каждое отображение $\pi^{\alpha_{\delta'}}_{\alpha_\delta}$ имеет неметризуемый слой при $\delta' \geqslant \delta + 2$.

Рассмотрим систему пространств и отображений

$$S'_\varkappa = \{Y_\delta, p^\delta_{\delta'} : \delta, \delta' < \varkappa\},$$

где $Y_\delta = X_{\alpha_\delta}$, $p^\delta_{\delta'} = \pi^{\alpha_\delta}_{\alpha_{\delta'}}$. Очевидно, что $S'_\varkappa$ – неприводимый квази-F-спектр.

Если множество $\{\alpha_\delta : \delta < \varkappa\}$ конфинально γ, то построение заканчивается: спектр $S'_\varkappa$ – искомый. В противном случае, если ординал $\varkappa$ является предельным, полагаем $\alpha_\varkappa = \sup\{\alpha_\delta : \delta < \varkappa\}$. Условия 1)–4) при этом будут выполнены. Если же $\varkappa$ не является предельным (существует $\varkappa - 1$), то здесь возможны два варианта.

1. $\varkappa - 1$ – предельный ординал. Тогда полагаем $\alpha_\varkappa = \alpha_{\varkappa-1} + 1$.

2. Существует $\varkappa - 2$. В этом случае рассмотрим множество B, состоящее из таких индексов $\beta > \varkappa - 2$, для которых отображение $\pi^\beta_{\alpha_{\varkappa-2}}$ имеет хотя бы один неметризуемый слой.

Если B пусто, то все слои отображения $\pi_{\alpha_{\varkappa-2}} : \lim S \to X_{\alpha_{\varkappa-2}}$ метризуемы. Тогда мы заменяем уже построенное пространство $Y_{\varkappa-1}$ на $\lim S$, а отображение $p^{\varkappa-1}_{\varkappa-2}$ – на предельную проекцию $\pi_{\alpha_{\varkappa-2}}$. В итоге получаем спектр $S'_\varkappa$, который удовлетворяет условию предложения. При этом $\varkappa \leqslant \gamma$, поскольку $\varkappa$ изоморфно множеству $\{\alpha_\delta : \delta < \varkappa\}$, которое является подмножеством γ.

Если $B \neq \varnothing$, то положим $\beta_0 = \inf B$. В силу непрерывности исходного спектра S ординал β_0 не является предельным. Мы полагаем $\alpha_\varkappa = \beta_0$ и заменяем уже построенное $\alpha_{\varkappa-1}$ на $\beta_0 - 1$ с соответствующей заменой пространств и отображений спектра $S'_\varkappa$ (такая замена корректна, поскольку касается только последнего элемента $\alpha_{\varkappa-1}$ и не нарушает условия 1)– 4), выполненные на предыдущем шаге рекурсии).

Итак, во всех случаях мы получаем множество индексов $\{\alpha_\delta : \delta \leqslant \varkappa\}$, удовлетворяющее условиям 1)–4). На каком-то шаге $\varkappa \leqslant \gamma$ рекурсивный процесс исчерпает возможные индексы, и мы получим искомый спектр S'. $\square$

Следствие. *Для любого квази-F-компакта X счетной спектральной высоты существует неприводимый квази-F-спектр, дающий в пределе X, длина которого равна $qsh(X)$.*

Доказательство следующей ниже теоремы аналогично доказательству основного результата [7].

Теорема 1. *Пусть Z_1, Z_2 – квази-F-компакты спектральной высоты $qsh(Z_i) = \gamma_i < \omega_1$, $i = 1, 2$, причем для каждого γ_i, $i = 1, 2$ существует ординал $\gamma_i - 3$. Тогда произведение $Z_1 \times Z_2$ не является квази-F-компактом счетной спектральной высоты.*

Лемма 1. *Пусть $f : X \to Y$ – почти вполне замкнутое отображение, $T = \{y : |f^{-1}(y)| > 1\}$ – множество точек Y с нетривиальными прообразами, и точка $y \in T$ такова, что для любой окрестности U этой точки пересечение $U \cap T$ несчетно. Тогда существует точка $a_y \in f^{-1}(y)$ такая, что для любой ее окрестности Oa_y в X $f^\sharp(Oa_y) \neq \varnothing$.*

Доказательство леммы 1. От противного. Пусть точка $y \in T \subset Y$ удовлетворяет условиям леммы и для любого $x \in f^{-1}(y)$ существует окрестность Ox такая, что $f^\sharp Ox = \varnothing$. Выберем конечное покрытие $\{Ox_i : i \leqslant k\}$ множества $f^{-1}(y)$, состоящее из таких окрестностей. При этом $y \in f^\sharp(\bigcup Ox_i)$.

Положим $V_i = Ox_i \cap f^{-1}(y)$ и проведем ужатие открытого покрытия $\{V_i : i \leqslant k\}$ компакта $f^{-1}(y)$ до замкнутого покрытия $\{F_i : i \leqslant k\}$ (по теореме об ужатии – см. [1], глава 1, теорема 14): $F_i \subset V_i$, F_i замкнуто в

$f^{-1}(y)$, $\bigcup F_i = f^{-1}(y)$. Далее для каждого F_i выберем в X открытое множество O_i так, что $F_i \subset O_i \subset [O_i] \subset Ox_i$. По построению имеем $f^\sharp[O_i] = \varnothing$, $i \leqslant k$ и $y \in f^\sharp(\bigcup_{i\leqslant k} O_i)$. По условию леммы, $|f^\sharp(\bigcup_{i\leqslant k} O_i)\cap T| > \omega_0$. Следовательно, найдется множество O_{i_0} такое, что $|f(O_{i_0}) \cap T| > \omega_0$. Поскольку $f^\sharp(Ox_{i_0}) = \varnothing$,

$$f(X \setminus Ox_{i_0}) = f(X) \supset T.$$

Таким образом, мы получаем в X два непересекающихся замкнутых подмножества $[O_{i_0}]$ и $X \setminus Ox_{i_0}$, для которых

$$|f[O_{i_0}] \cap f(X \setminus Ox_{i_0})| > \omega_0,$$

что противоречит почти вполне замкнутости отображения f. □

Лемма 2. *Пусть $f_i : X \to K_i$, $i = 1, 2$ – почти вполне замкнутые отображения компакта X на метрические компакты K_i. Если все слои $f_2^{-1}(t)$, $t \in K_2$ отображения f_2 метризуемы, то почти все*[3] *нетривиальные слои $f_1^{-1}(t), t \in K_1$, $|f_1^{-1}(t)| > 1$ отображения f_1 являются слоями f_2.*

Доказательство леммы 2. Покажем, что любой слой $T = f_2^{-1}(t)$ отображения f_2 содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев f_1. Рассмотрим почти вполне замкнутое отображение $f_1|_T$ метрического компакта T на метрический компакт $f_1(T)$. В силу предложения 2 $f_1|_T$ имеет не более чем счетное множество нетривиальных слоев, что и требовалось.

В силу предложения 1 почти все слои отображения f_1 содержатся в слоях f_2, и обратно, почти все слои f_2 содержатся в слоях f_1. Итак:

1) множество нетривиальных слоев f_1, которые не содержатся в слоях f_2, не более чем счетно;

2) множество слоев f_2, которые не содержатся в слоях f_1, также не более чем счетно, причем каждый такой слой f_2 содержит не более чем счетное множество нетривиальных слоев f_1.

Таким образом, множество нетривиальных слоев f_1, упомянутых в 1) и 2), не более чем счетно. Любой не входящий в это множество нетривиальный слой f_1 содержится в слое f_2, который, в свою очередь, содержится в слое f_1, что означает их совпадение. □

Доказательство теоремы. Пусть $S = \{B_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma_1\}$ – неприводимый квази-F-спектр, предел которого равен Z_1. Поскольку множество индексов γ_1 имеет наибольший элемент $\gamma_1 - 1$, постольку $\lim S = B_{\gamma_1-1} = Z_1$. В силу неприводимости S существует точка $b \in B_{\gamma_1-3}$, для которой прообраз $(p^{\gamma_1-1}_{\gamma_1-3})^{-1}(b) = Y_1$ неметризуем. При этом $K_1 = (p^{\gamma_1-2}_{\gamma_1-3})^{-1}(b)$ – метрический компакт. Введем обозначение:

$$g_1 = (p^{\gamma_1-1}_{\gamma_1-2})|_{Y_1} : Y_1 \to K_1.$$

Отображение g_1 является почти вполне замкнутым, и все его слои метризуемы. Следовательно, Y_1 – квази-F-компакт спектральной высоты 3, содержащийся в Z_1. Аналогично в Z_2 можно указать неметризуемый компакт Y_2, для которого существует почти вполне замкнутое отображение $g_2 : Y_2 \to K_2$ с метризуемыми слоями на метрический компакт K_2. Поскольку замкнутое подпространство квази-F-компакта счетной спектральной высоты также является квази-F-компактом счетной спектральной высоты, достаточно доказать, что произведение $Y_1 \times Y_2$ не является квази-F-компактом счетной спектральной высоты.

Для каждого $i = 1, 2$ введем обозначение: $T_i = \{t \in K_i : |g_i^{-1}(t)| > 1\}$. В силу предложения 2 множества T_i несчетны. Без ограничения общности можно считать, что для любого непустого открытого множества $U \subset K_i$ пересечение $T_i \cap U$ несчетно ($i = 1, 2$.) Если это не так, то в силу предложения 6 из [2] можно указать компактное подмножество $K'_i \subset K_i$ такое, что для любого непустого открытого $U \subset K'_i$ пересечение $T_i \cap U$ несчетно, и заменить K_i на K'_i, а Y_i на $Y'_i = g_i^{-1}(K'_i)$.

В силу леммы 1 для каждого $t \in T_i$, $i = 1, 2$ мы можем выбрать точку $a_t \in g_i^{-1}(t)$, любая окрестность Oa_t которой удовлетворяет условию $g_i^\sharp(Oa_t) \neq \varnothing$. Кроме того, зафиксируем в каждом прообразе $g_i^{-1}(t)$, $t \in T_i$ точку b_t, отличную от a_t.

Предположим, что произведение $Y_1 \times Y_2$ является квази-F-компактом счетной спектральной высоты, то есть существует счетный квази-F-спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \gamma\}$, предел которого равен $Y_1 \times Y_2$.

В $Y_1 \times Y_2$ рассмотрим слои вида

$$Y_1 \times \{a_t\} = H_1(t) \ (t \in T_2)$$

и

$$\{a_t\} \times Y_2 = H_2(t) \ (t \in T_1),$$

гомеоморфные Y_1 и Y_2 соответственно. Для каждого слоя $H_k(t)$ $(k = 1, 2)$ определим $\alpha_k(t)$ как наименьший ординал α, для которого образ $\pi_\alpha(H_k(t))$ неметризуем. В силу непрерывности и счетности спектра S ординал $\alpha_k(t)$ всегда является изолированным.

[3] «Почти все» означает здесь, как обычно, «все, кроме, может быть, счетного множества».

Поскольку множество слоев вида $H_k(t)$ имеет несчетную мощность, для некоторого несчетного семейства слоев значения $\alpha_k(t)$ совпадают. Тогда найдется несчетное множество слоев одного типа, пусть (для определенности) $H_1(t)$, где $t \in D \subset T_2$, $|D| > \omega_0$, для которых $\alpha_1(t) = \delta$, и при этом для любого $\delta' < \delta$ множество слоев с $\alpha_k(t) = \delta'$ не более чем счетно.

Фиксируем слой $H_1(t)$, $t \in D$. В силу выбора δ образ $\pi_{\delta-1}(H_1(t))$ метризуем. Поэтому согласно предложению 2 множество

$$A = \{x : |(\pi^{\delta}_{\delta-1})^{-1}(x) \cap \pi_\delta(H_1(t))| > 1\}$$

несчетно.

Введем обозначения:

$$p = \pi_{\delta-1}|_{H_1(t)},$$

$$q = g_1 \times g_2|_{H_1(t)} : H_1(t) \to K_1 \times \{t\};$$

p и q отображают $H_1(t)$ на метрические компакты. При этом оба отображения почти вполне замкнуты и все слои q метризуемы. В силу леммы 2 почти все нетривиальные слои отображения p совпадают со слоями q. Следовательно, существует несчетное подмножество $A' \subset A$ такое, что каждой точке $x \in A'$ соответствует некоторая точка $s_x \in T_1$, для которой $p^{-1}(x) = q^{-1}(s_x)$. Таким образом, $\pi_{\delta-1}(a_{s_x}, a_t) = x$ для любого $x \in A'$. Если для всех точек $x \in A'$

$$\pi_{\delta-1}(a_{s_x}, a_t) = \pi_{\delta-1}(a_{s_x}, b_t),$$

то

$$|\pi_{\delta-1}(Y_1 \times \{a_t\}) \cap \pi_{\delta-1}(Y_1 \times \{b_t\})| > \omega_0,$$

что противоречит почти вполне замкнутости отображения $\pi_{\delta-1}$. Следовательно, существует точка $x(t) \in A'$ такая, что

$$\pi_{\delta-1}(a_{s_{x(t)}}, a_t) \neq \pi_{\delta-1}(a_{s_{x(t)}}, b_t).$$

Тогда найдутся окрестности $O_1 = Oa_{s_{x(t)}} \times Ob_t$ и $O_2 = Oa_{s_{x(t)}} \times Oa_t$ точек $(a_{s_{x(t)}}, b_t)$ и $(a_{s_{x(t)}}, a_t)$ в произведении $Y_1 \times Y_2$, образы которых при отображении $\pi_{\delta-1}$ не пересекаются.

Напомним, что все рассуждения мы провели для фиксированного слоя $H_1(t)$, где $t \in D \subset T_2$, со значением $\alpha_1(t)$, равным δ. Будем теперь варьировать $t \in D$. В итоге получим несчетное семейство $Oa_{s_{x(t)}}$, $t \in D$ открытых подмножеств Y_1, малый образ которых $g_1^\sharp(Oa_{s_{x(t)}})$ непуст. Поскольку K_1 – метризуемый компакт, существует непустое открытое множество $U \subset K_1$, которое содержится в несчетном семействе множеств $g_1^\sharp(Oa_{s_{x(t)}})$, $t \in D' \subset D$, $|D'| > \omega_0$. По построению окрестность O_1 содержит точки вида $(a_{t'}, b_t)$, а O_2 – точки $(a_{t'}, a_t)$, где $t \in D'$, $t' \in T_1 \cap U$. Следовательно, при $t' \in T_1 \cap U$ и $t \in D'$

$$\pi_{\delta-1}(a_{t'}, b_t) \neq \pi_{\delta-1}(a_{t'}, a_t). \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь слой $H_2(t') = \{a_{t'}\} \times Y_2$, $t' \in T_1 \cap U$ и докажем, что его образ $\pi_{\delta-1}(H_2(t'))$ неметризуем. Предположим противное. Рассмотрим почти вполне замкнутое отображение $h = g_1 \times g_2|_{H_2(t')}$ слоя $H_2(t')$ на K_2 и отображение $\pi_{\delta-1}|_{H_2(t')}$ этого слоя на метризуемый компакт. В силу предложения 1 множество точек $t \in K_2$, для которых $|\pi_{\delta-1}(h^{-1}(t))| > 1$, не более чем счетно. Однако в силу (1) для любого $t \in D'$ $|\pi_{\delta-1}(h^{-1}(t))| \geqslant 2$. Противоречие.

Таким образом, для всех слоев $H_2(t')$ при $t' \in T_1 \cap U$ имеет место неравенство $\alpha_2(t') \leqslant \delta - 1$. Мы получили противоречие с выбором δ, которое завершает доказательство теоремы. □

Из теоремы 1 сразу следует сфомулированное ниже обобщение основного результата работы [7]:

Следствие. *Произведение неметризуемых F-компактов конечной спектральной высоты не является F-компактом счетной спектральной высоты.*

Для квази-F-компактов спектральной высоты 3 справедлив аналог теоремы о почти единственности спектрального разложения, доказанной в [3] для F-компактов. А именно имеет место

Теорема 2. *Пусть $f_i : X \to K_i$, $i = 1, 2$ – почти вполне замкнутые отображения компакта X на метрические компакты K_i с метризуемыми слоями $f_i^{-1}(t)$, $t \in K_i$, $i = 1, 2$. Тогда почти все нетривиальные слои отображений f_1 и f_2 совпадают:*

$$|\{f_1^{-1}(t) : |f_1^{-1}(t)| > 1, t \in K_1\}\Delta$$

$$\{f_2^{-1}(t) : |f_2^{-1}(t)| > 1, t \in K_2\}| \leqslant \omega_0,$$

где Δ – симметрическая разность множеств.

Доказательство. Достаточно дважды применить лемму 2. □

Пример 2. Существует F-компакт Z, для которого $qsh(Z) = 3 < sh(Z) = 4$.

Для построения искомого компакта воспользуемся конструкцией резольвенты (см. [6], III.1.1). Пусть X – компакт, и каждой точке $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый компакт Y_x и выбрано непрерывное отображение $h_x : X \setminus \{x\} \to Y_x$. Резольвентой

$R(X, Y_x, h_x)$ называется множество

$$\bigcup\{\{x\} \times Y_x : x \in X\},$$

наделенное топологией, открытую базу которой образуют множества вида

$$U \otimes_x V = \{x\} \times V \cup$$

$$\bigcup\{\{x'\} \times Y_{x'} : x' \in U \cap h_x^{-1}(V)\}),$$

где U открыто в X, а V – открытое подмножество Y_x. Резольвента является компактным хаусдорфовым пространством. Отображение $\pi : R(X, Y_x, h_x) \to X$, переводящее пару (x, y) в точку x, всегда вполне замкнуто, а его слои $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфны Y_x.

Шаг 1. Возьмем в качестве Z_1 отрезок $I = [0, 1]$. Для каждого $x \in I$ положим $Y_x = I_x$, где I_x – экземпляр того же отрезка, и определим $h_x : I \setminus \{x\} \to I_x$ как постоянное отображение: $h_x(t) = 0 \in I_x$ для любого $t \in I \setminus \{x\}$. Положим $Z_2 = R(Z_1, I_x, h_x)$, и пусть $\pi_1^2 = \pi : Z_2 \to Z_1$ – проекция резольвенты на Z_1. В силу предложения 2 компакт Z_2 неметризуем. Заметим, что Z_2 как множество совпадает с I^2, следовательно, точками Z_2 являются пары (x, y), где $x, y \in I$.

Шаг 2. Выделим в $Z_1 = I$ семейство мощности континуум попарно непересекающихся счетных всюду плотных подмножеств $\{A_x : x \in I\}$, элементы которого проиндексируем точками $x \in I$. Для каждого $x \in I$ выберем последовательность $\{a_n^x : n \in N\} \subset A_x \setminus \{x\}$, которая сходится к x. Тогда последовательности $\{(a_n^x, 0)\}$ и $\{(a_n^x, 1)\}$ сходятся в Z_2 к точке $(x, 0)$.

Для каждой точки $(x, y) \in Z_2$ при $y \neq 0$ положим $Y_{(x,y)} = \{0\} \subset I$, а при $y = 0$ в качестве $Y_{(x,0)}$ возьмем $I_{(x,0)}$, где I – экземпляр отрезка $[0, 1]$. Для точек $(x, y) \in Z_2$ при $y \neq 0$ отображение

$$h_{(x,y)} : Z_2 \setminus \{(x, y)\} \to Y_{(x,y)}$$

определено однозначно. Для точек вида $(x, 0)$ построим отображение $h_{(x,0)}$ следующим образом. Положим $h_{(x,0)}(a_n^x, 0) = 0$ и $h_{(x,0)}(a_n^x, 1) = 1$ для всех $n \in N$. Тем самым отображение $h_{(x,0)}$ определено на замкнутом в $Z_2 \setminus \{(x, 0)\}$ подмножестве $B = \{(a_n^x, 0) : n \in N\} \cup \{(a_n^x, 1) : n \in N\}$. Компакт Z_2 удовлетворяет первой аксиоме счетности, следовательно, пространство $Z_2 \setminus \{(x, 0)\}$ нормально. Поэтому заданное на B отображение можно продолжить до непрерывного отображения $h_{(x,0)} : Z_2 \setminus \{(x, 0)\} \to I_{(x,0)}$.

Положим теперь $Z_3 = R(Z_2, Y_{(x,y)}, h_{(x,y)})$, $\pi_2^3 = \pi : Z_3 \to Z_2$, где π – проекция резольвенты. Компакт Z_3 как множество вкладывается в I^3, его точки мы будем обозначать через (x, y, z).

Пусть Z_0 есть точка и $\pi_0^1 : Z_1 \to Z_0$ – постоянное отображение. Таким образом, мы получили F-спектр $S = \{Z_i, \pi_j^i : i, j < 4\}$, предел которого равен Z_3. Значит, Z_3 – F-компакт и $sh(Z_3) \leqslant 4$. В силу предложения 2 прообраз каждой точки $x \in Z_1$ при отображении $\pi_1^3 = \pi_1^2 \circ \pi_2^3$ метризуем. Поэтому F-спектр S можно «ужать» до неприводимого квази-F-спектра длины 3. Следовательно, $qsh(Z_3) = 3$.

Остается показать, что $sh(Z_3) = 4$. Предположим противное. Тогда существует вполне замкнутое отображение $f : Z_3 \to K$ на метрический компакт с метризуемыми слоями. По лемме 2 почти все нетривиальные слои отображения π_1^3 являются слоями f. Следовательно, существует множество A_x такое, что для любого $t \in A_x$ слой $(\pi_1^3)^{-1}(t)$ является слоем f. В силу построения отображения $h_{(x,0)}$ множества

$$C_i = \bigcup\{(\pi_2^3)^{-1}(a_n^x, i) : n \in N\}, \ i = 0, 1$$

имеют в Z_3 непересекающиеся замыкания, поскольку $[C_i] = C_i \cup \{(x, 0, i)\}, \ i = 0, 1$. Остается заметить, что отображение f склеивает точки $(a_n^x, 0, 0) \in C_0$ и $(a_n^x, 1, 0) \in C_1$, причем $f(a_n^x, 0, 0) \neq f(a_k^x, 0, 0)$ при $n \neq k$. Таким образом, $|f[C_0] \cap f[C_1]| = \omega_0$, что противоречит вполне замкнутости f. Итак, Z_3 – искомый компакт. □

Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-51-18051).

Литература

1. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 577 с.

2. *Баранова М. А., Иванов А. В.* О спектральной высоте F-компактов // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 498–503. doi: 10.1134/S0037446613030026

3. *Гулько С. П., Иванов А. В.* О вполне замкнутых отображениях компактов Федорчука // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 50. С. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1

4. *Иванов А. В.* О бикомпактах Федорчука // Отображения и функторы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 31–40.

5. *Иванов А. В.* О наследственной нормальности F-бикомпактов // Матем. заметки. 1986. Т. 39, вып. 4. С. 606–611. doi: 10.1007/BF01158007

6. *Федорчук В. В.* Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, вып. 4. С. 105–235. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2

7. *Ivanov A. V.* The class of Fedorchuk compact spaces is anti-multiplicative // Topology and its Applications. 2018. Vol. 235. P. 485–491. doi: 10.1016/j.topol.2017.12.026

Поступила в редакцию 14.03.2017

References

1. *Aleksandrov P. S., Pasynkov B. A.* Vvedenie v teoriyu razmernosti [Introduction to dimension theory]. Moscow: Nauka, 1973. 577 p.

2. *Baranova M. A., Ivanov A. V.* On the spectral height of F-compact spaces. *Sib. Math. J.* 2013. 54(3). P. 388–392. doi: 10.1134/S0037446613030026

3. *Gul'ko S. P., Ivanov A. V.* O vpolne zamknutykh otobrazheniyakh kompaktov Fedorchuka [On fully closed mappings of Fedorchuk compacta]. *Vestn Tomsk. gos. un-ta. Matematika i mekhanika* [Tomsk St. Univ. J. Math. Mechanics]. 2017. No. 50. P. 5–8. doi: 10.17223/19988621/50/1

4. *Ivanov A. V.* On Fedorchuk compacta. *Mappings and Functors.* Moscow: Izd. Mosk. Univ., 1984. P. 31–40

5. *Ivanov A.V.* O nasledstvennoi normal'nosti F-bikompaktov [Hereditary normality of F-bicompacta]. *Matem. zametki* [Math. Notes]. 1986. Vol. 39, iss. 4. P. 606–611. doi: 10.1007/BF01158007

6. *Fedorchuk V. V.* Fully closed mappings and their applications. *J. Math. Sci.* 2006. 136(5). P. 4201–4292. doi: 10.1007/s10958-006-0227-2

7. *Ivanov A. V.* The class of Fedorchuk compact spaces is anti-multiplicative. *Topology and its Applications.* 2018. Vol. 235. P. 485–491. doi: 10.1016/j.topol.2017.12.026

Received March 14, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: alvlivanov@krc.karelia.ru
тел.: +79217015441

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru
tel.: +79217015441