Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2017. С. 60–65
DOI: 10.17076/mat658

УДК 519.977

МОДЕЛЬ ПОЛТЕРОВИЧА – ХЕНКИНА С АМОРТИЗАЦИЕЙ

А. Н. Кириллов, И. В. Данилова

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН, Петрозаводск

Проводится качественное исследование модели Полтеровича – Хенкина, которая является математической формализацией шумпетеровской концепции экономической динамики. Рассмотрены три уровня технологического развития предприятий с учетом амортизации. Доказана глобальная асимптотическая устойчивость положения рановесия. Найдены инвариантные множества.

Ключевые слова: модель Полтеровича – Хенкина; устойчивость; инвариантное множество.

A. N. Kirillov, I. V. Danilova. POLTEROVICH – HENKIN MODEL WITH DEPRECIATION

The qualitative analysis of the Polterovich – Henkin model, a mathematical formalization of the Shumpeterian concept of economical dynamics, was carried out. Three levels of technological development of an enterprise are considered taking into account depreciation. The global asymptotic stability of equilibrium is proved. The invariant sets were found.

Keywords: Polterovich – Henkin model; stability; invariant set.

Введение

В работе [5] австрийский экономист Дж. Шумпетер (1883–1950) разработал теорию экономического развития, основанную на концепции распространения новых технологий имитационным и инновационным путем. Теория Шумпетера активно развивается в различных направлениях до сих пор. Математический формализм этой теории был предложен в работе В. М. Полтеровича, Г. М. Хенкина [3], которые построили модель, описывающую динамику распределения предприятий отрасли по уровням технологического развития. Их модель ведет свое происхождение от известного в гидродинамике уравнения И. Бюргерса.

Дадим краткое описание модели Полтеровича – Хенкина. Рассмотрим производственную систему (объединение предприятий, отрасль), состоящую из конечного числа предприятий, упорядоченных по уровням эффективности с номерами $1, 2, ..., N$. В качестве показателя уровня эффективности можно взять, например, рентабельность [1]. Предполагается, что с течением времени предприятие может переходить с уровня n на следующий, более высокий, уровень $n + 1$.

Пусть $F_n = F_n(t)$ – доля предприятий, находящихся в момент времени t на уровнях с номерами, не превышающими $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t \in [0, \infty)$, $F_n(t) \in [0, 1]$. Последовательность $(F_1(t), ..., F_N(t))$ описывает динамику распределения предприятий по уровням эффективности. Очевидно, что $y_n(t) = F_n(t) - F_{n-1}(t)$ – доля предприятий, находящихся в момент времени t на уровне n. Предполагается, что доля предприятий, переходящих с уровня n на уровень $n+1$ за счет инноваций, пропорциональна доле предприятий, находящихся на уровне n, т. е. равна $\alpha y_n(t) = \alpha(F_n(t) - F_{n-1}(t))$, где α – коэффициент интенсивности инновационного перехода, $\alpha > 0$. Далее, доля предприятий, переходящих с уровня n на уровень $n+1$ за счет имитации, предполагается пропорциональной y_n и доле предприятий, находящихся на уровнях, более высоких, чем n, т. е. равна $\beta(1 - F_n(t))(F_n(t) - F_{n-1}(t))$, где β – коэффициент интенсивности имитационного перехода, $\beta > 0$. В итоге получаем модель динамики перехода предприятий с n-го на $n+1$-й уровень

$$\dot{F_n} = -\alpha(F_n - F_{n-1}) + \beta(1 - F_n)(F_n - F_{n-1}), \quad (1)$$

где $n = 1, ..., N-1$, $F_0(0) = 0$, $F_N(t) = 1$. Таким образом, первое слагаемое в правой части характеризует убывание F_n за счет инноваций, а второе – за счет имитаций. В модели (1) не учитывается возможность перехода предприятий на более низкие уровни, т. е. амортизация. Сами авторы модели отмечают, что в случае учета процесса амортизации не удается получить аналитически решение системы (1), полученное ими в [3]. В работе [1] модель (1) применяется для описания процесса развития предприятий черной металлургии СССР за период с 1976 по 1988 гг. При этом учтена амортизация, но производится только численный анализ модели, показывающий удовлетворительный прогноз модельной динамики в сравнении с реальной динамикой. Следует отметить, что модификация модели Полтеровича – Хенкина, без амортизации, исследовалась в работе [4], где в частном случае было показано ее совпадение с цепочкой Ленгмюра.

В настоящей работе проводится качественное исследование модели Полтеровича – Хенкина с учетом амортизации, для трех уровней эффективности. Находятся инвариантные множества. Показано существование единственного положения равновесия соответствующей динамической системы. Доказана глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия.

Модель с амортизацией на втором уровне

Пусть количество уровней технологического развития предприятий $N = 3$. Сначала рассмотрим модель с возможностью перехода с третьего на второй уровень. Тогда динамика системы Полтеровича – Хенкина задается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{F_1} = -(\alpha + \beta(1 - F_1))F_1, \\ \dot{F_2} = -(\alpha + \beta(1 - F_2))(F_2 - \\ -F_1) + \mu(1 - F_2). \end{cases} \quad (2)$$

При этом $F_3(t) = 1$, $\mu(1 - F_2)$ – слагаемое, задающее переход с уровня $n = 3$ на уровень $n = 2$, μ – коэффициент интенсивности процесса амортизации, $\mu > 0$.

Теорема 1. *Квадрат* $\Pi = [0,1] \times [0,1]$ – *инвариантное множество системы 2.*

Доказательство. Для доказательства определим положение векторов скорости системы в точках, принадлежащих сторонам квадрата П. На стороне $F_1 = 0$, $F_2 \in [0,1]$ вектор скорости направлен вдоль этой стороны, так как $\dot{F_1}(t) = 0$, на $F_1 = 1$, $F_2 \in [0,1]$ имеем $\dot{F_1}(t) = -\alpha < 0$, при $F_2 \in (0,1)$ $\dot{F_2}(t) = -(\alpha + \beta(1 - F_2))(F_2 - 1) + \mu(1 - F_2) > 0$, в точке $(1,0)$ имеем $\dot{F_2}(t) = \alpha + \beta > 0$, в точке $(1,1)$ имеем $\dot{F_2}(t) = 0$, т. е. траектории не покидают квадрат П через сторону $F_1 = 1$, $F_2 \in [0,1]$. Далее, при $F_2(t) = 0$ и $F_1 \in (0,1)$ имеем $\dot{F_2}(t) = (\alpha + \beta)F_1 + \mu > 0$, т. е. траектории не покидают квадрат П через эту сторону. Наконец, если $F_2(t) = 1$, $F_1 \in (0,1)$, то $\dot{F_2}(t) = -\alpha(1 - F_1) < 0$, что окончательно доказывает утверждение об инвариантности П. □

Таким образом, квадрат П является фазовым пространством системы (2) (см. рис. 1).

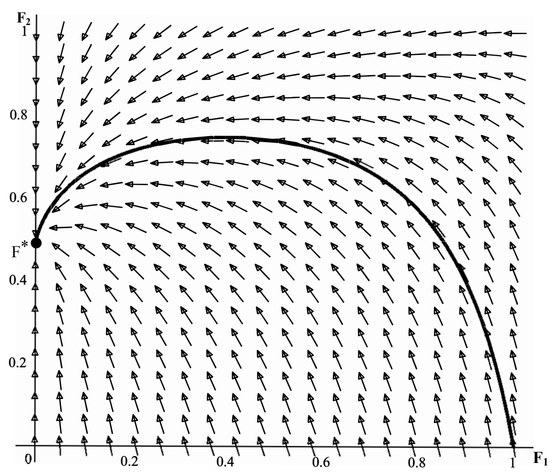

Рис. 1. Фазовый портрет системы 2

Найдем положения равновесия системы (2): $F^* = (F_1^*, F_2^*) \in \Pi$. Приравняв правые части к нулю, после несложных преобразований получаем единственное положение равновесия, принадлежащее П:

$$F_1^* = 0, F_2^* = \frac{\alpha+\beta+\mu-\sqrt{(\alpha+\beta+\mu)^2-4\mu\beta}}{2\beta}.$$

Выясним характер устойчивости положения равновесия F^*. Линеаризуя систему (2) в окрестности точки F^*, находим собственные числа матрицы коэффициентов: $\lambda_1 = -(\alpha+\beta) < 0$, $\lambda_2 = \beta F_2^* < 0$. Таким образом, положение равновесия F^* асимптотически устойчиво. Можно показать, что F^* глобально асимптотически устойчиво, т. е. область асимптотической устойчивости – все фазовое пространство П. Это можно сделать, используя рассуждения, представленные в следующем разделе для более сложного случая.

Экономическая интерпретация полученного результата: асимптотическое распределение предприятий по уровням эффективности имеет вид: $F_1^* = 0$, $F_2^* = \frac{\alpha+\beta+\mu-\sqrt{(\alpha+\beta+\mu)^2-4\mu\beta}}{2\beta}$, $F_3^* = 1$, т. е. с течением времени практически все предприятия перейдут на второй и третий уровень. В этом отличие от модели без амортизации, где все предприятия переходят на третий уровень (см. [3]).

Модель с амортизацией на первом и втором уровнях

Далее будем учитывать возможность перехода предприятий как с третьего уровня на второй, так и со второго – на первый. Для этого добавим в правую часть системы 2 слагаемое $\mu(F_2 - F_1)$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{F_1} = -(\alpha+\beta(1-F_1))F_1 + \\ +\mu(F_2-F_1), \\ \dot{F_2} = -(\alpha+\beta(1-F_2))(F_2 - \\ -F_1) + \mu(1-F_2). \end{cases} \qquad (3)$$

Теорема 2. *Квадрат* $\Pi = [0,1]\times[0,1]$ — *инвариантное множество системы* (3).

Доказательство. Доказательство с небольшими очевидными изменениями повторяет доказательство теоремы 1. □

Теорема 3. *Система 3 имеет единственное положение равновесия* $F^* = (F_1^*, F_2^*)$ *в квадрате* П.

Доказательство. Положения равновесия системы 3 являются решениями системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta(1-F_1))F_1 + \mu(F_2-F_1) = 0 \\ -(\alpha+\beta(1-F_2))(F_2-F_1) + \mu(1-F_2) = 0. \end{cases}$$

Для удобства введем обозначения: $x = F_1$, $y = F_2$. Из первого уравнения системы получаем: $y = \frac{(\alpha+\beta(1-x)+\mu)x}{\mu} = f_p(x)$ – парабола, пересекающая ось ox в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1 + \frac{\alpha+\mu}{\beta} > 1$. Вершина параболы – точка максимума функции $f_p(x)$ – имеет ординату $y = \frac{(\alpha+\beta+\mu)^2}{4\beta\mu} > 1$. При этом точка $(1,1)$ лежит ниже параболы. Следовательно, парабола, проходя через начало, пересекает верхнюю сторону квадрата П: $x \in (0,1), y = 1$.

Из второго уравнения: $x = y - \frac{\mu}{\beta} + \frac{\alpha\mu}{\beta(\alpha+\beta(1-y))}$ – гипербола. Асимптоты гиперболы $y = 1+\frac{\alpha}{\beta}$, $y = x+\frac{\mu}{\beta}$. Нетрудно показать, что одна из ветвей гиперболы лежит выше асимптоты $y = 1+\frac{\alpha}{\beta}$ и, значит, не имеет общих точек с квадратом П. Вторая ветвь проходит через точку $(1,1)$ и пересекает сторону квадрата $x = 0$, $y \in (0,1)$. В силу вышесказанного, парабола и гипербола имеют единственную общую точку (точку пересечения) в квадрате П, а именно – положение равновесия F^* (см. рис. 2). □

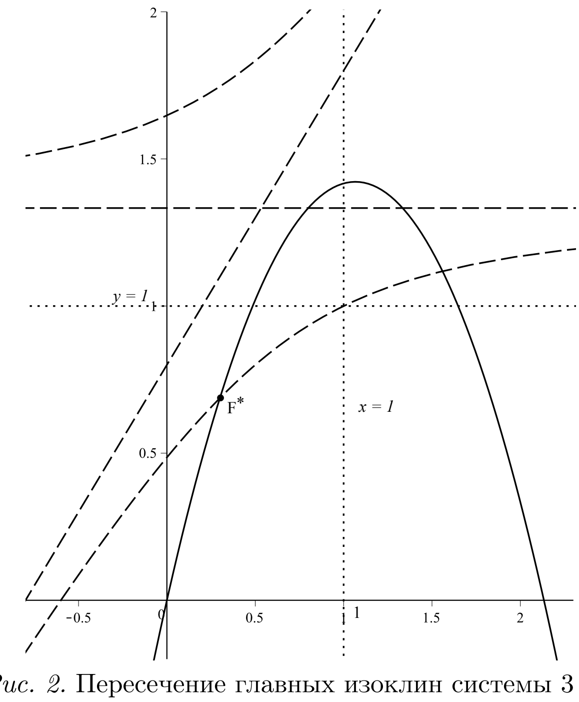

Рис. 2. Пересечение главных изоклин системы 3

Теорема 4. *Положение равновесия* (F_1^*, F_2^*) – *глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Разобьем квадрат П на четыре области D_i, $i = 1, 2, 3, 4$, изоклинами $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$. Пусть

$$D_1 = \{(x, y) \in \Pi : g > 0, h > 0\},$$
$$D_2 = \{(x, y) \in \Pi : g < 0, h < 0\},$$
$$D_3 = \{(x, y) \in \Pi : g > 0, h < 0\},$$
$$D_4 = \{(x, y) \in \Pi : g < 0, h > 0\}.$$

Несложно показать, что области D_1, D_2 инвариантны: траектории пересекают границы этих областей снаружи внутрь. Это определяется знаками функций h и g в точках границ. Рассмотрим семейство прямых $l_1 : x + y = c_1$, $l_2 : x - y = c_2$, где $c_1 \in [0, 2]$, $c_2 \in [-1, -1]$. Определим направления пересечений траекториями системы 3 отрезков прямых l_1, l_2, принадлежащих областям D_i. Обозначим через l_{11}, l_{12} отрезки прямых семейства l_1, принадлежащие областям D_1, D_2 соответственно и через l_{23}, l_{24} – отрезки прямых семейства l_2, принадлежащие областям D_3, D_4 соответственно. Каждый отрезок типа l_{24} делит область D_4 на две области: содержащую точку (1,0) – область D_{40} и не содержащую ее – область D_{41}. Траектории пересекают отрезки l_{24}, переходя из D_{40} в D_{41}. Это следует из того, что: $(x\dot{-}y) = g(x, y) - h(x, y) < 0$, поскольку в области $D_4 : g < 0, h > 0$, а значит, функция $(x - y)(t)$ убывает вдоль траекторий. Следовательно, траектории, начинающиеся в D_4, либо стремятся к положению равновесия F^*, либо входят в области D_1, D_2. Далее каждый отрезок типа l_{23} делит область D_3 на две области: содержащую точку (1,1) – область D_{30} и не содержащую ее – область D_{31}. При этом $(x\dot{-}y) = g(x, y) - h(x, y) > 0$, поскольку в области D_3: $g > 0$, $h < 0$, а значит, функция $(x - y)(t)$ возрастает вдоль траектории. Следовательно, траектории, начинающиеся в D_3, либо стремятся к положению равновесия F^*, либо входят в области D_1, D_2.

Итак, траектории, начинающиеся в D_3 или в D_4, либо стремятся к F^*, либо попадают в инвариантные области D_1 или D_2. Пусть траектории попали в D_1. Отрезок типа l_{11} делит D_1 на две области: содержащую точку (0,0) – область D_{10} и не содержащую ее – область D_{11}. Траектории пересекают отрезки l_{11}, переходя из D_{10} в D_{11}. При этом D_{11} содержит положение равновесия F^*. Взяв отрезок l_{11} сколь угодно близким к точке $F*$, получаем, что траектории, начинающиеся в D_1, входят в любую сколь угодно малую область D_{11} и не покидают ее.

Аналогичное рассуждение можно провести для областей, принадлежащих D_2 и имеющих граничную компоненту – отрезок l_{12}. Из вышесказанного следует, что положение равновесия $F*$ глобально асимптотически устойчиво (см. рис. 3). □

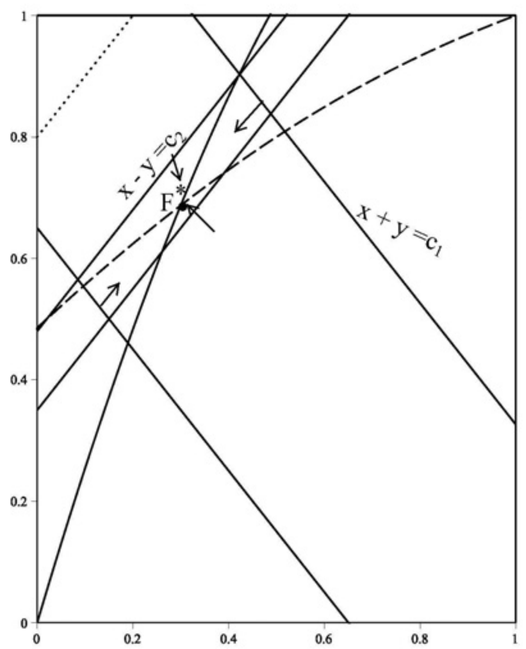

Рис. 3. Пересечение траекториями системы 3 прямых $x + y = c_1$ и $x - y = c_2$

Замечание: Из доказательства следует существование семейства инвариантных областей, являющихся невыпуклыми криволинейными шестиугольниками типа $ABCDPQ$, где AB – отрезок l_{12}, точки P, D принадлежат компоненте $h = 0$ границы области D_1, Q – точка пересечения прямых семейств l_1, l_2, проходящих через точки A и P, т. е. AQ, QP – отрезки – граничные компоненты шестиугольника, CD – отрезок семейства прямых l_2 такой, что точка D принадлежит дуге PF^* кривой $h = 0$, а точка C – дуге BF^* кривой $g = 0$. Две оставшиеся компоненты криволинейного шестиугольника – дуги PD и BC кривых $h = 0$ и $g = 0$ соответственно. Траектории, начинаясь в квадрате П, входят в любой описанный шестиугольник, что доказывает глобальную устойчивость.

BF^* – дуга кривой $g = 0$, PF^* – дуга кривой $h = 0$ (см. рис. 4).

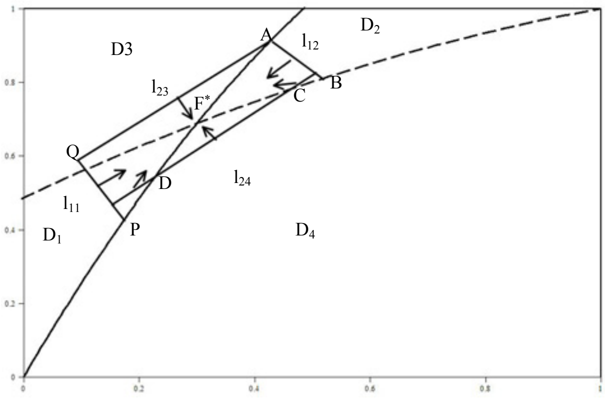

Рис. 4. Инвариантность множества $ABCDPQ$

Заключение

Проведено качественное исследование двумерной нелинейной динамической системы, являющейся моделью Полтеровича – Хенкина с амортизацией. Найдены инвариантные множества. Доказана единственность и глобальная асимптотическая устойчивость положений равновесия в моделях с амортизацией на одном и двух уровнях. В последующих исследованиях предполагается рассмотреть модель произвольной размерности и отказаться от условия равенства коэффицентов интенсивности инноваций и имитаций на всех уровнях. Также представляет интерес построение модели с динамически изменяющейся структурой на основе подхода, предложенного в [2]. При этом коэффициенты интенсивности инноваций и имитаций α и β могут рассматриваться как управляемые параметры.

Литература

1. *Гельман Л. М., Левин М. И., Полтерович В. М., Спивак В. А.* Моделирование распределений предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) // Экономика и математические методы. 1993. Т. XXIX, № 3. С. 460–469.

2. *Кириллов А. Н.* Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник СПБГУ. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. № 4, сер. 10. С. 127–131.

3. *Полтерович В. М., Хенкин Г. М.* Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. Т. XXIV, № 6. С. 1071–1083.

4. *Хенкин Г. М., Шананин А. А.* Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 127–131.

5. *Шумпетер Й.* Теория экономического развития (Исследование предпринимательской прибыли, капитала, кредита, процента и цикла конъюнктуры): пер. с англ. М.: Прогресс, 1982. 455 с.

Поступила в редакцию 05.06.2017

References

1. *Gelman L. M., Levin M. I., Polterovich V. M., Spivak M. A.* Modelirovanie raspredeleniya predpriyatii otrasli po urovnyam effectivnosti (na primere chernoi metallurgii)[Modelling of industry enterprises distribution according to efficiency levels (case of the iron-and-steel industry)]. *Economica i matematicheskie metody* [*Economics and Mathematical Methods*]. 1993. Vol. XXIX, no. 3. P. 460–469.

2. *Kirillov A. N.* Upravlenie mnogostadiinymi tekhnologicheskimi protsessami [The multistage technological processes control]. *Vestnik SPBGU. Prikladnaya matematika, informatika, protsessy upravleniya* [*Vestnik SPbSU. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*]. 2006. No. 4, iss. 10. P. 127–131.

3. *Polterovich V. M., Henkin G. M.* Evolutsionnaya model' vzaimodeistviya protsessov sozdaniya i zaimstvovaniya tekhnologii [The evolutionary model of interaction between technology creation and adoption]. *Economica i matematicheskie metody* [*Economics and Mathematical Methods*]. 1988. Vol. XXIV, no. 6. P. 1071–1083.

4. *Henkin G. M., Shananin A. A.* Matematicheskoe modelirovanie shumpeterovskoi innovatsionnoi dinamiki [Mathematical modeling of the schumpeterian dynamics of innovation]. *Matematicheskoe modelirovanie* [*Mathematical Models and Computer Simulations*]. 2014. Vol. 26, no. 8. P. 127–131.

5. *Shumpeter J.* Teoriya economicheskogo razvitiya (Issledovanie predprinimatel'skoi pribyli, kapitala, kredita, protsenta i tsikla kon"yunktury) [The Theory of economic development: an inquiry into profits, capital, credit, interest, and the business cycle]: tr. from Eng. Moscow: Progress, 1982. 455 p.

Received June 5, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 763370

Данилова Инна Владимировна
аспирант
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: DanilovaInna1987@mail.ru

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312

Danilova, Inna
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: DanilovaInna1987@mail.ru