Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2017. С. 66–75
DOI: 10.17076/mat613

УДК 519.175.4

ОДИН СЛУЧАЙ ПРЕДЕЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН В УСЛОВНЫХ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФАХ

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими дискретное степенное распределение с параметром τ. Они равны числу занумерованных в произвольном порядке полуребер. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Такие модели используются для описания различных сетей коммуникаций и топологии сети Интернет. Мы изучаем подмножество случайных графов при условии, что сумма степеней известна и равна n. Свойства графа зависят от поведения параметра τ. Пусть τ является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b], 0 < a < b < \infty$. Пусть $\eta_{(N)}$ и μ_r равны максимальной степени вершины и числу вершин заданной степени r. Предельные распределения этих случайных величин при $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$ ранее были известны, только если $a \leqslant 1$. В статье доказаны предельные теоремы для $\eta_{(N)}$ и μ_r в случае $a > 1$.

К л ю ч е в ы е с л о в а: случайный конфигурационный граф; степень вершины; предельные теоремы.

Yu. L. Pavlov. A CASE OF LIMIT BEHAVIOUR OF VERTEX DEGREES IN CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPHS

We consider configuration graphs with N vertices. The degrees of the vertices are independent identically distributed random variables according to power-law distribution with positive parameter τ. They are equal to the number of vertex's semiedges that are numbered in an arbitrary order. The graph is constructed by joining all of the semiedges pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used for describing different communication networks and Internet topology. We study the subset of random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is known and it is equal to n. The properties of the graph depend on the behaviour of the parameter τ. We assume that τ is a random variable following uniform distribution on the interval $[a, b], 0 < a < b < \infty$. Let $\eta_{(N)}$ and μ_r be the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree r. Limit distributions of these random variables as $N, n \to \infty$ in such a way that $n/N \to \infty$ were known only if $a \leqslant 1$. In the paper we proved limit theorems for $\eta_{(N)}$ and μ_r in the case $a > 1$.

K e y w o r d s: configuration random graph; vertex degree; limit theorems.

Посвящается памяти
Валентина Федоровича Колчина

Введение

В статье [5] рассматривались условные случайные конфигурационные графы при условии, что число ребер графа известно. Граф содержит N вершин, а сумма степеней вершин равна n. Степени всех вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими следующее дискретное степенное распределение:

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \qquad (1)$$

где η – случайная величина, равная степени любой вершины, $k = 1, 2, \ldots,$ τ – положительный параметр распределения. Степень каждой вершины определяет число так называемых полуребер, т. е. инцидентных этой вершине различимых ребер, для которых смежные вершины еще не определены. Граф строится путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. Понятно, что сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, поэтому в случае нечетной суммы в граф добавляется фиктивная вершина единичной степени. В работе [8] отмечалось, что появление этой вспомогательной вершины не влияет на асимптотическое поведение графа при стремлении к бесконечности числа вершин. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать степени только основных N вершин. Такие условные случайные графы впервые предложено изучать в [7] в качестве моделей сетей коммуникаций, имеющих естественные ограничения на общее число связей. В [5] рассматривались конфигурационные графы со случайным распределением степеней вершин. Предполагалось, что степени вершин имеют распределение (1), но параметр τ является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b], 0 < a < b < \infty$. В этом случае, как легко проверить, степень каждой вершины имеет такое распределение:

$$p_1 = 1 - \frac{1}{(b-a)\ln 2}\left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b}\right), \qquad (2)$$

$$p_k = \frac{1}{(b-a)\ln k}\left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b}\right) - $$
$$ - \frac{1}{(b-a)\ln(k+1)}\left(\frac{1}{(k+1)^a} - \frac{1}{(k+1)^b}\right), \qquad (3)$$

где $k = 2, 3, \ldots$

Обозначим $\eta_1, \ldots, \eta_N$ степени вершин $1, \ldots, N$ соответственно. Мы будем рассматривать графы при условии, что $\eta_1 + \ldots + \eta_N = n$. В этом случае случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ уже не являются независимыми. Обозначим $\eta_{(N)}$ максимальную степень вершины такого условного графа, следовательно,

$$\eta_{(N)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \eta_i.$$

Обозначим также μ_r число вершин графа, имеющих степень r. В статье [5] найдены предельные распределения $\eta_{(N)}$ и μ_r в различных зонах стремления N и n к бесконечности. Доказательства этих результатов основаны на использовании обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, введенной и подробно изученной В. Ф. Колчиным (см., например, [2]). Эта схема позволяет сводить задачи о зависимых случайных величинах к исследованию поведения вспомогательных независимых случайных величин. В [5] доказаны предельные теоремы для $\eta_{(N)}$ и μ_r в случае $N, n \to \infty$ так, что $n/N \leqslant C < \infty$, а также и при $n/N \to \infty$, но только если $a \leqslant 1$. Все эти случаи объединяет то, что при указанных условиях справедливы локальные предельные теоремы о сходимости распределений сумм вспомогательных независимых случайных величин к нормальному закону. Однако при $n/N \to \infty$ и $a > 1$ такие суммы попадают в зону действия больших уклонений, при этом значения сумм могут быть сколь угодно далеки от их математических ожиданий. Поэтому в [5] получить соответствующие результаты не удалось. В [3, 4, 6] разрабатывались подходы к доказательству локальных предельных теорем для подобных сумм в случае больших уклонений. С их помощью в настоящей статье доказаны предельные теоремы для $\eta_{(N)}$ и μ_r в не рассматривавшемся ранее случае $n/N \to \infty, a > 1$.

В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теоремы 1 для $\eta_{(N)}$ и теоремы 2 для μ_r. Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–6), с помощью которых в последнем разделе доказываются теоремы 1 и 2.

Основные результаты

Из (1)–(3) следует, что если $a > 1$, то

$$m = \mathbf{E}\eta = 1 + \frac{H(a) - H(b)}{b-a} \leqslant C < \infty, \qquad (4)$$

где

$$H(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (k^x \ln k)^{-1}. \qquad (5)$$

В (4) и везде далее буквой C будем обозначать некоторые положительные постоянные.

Понятно, что в разных формулах и неравенствах эти постоянные могут быть разными, но, поскольку они встречаются часто, мы, для краткости, не нумеруем их и используем общий символ C.

Далее обозначим $g_a(x)$ плотность распределения устойчивого закона, характеристическая функция которого имеет вид:

$$\Psi_a(t) =$$
$$= \begin{cases} \exp\{-\frac{a}{b-a}H(a)\Gamma(1-a)\cos\frac{\pi a}{2}|t|^a \times \\ \times \left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)\}, \quad \text{если } 1 < a < 2; \\ \exp\{-t^2/(b-a)\}, \quad \text{если } a = 2; \\ \exp\{-t^2/2\}, \quad \text{если } a > 2, \end{cases} \tag{6}$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x. Нам понадобятся также следующие нормирующие величины:

$$B_N = \begin{cases} (N/\ln N)^{1/a}, \quad \text{если } 1 < a < 2; \\ \sqrt{N\ln\ln N}, \quad \text{если } a = 2; \\ \sigma\sqrt{N}, \quad \text{если } a > 2, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\eta = \tag{8}$$
$$= 1 + \frac{1}{b-a}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k-1}{\ln k}\left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b}\right) - m^2.$$

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $a > 1, N, n \to \infty$ и существуют положительные постоянные δ и A такие, что $n/N^{1+\delta} \to \infty$ и $n = O(N^A)$. Тогда для любого фиксированного z*

$$\mathbf{P}\{n - Nm - \eta_{(N)})/B_N \leqslant z\} \to \int_{-\infty}^{z} g_a(x)dx.$$

Теорема 2. *Пусть $a > 1, N, n \to \infty$ и существуют положительные постоянные δ и A такие, что $n/N^{1+\delta} \to \infty$ и $n = O(N^A)$. Тогда для любого фиксированного натурального r и для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}e^{-u_r^2/2}.$$

Вспомогательные утверждения

Введем вспомогательные независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, распределения которых совпадают с распределениями $\eta_1, \ldots, \eta_N$ (см. (1)–(3)), т. е. для $i = 1, \ldots, N$ и $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\xi_i = k\} = p_k. \tag{9}$$

Поскольку в рассматриваемом множестве графов сумма степеней вершин $i = 1, \ldots, N$ равна n, из (2), (3) и (9) получаем следующий результат.

Лемма 1. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}.$$

Обозначим $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ независимые случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \leqslant r\}, \tag{10}$$

где $i = 1, \ldots, N$. Обозначим также $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, $\zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_N^{(r)}$,

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}. \tag{11}$$

Лемма 1 показывает, что два множества случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ и $\xi_1, \ldots, \xi_N$ удовлетворяют условиям обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [2]. Известно, что в этом случае из леммы 1 следует такое утверждение.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Пусть $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ означают независимые случайные величины, имеющие распределение:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \neq r\}, \tag{12}$$

где $i = 1, \ldots, N; k = 1, 2, \ldots$ Из леммы 1 легко выводится следующая лемма.

Лемма 3. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times$$
$$\times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

где $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \ldots + \tilde{\xi}_{N-k}^{(r)}$.

Леммы 2 и 3 будут использованы для доказательства теорем 1 и 2. Для этого изучим предельное поведение ζ_N, $\zeta_N^{(r)}$, $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)}$, бинома $(1 - P_r)^N$ и биномиальных вероятностей, присутствующих в утверждении леммы 3.

Лемма 4. *Пусть $a > 1, N, n \to \infty$ и существуют положительные постоянные δ и A такие, что $n/N^{1+\delta} \to \infty$ и $n = O(N^A)$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \sim \frac{aN}{(b-a)n^{a+1}\ln n}.$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$\gamma = (N/n)^{\varepsilon}, \tag{13}$$

где положительная постоянная ε будет выбрана позднее. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = P_{N1} + NP_{N2} + P_{N3}, \tag{14}$$

где

$$P_{N1} = \mathbf{P}\{\zeta_N = n; \xi_i \leqslant \gamma n, i = 1, \dots, N\};$$

$$P_{N2} = \mathbf{P}\{\zeta_N = n; \bigcap_{i=1}^{N-1} (\xi_i \leqslant \gamma n), \xi_N > \gamma n\};$$

$$P_{N3} = \mathbf{P}\{\zeta_N = n; \bigcup_{i \neq j} (\xi_i \geqslant \gamma n, \xi_j \geqslant \gamma n)\}.$$

Оценим P_{N1}. Обозначим

$$R(w) = \sum_{k \leqslant \gamma n} \exp\{wk\} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\}. \tag{15}$$

Из (3) следует, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{a}{(b-a)k^{a+1}\ln k}. \tag{16}$$

Отсюда и из (9):

$$\sum_{k>l} \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} < C \int_l^{\infty} \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{C}{l^a}. \tag{17}$$

Учитывая, что при $0 \leqslant y \leqslant 1$ справедливо равенство

$$e^y = 1 + q(y), \tag{18}$$

где $q(y) \leqslant 2y$, из (4), (15)–(17) находим, что

$$R(1/(\gamma n)) = 1 + O(1/(\gamma n)).$$

Отсюда и из (13) получаем, что при $\varepsilon < 1$

$$(\gamma n)^{-1} = o(1/N) \tag{19}$$

и

$$R(1/(\gamma n)) = 1 + o(1/N). \tag{20}$$

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1(\gamma), \dots, \xi_N(\gamma)$, имеющие следующее распределение:

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\gamma) = k\} = \exp\left\{\frac{k}{\gamma n}\right\} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 = k\}}{R(1/(\gamma n))}, \tag{21}$$

где $k \leqslant \gamma n$. Обозначим $\zeta_N(\gamma) = \xi_1(\gamma) + \ldots + \xi_N(\gamma)$. Легко видеть, что

$$P_{N1} = R^N(1/(\gamma n)) e^{-1/\gamma} \mathbf{P}\{\zeta_N(\gamma) = n\}. \tag{22}$$

Докажем, что при достаточно больших n

$$\mathbf{P}\{\zeta_N(\gamma) = n\} \leqslant C/B_N, \tag{23}$$

где величины B_N определены в (7). Обозначим $\varphi(t)$ и $\varphi_\gamma(t)$ характеристические функции случайных величин ξ_1 и $\xi_1(\gamma)$ соответственно.

По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N(\gamma) = n\} = \frac{1}{2\pi B_N} \int_{-\pi B_N}^{\pi B_N} \exp\left\{-\frac{itn}{B_N}\right\} \left(\varphi_\gamma\left(\frac{t}{B_N}\right)\right)^N dt. \tag{24}$$

Рассмотрим выражение

$$|\varphi_\gamma(t)|^N = \left|\frac{R(1/(\gamma n) + it)}{R(1/(\gamma n))}\right|^N. \tag{25}$$

В силу (9), (15) и (18)

$$|R(1/(\gamma n) + it)| = = |\sum_{k \leqslant \gamma n} \exp\{1/(\gamma n) + it)k\} p_k| \leqslant \leqslant |\sum_{k \leqslant \gamma n} e^{itk} p_k| + 2(\gamma n)^{-1} \sum_{k \leqslant \gamma n} p_k. \tag{26}$$

Отсюда и из (4), (17), (19) и (20) получаем, что

$$|R(1/(\gamma n) + it)| \leqslant |\varphi(t)| + o(1/N). \tag{27}$$

Из (20), (25) и (27) следует, что при любом фиксированном t

$$|\varphi_\gamma(t)|^N \leqslant C|\varphi(t)|^N. \tag{28}$$

Применяя (2), (3) и (9), находим, что

$$\varphi(t) = e^{it} \times \left(1 + \frac{e^{it} - 1}{(b-a)e^{2it}} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{itk}}{k^a \ln k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{itk}}{k^b \ln k}\right]\right). \tag{29}$$

Рассмотрим случай $1 < a < 2$. Обозначим ν случайную величину такую, что

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = (H(a)k^a \ln k)^{-1},$$

где $k = 2, 3, \ldots$, а $H(x)$ определена в (5). Характеристическая функция случайной величины ν равна

$$f_\nu(t) = \frac{1}{H(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{itk}}{k^a \ln k}. \tag{30}$$

Обозначим $F_\nu(x)$ функцию распределения ν. Очевидно, что

$$F_\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - \frac{1}{H(a)} \sum\limits_{k>x} \frac{1}{k^a \ln k}, & x > 0. \end{cases} \qquad (31)$$

Пусть $x \to \infty$. Легко видеть, что

$$\sum_{k>x} \frac{1}{k^a \ln k} = \frac{1+o(1)}{x^{a-1}} \int_1^\infty \frac{dy}{y^a \ln xy}. \qquad (32)$$

Последний интеграл представим в виде суммы:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dy}{y^a \ln xy} = \int\limits_1^{x^\varepsilon} \frac{dy}{y^a \ln xy} + \int\limits_{x^\varepsilon}^\infty \frac{dy}{y^a \ln xy}. \qquad (33)$$

Здесь, конечно, положительная постоянная ε не обязательно совпадает с ε из (13), но, поскольку во всех случаях нам потребуется выбор достаточно малого ε, мы полагаем возможным здесь и далее считать, что это одна и та же сколь угодно малая положительная константа.

Ясно, что если $1 \leqslant y \leqslant x^\varepsilon$, то выражение $1/\ln(xy)$ можно сделать сколь угодно близким к $1/\ln x$ выбором достаточно большого x и достаточно малого ε. Легко видеть также, что при $x \to \infty$

$$\int\limits_{x^\varepsilon}^\infty \frac{dy}{y^a \ln xy} < \frac{1}{(1+\varepsilon)\ln x} \int\limits_{x^\varepsilon}^\infty \frac{dy}{y^a} = o\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Отсюда и из (32), (33) следует, что

$$\sum_{k>x} \frac{1}{k^a \ln k} = \frac{1+o(1)}{(a-1)x^{a-1}\ln x}. \qquad (34)$$

Из (31) и (34) выводим, что при $x \to \infty$

$$F_\nu(x) = 1 - \frac{1+o(1)}{H(a)(a-1)x^{a-1}\ln x}. \qquad (35)$$

Поскольку функция $(H(a)(a-1)\ln x)^{-1}$ является медленно меняющейся в смысле Карамата, из (31) и (35) видим, что $F_\nu(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.6.1 книги [1], а это значит, что она принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $a-1$ и параметрами $c_1 = 0, c_2 = 1$. В лемме 2.6.2 [1] показано, что при $t \to 0$

$$f_\nu(t) = 1 + |t|^{a-1}(\ln(1/|t|))^{-1}\Gamma(1-a) \times$$
$$\times \left(\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) + i\frac{t}{|t|}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right)(1+o(1)).$$

Отсюда и из (30) получаем, что

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{e^{itk}}{k^a \ln k} =$$
$$= H(a) + \frac{|t|^{a-1}H(a)}{\ln(1/|t|)}\Gamma(1-a) \times \qquad (36)$$
$$\times \left(\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right) + i\frac{t}{|t|}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\right)(1+o(1)).$$

Заменим в этом соотношении a на b. Тогда

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{e^{itk}}{k^b \ln k} = H(b) + O(|t|^{b-1}/\ln(1/|t|)),$$

поэтому из (36) следует, что

$$it\left(\sum_{k=2}^\infty \frac{e^{itk}}{k^a \ln k} - \sum_{k=2}^\infty \frac{e^{itk}}{k^b \ln k}\right) =$$
$$= it(H(a) - H(b)) - H(a)\Gamma(1-a)\cos(\pi a/2) \times$$
$$\times \frac{|t|^a}{\ln(1/|t|)}\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)(1+o(1)).$$

Отсюда и из (4), (29) вытекает, что в окрестности нуля

$$\varphi(t) = 1 + itm -$$
$$-H(a)\Gamma(1-a)\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\frac{|t|^a}{\ln(1/|t|)} \times \qquad (37)$$
$$\times \left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi a}{2}\right)(1+o(1)).$$

Из (37) следует, что при $1 < a < 2$ и любом фиксированном t

$$\varphi^N(t(\ln N/N)^{1/a}) \sim 1 +$$
$$+ itmN^{1-1/a}(\ln N)^{1/a} - H(a)\Gamma(1-a) \times \qquad (38)$$
$$\times |t|^a \frac{a}{b-a}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\left(1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi a}{2}\right).$$

Пусть $a = 2$ и $t \to 0$. В ходе доказательства теоремы 2.6.5 [1] показано, что

$$\ln\varphi(t) = imt - \frac{t^2}{2}G\left(\frac{1}{|t|}\right)(1+o(1)), \qquad (39)$$

где

$$G(1/|t|) = \sum_{k=1}^{1/|t|} k^2 p_k.$$

Используя (1)–(3), получаем, что

$$G(1/|t|) = 1 - \sum_{k=2}^{1/|t|} \frac{2k+1}{(b-2)\ln k}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^b}\right) \sim$$

$$\sim \frac{2}{b-2}\sum_{k=2}^{1/|t|}\frac{1}{k\ln k},$$

откуда

$$G\left(\frac{1}{|t|}\right) \sim \frac{2}{b-2}\int_{2|t|}^{1}\frac{dy}{y\ln(y/|t|)} \sim \frac{2}{b-2}\ln\ln\frac{1}{|t|}.$$

Из этого соотношения и (39) следует, что

$$\ln\varphi(t) = imt - \frac{t^2(1+o(1))}{b-a}\ln\ln\frac{1}{|t|}. \qquad (40)$$

Это значит, что при любом фиксированном t

$$\varphi^N\left(\frac{t}{\sqrt{N\ln\ln N}}\right) \sim$$
$$\sim \exp\left\{imt\sqrt{\frac{N}{\ln\ln N}} - \frac{t^2}{b-a}\right\}. \qquad (41)$$

Поскольку при $a > 2$ распределение (1)–(3) имеет конечную дисперсию (8), очевидно, что

$$\varphi(t) = 1 + imt - \frac{t^2\mathbf{E}\xi^2}{2} + o(1) \qquad (42)$$

и при фиксированных t

$$\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \sim 1 + \frac{itmN}{\sigma\sqrt{N}} - \frac{t^2}{2}. \qquad (43)$$

Из (7), (38), (41) и (43) следует, что при $|t| \leqslant \varepsilon B_N$ и достаточно малом ε

$$|\varphi^N(t/B_N)| \leqslant \exp\{-C|t|^\beta\}, \qquad (44)$$

где $\beta = a$ при $1 < a < 2$ и $\beta = 2$, если $a \geqslant 2$. Если $\varepsilon B_N \leqslant |t| \leqslant \pi B_N$, то, как хорошо известно,

$$|\varphi^N(t/B_N)| \leqslant e^{-CN}. \qquad (45)$$

Разобьем интеграл, стоящий в правой части (24), на сумму двух интегралов, области интегрирования которых определяются как $|t| \leqslant \varepsilon B_N$ и $\varepsilon B_N \leqslant |t| \leqslant \varepsilon\pi B_N$. Тогда из (24), (44), (45):

$$\mathbf{P}\{\zeta_N(\gamma) = n\} \leqslant \frac{C}{B_N}\left(\int_0^\infty e^{-C|t|^\beta}dt + e^{-CN}\right),$$

откуда и получаем оценку (23). Из (13), (20), (22), (23) и условий $n/N^{1+\delta} \to \infty, n = O(N^A)$ следует, что

$$P_{N1} \leqslant CB_N^{-1}e^{-1/\gamma} = o(N/(n^{a+1}\ln n)). \qquad (46)$$

Оценим вероятность P_{N2}. Согласно (14)

$$P_{N2} = \sum_{N-1\leqslant k\leqslant n-\gamma n}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\} \times$$
$$\times\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k; \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\}. \qquad (47)$$

Используя (10), (11), получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = k; \xi_i \leqslant \gamma n, i \leqslant N-1\} =$$
$$= (1-P_{\gamma n})^{N-1}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(\gamma n)} = k\}.$$

Отсюда и из (11), (17), (19) следует, что

$$P_{\gamma n} = o(1/N), \qquad (48)$$

поэтому из (47) вытекает, что

$$P_{N2} = (1+o(1)) \times$$
$$\times \sum_{N-1\leqslant k\leqslant n-\gamma n}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(\gamma n)} = k\}. \qquad (49)$$

Это равенство позволяет нам представить вероятность P_{N2} в виде суммы:

$$P_{N2} = S_1 + S_2, \qquad (50)$$

где

$$S_i = (1+o(1)) \times$$
$$\times\sum_{K_i}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(\gamma n)} = k\}, \qquad (51)$$

$i = 1,2$; $K_1 = \{k : N-1 \leqslant k \leqslant \gamma n\}$, $K_2 = \{k : \gamma n < k < n(1-\gamma)\}$.

Применяя (13) и (16) к оценке вероятности $\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\}$, видим, что в области суммирования K_1 при достаточно больших N, n

$$S_1 \sim \frac{a}{(b-a)n^{a+1}\ln n} \times$$
$$\times\mathbf{P}\{N-1 \leqslant \zeta_{N-1}^{(\gamma n)} \leqslant \gamma n\}. \qquad (52)$$

Обозначим $\varphi^{(\gamma n)}(t)$ характеристическую функцию $\xi_1^{(\gamma n)}$. Очевидно, что

$$(\varphi^{(\gamma n)}(t/B_N))^{N-1} =$$
$$= \left(\frac{\varphi(t/B_N) - \sum_{k>\gamma n}e^{itk/B_N}p_k}{1-P_{\gamma n}}\right)^{N-1}. \qquad (53)$$

Соотношения (38), (41), (43) означают, что распределения случайных величин $(\zeta_N - mN)/B_N$ слабо сходятся к устойчивым законам с указанными в правых частях этих соотношений характеристическими функциями.

Из (48) и (53) следует, что к этим же законам сходятся и распределения случайных величин $(\zeta_N^{(\gamma n)} - mN)/B_N$. Тогда из (52) получаем, учитывая (13) и условие $n/N^{1+\delta} \to \infty$, что при достаточно малом ε

$$S_1 = \frac{a(1+o(1))}{(b-a)n^{a+1}\ln n} \times \times \mathbf{P}\left\{-\infty < \frac{\zeta_{N-1} - mN}{B_N} < \infty\right\} \sim \sim \frac{a}{(b-a)n^{a+1}\ln n}. \tag{54}$$

Покажем теперь, что

$$S_2 = o((n^{a+1}\ln n)^{-1}). \tag{55}$$

Если $\gamma n < k < n(1-\gamma)$, то из (13) и (16) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_N = n-k\} < C(((\gamma n)^{a+1}\ln n)^{-1}). \tag{56}$$

Отсюда и из (51) получаем, что

$$S_2 < C(((\gamma n)^{a+1}\ln n)^{-1}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(\gamma n)} > \gamma n\}. \tag{57}$$

Из (10) и (16) вытекает, что

$$\mathbf{D}\xi_1^{(\gamma n)} < C\sum_{k=1}^{\gamma n} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} < C(\gamma n)^{2-a}. \tag{58}$$

Отсюда и из (57):

$$S_2 < CN((\gamma n)^{2a+1}\ln n)^{-1}, \tag{59}$$

что и доказывает (55). Из (50), (54) и (55) получаем, что

$$P_{N2} = \frac{a(1+o(1))}{(b-a)n^{a+1}\ln n}. \tag{60}$$

Оценим P_{N3}. Легко заметить, что

$$P_{N3} = (N(N-1)/2)\sum_{k\leqslant \gamma n}\mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = k\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{\xi_{N-1} + \xi_N = n-k, \xi_{N-1} > \gamma n, \xi_N > \gamma n\}.$$

Отсюда следует, что

$$P_{N3} \leqslant CN^2\sum_{k\leqslant\gamma n}\mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = k\}\times \times\sum_{Z}\mathbf{P}\{\xi_{N-1} = s\}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k-s\}, \tag{61}$$

где $Z = \{s : \gamma n < s < n(1-\gamma)\}$. В силу (16)

$$\mathbf{P}\{\xi_{N-1} = s\} < C/(\gamma n)^{a+1},$$

поэтому, используя (17), получаем, что

$$\sum_{Z}\mathbf{P}\{\xi_{N-1} = s\}\mathbf{P}\{\xi_N = n-k-s\} \leqslant C/(\gamma n)^{2a+1}.$$

Отсюда и из (13), (61) находим, что при достаточно малых ε

$$P_{N3} \leqslant C\frac{N^2}{(\gamma n)^{2a+1}} = o\left(\frac{N}{n^{a+1}\ln n}\right). \tag{62}$$

Из (14), (46), (62) следует, наконец, утверждение леммы 4.

Рассмотрим теперь предельное поведение вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}$.

Лемма 5. *Пусть $a > 1, N, n \to \infty$ и существуют положительные постоянные δ и A такие, что $n/N^{1+\delta} \to \infty, n = O(N^A)$. Тогда если $r = n - mN - zB_N$, где z – фиксированное число, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = \frac{aN(1+o(1))}{(b-a)n^{a+1}\ln n}\int_z^\infty g_a(x)dx,$$

где $g_a(x)$ – плотность распределения устойчивого закона, характеристическая функция которого определена в (6).

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4, запишем равенство:

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = P_{N1}^{(r)} + NP_{N2}^{(r)} + P_{N3}^{(r)}, \tag{63}$$

где вероятности $P_{Nj}^{(r)}, j = 1,2,3$, определяются аналогично P_{Nj} (см. (14)) с заменой ζ_N на $\zeta_N^{(r)}$ и ξ_i на $\xi_i^{(r)}, i = 1,\ldots,N$. По аналогии с (20) легко показать, что

$$R^{(r)}(1/(\gamma n)) = 1 + o(1/N), \tag{64}$$

где $R^{(r)}(w)$ отличается от (15) только заменой ξ_i на $\xi_i^{(r)}$. Введем также независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1^{(r)}(\gamma),\ldots,\xi_N^{(r)}(\gamma)$ такие, что (см. (21))

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)}(\gamma) = k\} = e^{k/(\gamma n)}\frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\}}{R(1/(\gamma n))}, \tag{65}$$

где $k \leqslant \gamma n$ и пусть $\zeta_N^{(r)}(\gamma) = \xi_1^{(r)}(\gamma) + \ldots + \xi_N^{(r)}(\gamma)$. Как и в (24),

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)}(\gamma) = n\} = \frac{1}{2\pi B_N}\times \times\int_{-\pi B_N}^{\pi B_N}\exp\left\{-\frac{itn}{B_N}\right\}\left(\varphi_\gamma^{(r)}\left(\frac{t}{B_N}\right)\right)^N dt, \tag{66}$$

где характеристическая функция $\varphi_\gamma^{(r)}(t)$ случайной величины $\xi_1^{(r)}(\gamma)$ в силу (18), (64), (65) имеет вид:

$$\varphi_\gamma^{(r)}(t) = \frac{\varphi^{(r)}(t) + O(1/(\gamma n))}{R^{(r)}(1/(\gamma n))}, \qquad (67)$$

а $\varphi^{(r)}(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\xi_1^{(r)}$:

$$\varphi^{(r)}(t) = \frac{\varphi(t) - \sum_{k>r} p_k e^{itk}}{1 - P_r}. \qquad (68)$$

Учитывая соотношение (48) и выбор r, из (64)–(68) получаем, что

$$\varphi_\gamma^{(r)}(t) = \varphi(t)(1 + o(1/N))$$

и

$$(\varphi_\gamma^{(r)}(t))^N \sim \varphi^N(t). \qquad (69)$$

Из этого соотношения, (44), (45), как и при доказательстве (46), вытекает, что

$$P_{N1}^{(r)} = o(N/(n^{a+1}\ln n)). \qquad (70)$$

Продолжая следовать схеме доказательства леммы 4 и учитывая, что

$$((1 - P_{\gamma n})/(1 - P_r))^{N-1} \to 1,$$

представим вероятность $P_{N2}^{(r)}$ в виде суммы

$$P_{N2}^{(r)} = S_1^{(r)} + S_2^{(r)}, \qquad (71)$$

где

$$S_i^{(r)} = (1+o(1)) \sum_{K_i^{(r)}} \mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n-k\} \mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(\gamma n)} = k\},$$

$i = 1, 2$; $K_1^{(r)} = \{k : n - r \leqslant k \leqslant \gamma n\}$, $K_2^{(r)} = \{k : \gamma n < k < n(1-\gamma)\}$. Применяя (10), (13) и (16), получаем, что при $k \in K_1^{(r)}$ равномерно относительно k

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n - k\} = \frac{a + o(1)}{(b-a)n^{a+1}\ln n}, \qquad (72)$$

следовательно,

$$S_1^{(r)} \sim \frac{a\mathbf{P}\{n - r \leqslant \zeta_{N-1}^{(\gamma n)} \leqslant \gamma n\}}{(b-a)n^{a+1}\ln n}. \qquad (73)$$

В ходе доказательства леммы 4 было показано (см. комментарий к соотношению (53)), что распределения случайных величин $(\zeta_N - mN)/B_N$ слабо сходятся к устойчивым законам с плотностями $g_a(x)$ и характеристическими функциями, определенными в (6). Из (69) следует, что это же утверждение верно и для случайных величин $(\zeta_N^{(r)} - mN)/B_N$. Поскольку $r = n - mN - zB_N$, из (73) получаем, что

$$S_1^{(r)} \sim \frac{a}{(b-a)n^{a+1}\ln n} \int_z^\infty g_a(x)dx. \qquad (74)$$

Покажем, что при выполнении условий леммы

$$S_2^{(r)} = o((n^{a+1}\ln n)^{-1}). \qquad (75)$$

С помощью (10), (16), (17), (19) нетрудно обнаружить, что если $k \in K_2^{(r)}$, то, как и в (56), (57),

$$\mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n - k\} < C((\gamma n)^{a+1}\ln n)^{-1})$$

и

$$S_2^{(r)} < C((\gamma n)^{a+1}\ln n)^{-1}\mathbf{P}\{\zeta_{N-1}^{(\gamma n)} > \gamma n\}.$$

Поскольку $\gamma n = o(r)$, из (13), (58) легко следует оценка, аналогичная (59), что и доказывает (75). Из (71), (74) и (75) находим, что

$$P_{N2}^{(r)} \sim \frac{a}{(b-a)n^{a+1}\ln n} \int_z^\infty g_a(x)dx. \qquad (76)$$

Оценка $P_{N3}^{(r)}$ аналогична (62), поэтому из (63), (70) и (76) следует лемма 5.

Теперь мы рассмотрим асимптотическое поведение суммы вида $\tilde{\zeta}_N^{(r)}$, присутствующей в утверждении леммы 3.

Лемма 6. *Пусть $a > 1, N, n \to \infty$ и существуют положительные постоянные δ и A такие, что $n/N^{1+\delta} \to \infty, n = O(N^A)$. Тогда при $T = N(1 - p_r)(1 + o(1))$*

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_T^{(r)} = n\} = \frac{aT(1 + o(1))}{(b-a)(1-p_r)n^{a+1}\ln n}.$$

Доказательство. Будем следовать идее доказательства лемм 4 и 5. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_T^{(r)} = n\} = \tilde{P}_{T1}^{(r)} + T\tilde{P}_{T2}^{(r)} + \tilde{P}_{T3}^{(r)}, \qquad (77)$$

где вероятности $\tilde{P}_{Tj}^{(r)}, j = 1, 2, 3$, определяются аналогично P_{Nj} в (14) с заменой N на T, ζ_N на $\tilde{\zeta}_T^{(r)}$ и ξ_i на $\tilde{\xi}_I^{(r)}$.

Нетрудно видеть, что, как и в (20),

$$\tilde{R}^{(r)}(1/(\gamma n)) = 1 + o(1/T), \qquad (78)$$

где

$$\tilde{R}^{(r)}(w) = \sum_{k \leqslant \gamma n} \exp\{wk\}\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\}.$$

Понятно также, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_T^{(r)}(\gamma) = n\} = \frac{1}{2\pi B_T} \times$$

$$\times \int_{-\pi B_T}^{\pi B_T} \exp\left\{-\frac{itn}{B_T}\right\} \left(\tilde{\varphi}_\gamma^{(r)}\left(\frac{t}{B_T}\right)\right)^T dt, \qquad (79)$$

где $\tilde{\zeta}_T^{(r)}(\gamma) = \tilde{\xi}_1^{(r)}(\gamma) + \ldots + \tilde{\xi}_T^{(r)}(\gamma)$, а слагаемые $\tilde{\xi}_i^{(r)}(\gamma), i = 1, \ldots, T$ имеют распределение:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)}(\gamma) = k\} = e^{k/(\gamma n)} \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = k\}}{\tilde{R}^{(r)}(1/(\gamma n))}, \qquad (80)$$

$k \leqslant \gamma n$; и характеристическую функцию

$$\tilde{\varphi}^{(r)}(t) = \frac{\tilde{R}^{(r)}(1/(\gamma n) + it)}{\tilde{R}^{(r)}(1/(\gamma n))}. \qquad (81)$$

Обозначим $\tilde{\varphi}^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\tilde{\xi}_1^{(r)}$. Тогда

$$\tilde{\varphi}^{(r)}(t) = \frac{\varphi(t) - p_r e^{itr}}{1 - p_r}. \qquad (82)$$

Применяя (7) и повторяя рассуждения, подобные выводу (26)–(28), из (78), (80)–(82) находим, что

$$|\tilde{\varphi}_\gamma^{(r)}(t/B_T)|^T \leqslant C|\varphi(t)|^T,$$

поэтому, используя (37), (40), (42), как и в (44), (45), видим, что при $|t| \leqslant aB_T$

$$|\tilde{\varphi}_\gamma^{(r)}(t/B_T)|^T \leqslant \exp\{-C|t|^\beta\},$$

а при $\varepsilon B_T < |t| \leqslant \pi B_T$

$$|\tilde{\varphi}_\gamma^{(r)}(t/B_T)|^T \leqslant e^{-CT}.$$

Из этих оценок и (79), как и в (46), получаем, что

$$\tilde{P}_{T1}^{(r)} = o(T(n^{a+1}\ln n)^{-1}). \qquad (83)$$

Как и при доказательстве (49), нетрудно вывести, что

$$\tilde{P}_{T2}^{(r)} = (1 + o(1)) \times$$

$$\times \sum_{T-1 \leqslant k \leqslant n - \gamma n} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{(r)} = n - k\}\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{T-1,\gamma}^{(r)} = k\},$$

где $\tilde{\zeta}_{T-1,\gamma}^{(r)} = \tilde{\xi}_{1,\gamma}^{(r)} + \ldots + \xi_{T-1,\gamma}^{(r)}$, а $\tilde{\xi}_{1,\gamma}^{(r)}, \ldots, \xi_{T-1,\gamma}^{(r)}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{1,\gamma}^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \xi_1 \leqslant \gamma n, \xi_1 \neq r\}.$$

Тогда

$$\tilde{P}_{T2}^{(r)} = \tilde{S}_1^{(r)} + \tilde{S}_2^{(r)}, \qquad (84)$$

где области суммирования в $\tilde{S}_1^{(r)}$ и $\tilde{S}_2^{(r)}$ задаются в виде $\tilde{K}_1^{(r)} = \{k : T - 1 \leqslant k \leqslant \gamma n\}$, $\tilde{K}_2^{(r)} = \{k : \gamma n \leqslant k \leqslant n(1-\gamma)\}$.

Используя (12), (16) и (72), нетрудно увидеть, что при $k \in \tilde{K}_1^{(r)}$ сумма $\tilde{S}_1^{(r)}$ сколь угодно мало отличается от

$$\frac{a}{(b-a)(1-p_r)n^{a+1}\ln n}\mathbf{P}\left\{\frac{T - 1 - \tilde{m}^{(r)}T)}{B_T} \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \frac{\tilde{\zeta}_{T-1,\gamma}^{(r)} - \tilde{m}^{(r)}T}{B_T} \leqslant \frac{\gamma n - \tilde{m}^{(r)}T)}{B_T}\right\},$$

где

$$\tilde{m}^{(r)} = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)} = \frac{m - rp_r}{1 - p_r}.$$

Отсюда, как и в (54),

$$\tilde{S}_1^{(r)} = \frac{a + o(1)}{(b-a)(1-p_r)n^{a+1}\ln n}. \qquad (85)$$

Если $k \in \tilde{K}_2^{(r)}$, то, как следует из (3), (12) и (16),

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_T^{(r)} = n - k\} \leqslant C((n\gamma)^{a+1}\ln n)^{-1}).$$

Тогда

$$\tilde{S}_2^{(r)} \leqslant C((n\gamma)^{a+1}\ln n)^{-1})\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{T-1,\gamma}^{(r)} \geqslant \gamma n\}$$

и, как и в (55),

$$\tilde{S}_2^{(r)} = o((n^{a+1}\ln n)^{-1}).$$

Отсюда и из (84), (85)

$$\tilde{P}_{T2}^{(r)} = \frac{a + o(1)}{(b-a)(1-p_r)n^{a+1}\ln n}. \qquad (86)$$

Оценка $\tilde{P}_{T3}^{(r)}$ проводится аналогично доказательству (62), что приводит к соотношению

$$\tilde{P}_{T3}^{(r)} = o(T/(n^{a+1}\ln n)). \qquad (87)$$

Утверждение леммы 6 следует из (77), (83), (86) и (87).

Доказательства теорем

Пусть выполнены условия теоремы 1 и $r = n - mN - zB_N$, где z – фиксированное число. Тогда из (11), (17), (19) и условия $n/N^{1+\delta} \to \infty$ следует, что

$$(1 - P_r)^N \to 1. \qquad (88)$$

Из лемм 4 и 5 находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to \int_z^\infty g_a(x)dx. \qquad (89)$$

Согласно лемме 2, из (88) и (89) вытекает, что

$$\mathbf{P}\{(n - mN - \eta_{(N)})/B_N < z\} = \mathbf{P}\{\eta_{(N)} > r\} \to$$

$$\int_{-\infty}^z g_a(x)dx.$$

Теорема 1 доказана.

Если r фиксировано, то $Np_r \to \infty$ при $N \to \infty$ и, используя нормальное приближение биномиальных вероятностей, получаем, что

$$\binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} =$$

$$= \frac{1 + o(1))}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}e^{-u_r^2/2} \qquad (90)$$

равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале. Рассматривая такие k и учитывая, что в условиях теоремы 2 $k = o(n)$, а в лемме 6 $T = N(1-p_r)(1+o(1))$, из лемм 4 и 6 выводим, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}^{(r)}_{N-k} = n - kr\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1. \qquad (91)$$

Теперь утверждение теоремы 2 очевидным образом следует из леммы 3, (90) и (91).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00005.

Литература

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

3. *Павлов Ю. Л.* Один случай предельного распределения максимального объема дерева в случайном лесе // Математические заметки. 1979. Т. 25, вып. 5. С. 751–760.

4. *Павлов Ю. Л.* Об условных интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi: 10.4213/dm1104

5. *Павлов Ю. Л.* Об условных конфигурационных графах со случайным распределением степеней вершин // Труды КарНЦ РАН. 2016. № 8. С. 62–72. doi: 10.17076/mat313

6. *Павлов Ю. Л., Дертишникова Е. Н.* О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе интернет-типа // Труды КарНЦ РАН. 2010. № 3. С. 59–65.

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

8. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 14.03.2017

References

1. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V.* Independent and stationary sequences of random variables. Groningen: Wolters Neordhoff Publ., 1971. 438 p.

2. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: Univ. Press, 1999. 252 p.

3. *Pavlov Yu. L.* A case of limit distribution of the maximal volume on a tree in a random forest. *Mathematical Notes.* 1979. Vol. 25, iss. 5. P. 387–392. doi: 10.1515/dma.2007.034

4. *Pavlov Yu. L.* On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Mathematics and Applications.* 2010. Vol. 20, iss. 5–6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031

5. *Pavlov Yu. L.* Ob uslovnykh konfiguratsionnykh graphakh so sluchainym raspredeleniem stepenei vershin [On conditional configuration graphs with random distribution of vertex degrees]. *Trudy KarNTs RAN* [*Trans. KarRC RAS*]. 2016. No. 8. P. 62–72.

6. *Pavlov Yu. L., Dertishnikova E. N.* O predel'nom raspredelenii maksimal'noi stepeni vershiny v sluchainom grafe internet-tipa [On the limited distribution of the maximum vertex degree in a random internet-type graph]. *Trudy KarNTs RAN* [*Trans. KarRC RAS*]. 2010. No. 3, iss. 1. P. 59–65. doi: 10.17076/mat313

7. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random Internet-type graphs and the generalized allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications.* 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

8. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation.* 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received March 14, 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., проф.
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218