

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СТЕПАМИ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики, Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Вводится новая характеристика исхода схемы сочетаний – ее ступи, под которыми понимаются разности между соседними элементами исхода, расположенными в возрастающем порядке. Рассматривается процедура перечисления всех исходов схемы сочетаний с заданным ограничением, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними и их номерами, приводится моделирование возможных значений реализаций схемы.

Ключевые слова: схема сочетаний с ограниченными ступями; перечисление исходов; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A COMBINATION SCHEME WITH RESTRICTED STEPS

We introduce a new characteristic of the outcome of a combination scheme, i.e. its steps, defined as differences between the neighboring elements of the outcome arranged in the order of increase. We consider the procedure of enumerating all outcomes of a combination scheme with a given restriction, establish the one-to-one correspondence between the outcomes and their numbers generated in the enumeration procedure, and give some methods to simulate the possible outcomes of the scheme.

Key words: combination scheme with restricted steps; enumeration of outcomes; enumeration problem; simulation.

ВВЕДЕНИЕ

Схема сочетаний возникает при выборе r элементов из n различных (нумерованных) элементов без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц по одной по n различным ячейкам и является одной из наиболее распространенных комбинаторных схем, широко используемой в теории и практике, т. к. участвует во многих важных распространенных математических формулах и в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем. Число исходов схемы сочетаний есть C_n^r . Комбинаторный анализ схемы сочета-

ний (по указанным в аннотации направлениям для данной схемы) проведен в работах [6] и [2], а при ограничениях на ее размах R – в [3] и [4].

Исход схемы сочетания из n элементов по r представляет собой набор r номеров выбранных элементов в возрастающем порядке: $R_* = \bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$. В изучаемой схеме вводится верхнее ограничение на абсолютные разности соседних элементов в исходах схемы сочетаний, называемые далее СТЕПАМИ (в терминологии [1] они являются спейсингами выборки исхода схемы сочетаний), обозначаемые вектором $\bar{s} = (s_1, \dots, s_{r-1})$, где $s_i = n_{i+1} - n_i$.

Тогда данное ограничение состоит в условии $\max_i s_i \leq S$. Это ограничение путем отбраковки из всех исходов схемы сочетаний, перечисленных в [6], можно учесть по результатам непосредственного подсчета степеней каждого его исхода при численном анализе схемы. Но для получения аналитических результатов по всем направлениям исследования схемы для выявления необходимых закономерностей для указанных направлений анализа схемы потребуется строить процедуру прямого перечисления ее исходов.

Возможность реализации схемы должна обеспечиваться следующим условием для ее параметров

$$r - 1 \leq R \leq S(r - 1). \quad (1)$$

1. Число исходов схемы и их прямое перечисление

Прямое перечисление исходов нашей схемы производим процессом поединичного выбора его элементов в возрастающем порядке равновероятно в диапазонах, обеспечивающих их возрастание, возможность выбора остальных элементов и заданную ограниченность степеней в исходе схемы:

$$1 \leq n_1 \leq (n - r + 1) = L_1;$$

$$n_1 + 1 \leq n_2 \leq \min(n - r + 2, n_1 + S) = L_2;$$

$$n_2 + 1 \leq n_3 \leq \min(n - r + 3, n_2 + S) = L_3$$

и т. д., откуда следует, что

$$n_{i-1} + 1 \leq n_i \leq \min(n - r + i, n_{i-1} + S) = L_i, \quad (2)$$

где на i -м шаге добавляется элемент n_i , $i = \overline{1, r}$.

Конкретное значение n_i зависит от выбора n_{i-1} .

Представим процедуру перечисления исходов схемы при указанном выше поединичном (пошаговом) добавлении элементов в виде графа. Пучками графа назовем множество возможных переходов (дуг) из каждого состояния в состояния следующего шага. Размеры пучков на каждом шаге определяются числами исходящих из всех состояний дуг и на i -м шаге процесса перечисления $a_i(n_{i-1})$ зависят от последнего n_{i-1} -го добавленного элемента, и из (2) $a_1(n_0) = a_1 = n - r + 1$, а для $i = 2, 3, \dots, r$ вычисляются по формуле

$$a_i(n_{i-1}) = L_i - n_{i-1}. \quad (3)$$

Число исходов каждого шага (итерации) равно числу пучков исходов следующего шага, т. е. N_i – число исходов i -го шага ($i = \overline{1, r}$)

по N_{i-1} -му пучку. Введем вектор добавленных элементов на i -м шаге в порядке их добавления $\vec{m}_i = (m_{i1}, \dots, m_{iN_{i-1}})$, так, что в каждом j -м пучке ($j = \overline{1, N_{i-1}}$) значения добавленных элементов перечисляются подряд в возрастающем порядке из соответствующего по (2) диапазона для n_i при j -м выборе в порядке поединичного роста значения n_{i-1} из своего диапазона.

Массив подряд идущих размеров пучков на $(i - 1)$ -м шаге перечисляем в порядке перечисления исходов в виде вектора $\vec{a}_i^* = (a_{i1}^*, \dots, a_{iN_{i-1}}^*)$, где a_{ij}^* – размер j -го пучка на $(i - 1)$ -м шаге графа, и называем пучковой структурой графа на этом шаге.

Процедура перечисления исходов схемы может быть изображена графом обобщенной схемы последовательных действий поэлементного набора исхода схемы сочетаний [2] с данным ограничением на ее степи и характеризуем своей пучковой структурой, данной в (3) (см. рис. 1).

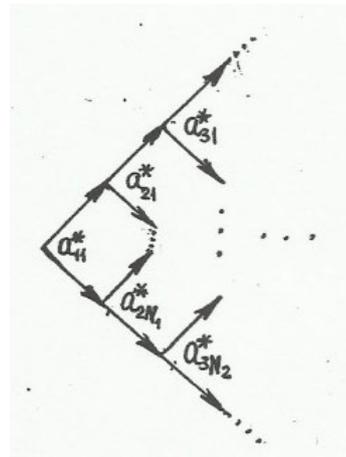


Рис. 1. Пучковая структура графа перечисления исходов схемы

Fig. 1. Cluster structure of the enumeration graph of the scheme outcomes

Число исходов схемы N определяется путем последовательных вычислений численностей пошаговых исходов схемы по рекуррентной формуле для N_i – числа исходов i -го шага их перечисления:

$$N_i = \sum_{j=1}^{N_{i-1}} a_{ij}^*, \quad (4)$$

где $N_0 = 1$, $N_1 = n - r + 1$, а $N = N_r$ – число исходов схемы.

Приведем числовой пример перечисления исходов схемы и вычисления числа N .

Пример 1. Пусть $n = 8$, $r = 3$, $S = 3$. Вычислим по (2) диапазоны варьирования пошаговых добавлений элементов в исход схемы нахождением их крайних значений при каждой фиксации предшествующего добавленного в исход элемента, указывая его в круглых скобках после номера последнего элемента:

n_1 от 1 до $(8 - 3 + 1) = 6$;
 $n_2(1)$ от 2 до $\min(8 - 3 + 2, 1 + 3) = 4$; $n_2(2)$ от 3 до $\min(8 - 3 + 2, 2 + 3) = 5$;
 $n_2(3)$ от 4 до $\min(8 - 3 + 2, 3 + 3) = 6$; $n_2(4)$ от 5 до $\min(8 - 3 + 2, 4 + 3) = 7$;
 $n_2(5)$ от 6 до $\min(8 - 3 + 2, 5 + 3) = 7$; $n_2(6)$ от 7 до $\min(8 - 3 + 2, 6 + 3) = 7$;
 $n_3(2)$ от 3 до $\min(8 - 3 + 3, 2 + 3) = 5$; $n_3(3)$ от 4 до $\min(8 - 3 + 3, 3 + 3) = 6$;
 $n_3(4)$ от 5 до $\min(8 - 3 + 3, 4 + 3) = 7$; $n_3(5)$ от 6 до $\min(8 - 3 + 3, 5 + 3) = 8$;
 $n_3(6)$ от 7 до $\min(8 - 3 + 3, 6 + 3) = 8$; $n_3(7)$ от 8 до $\min(8 - 3 + 3, 7 + 3) = 8$.

Отсюда по (3) получаем последовательно все размеры пучков по шагам перечисления исходов, указанным в индексе, и по всем конкретным значениям из диапазона изменения предшествующего добавленного элемента, указанного в скобках:

$a_1 = 6 - 1 + 1 = 6$; а пучковая структура 1-го шага $\bar{a}_1^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$;
 $a_2(1) = 4 - 1 = 3$; $a_2(2) = 5 - 2 = 3$; $a_2(3) = 6 - 3 = 3$; $a_2(4) = 7 - 4 = 3$; $a_2(5) = 7 - 5 = 2$; $a_2(6) = 7 - 6 = 1$; т. е. пучковая структура 2-го шага $\bar{a}_2^* = (3, 3, 3, 3, 2, 1)$;
 $a_3(2) = 5 - 2 = 3$; $a_3(3) = 6 - 3 = 3$; $a_3(4) = 7 - 4 = 3$;
 $a_3(5) = 3$; $a_3(6) = 3$; $a_3(7) = 8 - 5 = 3$;
 $a_3(8) = 3$; $a_3(9) = 3$; $a_3(10) = 8 - 6 = 2$;
 $a_3(11) = 3$; $a_3(12) = 2$; $a_3(13) = 8 - 7 = 1$;
 $a_3(14) = 2$; $a_3(15) = 1$; $a_3(16) = 1$;
т. е. пучковая структура 3-го шага $\bar{a}_3^* = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 1)$, что по (4) дает $N = 36$.

Добавленные элементы в пучках всех трех шагов в обозначениях $\bar{m}_i = (m_{i1}, \dots, m_{iN_{i-1}})$, i – номер шага, соответственно равны

$$\bar{m}_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6);$$

$$\bar{m}_2 = (2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 6, 7, 7); \quad (5)$$

$$\bar{m}_3 = (3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 7, 8, 6, 7, 8, 7, 8, 8, 7, 8, 8, 8).$$

Представим граф перечисления исходов схемы в примере, где в итерациях будем указывать следующий добавленный элемент в исходе схемы, которым является набор добавленных элементов по траектории графа – последовательность добавленных элементов; на рисунке 2 все исходы приведены в графе.

Число исходов по графу $n = 36$ совпало с вычисленным по (4), а виды исходов – с полученными значениями по (5).

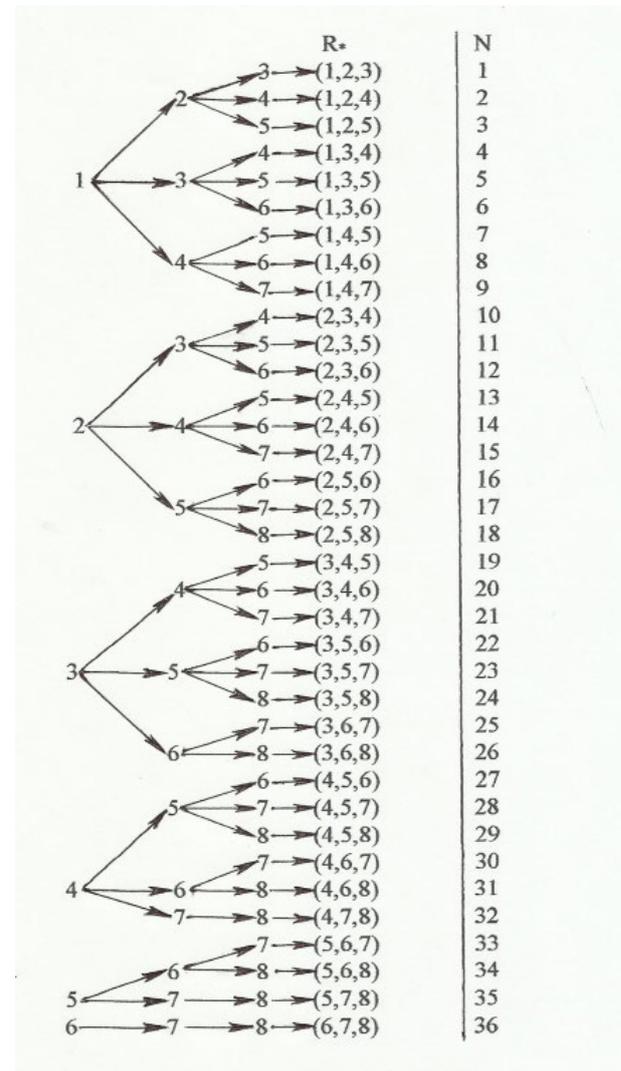


Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы в примере 1

Fig. 2. Enumeration graph of the scheme outcomes in example 1

2. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ

Принципиально задача нумерации (ЗН) решена в [5] с последовательными зависимыми действиям выбора по одному элементу в исходе схемы сочетаний в нашей схеме. С учетом характера этих действий по пучковой структуре графа перечисления ее исходов, исследованной в п. 1, решение ЗН будет здесь приведено.

Прямая задача нумерации

Пусть задан номер $N_* = N_*^{(r)}$ исхода схемы. Требуется найти его вид $R_* = R_*^{(r)}$ при полученных в п. 1 пучковых структурах графа на каждом шаге. Для этого решаем следующие подзадачи (шаги):

1) ищем номер пучка, содержащего искомый исход, что совпадает с номером $N_*^{(r-1)}$ предшествующего состояния на $(r-1)$ -м шаге:

$$N_*^{(r-1)} = \delta + \max t : \left(\sum_{j=1}^t a_{rj}^* = A_r^{(i)} \leq N_*^{(r)} \right), \quad (6)$$

где $\delta = 0$ при $A_r = N_*^{(r)}$ и $\delta = 1$ при $A_r < N_*^{(r)}$; заменяя в (6) r на i , доходим по рекурренте (2) до первого шага;

2) по (6) ищем номера $\{p_i\}$, $i = \overline{1, r}$ состояний, предшествующих искомому в пучках при $N_*^{(0)} = 1$:

$$p_i = N_*^{(i)} - A_i; \quad (7)$$

3) из логики перечисления и нумерации исходов схемы и из рекуррентных формул (2) и (3) соответственно диапазонов выбора элемента исхода на i -м шаге и размеров пучков графа перечисления исходов схемы и из (5) по результату п. 2) получаем исход i -го действия

$$n_i = p_i + m_{iN_*^{(i-1)}}, \quad i = \overline{1, r}; \quad (8)$$

4) объединяя результаты п. 3) всех r действий, находим R_* .

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 $N_* = 16$. Тогда по графу на рисунке 2 визуально получаем $R_*^{(3)} = (2, 5, 6)$.

Проверим этот результат по формулам (6), (7) и (8):

по виду \bar{a}_i^* из п. 1 в примере 1 и (6) $N_*^{(2)} = 5 + 1 = 6$; по (7) $p_3 = 16 - 15 = 1$; из \bar{m}_3 и (8) получаем $n_3 = 1 + 5 = 6$;

по виду \bar{a}_i^* из п. 1 в примере 1 и (6) $N_*^{(1)} = 1 + 1 = 2$; по (7) $p_2 = 6 - 3 = 3$; из \bar{m}_2 и (8) получаем $n_2 = 3 + 2 = 5$;

по виду \bar{a}_i^* из п. 1 в примере 1 и (6) $N_*^{(0)} = 1 + 1 = 2$; по (7) $p_1 = 2 - 1 = 1$; из \bar{m}_1 и (8) получаем $n_1 = 1 + 1 = 2$;

объединяя результаты значений n_1, n_2, n_3 , получаем искомый вид исхода схемы $R_*^{(3)} = (2, 5, 6)$, что совпадает с визуальным результатом.

Обратная задача нумерации

Пусть дан вид исхода $R_* = (n_1, \dots, n_r)$. Нужно найти его номер N_* .

Задача решается по траектории от начального состояния к искомому в графе перечисления исходов схемы путем определения на каждом шаге номера пучка и номера в пучке прохождения этой траектории, который в [5] не найден. Тогда по полученной в п. 1 пучковой структуре графа с известными размерами пучков на каждом шаге искомый номер получаем как сумму размеров предшествующих пучков искомого состояния траектории r -го шага, сложенной с его номером в содержащем его пучке на r -м шаге. Таким образом, решение задачи проводится в три шага:

1) нахождение номеров последовательных состояний траектории в пучках графа перечисления исходов схемы $\{l_i\}$, $i = \overline{1, r}$, по рекуррентной формуле:

$$l_i = n_i - n_{i-1} \quad (9)$$

при $n_0 = 0$;

2) нахождение номеров последовательных пучков, предшествующих пучкам прохождения траектории в графе от начального исхода к конечному данного вида, т. е. перечисления исходов схемы $\{q_i\}$, $i = \overline{1, r}$, по формулам:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = n_1 - 1, \quad q_i = \sum_{j=1}^{q_{i-1}} I(a_{ij}^*) + l_{i-1} - 1, \quad (10)$$

где $I(z) = 0$ при $z = 0$ и $I(z) = 1$ при $z \geq 0$;

3) вычисление искомого номера исхода по номеру содержащего его пучка и его номера в этом пучке при известных из п. 1 размерах пучков по формуле:

$$N_* = \sum_{j=1}^{q_r} a_{rj}^* + l_r. \quad (11)$$

Пример 3. Пусть в условиях примера 1 $R_*^{(3)} = (2, 5, 6)$. Тогда по графу на рисунке 2 визуально получаем $N_*^{(3)} = 16$. Проверим этот результат по формулам (9)–(11) при $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$: по (9) $l_1 = 2$, $l_2 = 5 - 2 = 3$, $l_3 = 6 - 5 = 1$; из примера 1 $\bar{a}_1^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $\bar{a}_2^* = (3, 3, 3, 3, 2, 1)$, $\bar{a}_3^* = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1)$ и по (10) $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_3 = 3 + 2 = 5$;

по данным выше $\bar{a}_1^*, \bar{a}_2^*, \bar{a}_3^*, l_3, q_2$ и по (11) $N_* = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 16$, что совпадает с визуальным результатом.

3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Вероятности исходов схемы вычисляются по графу перечисления исходов схемы по формуле умножения вероятностей последовательных наборов их элементов из данных в (2) диапазонов в соответствии с процедурой их перечисления, описанной в п. 1. Неравные вероятности исходов возникают в связи с уменьшением части диапазонов варьирования правых границ вариантов значений элементов исхода схемы сочетаний по мере их роста в порядке перебора в соответствии с (2). Для иллюстрации приведем вычисление вероятностей исходов схемы примера 1 (см. рис. 2), обозначая их в порядке перечисления исходов схемы через $(p_1, p_2, \dots, p_{36})$:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{24} = p_{27} = p_{28} = p_{29} = (1/6)(1/3)(1/3) = 1/54;$$

$$p_{25} = p_{26} = p_{30} = p_{31} = (1/6)(1/3)(1/2) = 1/36;$$

$$p_{32} = (1/6)(1/3) \cdot 1 = 1/18;$$

$$p_{33} = p_{34} = (1/6)(1/2)(1/2) = 1/24;$$

$$p_{35} = (1/6)(1/2) \cdot 1 = 1/12;$$

$$p_{36} = (1/6) \cdot 1 \cdot 1 = 1/6.$$

Проверка на распределение: $\sum_{i=1}^{36} p_i = (27/54) + (4/36) + (1/18) + (2/24) + (1/12) + (1/6) = 1$.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

В отличие от обычного моделирования исходов схемы, состоящего в проведении процедуры их непосредственного формирования с учетом специфики схемы, аналитический результат решения прямой ЗН для исходов схемы дает возможность проведения единообразного подхода к моделированию ее исходов – так называемого быстрого моделирования при известном вероятностном распределении исходов путем разыгрывания для каждого по одному случайному числу его номера методом маркировки (см. [7]), определяющего вид исхода, что требует меньшего числа операций.

5. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЧИСЛА ИСХОДОВ СХЕМЫ ПО МОДЕЛИ

Моделируем по [7] N_A исходов схемы сочетаний из n различных элементов по r без учета их порядка из C_n^r . Для каждого исхода вычисляем его степ и определяем среди смоделированных число M исходов со степенями $< S$. Тогда искомое число исходов нашей схемы приближенно определяется методом пропорций по формуле

$$N \approx \frac{MC_n^r}{N_A} = \tilde{N},$$

где достаточно большое значение числа N_A определяется требуемыми точностью и надежностью оценки для N из нижеприведенных неравенств. Исследуем качество полученной оценки \tilde{N} для N исходов нашей схемы, где M/N_A – наблюдаемая частота успеха опыта – появления ее исхода среди N_A исходов схемы размещений. Число M можно представить в виде $M = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_A}$, где при $i = \overline{1, N_A}$ $\{X_i\}$ – случайные величины, имеющие распределение Бернулли с вероятностью успеха $p = N/C_n^r$. Тогда по уточненной по неравенству Чебышева теореме Бернулли выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \gamma &= P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{C_n^r}\right| < \varepsilon^*\right) = \\ &= P\left(\left|\frac{MC_n^r}{N_A} - N\right| < \varepsilon^* C_n^r = \varepsilon\right) = \\ &= P(|\tilde{N} - N| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{N_A(\varepsilon^*)^2} \geq 1 - \frac{(C_n^r)^2}{4N_A\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

где для оценки \tilde{N} числа N исходов нашей схемы ε – ее точность, а $\gamma \geq 1 - \frac{(C_n^r)^2}{4N_A\varepsilon^2}$ – оценка ее надежности γ с этой точностью. Для получения нетривиальной оценки для γ потребуем, чтобы $N_A > (C_n^r)^2/4\varepsilon^2$.

Более точную оценку надежности γ с заданной точностью ε оценки \tilde{N} числа N исходов нашей схемы можно получить по следствию из теоремы Муавра-Лапласа из соотношений

$$\begin{aligned} \gamma &= P\left(\left|\frac{M}{N_A} - \frac{N}{C_n^r}\right| \leq \varepsilon^*\right) = \\ &= P\left(\left|\frac{MC_n^r}{N_A} - N\right| \leq \varepsilon^* C_n^r = \varepsilon\right) = \\ &= P(|\tilde{N} - N| \leq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon^* \sqrt{N_A/p(1-p)}\right) \geq \\ &\geq 2\Phi(2\varepsilon \sqrt{N_A/C_n^r}), \end{aligned}$$

где $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^x \exp^{-x^2/2} dx$ – табличная функция Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дейвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 335 с.
2. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 9. С. 33–38.
3. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 10. С. 28–31.

4. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с заданным минимальным размахом выборки // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 136–140. doi: 10.17076/mat411
5. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 25–27.

6. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 8. С. 15–21.
7. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

Поступила в редакцию 12.12.2017

REFERENCES

1. David H. Poryadkovye statistiki [Order statistics]. Moscow: Nauka, 1979. 335 p.
2. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrolyery* [Industrial Automatic Control Systems and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.
3. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s ogranichennym razmakhom [The analysis of the combination scheme with a limited range]. *Industrial Automatic Control Systems and Controllers*. 2015. No. 10. P. 28–31.
4. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s zadannym minimal'nyim razmakhom vyborke [Combinatorial analysis of a combinations circuit with given minimal range of sample]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans.

KarRC RAS]. 2016. No. 8. P. 136–140. doi: 10.17076/mat411

5. Enatskaya N. Yu. Kombinatornyi analiz obobshchennoi skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of simultaneous and sequential actions]. *Industrial Automatic Control Systems and Controllers*. 2016. No. 4. P. 25–27.
6. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Method graphs for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems. Management, Monitoring, Diagnostics]. 2014. No. 8. P. 15–21.
7. Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R. Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

Received December 12, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталья Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: 89037411345