Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2017. С. 94–100
DOI: 10.17076/mat563

УДК 519.115:519.2

АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СТЕПАМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ПОДСТАНОВКИ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Рассматриваются разные процедуры перечисления всех исходов схемы размещений с заданным ограничением, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними и их номерами, приводится моделирование возможных значений реализаций схемы. Тогда из проведенного анализа могут быть получены результаты по тем же направлениям для подстановок любой цикловой структуры с ограниченным тем же числом рассеянием, что и степы в нашей схеме при интерпретации размещений как последовательных отображений в ее циклах.

Ключевые слова: схема размещений с ограниченными степами; перечисление исходов; задача нумерации; моделирование; рассеяние подстановок.

N. Yu. Enatskaya. ANALYSIS OF AN ALLOCATION SCHEME WITH LIMITED STEPS AND ITS APLICATION FOR THE STUDY OF PERMUTATION DISPERSION

The various procedures of enumerating all outcomes of an allocation scheme with a given constraint are considered; one-to-one correspondence between the outcomes and their numbers is established; possible values of the scheme's implementation are simulated. Proceeding from this analysis, results can then be obtained for permutations of any cycle structure with dispersion constrained by the same number as the steps in our scheme if the allocations are interpreted as consecutive mappings in its cycles.

Keywords: allocation scheme with restricted steps; enumeration of outcomes; enumeration problem; simulation; dispersion of permutations.

Введение

Схема размещений возникает при выборе r элементов из n различимых (нумерованных) элементов с учетом их порядка или при размещении r различимых частиц по одной по n различимым ячейкам (при неограниченном числе частиц в ячейке имеем схему размещений с повторениями) и является одной из наиболее распространенных комбинаторных схем, широко используемой в теории и практике, т. к. участвует во многих важных распространенных математических формулах и в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем. Число исходов схемы размещений есть $A_n^r = n!/(n-r)! = r!C_n^r$, где C_n^r – число исходов схемы сочетаний, а $r!$ – число исходов схемы перестановок, которые по указанным в аннотации направлениям для данной схемы исследованы в работах [1], [2] и [3]. Под размахом R исхода схемы сочетаний по [4] понимается максимальная абсолютная разность пар номеров входящих в ее исход элементов.

Исходы схемы размещения представляют собой наборы r значений номеров выбранных элементов в полученном порядке: $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_r)$. В изучаемой схеме вводится верхнее ограничение на абсолютные разности соседних элементов в исходах схемы размещений, называемые далее СТЕПАМИ и обозначаемые вектором $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_{r-1})$, где $s_i = |a_{i+1} - a_i|$. Тогда данное ограничение состоит в условии $max_i \; s_i \leqslant S$. Это ограничение путем отбраковки из всех исходов схемы размещений можно учесть по результатам непосредственного подсчета степов каждого его исхода при численном анализе схемы. Но тогда для перечисления требуемых исходов придется проводить перебор лишних исходов и глобальный просчет степов во всех исходах общей схемы размещений с теми же параметрами без ограничений. Во избежание этого и с целью выявления закономерностей структуры перебора исходов предлагается строить процедуру прямого их перечисления.

По анализу схемы предлагается получить результаты по тем же направлениям для схемы случайных подстановок с ограниченным сверху той же константой S РАССЕЯНИЕМ (рассмотренной в [5]), под которым в матричной записи подстановки понимается максимальная абсолютная разность между элементами ее столбцов, или в записи последовательных отображений в каждом ее цикле в виде изучаемых здесь размещений со степами с данным ограничением.

1. Вид исходов, число исходов схемы и их прямое перечисление

Все исходы схемы отличаются друг от друга составом и порядком выбранных r из n элементов с заданным ограничением на степы и задаются, как и в общей схеме размещений [3], наборами номеров выбранных r из n элементов в полученном порядке $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_r)$.

Заметим, что при ограниченном числом S размахе R выборки исходов в соответствующей схеме сочетаний все перестановки их элементов дают часть требуемых исходов нашей схемы. Остальные же ее исходы получаются из исходов схемы сочетаний с $R > S$ из диапазона

$$S < R \leqslant min((r-1)S, n-1) = L \qquad (1)$$

его значений для возможности реализации нашей схемы допустимой (с точки зрения данного ограничения в ней) перестановкой их элементов, каждый из которых определяется соответствующим конкретным исходом схемы сочетаний.

Прямое перечисление исходов нашей схемы производим в ДВА ЭТАПА: на ПЕРВОМ этапе перечисляем все исходы схемы сочетаний с ограниченным размахом S, изученной в [4], с полученным там общим числом исходов

$$N(S) = C^r_{S+1} + (n - S - 1)C^{r-1}_S \qquad (2)$$

с $r!$ перестановками по [1] входящих в него номеров элементов (в результате получаем часть всех исходов нашей схемы), а на ВТОРОМ этапе строим остальные исходы нашей схемы из каждого исхода схемы сочетаний с $R > S$ из (1) $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_r)$, где $n_1 < \ldots < n_r$, $(n_1, \ldots, n_r) \in (1, 2, \ldots, n)$ с определенным ограничением на перестановки ее элементов. Для этого определяем выборку $(n_1, \ldots, n_k)$ максимальной длины k с размахом $\leqslant S$ и производим все $k!$ перестановок ее элементов. Оставшиеся элементы добавляем по одному в порядке их перечисления в исходе схемы сочетаний к исходам перестановок из первых k элементов (по правилам перечисления исходов перестановок [1]) с предварительным запретом не отвечающих требованию нашей схемы позиций добавляемого элемента относительно уже имеющихся в исходе.

Порядок нумерации исходов всех шагов описанного перечисления определяется соответствующими порядками исследованных перечислений исходов схем [2] и [1].

Из вышесказанного следует, что по способу перечисления и вычисления численностей частей исходов нашей схемы все их предсостояния – исходы схемы сочетаний, порождающие исходы нашей схемы, при определенной перестановке их элементов делятся на две части разного размаха выборки $R \leqslant S$ и $S < R \leqslant L$.

Для первой части предсостояний с $R \leqslant S$ процедура перечисления исходов нашей схемы дана выше, а число исходов

$$M_1 = (C^r_{S+1} + (n - S - 1)C^{r-1}_S)r!. \qquad (3)$$

Для анализа остальных исходов нашей схемы с предсостояниями с $S < R \leqslant L$ представим пошаговый АЛГОРИТМ 1 перечисления и числа исходов нашей схемы из ОДНОГО такого t-го предсостояния $t = \overline{1, N^{(*)}}$, соответствующего конкретному набору $\bar{n}$, где $N^{(*)}$ – число всех сочетаний с заданным диапазоном размаха и вычисляемое из равенства

$$N^{(*)} = N(L) - N(S). \qquad (4)$$

Шаги АЛГОРИТМА 1:

1) из $\bar{n}$ находим последовательность максимальной длины $n_1, \ldots, n_k$ с размахом $R \leqslant S$;

2) в результате п. 1) производим все перестановки по [1];

3) в каждом результате п. 2) отмечаем $*$ запретные места (ЗМ) добавления следующего i-го в порядке роста отброшенного в п. 1) элемента $i = \overline{k+1, r}$ и считаем их число (ЧЗМ) – Z_{ij}, т. е. ЧЗМ добавления i-го элемента в j-м исходе п. 2);

4) добавляем n_i всеми вариантами на все не ЗМ (левее, правее и между имеющимися) в п. 3);

5) заменяя результат п. 2) в п. 3) на результаты п. 4, производим выполнение п. 3 и п. 4 до достижения i значения r;

6) в результате п. 5) получаем все исходы нашей схемы (множество N_t), порожденные данным t-м исходом схемы сочетаний с данным ограничением и для всех $i = \overline{k+1, r}$ наборы чисел ЧЗМ $\bar{Z} = (Z_{i1}, \ldots, Z_{i\ r-k})$ или $\bar{a} = (a_{i1}, \ldots, a_{i\ r-k})$ – допустимых мест добавления элементов в п. 4), где $a_{ij} = k + i - Z_{ij}$.

(Виды этих исходов нашей схемы зависят от ЗМ добавлений среди предшествующих элементов исхода схемы сочетаний, а их численность – от числа ЗМ на каждом шаге добавлений до r элементов);

7) число исходов $N^{(t)}$ п. 6) считается по их перечислению или по очевидной формуле

$$N^{(t)} = \sum_{i=1}^{A_{r-k-1}} a_{r-k-1\ i}, \qquad (5)$$

где $A_i = \sum_{i=1}^{A_{i-1}} a_{iA_{i-1}}$ – число исходов нашей схемы из данного t-го предсостояния при i-м добавлении элемента (на i-м шаге, $A_0 = k!,\ A_{r-k} = N^{(t)}$).

Теперь представим АЛГОРИТМ 2 перечисления ВСЕХ исходов нашей схемы с вычислением их числа.

Шаги АЛГОРИТМА 2:

1) по [4] получаем все исходы схемы сочетаний из n по r с ограниченным размахом $R \leqslant (r-1)S$ численностью $N((r-1)S)$;

2) по [4] получаем все исходы схемы сочетаний из n по r с ограниченным размахом $R \leqslant S$ численностью $N(S)$;

3) в каждом результате п. 2) по [1] производим все $r!$ перестановок входящих в него элементов, объединяя которые, получаем первую часть исходов нашей схемы и по (3) ее численность M_1;

4) по результатам п. 1 и п. 2 (вычитанием множеств) получаем остальные исходы схемы сочетаний с $S < R \leqslant (r-1)S$ в количестве $N^{(*)}$ по (3), называемые далее исходами схемы;

5) для каждого t-го исхода п. 4) по АЛГОРИТМУ 1 находим все N_t порожденные им исходы нашей схемы и по (5) их численность $N^{(t)}$;

6) объединяя множества N_t по всем $t = \overline{1, N^{(*)}}$, получаем все исходы второй части исходов нашей схемы численностью

$$M_2 = \sum_{t=1}^{N^{(*)}} N^{(t)}; \qquad (6)$$

7) объединяя множества исходов пп. 3) и 6) и суммируя их численности, получаем перечисление всех исходов нашей схемы численностью $N = M_1 + M_2$.

Продемонстрируем работу алгоритмов перечисления исходов и определения числа исходов нашей схемы на числовых примерах.

Пример 1. Пусть $n = 5,\ r = 3,\ S = 2$.

Все исходы схемы сочетаний имеют размах $R \leqslant 2$ по [4] или визуальным перебором из номеров 1, 2, 3, 4, 5 легко перечисляются и есть 123, 124, 134, 135, 234, 235, 245, 345. Из них исходы 123, 234 и 345 имеют разброс $R = S = 2$, остальные – $R > 2$. Поэтому первая часть исходов нашей схемы получается из всех перестановок $3! = 6$ трех цифр исходов 123, 234, 345 по [1]: 321, 231, 213, 312, 132, 123; 432, 342, 324, 423, 243, 234; 543, 453, 435, 534, 354, 345 и $M_1 = 18$.

Вторая часть исходов получается по АЛГОРИТМУ 1 из остальных пяти исходов схемы сочетаний 124, 134, 135, 235, 245. Для примера подробно рассмотрим исход 124 по шагам алгоритма (при $t = 1$): 1) $k = 2$; 2) 21; 12; 3) 2*1*; *1*2; 4)–6) 421; 124; $Z_{11} = Z_{12} = 2; a_{11} = a_{12} = 1$; 7) $N^{(1)} = a_{11} + a_{12} = 2$. Аналогичные вычисления для остальных исходов приводят к результатам исходов нашей схемы 431, 134; 531, 135; 542, 245; 532, 235 соответственно численностями $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = N^{(5)} = 2$ – всего $M_2 = 10$. Отсюда по АЛГОРИТМУ 2 объединением исходов первой и второй частей получаем все исходы нашей схемы в количестве $N = 18 + 10 = 28$.

Проиллюстрируем работу алгоритмов графом перечисления исходов схемы примера 1 на рисунке 1.

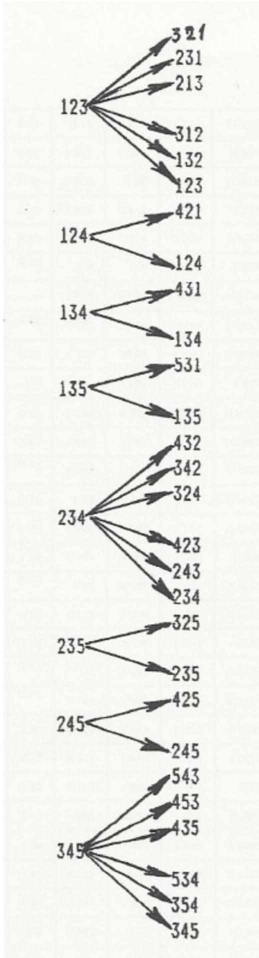

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы в примере 1

Пример 2. Пусть $n = 5,\ r = 4,\ S = 2.$

Все исходы схемы сочетаний с размахом $R > 2$ по [4] или визуальным перебором из номеров 1, 2, 3, 4, 5 легко перечисляются и есть 1234, 1235, 1245, 2345, 1345. Из них исходы 1234, 2345 имеют размах $R = S = 3$, остальные – $R = 4$, т. е. все исходы имеют размах $R > S$, поэтому первой части исходов нашей схемы нет и $M_1 = 0$.

Вторая часть исходов получается по АЛГОРИТМУ 1 из всех пяти перечисленных выше исходов схемы сочетаний. Для примера подробно рассмотрим один из них, 1234, при $t = 1$: 1) $k = 3$; 2) 321, 231, 213, 312, 132, 123; 3) 32*1*, 23*1*, 2*1*3, 3*1*2, *1*32, *1*23; 4)–6) 4321, 3421; 4231, 2431; 4213, 2143; 4312, 3124; 1342, 1324; 1243, 1234; $Z_{11} = Z_{12} = Z_{13} = Z_{14} = Z_{15} = Z_{16} = 2$; $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = 2$; 7) $N_1 = 12$ (рис. 2.).

Представим это в виде фрагмента общего графа перечисления исходов из данного предсостояния.

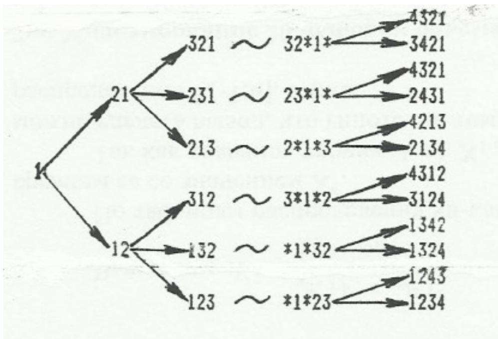

Рис. 2. Фрагмент графа перечисления исходов схемы в примере 2

Аналогичные вычисления для остальных исходов (предсостояний) приводят к получению видов исходов нашей схемы с определением их численностей и суммарной численностью M_2, которые совпадают (т. к. $M_1 = 0$) со всеми исходами нашей схемы в количестве $N = M_2$.

2. Задача нумерации (ЗН)

Установление полноты перебора всех исходов схемы и удобство дальнейшего ее использования требует решения прямой и обратной ЗН, т. е. нахождения взаимно-однозначного соответствия видов исходов схемы R^* и их номеров N^*. Далее для краткости под элементами будем понимать их номера.

Решение ЗН будет следовать из процедуры перечисления и порядка нумерации исходов схемы по данным в п. 1 этапам соответственно с $R \leqslant S$ и $S < R \leqslant (r-1)S$ для предсостояний исходов нашей схемы.

Для первого этапа ЗН решим аналитически, а для второго этапа с громоздко формализуемыми закономерностями будем считать ЗН алгоритмически решенной найденным в п. 1 табличным соответствием видов и номеров исходов схемы при их перечислении. Поэтому нижеследующее решение ЗН будет относиться к исходам первого этапа перечисления исходов нашей схемы. Перечисление его исходов производим (по п. 1) ДВУМЯ последовательными ДЕЙСТВИЯМИ: перечислением всех $N(S)$ исходов схемы сочетаний с $R \leqslant S$ и $r!$ перестановками элементов в них, исследованных в работах [4] и [1] с аналитически решенной для них ЗН, на результаты которой и будем ссылаться с обозначениями через R_1^* и N_1^*, соответствующие видам и исходам первого действия, а через $R_2^* = R^*$ и N_2^* – второго действия.

В прямой ЗН для схемы требуется по данному номеру N^* исхода схемы найти его вид $R^* = (a_1, \dots, a_r)$.

Шаги решения:

1)

$$N_1^* = \left[\frac{N^* + r! - 1}{r!}\right];$$

2) по решенной прямой ЗН в [4] из N_1^* получаем R_1^*;

3) $j = N^* mod\, r!$; $N_2^* = j + C_{n-j}^n r!$, (здесь N_2^* – номер исхода в пучке в схеме перестановок элементов $a_1, \dots, a_r$);

4) по решенной прямой ЗН в [1] из N_2^* получаем стандартный вид перестановки из r элемента с нумерацией подряд от 1 $R_s = (a_{(1)}, \dots, a_{(r)})$, т. е. $a_{(i)}$ задает место элемента a_i в R^*;

5) из R_s получаем $R^* = (a_1, \dots, a_r)$, где искомый вид исхода пересчитывается из R_1^*, полученной в 1) с перестановкой ее элементов по R_s из 4).

Для иллюстрации работы алгоритма решения прямой задачи по данным шагам приведем числовой пример.

Пример 3. Пусть $n = 5,\ r = 3,\ S = 3$ и требуется найти вид исхода схемы R^* с номером $N^* = 16$. Для наглядности и визуальной проверки решения ЗН приведем граф перечисления исходов схемы в данном примере.

По графу для исхода схемы с номером 16 получаем вид $R^* = (413)$. Теперь найдем R^* по алгоритму.

Решение по шагам алгоритма:

1) $N_1^* = [(16 + 3! - 1)/3!] = 3$;

2) $N_1^* = 3 \Rightarrow R_1^* = (134)$;

3) $j = 16 mod\ 6 = 4$; $N_2^* = 4 + C_{n-4}^n 3! = 4$;

4) $N_2^* = 4 \Rightarrow R_s = (312)$;

5) из R_1^* и $R_s \Rightarrow R^* = (413)$, что совпало с результатом по рисунку 3.

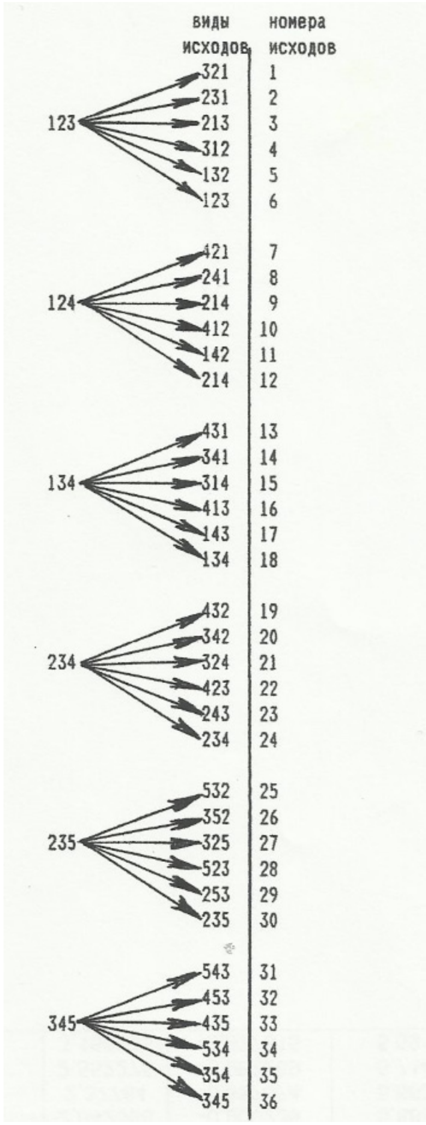

Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы в примере 3

В обратной ЗН для схемы требуется по данному исходу $R^* = (a_1, \dots, a_r)$ найти его номер N^*.

Шаги решения:

1) из данного вида исхода R^*, упорядочив элементы по возрастанию, получим R_1^*;

2) по решенной обратной ЗН в [4] из R_1^* получим N_1^*;

3) заменив элементы номерами их порядковых статистик среди чисел $a_1, \dots, a_r$, получим R_s;

4) по решенной обратной ЗН в [1] из R_s получаем N_2^* – номер исхода в пучке перестановок;

5) тогда в соответствии с процедурой перечисления исходов схемы $N^* = (N_1^* - 1)r! + N_2^*$.

Для наглядности работы алгоритма решения обратной задачи по данным шагам приведем числовой пример.

Пример 4. Пусть, как в примере 3, $n = 5$, $r = 3$, $S = 3$ и требуется найти номер N^* исхода схемы вида R^*.

По графу (рисунок 3) для исхода схемы с номером 16 получаем вид $R^* = (413)$. Теперь найдем N^* по алгоритму.

Решение по шагам алгоритма:

1) $R^* \Rightarrow R_1^* = (134)$;

2) $R_1^* \Rightarrow N_1^* = 3$;

3) $R^* \Rightarrow R_s = (312)$;

4) $R_s = R_2^* \Rightarrow N_2^* = 4$;

5) $N^* = (3-1)3! + 4 = 16$, что совпало с результатом по рисунку 3.

3. Вероятностное распределение исходов схемы

В силу равновероятности исходов схем сочетаний и перестановок, представляющих этапы прямого перечисления исходов нашей схемы, вероятностное распределение ее исходов будет тоже равновероятным с вероятностью каждого исхода $p = 1/N$, где число $N = M_1 + M_2$ (M_1 дано в (3), а M_2 определено перечислением второй части исходов схемы), а вероятность первой части среди всех исходов схемы есть $p_1 = M_1/N$.

4. Моделирования исхода схемы

Число первой части исходов схемы M_1 дано в (3), а число второй части M_2 находится по их перечислению, т. е. известно общее число исходов схемы N. Тогда с вероятностью p_1 сначала разыгрываем часть, к которой относится исход схемы, а далее производим «быстрое» моделирование исхода по результатам решения прямой ЗН соответствующей части исходов (аналитическое для первой части и табличное – для второй) путем разыгрывания случайного номера данной части исходов по одному случайному числу с известным из п. 3 распределением методом маркировки (см. [6]).

5. Приближенное оценивание числа исходов схемы

Моделируем по [6] или [3] большое число N_A исходов схемы размещений из n различимых элементов по r с учетом их порядка из A_n^r. Для каждого исхода вычисляем его степ и определяем среди смоделированных число M исходов со степами $< S$. Тогда искомое число исходов нашей схемы приближенно определяется методом пропорций по формуле

$$N \approx \frac{MA_n^r}{N_A}.$$

6. Использование результатов исследования схемы для анализа рассеяния подстановок

При непосредственном исследовании рассеяния случайных подстановок в [5] была построена процедура прямого перечисления исходов, выявлены закономерности, принципиально позволяющие выписывать аналитическую формулу числа исходов схемы и проводить исследования по направлениям, определенным для основной рассматриваемой здесь схемы. Однако формула для числа исходов схемы оказалась достаточно громоздкой для удобства ее практического использования при растущих параметрах схемы. Поэтому в [5] для основного вопроса исследования о числе исходов схемы аналитические формулы выписаны для нескольких небольших значений параметров и для его нахождения и решения ЗН построен численный алгоритм. Оказалось, что исследованная здесь схема дает возможность проще получать отдельные результаты анализа подстановок:

1) при $n = r$ в нашей схеме в интерпретации последовательных отображений в подстановке все результаты нашей схемы переносятся на все одноцикловые подстановки размера n с рассеянием, ограниченным числом S;

2) при любых заданных составах циклов подстановки можно перечислить все порядки отображений в них с требуемыми ограничениями на рассеяния в циклах, совпадающими с допустимыми условиями (1) на степы;

3) если в п. 2) в ограничениях сверху на рассеяния во всех циклах есть общие значения, то максимальное среди них даст значение рассеяния подстановки.

Литература

1. *Колчин А. В., Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 80–86.

2. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 9. С. 33–38.

3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы размещений // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 34–39.

4. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 10. С. 28–31.

5. *Энатская Н. Ю.* Анализ случайных подстановок фиксированного размера с ограниченным рассеянием // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 7. С. 32–36.

6. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. С. 185.

Поступила в редакцию 27.12.2016

References

1. *Kolchin A. V., Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. *Trudy KarNTs RAN* [*Trans. KarRC RAS*]. 2014. No. 4. P. 80–86.

2. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [The analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [*Industrial ACS and Controllers*]. 2015. No. 9. P. 33–38.

3. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy razmeshchenii [Combinatorial analysis of an allocation scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [*Industrial ACS and Controllers*]. 2015. No. 8. P. 34–39.

4. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s ogranichennym razmakhom [The analysis of the combination scheme with a limited range]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [*Industrial ACS and Controllers*]. 2015. No. 10. P. 28–31.

5. *Enatskaya N. Yu.* Analiz sluchajnykh podstanovok fiksirovannogo razmera s ogranichennym rassejaniem [The Analysis of Random Permutations of a Fixed Size with a Limited Dispersion)]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [*Industrial ACS and Controllers*]. 2016. No. 7. P. 32–36.

6. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. P. 185.

Received December 27, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345