Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2018. С. 62–67
**DOI: 10.17076/mat768**

*УДК 519.179.4*

# О СТРУКТУРЕ КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА С НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ СТЕПЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

**Ю. Л. Павлов**

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН», Петрозаводск, Россия*

Рассматриваются конфигурационные графы с $N$ вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими дискретное степенное распределение с положительным параметром $\tau$. Они равны числу занумерованных в произвольном порядке полуребер. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Изучается подмножество таких случайных графов при условии, что сумма степеней известна и равна $n$. Пусть $\tau$ является случайной величиной, имеющей усеченное нормальное распределение на произвольном фиксированном конечном интервале. Для максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени найдены предельные распределения в различных зонах стремления $N$ и $n$ к бесконечности.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; степень вершины; предельные теоремы.

## Yu. L. Pavlov. THE STRUCTURE OF A CONFIGURATION GRAPH WITH A NORMALLY DISTRIBUTED PARAMETER OF THE POWER SERIES DISTRIBUTION OF VERTEX DEGREES

We consider configuration graphs with $N$ vertices. The degrees of the vertices are independent random variables identically distributed according to the power law, with a positive parameter $\tau$. They are equal to the number of vertex semiedges that are numbered in an arbitrary order. The graph is constructed by joining all of the semiedges pairwise equiprobably to form edges. We study the subset of such random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and it is equal to $n$. Let $\tau$ be a random variable following a truncated normal distribution on an arbitrary fixed finite interval. We obtained the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree for various zones of $N$ and $n$ tendency to infinity.

Keywords: random configuration graph; vertex degree; limit theorems.

## Введение

Для моделирования современных сложных сетей коммуникаций в настоящее время широко используются конфигурационные графы со случайными степенями вершин (см., например, [14]). В таких моделях предполагается, что степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Многочисленные наблюдения за реальными сетями показали [14], что распределения этих случайных величин можно считать подчиняющимися дискретному степенному закону (аналог распределения Парето). Ребра таких графов образуются путем попарного равновероятного соединения друг с другом различимых полуребер, инцидентных вершинам. Существует несколько способов обеспечить, в случае необходимости, четность суммы степеней; эти способы, как замечено в [15], не влияют на асимптотические свойства графов. Обозначим $\xi$ случайную величину, равную степени любой вершины графа. В статье [15] предложена достаточно адекватная модель конфигурационного графа, в которой

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \qquad (1)$$

где $k = 1, 2, \ldots,$ $\tau$ – положительный параметр распределения. В реально существующих сетях обычно $\tau \in (1, 2)$ [14]. Однако в наших последних исследованиях, посвященных моделированию лесных пожаров [12, 13], показано, что представляют интерес и модели, в которых $\tau > 2$.

В [9] впервые рассматривались условные конфигурационные графы при условии, что число ребер известно. Для таких графов в ряде работ исследовалось предельное поведение максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени при различных соотношениях между стремящимися к бесконечности числе вершин и числе ребер [2, 3, 7]. Полученные результаты можно использовать как для описания сетей с ограничениями на число связей, так и для сетей общего вида. Более того, они могут быть полезны и для изучения поведения и других числовых характеристик, зависящих от степенной структуры графа.

В некоторых работах [10, 11] отмечается, что в процессе роста сетей распределение степеней вершин может меняться вместе с числом вершин и даже быть случайным. В [8] рассматривались графы, в которых степени вершин имеют распределение (1), с изменяющимся параметром $\tau$. В статьях [4, 5] этот параметр является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[a, b], 0 < a < b < \infty$. Однако более естественным является предположение о том, что случайная величина $\tau$ должна иметь унимодальное распределение. Поэтому в [1] в качестве закона распределения $\tau$ было предложено использовать гамма-распределение. Известно, что коэффициент асимметрии этого распределения не равен нулю, что представляется недостатком модели. Желательно, чтобы плотность распределения положительного параметра была симметричной. В настоящей статье впервые рассматривается усеченное нормальное распределение $\tau$ на интервале $[a, b], 0 < a < b < \infty$. Обозначим

$$M = \mathbf{E}\xi, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi.$$

В качестве математического ожидания $\xi$ естественно выбрать середину интервала $[a, b]$:

$$M = \frac{a+b}{2}. \qquad (2)$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma$ может принимать любое положительное значение. Далее нам будет удобно определить $\sigma$ на основе известного правила «трех сигм»:

$$\sigma = \frac{b-a}{6}. \qquad (3)$$

Легко убедиться, что при другом выборе $\sigma$ нетрудно внести соответствующие количественные изменения в следующие ниже доказательства и результаты.

Таким образом, в работе рассматриваются условные конфигурационные графы с $N$ вершинами, при условии, что сумма степеней вершин равна $n$, сами степени являются независимыми случайными величинами, имеющими общее распределение (1), где случайный параметр $\tau$ подчиняется усеченному нормальному закону, заданному на интервале $[a, b], 0 < a < b < \infty$ и имеющему параметры (2) и (3). Для таких графов при $N, n \to \infty$ найдены предельные распределения максимальной степени вершины $\xi_{(N)}$ и числа вершин $\mu_r$, имеющих степень $r$. В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1–5, а в последнем разделе изложено доказательство этих результатов.

## Результаты

Введем вспомогательную случайную величину $\eta$ такую, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta = k\} = \lambda^k p_k / B(\lambda), \qquad (4)$$

где $k = 1, 2, \ldots, 0 < \lambda < 1$ и

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k p_k. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$m(\lambda) = \mathbf{E}\eta = B^{-1}(\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda^k p_k,$$

$$\sigma^2(\lambda) = \mathbf{D}\eta = B^{-1}(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} k^2\lambda^k p_k - m^2(\lambda).$$

Пусть $\lambda$ является единственным решением уравнения $m(\lambda) = n/N$. Обозначим $F(x)$ функцию нормального распределения с параметрами $(M, \sigma)$, а символами $C, C_1, C_2$ – некоторые положительные постоянные.

Справедливы следующие результаты.

**Теорема 1.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to 1, (n-N)^3/N^2 \geqslant C > 0$, а $r = r(N, n)$ – наименьшие натуральные числа такие, что $N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \to \gamma$, где $\gamma$ – некоторая положительная постоянная. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r\} \to e^{-\gamma}, \quad \mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r+1\} \to 1-e^{-\gamma}.$$

**Теорема 2.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < M$, а $r = r(N, n)$ выбраны так, что*

$$\frac{6aN\lambda^{r+1}}{(b-a)e^9(F(b)-F(a))B(\lambda)r^{a+1}\ln r} \to \gamma,$$

*где $\gamma$ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leqslant r+k\} = \exp\{-\gamma\lambda^k(1-\lambda)^{-1}\}(1+o(1)).$$

**Теорема 3.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to M$ и выполнено одно из следующих условий:*

1. *$a > 2$;*
2. *$0 < a \leqslant 2$, и существует такое $\delta > 0$, что $N(1-\lambda)^{2+\delta} \to \infty$.*

*Тогда*

$$\mathbf{P}\{|\ln\lambda|\xi_{(N)} - u \leqslant z\} \to e^{-e^{-z}},$$

*где $-\infty < z < \infty$, а $u = u(N, n)$ выбраны так, что*

$$\frac{6a|\ln\lambda|^a e^{-(u+9)}}{(b-a)(F(b)-F(a))B(\lambda)u^{a+1}\ln(u/|\ln\lambda|)} \to 1.$$

**Теорема 4.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to 1, n-N \to \infty$. Тогда для любого фиксированного натурального $r \geqslant 3$ и для целых неотрицательных $k$ равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!}e^{-Np_r(\lambda)}(1+o(1)).$$

**Теорема 5.** *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < M$, или выполнены условия теоремы 3. Тогда для любого натурального $r$ равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma_{rr}(\lambda)\sqrt{2\pi N}}e^{-u_r^2/2},$$

*где*

$$\sigma_{rr}^2(\lambda) = p_r(\lambda)\left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m(\lambda)-r)^2}{\sigma^2(\lambda)}p_r(\lambda)\right).$$

Легко видеть, что условия теорем 1–5 не исчерпывают все возможные случаи поведения $N$ и $n$, поэтому получение аналогичных результатов при других условиях предполагается осуществить в следующих работах.

## Доказательство теорем

Обозначим $f(x)$ плотность распределения параметра $\tau$. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(F(b)-F(a))}e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Отсюда и из (1) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(F(b)-F(a))} \times \times \int_a^b \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right)e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (6)$$

Полагая $x = M + \sigma y$, легко получить соотношение:

$$\int_a^b \frac{1}{k^x}e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{\sigma}{k^m}\int_{\frac{a-M}{\sigma}}^{\frac{b-M}{\sigma}} e^{-(y^2/2+y\sigma\ln k)}dy.$$

Проведем в этом равенстве еще одну замену переменной интегрирования: $t = (y + \sigma\ln k)/\sqrt{2}$, тогда

$$\int_a^b \frac{1}{k^x}e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{k^m\sqrt{2}}e^{\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}} \times \times \left(erf\left(\frac{b-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right) - erf\left(\frac{a-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right), \qquad (7)$$

где

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2/2}dt \qquad (8)$$

– интеграл вероятности. Известно, что при больших $z > 0$

$$erf(z) \sim 1 - - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^k z^{2k}}\right). \qquad (9)$$

Пусть $k \to \infty$. Из (7)–(9) находим, что

$$erf\left(\frac{a-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)=1-$$

$$-\exp\left\{-\frac{((a-M)/\sigma+\sigma\ln k)^2}{2}\right\}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}(a-M+\sigma^2\ln k)}\times$$

$$\times\left(1-\left(\frac{a-M}{\sigma}+\sigma\ln k\right)^{-2}+O\left(\frac{1}{\ln^4 k}\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$erf\left(\frac{a-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma\ln k}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(1+\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right\}\times \quad (10)$$
$$\times\left(1-\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right).$$

Аналогично

$$erf\left(\frac{b-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma\ln k}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(1+\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right\}\times$$
$$\times\left(1-\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right).$$

Отсюда и из (10) видим, что

$$erf\left(\frac{b-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)-$$

$$-\ erf\left(\frac{a-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma\ln k}\exp\left\{-\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(1+\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(1+\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(1+\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right\}\times \quad (11)$$

$$\times\left(1-\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma\ln k}\exp\left\{-\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(1+\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(1-\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right).$$

Из (2) находим, что $(a-M)^2=(b-M)^2$, поэтому

$$\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(\left(1+\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2-\left(1+\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right)=$$

$$=\ (b-a)\ln k$$

и из (11) следует, что при $k\to\infty$

$$erf\left(\frac{b-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)-$$

$$-\ erf\left(\frac{a-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma\ln k}\exp\left\{-\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}\left(1+\frac{b-M}{\sigma^2\ln k}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\ k^{b-a}\left(1-\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right).$$

Отсюда

$$erf\left(\frac{b-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)-$$

$$-\ erf\left(\frac{a-M+\sigma^2\ln k}{\sqrt{2}\sigma}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma\ln k}\exp\left\{-\frac{\sigma^2\ln^2 k}{2}-\frac{(b-a)^2}{4\sigma^2}\right\}\times$$

$$\times\ k^{\frac{b-a}{2}}\left(1-\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right).$$

Тогда из (7) вытекает, что

$$\int_a^b\frac{1}{k^x}e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{k^a\ln k}e^{-\frac{(b-a)^2}{4\sigma^2}}\left(1-\frac{a-M}{\sigma^2\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right).$$

Аналогично

$$\int_a^b\frac{1}{(k+1)^x}e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{(k+1)^a\ln(k+1)}e^{-\frac{(b-a)^2}{4\sigma^2}}\times$$

$$\times\left(1-\frac{a-M}{\sigma^2\ln(k+1)}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)\right).$$

Проводя элементарные преобразования, из последних двух равенств выводим, что

$$\int_a^b \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{a(1+o(1))}{k^{a+1}\ln k} e^{-\frac{(b-a)^2}{4\sigma^2}}.$$

Учитывая (3), отсюда и из (6) получаем, что при $k \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} \sim$$
$$\sim \frac{6a}{(b-a)e^9\sqrt{2\pi}(F(b)-F(a))k^{a+1}\ln k}. \qquad (12)$$

В статье [6] рассматривалось предельное поведение $\xi_{(N)}$ и $\mu_r$ в условных конфигурационных графах при условии, что сумма степеней вершин равна $n$, а случайная величина $\xi$, равная степени любой вершины графа, при $k \to \infty$ обладает свойством:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{d(1+o(1))}{k^g(\ln k)^h}, \qquad (13)$$

где $d > 0, g \geqslant 1, g + h > 1$. В этой же статье показано, что примеры таких графов возникают в случаях, когда параметр $\tau$ распределения (1) равномерно распределен на любом конечном фиксированном интервале или подчиняется гамма-распределению. Из соотношения (12) следует, что в случае усеченного нормального распределения $\tau$ условия теорем работы [6] выполнены, если в (13) положить $y = a + 1, h = 1$ и

$$d = \frac{6a}{(b-a)e^9\sqrt{2\pi}(F(b)-F(a))}.$$

Таким образом, рассмотренный нами случай можно считать еще одним примером случайного конфигурационного графа, удовлетворяющего условиям статьи [6]. Это значит, что утверждения теорем 1–5 непосредственно следуют из соответствующих теорем этой статьи.

*Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН) и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-0005а).*

## Литература

1. *Лери М. М., Павлов Ю. Л.* Об устойчивости конфигурационных графов в случайной среде // Информатика и ее применения (в печати).

2. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, вып. 3. С. 14–23. doi: 10.4213/dm1057

3. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi: 10.4213/dm1104

4. *Павлов Ю. Л.* Об условных конфигурационных графах со случайным распределением степеней вершин // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 62–72. doi: 10.17076/mat313

5. *Павлов Ю. Л.* Один случай предельного поведения степеней вершин в условных конфигурационных графах// Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 66–75. doi: 10.17076/mat613

6. *Павлов Ю. Л.* Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

7. *Павлов Ю. Л., Дертишникова Е. Н.* О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе Интернет-типа // Труды КарНЦ РАН. 2010. № 3. С. 59–65.

8. *Павлов Ю. Л., Феклистова Е. В.* О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа вблизи критических точек // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 2. С. 58–70. doi: 10.4213/dm1369

9. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

10. *Самосват Е. А.* Моделирование Интернета с помощью случайных графов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 98 с.

11. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

12. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graph's robustness: link saving and forest fire model // Austrian Journal of Statistics. 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236.

13. *Leri M., Pavlov Yu.* Forest Fire Models on Configuration Random Graphs // Fundamenta Informaticae. 2016. Vol. 145, no. 3. P. 313–322.

14. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Volume One. Cambridge University Press, 2017. 337 p.

15. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

*Поступила в редакцию 27.01.2018*

## References

1. *Leri M. M., Pavlov Yu. L.* Ob ustoichivosti konfiguratsionnykh grafov v sluchainoi srede [On robustness of configuration graphs in random environment]. *Informatika i ee primenenija* [Informatics and its applications] (in print).

2. *Pavlov Yu. L.* On the limit distributions of the vertex degrees of conditional Internet graphs. *Discrete Mathematics and Applications.* 2009. Vol. 19, iss. 4. P. 349-360. doi: 10.1515/DMA.2009.023

3. *Pavlov Yu. L.* On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Mathematics and Applications.* 2010. Vol. 20, iss. 5-6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031

4. *Pavlov Yu. L.* Ob uslovnykh konfiguratsionnykh grafakh so sluchainym raspredeleniem stepenei vershin [On conditional configuration graphs with random distribution of vertex degrees]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 62–72. doi: 10.17076/mat313

5. *Pavlov Yu. L.* Odin sluchai predel'nogo povedenija stepenei vershin v uslovnykh konfiguratsionnykh grafakh [A case of limit behaviour of vertex degrees in conditional configuration graphs]. *Trudy KarNTs RAN.* [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 66–75. doi: 10.17076/mat613

6. *Pavlov Yu. L.* Conditional configuration graphs with random parameter of the power-law degree distribution. *SB MATH.* 2018 (in print). doi: 10.1070/SM8832

7. *Pavlov Yu. L., Dertishnikova E. N.* O predel'nom raspredelenii maksimal'noj stepeni vershiny v sluchajnom grafe Internet-tipa [On limit distribution of maximum vertex degree in a random graph of Internet type]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2010. No. 3, iss. 1. P. 59–65. doi: 10.17076/mat313

8. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* On limit behaviour of maximum vertex degree in a conditional configuration graph near critical points. *Discrete Mathematics and Applications.* 2017. Vol. 27, iss. 4. P. 213–222. doi: 10.1515/dma-2017-0023

9. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

10. *Samosvat E. A.* Modelirovanie Interneta s pomosh'ju sluchainykh grafov [Internet modeling with help of random graphs]: DSe (Cand. of Phys.-Math) thesis. Moscow, 2014. 98 p.

11. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters.* 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

12. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graph's robustness: link saving and forest fire model. *Austrian Journal of Statistics.* 2014. Vol. 43, no. 4. P. 229–236.

13. *Leri M., Pavlov Yu.* Forest Fire Models on Configuration Random Graphs. *Fundamenta Informaticae.* 2016. Vol. 145, no. 3. P. 313–322.

14. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Volume One. Cambridge University Press, 2017. 337 p.

15. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x


*Received January 27, 2018*


## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Павлов Юрий Леонидович**
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН»
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

## CONTRIBUTOR:

**Pavlov, Yury**
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218