Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2018. С. 117–133
DOI: 10.17076/mat750

УДК 519.115:519.2

АНАЛИЗ КОМБИНАТОРНЫХ СХЕМ В ДОАСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия

Обсуждается специфика и приводится методика и результаты исследования широкого ассортимента конкретных комбинаторных схем в доасимптотической области изменения их параметров. Анализ схем предлагается проводить на основе нетрадиционного качественного анализа исходов схем, частью результатов которого являются их количественные характеристики.

Ключевые слова: перечисление исходов; метод графов; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. ANALYSIS OF COMBINATORIAL SCHEMES IN THE PRE-ASYMPTOTIC REGION OF PARAMETER CHANGE

The paper discusses the specific features and presents the procedure and the results of studying a wide variety of specific combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of their parameter change. It is suggested that the schemes are analyzed by an unconventional quality analysis of their outcomes, the result of which include quantitative characteristics.

Keywords: enumeration of outcomes; method of graphs; enumeration problem; modeling.

Введение

Статья представляет обзор ранее опубликованных результатов автора. Рассматриваются задачи перечислительной комбинаторики, состоящие или в указании алгоритма перебора исходов комбинаторных схем, или в нахождении их числа и других характеристик.

В литературе широко обсуждаются общие аналитические подходы к решению задач перечислительной комбинаторики, а именно – это метод перечисляющих производящих функций, асимптотических разложений, рекуррентных соотношений, методы разбиения совокупности на части, теория перечисления Пойя, основанная на методе производящих функций с формализацией понятия неразличимости объектов с точностью до отношения эквивалентности, заданного на этом множестве, для унификации методов перечисления исходов схем рассматривается алгебра инцидентности с использованием функций Мебиуса на частично упорядоченных множествах, представлены числа Стирлинга первого, второго рода и числа Белла с известными комбинаторными интерпретациями, в качестве инструмента решения приводится также перманент матрицы, имеющий в комбинаторике смысл числа систем различных представителей для заданного семейства подмножеств конечного множества.

Исследования комбинаторных схем алгоритмического характера в доасимптотической области изменения их параметров (в большой степени в силу ограниченности их применения) традиционно не вызывали особого интереса исследователей, поэтому недостаточно представлены в научной литературе и сводятся в основном к общей теории алгоритмирования или к алгоритмическим приемам решения отдельных комбинаторных задач [1–4]. В то же время в условиях постоянно возрастающей сложности изучаемых комбинаторных схем (часто в связи с введением различных ограничений в схеме) и современного бурного роста возможностей электронных вычислительных средств доасимптотическая область для точных численных и алгоритмических расчетов расширяется и практическая потребность в них возрастает, делая их методику все более актуальной. Для практического развития этого доасимптотического направления требуется, с одной стороны, выработка общих принципов и подходов к анализу комбинаторных схем, а с другой стороны, – учет специфики каждой комбинаторной схемы. Соглашаясь с Кнутом [2], который сказал: «Попытка формализовать нечто в виде набора алгоритмов приводит к более глубокому пониманию сути вещей», замечаем, что часто осознание алгоритмической процедуры анализа схем приводит к получению аналитических результатов в виде явных формул или рекуррентных соотношений для ее характеристик, а ее реализация — к числовым результатам.

Разработка этой области комбинаторики диктует следующие последовательные цели исследований: систематизация разрозненных алгоритмических вычислительных приемов анализа комбинаторных схем с формированием достаточно универсальных направлений и подходов к их рассмотрению и выработка методов реализации этих направлений с рассмотрением широкого ассортимента конкретных комбинаторных схем с определенной их классификацией.

В основе анализа схем в доасимптотической области лежит построение алгоритмической процедуры перечисления всех ее исходов с предварительным заданием вида исходов схемы и дисциплины их нумерации. (Естественно, что часть методов и результатов аналитического характера, таких как метод перечисляющих производящих функций, чисел Белла и Стирлинга первого и второго рода, точных формул для чисел исходов комбинаторных схем и рекуррентных соотношений для них, используются и в наших исследованиях при анализе конкретных комбинаторных схем.)

Для проведения перебора исходов схемы строится итерационный случайный процесс их перечисления с последовательным поединичным добавлением на каждом шаге элементов схемы (для простых, базовых схем, не требующих при перечислении ссылок на другие схемы) или этапов перебора (для более сложных остальных — составных схем) до заданного значения параметра добавления.

Для наглядности представления этого процесса он изображается графом перечисления исходов схемы от шага к шагу, с промежуточными состояниями с меньшим числом элементов, соединенными дугами, на которых указываются вероятности этих переходов. Специфика схемы существенно влияет на структуру графа. Все перечисленные итоговые исходы схемы подряд нумеруются. Возможности проведения дальнейших исследований схемы с использованием графа называем методом графов (МГ), дающим ответ на вопрос не только сколько исходов схемы, но и какие они.

Возможности МГ:

1) практическое использование видов исходов схемы;

2) визуальный подсчет числа исходов схемы;

3) вычисление характеристик исходов схемы;

4) визуальный анализ исходов для выявления различных закономерностей в них;

5) учет любых ограничений в схеме с определением числа исходов в ней;

6) нахождение вероятностей исходов схемы на каждом шаге их перечисления;

7) вывод формулы для числа исходов схемы по логике процедуры перечисления всех ее исходов.

Для анализа перечисления исходов схемы методом графов для них решается задача нумерации (ЗН), состоящая в установлении взаимно-однозначного соответствия видов всех исходов с их номерами в двух постановках:

1) прямая ЗН – определения вида исхода по его номеру;

2) обратная ЗН – определения номера исхода по его виду.

При решении ЗН учет специфики схемы происходит через исследование структуры графа и вида исходов.

Результаты решения ЗН могут быть алгоритмические (табличные, получающиеся методом графов) или аналитические (вида явных формул или рекуррентных соотношений) и имеют следующий смысл:

1) возможность визуальной проверки полноты перебора всех исходов схемы;

2) при аналитическом решении ЗН – это способ компактного хранения информации обо всех исходах схемы;

3) в отличие от обычного моделирования исходов схемы, состоящего в проведении процедуры их непосредственного формирования с учетом специфики схемы, аналитический результат решения прямой ЗН для исходов схемы дает возможность проведения единообразного подхода к моделированию ее исходов – так называемого быстрого моделирования при известном вероятностном распределении исходов путем разыгрывания для каждого по одному случайному числу его номера, определяющего вид исхода, что требует значительно меньшего числа операций;

4) аналитический результат решения обратной ЗН дает формулу для числа исходов схемы, совпадающего с номером последнего исхода, когда его вид очевиден по логике нумерации исходов;

5) при неизвестном числе исходов схемы аналитические результаты решения прямой и обратной ЗН позволяют уточнить его приближенную оценку.

Главным результатом для дальнейших вероятностных исследований схемы является получение вероятностей ее исходов.

Моделирование исходов комбинаторных схем – важный этап в их изучении, т. к. дает возможность статистической проверки теоретических результатов их анализа, выявления закономерностей в них для дальнейшего теоретического обоснования, а также моделирования исходов разных случайных процессов, частью которых они являются. Кроме этого, при отсутствии или технической сложности применения формулы для числа исходов схемы с использованием модели иногда может быть получено его приближенное значение методом пропорций по «близкой» схеме с известным числом исходов, заданных на том же вероятностном пространстве, т. е. по схеме, часть исходов которой составляют все исходы изучаемой схемы.

Прямое перечисление (ПП) исходов схемы с ограничением часто имеет конструктивное значение, а именно: для численного анализа такой схемы все результаты могут быть получены из более общей схемы путем визуальной отбраковки лишних исходов, в то время как получение аналитических решений задач ее анализа, основанного на закономерностях связей номеров и видов исходов, которые требуют учета как дисциплины нумерации исходов схемы, так и условий отбраковки, легче выявляется при ПП, где остается учесть только дисциплину нумерации исходов схемы. Тогда ПП приводит к получению результатов в схемах с ограничениями того же уровня, что и без них, по которым, например, можно проводить быстрое моделирование исходов изучаемой схемы.

Числовым просчетам на ПРИМЕРАХ уделяется особое внимание, т. к. они выполняют пояснительную и частично проверочную функцию полученных формул и алгоритмов.

Основные направления анализа комбинаторных схем:

1) перечисление исходов методом графов;

2) решение ЗН;

3) нахождение вероятностного распределения исходов схемы;

4) моделирование исходов схемы.

Характер результатов: приближенные, полученные методами стохастического моделирования, или точные численные, при заданных численных значениях параметров схемы (на основе визуального перебора исходов схемы в виде таблично-программного представления изучаемого объекта) и могут иметь вид алгоритмов, или точные аналитические решения задач в виде рекуррентных соотношений или, предпочтительнее, в виде явных формул для интересующих нас характеристик (будем их считать результатами более высокого порядка и стремиться к их получению, т. к. они имеют общий вид для любых значений параметров схемы и удобны в дальнейшем использовании).

Научная новизна предлагаемого подхода состоит в переходе с количественного анализа исходов комбинаторных схем на более информативный качественный, из которого следуют все результаты количественного анализа. К этому приводит явное перечисление исходов изучаемой комбинаторной схемы в доасимптотической области с введением новой терминологии по следующим направлениям: построение процедуры визуального перечисления всех исходов схемы методом графов, решение задачи нумерации в прямой и обратной постановках, построение алгоритмов моделирования исходов схемы.

Это потребовало введения новых понятий, таких как граф перечисления исходов схемы, метод отбраковки, прямой перебор исходов схемы, базовые и составные схемы, близкая схема, траектория в графе перечисления исходов, траекторная форма исхода, операция по перечислению, схемы одновременных и последовательных действий, широко используемые при анализе многих составных схем, два типа экстремальных характеристик комбинаторных схем со спецификой их анализа, метод дополнительного графа.

1. Содержательная классификация статей

1) Методы анализа комбинаторных схем:

метод графов (МГ);

задача нумерации (ЗН);

анализ схем последовательных действий (ПД);

обобщенная схема ПД;

моделирование исходов основных комбинаторных схем;

исследование двух типов экстремальных характеристик (ЭХ) в комбинаторных схемах;

метод дополнительного графа (МДГ);

метод пропорций.

2) Анализ общих (без ограничений) комбинаторных схем:

схема перестановок;

схема сочетаний;

схема размещений;

схема размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам;

схема размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам;

схема перестановок с повторением;

схемы одновременных и последовательных действий (ОД и ПД) и их обобщение.

3) Анализ комбинаторных схем с ограничениями:

схемы размещения частиц по ячейкам с ограничениями на уровни их заполнения;

схемы подстановок с заданной цикловой структурой;

схема перестановок к запретом подпоследовательности;

схема перестановок с заданными подряд идущими элементами;

схемы перестановок с заданным числом инверсий;

схема подстановок с заданным числом циклов;

схема подстановок с ограниченным рассеянием;

схема сочетаний с заданным размахом;

схема сочетаний с ограниченным сверху размахом;

схема сочетаний с заданным минимальным размахом;

схема размещений с ограниченными степами;

схемы размещения частиц по ячейкам с ограничениями на уровни их заполнения;

схемы с заданными экстремальными значениями характеристик (ЭХ).

2. Краткая характеристика результатов

В [5, 6] обсуждается метод графов – один из основных общих методов исследования в работе, который дает наглядную графическую иллюстрацию случайного процесса перебора исходов изучаемой комбинаторной схемы.

В качестве демонстрации метода приведены графы перечисления исходов основных комбинаторных схем, просчитаны примеры и вероятностные распределения их исходов, сделаны выводы о возможностях метода графов для их анализа.

В [6] сформулирована задача нумерации, состоящая в установлении взаимнооднозначного соответствия между номерами и видами всех исходов схемы, и указано применение ее результатов для дальнейших исследований схемы.

В [7] проведен комбинаторный анализ схемы перестановок размера r, состоящий в разных процедурах перечисления $r!$ исходов схемы (методом графов при поединичном (пошаговом) добавлении элементов и перечислении всех исходов схемы на каждом шаге и частные приемы монотонного перечисления исходов с растущими числами, составляющими перестановки). Для всех предложенных процедур перечисления исходов схемы решена задача нумерации в прямой и обратной постановках.

Приведены два способа моделирования исходов схемы перестановок, один из которых – быстрое моделирование на основе решения прямой задачи нумерации.

В [8] проводится комбинаторный анализ схемы сочетаний из n **элементов по** r с общим числом исходов C_n^r, включающий в себя рассмотрение разных процедур перечисления ее исходов, решение задачи нумерации и приведение разных приемов моделирования всех исходов схемы.

Наряду с уже обсужденным методом графов перечисления исходов схемы сочетаний предлагается еще пять разных приемов, имеющих частный характер, использующих специфику схемы сочетаний, но, как оказалось, приводящих к тому же порядку перечисления, что и методом графов. Поэтому результаты решения задачи нумерации относятся ко всем приведенным приемам перечисления исходов схемы сочетаний.

В [9] проводится комбинаторный анализ схемы размещений из n элементов по r с общим числом исходов A_n^r. Рассматриваются разные процедуры перечисления ее исходов, решается задача нумерации для всех исходов схемы и приводятся способы моделирования ее реализации.

Исходя из формулы $A_n^r = C_n^r r!$, перечисление ее исходов производится через перечисления исходов схем сочетаний и перестановок как этапов перечисления исходов схемы размещения, для которых все исследования проведены ранее.

Приведены два способа моделирования исходов схемы размещений, один из которых – быстрое моделирование на основе решения прямой задачи нумерации.

В [10] изучается схема размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам.

Различаются случаи общей и частной аналогичной схемы без пустых ячеек, в которых определяются числа исходов соответственно $N^* = N^*(r, n)$ и $N = N(r, n)$.

С учетом формулы связи чисел N^* и N: $N^*(r, n) = N(r+n, n)$ решается задача нахождения числа N.

Для определения числа $N = N(r, n)$ доказывается рекуррентное соотношение

$$N(r, n) = N(r-1, n) + N(r-n, n)$$

с рядом очевидных свойств для числа $N(r, n)$, которое дает численный способ вычисления числа N.

Путем изучения закономерностей итераций расчета числа N по данной рекурренте найдена явная формула для числа исходов схемы.

Вероятностный анализ схемы проводится методом графов процесса перечисления ее исходов из очевидных одношаговых вероятностей переходов в графе; найдено вероятностное распределение числа пустых ячеек.

Приводится два способа моделирования исходов схемы: методом маркировки по найденному распределению вероятностей исходов схемы и методом отбраковки исходов близкой схемы с заменой неразличимых ячеек на различимые, моделирование исходов которой известно.

В [11, 12, 29] проводится комбинаторный анализ схемы размещения r различимых элементов по n неразличимым ячейкам. Проводится явное перечисление ее исходов, решается задача нумерации, выводится явная формула общего числа всех исходов схемы, находится распределение статистики пустых ячеек, приводятся разные способы моделирования значений реализации схемы.

Приведен граф процесса перечисления исходов схемы, для исследования схемы по которому проведен структурный анализ его пучковой структуры.

Предложено два способа нахождения числа исходов схемы $N_{(r)}$.

Первый способ состоит в представлении числа $N_{(r)}$ как одного из чисел Белла.

Второй способ получения числа $N_{(r)}$ состоит в решении рекуррентных соотношений для чисел $N_{(i)}$, $i = 1, \ldots, r$, на основании изученной пучковой структуры графа на i-м шаге $K_i = (k_1^{(1)}, \ldots, k_{N_{(i-1)}}^{(i)})$, где $k_j^{(i)}$ – размер j-го пучка на i-м шаге, $N_{(i)}$ – числа всех исходов на i-м шаге, $i = \overline{2, r}$. (Очевидно, что $K_1 = (1)$). Под пучком и его размером здесь понимается соответственно совокупность дуг графа, выходящих из данного состояния, и их число.

Тогда число исходов схемы на каждом шаге будем получать как сумму размеров всех пучков из состояний предшествующего шага процесса.

Приведено моделирование исходов схемы размещений, одно из которых – быстрое на основе решения прямой задачи нумерации, второе – прямое моделирование исходов схемы путем разыгрывания числа k непустых ячеек по ранее полученному распределению с моделированием значения схемы сочетаний из n по k, считая их минимальными номерами частиц в k непустых ячейках и разыгрывая размещение остальных $(r-k)$ частиц по k непустым ячейкам, не изменяющих выбранные минимальные номера частиц в них.

В [13] анализируется схема перестановок с повторениями при делении различимых элементов на данное число групп заданных численностей. В классической схеме перестановок с повторением и в близкой (второй) схеме с укрупненными исходами, объединяющими группами исходы первоначальной схемы, решаются задачи явного перечисления всех исходов схем и их моделирования.

Классическая схема перестановок с повторением возникает при делении n различимых элементов на k различимых частей (групп) (в данном ниже порядке перечисления их размеров), численностями $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, что соответствует схеме размещений n различимых частиц по k различимым ячейкам с заданными уровнями их заполнения: $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $(\sum_{i=1}^{k} n_i = n)$.

Наряду с этой схемой рассматривается аналогичная схема, отличная от первой неразличимостью порядка частей при делении элементов или неразличимостью ячеек при размещении частиц. Указанные отличия схем и означают укрупнение состояний второй схемы по сравнению с первой. Для краткости называем первую схему схемой A, а вторую – схемой B.

Число N_A исходов схемы A известно, а число исходов схемы B вычисляется по формуле

$$N_B = \frac{N_A}{w},$$

где $w = \prod_{i=1}^{t} (\mu_i!)$, где $t = max\{n_k\}$, где μ_i – число частей деления в схеме A размером i. Предлагаются две процедуры перечисления исходов схемы A, использующих перебор исходов схемы перестановок или схем сочетаний, следующих из известной формулы для N_A. Перечисление исходов схемы B, частично объединяющих исходы схемы A, производится из их перечисления исходов путем перезаписи в форме исходов схемы B с отбрасыванием повторяющихся.

Прямая и обратная задачи нумерации в схеме A решены следующими теоремами.

Теорема 1. *Пусть в схеме с параметрами k, $\bar{n}$ дан номер N исхода. Тогда его вид $R = (R_1, \ldots, R_k)$, где $R_1, \ldots, R_k$ – исходы i схем составляющих изучаемую схему сочетаний, определяемые номерами исходов в этих схемах $N_1, \ldots, N_k$ по результатам решения прямой задачи нумерации в них находится по рекуррентным формулам*

$$N_v = t_v + d_v I(t_v),$$

где d_i – размер пучка на i-й итерации, содержащего траекторию T в графе перечисления исходов схемы от ее начального исхода к искомому на k-й итерации; $I(Z) = 1$ при $Z = 0$ и $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$; s_i – номер исхода в T на i-й итерации; $t_i = s_i \; mod \; d_i$;

$$s_{i-1} = \left[\frac{s_i + d_i - 1}{d_i} \right].$$

Теорема 2. *Пусть в схеме с параметрами k, $\bar{n}$ дан вид $R = R_1, \ldots, R_k$ исхода, компоненты которого по результатам обратной задачи нумерации в схеме сочетаний из п.1.3 определяют их номера в этой схеме $N_1, \ldots, N_k$. Тогда номер N исхода данного вида изучаемой схемы A вычисляется по формуле*

$$N = \sum_{i=1}^{k-1} (N_i - 1) \prod_{l=i}^{k} d_{l+1} + N_k.$$

В схеме A алгоритмически решена задача моделирования ее исходов.

В [14] введены в рассмотрение схемы одновременных и последовательных действий (ОД и ПД), объясняется почти полное совпадение их анализа с разным смыслом их исходов, и далее, исключая повторы в рассуждениях, проведен комбинаторный анализ схемы k ПД, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Пусть i-е действие $(i = \overline{1,k})$ совершается n_i числом способов.

Под комбинаторным анализом схемы здесь понимается определение числа конечных исходов схемы после выполнения всех действий, их явное перечисление, решение задачи нумерации для всех исходов и приемы их моделирования.

Общее число N исходов схемы известно и задано формулой

$$N = \prod_{i=1}^{k} n_i.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij_i}, где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид R_{ij_i} определяется характером действия. Исход в результате совершения r действий $(r \leqslant k)$ обозначен в виде $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2,j_2} \ldots, R_{rj_r}\}$. Тогда окончательный исход схемы получен при $r = k$ в виде $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, R_{2,j_2} \ldots, R_{kj_k}\}$.

Для явного перечисления исходов схемы по методу графов (см. [10]) строится случайный процесс пошагового последовательного поединичного добавления действий с исходами всех предшествующих действий, изображаемого графом.

Нумерация исходов на каждом шаге проведена в порядке роста номеров упорядоченных в схеме действий и в порядке роста номеров исходов, заданных по каждому действию, который при конкретизации действий известен.

При решении задачи нумерации запись вида исхода на каждом шаге представляет собой траекторию переходов процесса из состояния в состояние, т. к. первый индекс каждой компоненты указывает номер шага (действия), а второй – номер исхода в пучке этого шага. Считаем решенными задачи нумерации для схем всех действий.

Прямая задача нумерации

Теорема 1. *Пусть в схеме с параметрами* $n_1, \ldots, n_k$ *дан номер* $N^{(k)}$ *ее исхода. Тогда вид исхода* $R^{(k)} = \{R^{(1)}_{j_1}, \ldots, R^{(k)}_{j_k}\}$, *определяемый номерами* $(j_1, \ldots j_k)$ *исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при* $i = \overline{1,k}$ *находится по формуле*

$$j_i = t_i + I(Z)n_i,$$

где $t_i = N^{(i)} mod\ n_i$; $I(Z) = 0$ *при* $Z \neq 0$ *и* $I(Z) = 1$ *при* $Z = 0$;

$$N^{(i-1)} = \left[\frac{N^{(i)} + n_i - 1}{n_i}\right],$$

где $[Z]$ *– целая часть числа* Z *и* $i = k, k-1, \ldots, 1$; $N^{(0)} = 1$.

Обратная задача нумерации

Теорема 2. *Пусть в схеме с параметрами* $n_1, \ldots, n_k$ *дан вид ее исхода* $R^{(k)} = \{R^{(1)}_{j_1}, \ldots, R^{(k)}_{j_k}\}$, *определяющий номера* $(j_1, \ldots j_k)$ *исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при* $i = \overline{1,k}$. *Тогда его номер вычисляется по формуле*

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1}(j_l - 1)\prod_{i=l+1}^{k} n_i + j_k.$$

В качестве примеров рассмотрены схемы делегаций (выбор из совокупности различимых элементов по одному элементу от каждой из составляющих ее различимых групп заданных размеров), перестановок с повторением и последовательного выбора.

Для моделирование исхода схемы ПД предложено два способа: прямое и быстрое.

В [15] рассматривается обобщенная схема последовательных действий. Обобщение результатов [14] анализа схем одновременных и последовательных действий (ОД и ПД) относится к случаю зависимости числа исходов следующего действия не только от самого действия, но и от предсостояния, т. е. от результата предыдущего действия. Результатом этого являются разные размеры пучков в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему.

Проведен комбинаторный анализ обобщенных схем ОД и ПД, включающий в себя явное перечисление их исходов, решение задачи нумерации, определение их числа, моделирование исходов схемы в условиях неравных размеров пучков на каждом шаге, т. е. после каждого действия в графе перечисления исходов схемы.

Явное перечисление исходов схемы производится методом графов.

Анализ схемы последовательных действий приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится k последовательных действий, i-е из которых ($i = \overline{1,k}$) на i-м шаге совершается $N^{(i)}$ способами. Тогда число исходов этих k действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\bar{n}^{(i)} = (n^{(i)}_1, n^{(i)}_2, \ldots, n^{(k)}_{N^{(k-1)}})$, т. е. общее число $N = N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} n^{(i)}_l.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij_i}, где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной задаче нумерации для каждого из k действий и известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы, т. е. с известными числами исходов (размерами пучков) при каждом действии на каждой итерации. Вводится понятие траектории T (последовательности исходов), ведущей в графе перечисления исходов от начала к исследуемому на последней итерации исходу.

Прямая и обратная задачи нумерации решены следующими теоремами.

Теорема 1. *Пусть совершается* k *действий и задан номер исхода* $N^{(k)}_*$. *Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории* T *в содержащих их пучках от первой до* k*-й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для* j_i $(i = \overline{1,k})$

$$j_i = N^{(i)}_* - \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}_* - 1} n^{(i)}_l,$$

где

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max\ t : \left(\sum_{l=1}^{t} n_l^{(k)} = A_k \leqslant N_*^{(k)} \right),$$

где $\delta = 0$ *при* $A_k = N_*^{(k)}$ *и* $\delta = 1$ *при* $A_k < N_*^{(k)}$; *заменяя* k *на* i, *доходим по рекурренте до первого шага.*

По решенной задаче нумерации для всех действий находим из $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(k)}$.

Теорема 2. *Пусть совершается* k *действий и задан вид исхода* $R_*^{(k)} = \{j_1, \ldots, j_k\}$. *Тогда его номер* $N_*^{(k)}$ *определяется по рекуррентной формуле при* $i = k$, $\quad i = \overline{1,k}$

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} n_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с $i = 1$ *при* $N_*^{(1)} = j_1$.

Для **моделирования** исходов схемы предложено два способа: через моделирование исходов действий, как в [14], и по результату решения прямой задачи нумерации – быстрое разыгрывание его номера по одному случайному числу.

В [16] проводится анализ схем размещения частиц по ячейкам с ограничениями на уровни заполнения ячеек, включающий в себя решение задач нахождения количеств исходов в схемах размещения различимых и неразличимых частиц по различимым и неразличимым ячейкам с ограничениями для уровней заполнения $\{\eta_i\}$, $i = \overline{1,n}$ вида $l_1 \leqslant \eta_i \leqslant l_2$, l_1 и l_2 – целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant n$ при числе частиц в пределах $nl_1 \leqslant r \leqslant nl_2$.

1. В схеме размещения различимых частиц по различимым ячейкам путем перебора составов ячеек и допустимых уровней заполнения получена точная формула для числа исходов N_1 данной схемы.

Перебор составов частиц при их фиксированных количествах $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ задается в порядке нумерации ячеек числами

$$C_r^{\eta_1}, C_{r-\eta_1}^{\eta_2}, C_{r-\sum_{i=1}^{2}\eta_2}^{\eta_3}, \ldots,$$

$$C_{r-\sum_{i=1}^{n-2}\eta_i}^{\eta_{n-1}}, C_{r-\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i}^{\eta_n} = 1,$$

а перебор допустимых уровней заполнения определяется суммированием для ячеек от первой до n-й соответственно в пределах, допускающих возможность заполнения с заданными ограничениями остальных ячеек, т. е. в пределах от $L_1^{(i)}$ до $L_2^{(i)}$, где i – номер ячейки, а эти пределы принимают следующие значения:

$$L_1^{(1)} = l_1,\ L_2^{(1)} = l_2;$$

$$L_1^{(2)} = \max(l_1, r - \eta_1 - (n-1)l_2),$$

$$L_2^{(2)} = \min(l_2, r - \eta_1 - (n-1)l_1);$$

$$L_1^{(3)} = \max(l_1, r - \sum_{i=1}^{2}\eta_i - (n-2)l_2),$$

$$L_2^{(3)} = \min(l_2, r - \sum_{i=1}^{2}\eta_i - (n-2)l_1);$$

$$\ldots;$$

$$L_1^{(j)} = \max(l_1, r - \sum_{i=1}^{j-1}\eta_i - (n-j+1)l_2),$$

$$L_2^{(2)} = \min(l_2, r - \sum_{i=1}^{j-1}\eta_i - (n-j+1)l_1);$$

$$\ldots;$$

$j = \overline{1,n}$. В обозначениях $R_j = r - \sum_{i=1}^{j-1}\eta_i$, $j = \overline{1,n}$, для искомого числа N_1 получена формула:

$$N_1 = \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} C_{R_1}^{\eta_1} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} C_{R_2}^{\eta_2} \ldots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} C_{R_n}^{\eta_n} =$$

$$= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} \ldots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} \frac{r!}{\eta_1!\eta_2!\ldots\eta_n!}.$$

Общее число исходов схемы N_1 определяется всеми допустимыми по ограничениям вариантами заполнения ячеек по их численностям и составам в следующей теореме.

Теорема 1. *Для числа* N_1 *верна формула*

$$N_1 = \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} C_{R_1}^{\eta_1} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} C_{R_2}^{\eta_2} \ldots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} C_{R_n}^{\eta_n} =$$

$$= \sum_{\eta_1=L_1^{(1)}}^{L_2^{(1)}} \sum_{\eta_2=L_1^{(2)}}^{L_2^{(2)}} \ldots \sum_{\eta_n=L_1^{(n)}}^{L_2^{(n)}} \frac{r!}{\eta_1!\eta_2!\ldots\eta_n!},$$

где $R_j = r - \sum_{i=1}^{j-1}\eta_i$, $j = \overline{1,n}$.

2. В схеме размещения r неразличимых частиц по n различимым ячейкам с данными ограничениями известна точная формула для числа исходов схемы N_2 как коэффициента при x^{r-nl_1} в разложении функции $\varphi(x) = ((1-x^s)/(1-x))^n$, где $s = l_2 - l_1 + 1$.

В [17] получена явная формула для числа исходов схемы размещения неразличимых шаров по различимым ящикам с ограничением уровня их заполнения N_2 (в обозначении $N(r,n,l)$ из [17]), где $l = l_2+1$ и $l_1 = 1$, т. е. при $l_1 = 1,\ l_2 = l-1$, приведенного в лемме, из которого пересчитывается искомое число N_2.

Лемма. *При* $l_1 = 1,\ l_2 = l-1$ *для чисел* $N(r,n,l)$ *выполняется рекуррентное соотношение*

$$N(r,n,l) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i N(r-n, n-i, l-1).$$

Для расчета $N(r,n,l)$ по этой рекурренте приведем начальные значения функции $N(r,n,l)$:

$N(r,n,l) = 1$ при любом из условий $n = 1, r \leqslant l;\ r = nl$, или

$N(r,n,l) = 0$ при любом из условий $r < n;\ l = 1;\ r > nl$.

Теорема 2. *Для числа исходов схемы* N_2 *верно представление*

$$N_2 = N(r - n(l-1), n, l_2 - l_1 + 1).$$

Искомое число N_2 в общем случае данных ограничений легко пересчитывается и принимает следующий явный вид

$$N_2 = \sum_{L_{k-2}} \sum_{L_{k-3}} \ldots$$

$$\sum_{L_2} C_n^{L_{k-2}} C_{L_{k-2}}^{L_{k-3}} C_{L_3}^{L_2} C_{L_2}^{r-n(l_1-1)-n-\sum_{i=2}^{k-2} L_i}$$

при $nl_1 \leqslant r \leqslant n(l_2-1)$ ($N_2 = 0$ в противном случае), где L_j – число непустых ячеек, когда в каждой $< j$ частиц, $L_{j*} \leqslant L_j \leqslant L_j^*$, $[Z]$ – целая часть числа Z;

$$L_{j*} = \left[\frac{r - n - \sum_{i=j+1}^{k-2} L_i + j - 1}{j} \right];$$

$$L_j^* = \min(n, r - n - \sum_{i=j+1}^{k-2} L_i).$$

3. В схеме размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам с данными ограничениями общее число исходов схемы N_3 вычислено в явном виде в [6] в обозначении $N_3 = N(r,n)$ с односторонним ограничением $l_1 = 1$. В случае одностороннего нижнего предела для заполнения ячеек вида $\eta \geqslant l_1$ число исходов схемы пересчитывается из результата $N(r,n)$ в [10] при ограничениях $l_1 \leqslant \eta \leqslant l_2 = r$ в обозначениях [10] по формуле:

$$N_3 = N(r - (l_1 - 1)n, n).$$

В общем случае при $l_2 \leqslant r$ число исходов схемы с данными ограничениями определяется методом графов, т. е. путем построения графа случайного процесса последовательного равновероятного поединичного размещения частиц по ячейкам с нумерацией состояний процесса в порядке попадания последней размещенной частицы в ячейку с растущим уровнем заполнения на предыдущем шаге путем отбраковки не соответствующих ограничениям исходов. Граф полного перебора исходов схемы приведен в [10] и [5].

4. В схеме размещения r различимых частиц по n неразличимым ячейкам с данными ограничениями для анализа используется общая схема размещения r различимых частиц по n неразличимым ячейкам без ограничений, рассмотренная в [11], где приведен алгоритм перечисления ее исходов. Перечисление исходов нашей схемы будем производить отбраковкой исходов общей схемы по данному ограничению.

Для нахождения вероятностного распределения исходов общей схемы в [11] предложен численный метод по графу перечисления ее исходов. Отсюда вероятности исходов нашей схемы находятся путем деления вероятностей их исходов в общей схеме на сумму их вероятностей в общей схеме.

В [18] приведены результаты деления совокупности элементов на заданное число частей по определению чисел исходов схем, их перечислению методом графов и решению задачи нумерации с варьированием свойств элементов и частей по их различимости или неразличимости.

В [19, 20] проведен анализ случайных подстановок размера n **заданных цикловых структур**, т. е. с разными ограничениями на них. Перечислим эти конкретные ограничения и приведем полученные результаты по их численностям N в терминах перестановок их нижних строк, которыми они задаются и общее число которых при размере подстановки n без ограничений есть $n!$.

1. Число одноцикловых подстановок $N = (n-1)!$.

2. Число подстановок без единичных циклов

$$N = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

3. Число подстановок с ровно k единичными циклами

$$N = C_n^k (n-k)! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k)!} \right).$$

4. Число подстановок с ровно k единичными циклами и одним циклом размером $(n-k)$

$$N = C_n^k (n-k-1)!$$

5. Число подстановок с заданной цикловой структурой $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_i – число циклов размера i, $i = \overline{1,n}$; $\sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ – число циклов подстановки, а $\sum_{i=1}^n i\alpha_i = n$

$$N = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i\alpha_i)!} \prod_{i=1}^n \frac{(i\alpha_i)!((i-1)!)^{\alpha_i}}{(i!)^{\alpha_i}(\alpha_i)!} =$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i)^{\alpha_i}(\alpha_i)!}.$$

Во всех случаях, опираясь на процедуры перечисления и моделирования схем перестановок и сочетаний, получены соответствующие процедуры полного перебора и моделирования подстановок с заданными ограничениями.

В [21] проведен анализ случайных перестановок нижней строки подстановок размера n с s-запретами, т. е. с перестановкой, не содержащей подпоследовательность $\bar{P}_s$ с фиксированным порядком элементов в ней размера $s < n$. Определено число $M = n! - (n-s+1)!$ таких перестановок. Для их перечисления предложено два способа: отбраковкой несоответствующих ограничению из всех полученных в [7] в схеме перестановок $n!$ исходов и прямым перебором исходов с данным ограничением. Идея прямого перебора состоит в перечислении всех перестановок из $(n-1)$-го элемента подстановки без последнего, принадлежащего $\bar{P}_s$, с последующим добавлением его по методу графов лишь в те места перестановок, которые не приводят к нарушению ограничения. Для запретных мест добавлений в теоремах доказаны рекуррентные соотношения.

В результате получено рекуррентно-алгоритмическое решение задачи нумерации для всех допустимых исходов схемы.

В [22] проведен анализ случайных перестановок размера n с заданным числом t подряд идущих фиксированных элементов в произвольном порядке между собой.

Предложена процедура явного прямого перечисления исходов данной схемы перестановок с определенной дисциплиной их нумерации. На этой основе проведено исследование по следующим направлениям: приведена теоретическая формула общего числа ее исходов, решена задача нумерации исходов с проверкой совпадения номера последнего исхода с числом всех исходов схемы, найдено их вероятностное распределение, построен алгоритм быстрого (по одному случайному числу) моделирования исходов схемы.

Перечислим полученные здесь результаты.

Число N исходов схемы есть $N = (n-t+1)!(t)!$.

Процедура перебора благоприятных исходов построена методом графов по схеме перечисления исходов (каждого с каждым) двух последовательных перестановок размерами $(n-t+1)$ и t, алгоритм перебора исходов которых представлен в [7], а анализ схемы последовательных действий (реализаций двух перестановок) проведен в [14].

Задача нумерации решается здесь на основании формул, полученных в [14] при анализе схемы последовательных действий, которыми в данной схеме являются соответствующие схемы перестановок. Получены явные формулы решения ЗН.

Вероятность выполнения данного ограничения p вычисляется по формуле:

$$p = \frac{(n-t+1)!t!}{n!} = \frac{n-t+1}{C_n^t}.$$

Предлагается два способа моделирования исходов схемы.

В [23] проведено исследование числа инверсий в случайных перестановках и проведен их анализ с фиксированным числом инверсий.

Под инверсией в перестановке будем понимать нарушение порядка монотонности возрастания номеров ее элементов. Числом инверсий для данного элемента перестановки будем называть число номеров меньше данного, стоящих правее него. Числом инверсий $I = I_n = I_v = I_{v_n}$ для перестановки будем считать суммарное число инверсий всех ее элементов.

В порядке перечисления исходов схемы перестановок методом графов (см. [5] и [7]) выявлены закономерности их соответствия с числами инверсий в них в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Числа инверсий по итерациям в пучках графа перечисления исходов схемы перестановок поединично убывают в порядке перечисления исходов в них.*

Теорема 2. *Числа инверсий в итерациях в первых исходах пучков графа перечисления исходов схемы перестановок поединично убывают в порядке перечисления пучков, порож-*

даемых исходами каждого пучка предыдущей итерации.

Из утверждений теорем для подсчета инверсий в исходах перестановки выведено итерационное **правило: при переходе от k-го шага перебора исходов перестановки для нахождения чисел инверсий в исходах $(k+1)$-го шага нужно ко всем числам инверсий k исходов каждого пучка k-го шага прибавить соответственно числа** $\bar{b}_k = k, k-1, \ldots, 1, 0$.

Таким образом, для подсчета чисел инверсий всех исходов схемы перестановок размера k в графе перечисления его исходов по шагам получена возможность, не приводя видов исходов, вычислять по тому же графу числа инверсий всех исходов схемы перестановок на всех шагах, руководствуясь приведенным правилом, указывая в графе в качестве исходов процесса числа инверсий в них.

На этой основе предложен алгоритм вычисления вероятностного распределения числа инверсий в исходах схемы перестановок и алгоритмическое решение задачи нумерации для схемы перестановок с фиксированным числом инверсий. В результате получена картина соответствия всех нумерованных исходов схемы перестановок с числами их инверсий.

По табличному результату решения прямой задачи нумерации предложено проводить быстрое моделирование исходов этой нашей схемы перестановок.

По модели методом пропорций со вспомогательной общей схемой перестановок получено приближенное значение числа исходов нашей схемы с оценкой надежности приближения с заданной точностью.

В [24] проведен анализ случайных перестановок фиксированного размера с ограниченным рассеянием. Все исследования схемы проводятся на основе прямого перечисления ее исходов, а именно: определяется число ее исходов и вероятностное распределение, решается задача нумерации для исходов схемы, что дает возможность быстрого моделирования их возможных значений и приближенного вычисления числа исходов схемы методом пропорций.

Вводится понятие рассеяния для подстановки размера n, как максимальной разности по модулю вертикальных значений ее столбцов, т. е., т. к. ее верхняя строка есть числа $(1, 2, \ldots, n)$, а ее нижняя строка – $\bar{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in (1, 2, \ldots, n)$, рассеянием подстановки является число $S = \max |k - i_k|,\ k \in (1, 2, \ldots, n)$. Нас интересуют подстановки со значением $S < s$.

Приведен алгоритм 1 прямого перечисления исходов схемы с ограничением допустимых мест добавления следующего номера элемента в переборе исходов схемы перестановок без ограничений [7] для $i \geqslant s + 2$ элементов.

Предложен численный рекуррентный метод (алгоритм 2) вычисления числа M_n исходов схемы, использующий алгоритм 1 прямого перечисления ее исходов по анализу мест расположения в перестановках предшествующих шагов их перечисления элементов с номерами, отличающимися от добавленного на данном шаге перебора исходов схемы на число $\geqslant s$ (см.[7]). Найдено вероятностное распределение числа инверсий в n-размерной перестановке.

По результату решения прямой задачи нумерации, решенной алгоритмически, предлагается проводить быстрое моделирование исходов нашей схемы. По модели методом пропорций с использованием вспомогательной общей схемы n-мерной подстановки получено приближенное значение числа исходов нашей схемы с оценкой надежности этого приближения с заданной точностью.

В [25] проведен анализ схемы сочетаний из n элементов по r с ограниченным размахом. Вводится понятие размаха R исходов схемы сочетаний как максимальной разности между номерами выбранных элементов. Определяется число исходов схемы с ограниченным размахом $R \leqslant t$, производится их перечисление и решается для них задача нумерации, обсуждается моделирование исходов схемы.

Условие ограничения $R \leqslant t$ выполняется, если в схеме сочетаний из n элементов по r их извлекают из $n \leqslant t + 1$ элементов. При $n > t + 1$ для перечисления исходов нашей схемы выбираем r элементов не из n элементов, а из участков подряд идущих поединично растущих $(t + 1)$ номеров, суммируя числа всех разных вариантов таких выборов по всем участкам с единичными сдвигами, начиная с номера 1, для определения числа исходов схемы, или объединяя их в совокупность исходов при перечислении.

Для исключения повторов исходов при выборах по r из номеров каждого следующего участка длины $(t + 1)$ включаем в выбор номер последнего элемента участка. Тогда, обозначив через N_t искомое число исходов схемы, доказана формула:

$$N_t = C_{t+1}^{r} + (n - t - 1)C_t^{r-1}.$$

Перечисление всех N_t исходов нашей схемы, как было сказано выше, построено на той же идее организации всех разных исходов выбора по схеме сочетаний с ограниченным размахом из номеров элементов с определенных ранее участков номеров со ссылкой на [8], где построена процедура перечисления исходов схемы сочетаний (без ограничений). Объединяя результаты всех исходов схем сочетаний из номеров элементов первого участка по r и всех остальных участков по $(r-1)$ с принудительным добавлением последнего номера участка, получены все исходы нашей схемы. Найдено вероятностное распределение размаха в исходе схемы сочетаний: $P(R=k)=(N_t-N_{t-1})/C_n^r$, где $k=\overline{r-1,n-1}$.

Задача нумерации численно решена на основе результатов ее решения для используемых схем сочетаний без ограничений [8] и на алгоритме перечисления предварительно пронумерованных в порядке их получения исходов нашей схемы. По результату табличного решения прямой задачи нумерации можно проводить быстрое моделирование ее исходов.

В [26] проведен анализ схемы размещений из n элементов по r с ограниченными степами $\leqslant S$, под которыми понимаются абсолютные разности всех соседних элементов исходов схемы. В основе этих исследований лежит процедура перечисления всех исходов схемы, которая проводится в два этапа по частям в зависимости от сравнения значения данного S с размахом R (максимальной абсолютной разности элементов исхода схемы, совпадающей с размахом исхода схемы сочетаний, состоящего из тех же элементов) исходов схемы. Тогда все исходы схемы получаются объединением этих частей перечисления с суммарным по частям числом ее исходов.

В первой части исходов схемы при $R<S$ с использованием результатов из [26] анализа схемы сочетаний с ограниченным размахом R получено число первой части исходов схемы $M_1=(C_{S+1}^r+(n-S-1)C_S^{r-1})r!$. А перечисление этой части исходов схемы получается в результате двух последовательных действий (из [14]): перечисления всех исходов схемы сочетаний с ограниченным размахом, полученных в [25], и схемы перестановок в каждом исходе первого действия, изученных в [7]. Для второй части исходов схемы при $R\geqslant S$ построен алгоритм перечисления ее исходов с формулой вычисления их числа M_2, который здесь не приводится из-за необходимости введения для этого большого числа обозначений из алгоритма. Найдено вероятностное распределение максимального степа в исходе схемы размещений.

Задача нумерации решена здесь алгоритмически (таблично), по результатам ее решения в прямой постановке предложено проведение быстрого моделирования ее исходов. По модели методом пропорций с использованием вспомогательной общей схемы размещений из n элементов по r получено приближенное значение числа исходов нашей схемы с оценкой надежности этого приближения с заданной точностью.

Установлена связь результатов исследования схемы с анализом подстановок с ограниченным рассеянием из [24].

В [27] проведен анализ схемы сочетаний из n элементов по r с заданным минимальным размахом S выборки. В [25] понятие размаха схемы сочетаний определено. Все исследования схемы основаны на процедуре прямого перечисления ее исходов. Для этого варьируются все возможные значения минимального элемента m в исходе схемы от 1 до $(n-S)$, который определяет диапазон перебора значений его максимального элемента от $(m+S)$ до n, а остальные $(r-2)$ элементов исхода выбираются по схеме сочетаний из элементов от $(m+1)$ до $(M-1)$. Из логики перечисления исходов схемы получено их число

$$N=\sum_{m=1}^{n-S}\sum_{M=m+S}^{n}C_{M-m-1}^{r-2}.$$

Задача нумерации в прямой и обратной постановках решена аналитически в терминах известных из [8] результатов анализа схемы сочетаний. На основании результата решения прямой задачи нумерации и равновероятности исходов схемы предлагается проводить их быстрое моделирование.

В [28] для рационализации исследования схем разработан и предложен метод дополнительного графа (МДГ), состоящий в получении аналитических формул пересчета всех ее результатов перечислительного анализа из аналогичных по более общей и дополнительной к ней схемам: число исходов, перечисление исходов, их вероятностное распределение, решение задачи нумерации и моделирование исходов.

Введены обозначения: N_*, N_d, N_0 – соответственно чисел исходов в общей, дополнительной и данной изучаемой схемах, где первые два числа считаются известными.

Очевидно, что число исходов схемы $N_0=N_*-N_d$. Для получения графа перечисления исходов схемы МДГ из исходов – состояний последнего шага графа перечисления общей схемы удаляем все исходы, относящиеся к дополнительной схеме.

Считая, что все вероятности переходов из состояния в состояние в графах перечисления исходов в общей и дополнительной схемах известны, для указания вероятностей на дугах построенного графа перечисления исходов изучаемой схемы находим их из соответствующих вероятностей в графе общей схемы делением их на суммарную вероятность всех исходов конкретного шага общей схемы, составляющих исходы изучаемой схемы.

Считая решенной задачу нумерации для общей и дополнительной схем и используя их результаты, будем пересчитывать из них решения прямой и обратной задач нумерации в нашей схеме, т. е. соответствие конкретного номера конкретному исходу нашей схемы в обе стороны.

S^*, S^d, S – соответственно обозначения для общей, дополнительной и нашей изучаемой схем.

Прямая задача нумерации. Пусть дан номер N^0 исхода нашей схемы. Требуется найти его вид R^0.

Шаги решения:

1. по всем исходам схемы S^* находим номера исходов схемы S^d, пусть это будут номера $\{N_i^d\},\ i=\overline{1,N_d}$;
2. в схеме S^* находим число k исходов схемы S^d до искомого исхода схемы S по формуле
$$k = max\ j : \left\{\sum_{i=1}^{j}(N_i^d - N_{i-1}^d - 1) \leqslant N^0\right\},$$
где $N_0^d = 0$;
3. находим номер данного исхода N^* в схеме S^* по формуле $N^* = N^0 + k$;
4. по решенной прямой задаче нумерации в схеме S^* находим его вид R^*, который совпадает с искомым видом исхода R^0 исследуемой схемы.

Обратная задача нумерации. Пусть дан вид R^0 исхода нашей схемы. Требуется найти его номер N^0.

Шаги решения:

1. по данному виду исхода $R^0 = R^*$ по решенной обратной задаче в схеме S^* находим его номер N^*;
2. для всех известных исходов схемы S^d находим по решенной обратной задаче нумерации в схеме S^* их номера $\{N_i^{(d)}\},\ i=\overline{1,N_d}$;
3. находим число k исходов схемы S^d в схеме S^* до исхода с номером N^* по формуле
$$k = max\ j : \left\{\sum_{i=1}^{j}(N_i^d - N_{i-1}^d) \leqslant N^*\right\},$$
где $N_0^d = 0$;
4. искомый номер N^0 в схеме S получаем по формуле $N^0 = N^* - k$.

Предлагается быстрое моделирование исхода схемы S, т. е. при известном вероятностном распределении ее исходов по одному случайному числу методом маркировки разыгрывается номер исхода схемы, по которому по результату решения прямой задачи нумерации для схемы предъявляется его вид.

В [30] в интерпретации схемы домино представлен анализ схемы сочетаний с повторением и той же схемы с соответствующим ограничением. Определяется схема домино как схема случайного заполнения фишки обобщенного домино с r концами и n цифрами от 0 до $(n-1)$ на концах фишек всех возможных составов с повторениями без учета их порядка. Проводится исследование этой схемы и аналогичной с фиксированной минимальной цифрой $\geqslant m$ в исходе случайного выбора фишки из полного набора домино по следующим направлениям перечислительной комбинаторики: построения процедуры перечисления нумерованных исходов схемы, определения их числа, решения для них задачи нумерации, нахождения их вероятностного распределения и моделирования возможных исходов. Рассматривается два подхода к анализу схемы домино на основе прямого непосредственного перечисления ее исходов или с пересчетом результатов исследования в [8] схемы сочетаний. Схема домино с данным выше ограничением изучается по тем же, указанным в аннотации направлениям с использованием результатов схемы домино без ограничений. Задача нумерации решена аналитически для общей схемы домино и с аналитическим пересчетом для данного в схеме ограничения. На этой основе предложено проводить быстрое моделирование исходов обеих схем.

В [31] приведены авторские алгоритмы моделирования значений некоторых простейших комбинаторных схем, на которые, как на известные, в остальных публикациях делаются ссылки, – это моделирование исходов схем перестановок, сочетаний, размещений, размещений с повторением, перестановок с повторением, сочетаний с повторением и ее частный случай – без пустых ячеек в интерпретации размещений частиц по ячейкам.

3. Выводы

1. Разработан новый универсальный алгоритмически-аналитический подход к анализу комбинаторных схем в доасимптотической области значений параметров по направлениям: построения процедуры полного перечисления их исходов; решения для них задачи нумерации; нахождения для них вероятностного распределения; моделирования исходов.

2. Определены объекты исследования с применением предложенного подхода – это комбинаторные схемы общего вида (без ограничений), схемы с ограничениями, с заданными экстремальными значениями характеристик в схемах и схемы с ограничениями на них.

3. По всем рассмотренным в работе схемам по выбранным направлениям перечислительной комбинаторики получены новые результаты разных уровней для характеристик схем: приближенные оценки, численные методы расчета, алгоритмические процедуры, аналитические результаты в виде рекуррентных соотношений или явных формул.

4. Областями практического применения результатов предложенного подхода могут быть: быстрое моделирование исходов схемы, компактное хранение информации о всех исходах схемы при аналитическом решении ЗН; математические вычисления по некоторым числовым наборам с любыми ограничениями; криптография (при переборе ключей); криминалистика (при следственном анализе версий, связанных с числовыми наборами); в учебном процессе.

5. Разработаны приемы моделирования исходов всех рассмотренных комбинаторных схем, в том числе – общий способ быстрого моделирования по результату решения прямой ЗН.

6. В связи с усложняющимися задачами анализа комбинаторных схем и бурным развитием возможностей электронных вычислительных средств, расширяющих доасимптотическую область значений параметров схем, ожидается рост востребованности предложенного подхода к их анализу.

Литература

1. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536 с.

2. *Кнут Д.* Искусство программирования на ЭВМ. Т. 1–3. М.: Мир, 1976–1978. 728 с.

3. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

4. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.

5. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. № 8. 2014. С. 15–21.

6. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Об одном подходе к решению задач перечислительной комбинаторики // Инновация на основе информационных и коммуникационных технологий: Межд. науч.-практ. конференция. Сочи, 1–10 октября, 2015. С. 251–252.

7. *Колчин А. В., Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.

8. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

9. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы размещений // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 9. С. 34–39.

10. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В.* Анализ схем размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 143–154.

11. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторное представление схемы размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 126–135. doi: 10.4213/dm1410.

12. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Анализ схемы равновероятного размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 1. С. 19–24.

13. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2017. № 2. С. 19–22.

14. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.

15. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 25–27.

16. *Энатская Н. Ю.* Анализ схем размещения частиц по ячейкам с ограничением на заполне-

ние ячеек // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 5. С. 42–45.

17. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Определение числа N размещений неразличимых шаров по различимым ящикам с ограничением уровня их заполнения // Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий: Межд. науч.-практ. конференция. Прага, апрель 23–27. С. 341–347.

18. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Деление совокупности элементов на заданное число различимых частей // Инновации информационных технологий: Третья Межд. науч.-практ. конф. Прага, апрель 21–25. С. 341–347.

19. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ случайных подстановок заданных цикловых структур // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 11. С. 29–34.

20. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Комбинаторный анализ случайных подстановок заданных цикловых структур // Инновация на основе информационных и коммуникационных технологий: Межд. науч.-практ. конф. Сочи, 1–10 октября. 2015. С. 252–253.

21. *Энатская Н. Ю.* Анализ случайных перестановок с s-запретами // Труды КарНЦ РАН. 2015. № 4. С. 131–136. doi: 10.17076/mat247

22. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок с заданным числом подряд идущих фиксированных элементов // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 141–146. doi: 10.17076/mat412

23. *Энатская Н. Ю.* О числе инверсий в исходах схемы перестановок и ее анализ с фиксированным числом инверсий // Труды КарНЦ РАН. 2015. № 4. С. 137–144. doi: 10.17076/mat246

24. *Энатская Н. Ю.* Анализ случайных подстановок фиксированного размера с ограниченным рассеянием // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 7. С. 32–36.

25. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 10. С. 28–31.

26. *Энатская Н. Ю.* Анализ схемы размещения с ограниченными степами и его применение для изучения рассеяния подстановки // Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 94–100. doi: 10.17076/mat563

27. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний с заданным минимальным размахом выборки // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 136–140. doi: 10.17076/mat411

28. *Энатская Н. Ю.* Метод дополнительного графа для решения задач перечислительной комбинаторики // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 6. С. 25–28.

29. *Энатская Н. Ю., Колчин В. Ф., Колчин А. В.* Схема размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам // Третий Русско-Финский симпозиум по дискретной математике. Петрозаводск, сентябрь 2014 г. С. 15–18.

30. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы домино и случай фиксированной минимальной цифры на фишке домино // Труды КарНЦ РАН. 2017. № 8. С. 86–93. doi: 10.17076/mat562

31. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

Поступила в редакцию 12.12.2017

References

1. *Aho A., Hopkroft D., Ulman D.* Postroenie i analiz vychislitel'nykh algoritmov [Construction and analysis of computing algorithms]. Moscow: Mir, 1979.

2. *Knuth D. E.* Iskusstvo programmirovaniya na EVM [Art of programming on ECM]. Vol. 1–3. Moscow: Mir, 1976–1978.

3. *Kristofides N.* Teoriya grafov. Algoritmicheskii podkhod [Graph theory. Algorithm method]. Moscow: Mir, 1978.

4. *Reingold E., Nivergelt Ju., Deo N.* Kombinatornye algoritmy, teoriya i praktika [Combinatorial algorithms. Theory and practice]. Moscow: Mir, 1980.

5. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2014. No. 8. P. 15–21.

6. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Ob odnom podkhode k resheniyu zadach perechislitel'noi kombinatoriki [On a method for solving problems of enumerative combinatorics]. *Mezhd. nauchno-prakt. konf. Innovatsiya na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologii* [Int. scientific-pract. conf. Innovations based on Information and Communication Technologies], Sochi, October 1–10, 2015. P. 251–252.

7. *Enatskaya N. Yu., Kolchin A. V.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of the permutations

scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 80–86.

8. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

9. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy razmeshchenii [Combinatorial analysis of the arrangement scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and controllers]. 2015. No. 9. P. 34–39.

10. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V.* [Analysis of a scheme of allocating distinguishable particles to indistinguishable cells]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 143–154.

11. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornoe predstavlenie skhemy rasmeshcheniya razlichnykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Combinatorial representation of the scheme of distinguishable particles arrangement to indistinguishable cells]. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics]. 2017. Vol. 29, no. 1. P. 126–135. doi: 10.4213/dm1410.

12. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Analiz skhemy ravnoveroyatnogo razmeshcheniya razlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Analysis of the scheme of equiprobable placement of distinguishable particles on indistinguishable cells]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2015. No. 1. P. 19–24.

13. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok s povtoreniem i blizkoi schemy [Combinatorial analysis of the permutation scheme with repetition and close scheme]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [*Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2017. No. 2. P. 19–22.

14. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy odnovremennykh i posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the scheme of simultaneous and sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 2. P. 35–41.

15. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz obobshchennoii skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of the sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 4. P. 25–27.

16. *Enatskaya N. Yu.* Analiz skhem razmeshcheniya chastits po yacheikam s ogranicheniem na zapolnenie yacheek [The analysis scheme of arrangement with restriction on the filling of cells]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2017. No. 5. P. 42–45.

17. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Opredelenie chisla N razmeshchenii nerazlichimykh sharov po razlichimym yashchikam s ogranicheniem urovnya ikh zapolneniya [Determination of number N allocation of indistinguishable balls to distinguishable boxes with restriction of level their filling]. *Innovatsii na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologii: Mezhd. nauch.-prakt. conf.* [Int. Scientific-Pract. Conf. Innovations based on Information and Communication Technologies]. Prague, April 23–27. P. 341–347.

18. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Delenie sovokupnosti elementov na zadannoe chislo razmeshchennykh chasteii [Division of population of elements into a given number of discernible parts]. *Innovatsii informatsionnykh tekhnologii: Tret'ya Mezhd. nauch.-prakt. konf.* [3-rd Int. Scientific-Pract. Conf. Innovative Information Technologies]. Prague, April 21–25. P. 282–290.

19. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz sluchainykh podstanovok zadannykh tsiklovykh struktur [Combinatorial analysis of random permutations of given structures of cycle]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2017. No. 11. P. 29–34.

20. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Kombinatornyi analiz sluchainykh podstanovok zadannykh tsiklovykh struktur [Combinatorial analysis of random permutations of given structures of cycle]. *Innovatsiya na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologii: Mezhd. nauch.-prakt. konf.* [Int. Scientific-Pract. Conf. Innovations based on Information and Communication Technologies]. Sothi, October 1–10, 2015. P. 252–253.

21. *Enatskaya N. Yu.* Analiz sluchainykh podstanovok c s-zapretami [The analysis of random permutations with s-prohibition]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2015. No. 4. P. 131–136. doi: 10.17076/mat247

22. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy podstanovok s zadannym chislom podryad idushchikh fiksirovannykh elementov [Combinatorial analysis of a permutation circuit with a given number of consecutive fixed elements]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 141–146. doi: 10.17076/mat412

23. *Enatskaya N. Yu.* O chisle inversii v iskhodakh skhemy perestanovok i ee analiz c fiksirovannym chislom inversii [One the number of inversion outcomes of the permutation scheme and its analysis with fixed number of inversions]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarNTs RAS]. 2015. No. 4. P. 137–144. doi: 10.17076/mat246

24. *Enatskaya N. Yu.* Analiz sluchainykh podstanovok fiksirovannogo razmera s ogranichennym rasseyaniem [The analysis of a random permutations of a fixed size with a limited dispersion]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2016. No. 7. P. 32–36.

25. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s ogranichennym razmakhom [The analysis of the combination scheme with a limited range]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 10. P. 28–31.

26. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy razmeshchenii s ogranichennymi stepami i ego primenenie dlya izucheniya rasseyaniya podstanovki [Combinatorial analysis of arrangement scheme with a limited steps and its application for study of dispersion of permutation]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 94–100. doi: 10.17076/mat563

27. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s zadannym minimal'nym razmakhom [Combinatorial analysis combinations circuit with given minimal range of sample]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 136–140. doi: 10.17076/mat411.

28. *Enatskaya N. Yu.* Metod dopolnitel'nogo grafa dlya rescheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [The method of the additional graph for the solution of problems of the enumerational combinatorial analysis]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. No. 6. 2016. P. 25–28.

29. *Enatskaya N. Yu., Kolchin V. F., Kolchin A. V.* Skhema rasmescheniya razlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [On a scheme of distinguishable particles arrangement to indistinguishable cells]. *Tretii Russo-Finskii simpozium po diskretnoi matematike* [Third Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics]. Petrozavodsk, September 2014. P. 15–18.

30. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy domino i sluchai fiksirovannoi minimal'noi tsifry na fishke domino [Combinatorial analysis of scheme of domino and case of fixed minimal figure on board of domino]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2017. No. 8. P. 86–93. doi: 10.17076/mat562

31. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

Received December 12, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: 89037411345