Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2017. С. 86–93
DOI: 10.17076/mat562

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ДОМИНО И СЛУЧАЙ ФИКСИРОВАННОЙ МИНИМАЛЬНОЙ ЦИФРЫ НА ФИШКЕ ДОМИНО

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Определяется схема домино как схема случайного заполнения фишки обобщенного домино с r концами и n цифрами от 0 до $n-1$ на концах фишек всех возможных составов с повторениями без учета их порядка. Проводится исследование этой схемы и аналогичной с фиксированной минимальной цифрой $\geqslant m$ в исходе случайного выбора фишки из полного набора домино по следующим направлениям перечислительной комбинаторики: построения процедуры перечисления нумерованных исходов схемы, определения их числа, решения для них задачи нумерации (т. е. установления взаимно-однозначного соответствия между номерами и видами исходов схемы), нахождения их вероятностного распределения и моделирования возможных исходов.

Ключевые слова: схема сочетаний с повторением; минимальная цифра; схема домино; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE DOMINOES SCHEME AND THE CASE OF FIXED MINIMAL FIGURE ON A DOMINO TILE

The dominoes scheme is defined as a scheme of random tiling with poliomino tiles with r ends and n figures from 0 to $(n-1)$ on the ends of tiles of all possible compositions with repetitions, regardless of their order. This scheme is studied, together with an analogous one, with a fixed minimal figure $r \geqslant m$ at the outcome of a random choice of a tile from a complete domino set, using the following ways of enumerative combinatorics: design of the enumeration procedure for the numbered outcomes of the scheme, determination of their number, solution of the corresponding numeration problem (i.e. establishment of one-to-one correspondence between numbers and types of the outcomes of the scheme), finding of their probabilistic distribution and modeling of their possible outcomes.

Keywords: scheme of combinations with repetitions; minimal figure; dominoes scheme; modeling.

Введение

Рассматривается два подхода к анализу схемы домино на основе прямого непосредственного перечисления ее исходов или с пересчетом результатов исследования в [8] схемы сочетаний. Схема домино с данным выше ограничением изучается по тем же, указанным в аннотации, направлениям с использованием результатов схемы домино без ограничений.

В исследованиях используются результаты анализа схемы сочетаний и изучается связанная с ней схема сочетаний с повторением. Схема сочетаний возникает при выборе r элементов из n различимых элементов без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц не более чем по одной по n различимым ячейкам и является одной из наиболее распространенных комбинаторных схем, широко используемой в теории и практике (см. [1]–[7]). Например, интерпретация размещения частиц по ячейкам схемы сочетаний используется в статистике Ферми – Дирака [6], а при неограниченном числе частиц в ячейке – в статистике Бозе – Эйнштейна и является в этом случае схемой сочетаний с повторениями.

Схема сочетаний участвует во многих важных распространенных математических формулах: биноме Ньютона, биномиальной схеме и биномиальном распределении вероятностей, в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем и т. д.

Число исходов схемы сочетаний есть $C_n^r = n!/r!(n-r)!$. (В схеме сочетаний с повторениями число исходов – C_{n+r-1}^r).

Свойства сочетаний подробно рассмотрены, например, в [6].

Производящие функции последовательности чисел C_n^r и C_{n+r-1}^r приведены в [2] и [6]:

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r = (1+x)^n;$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r x^r = (1-x)^{-n}.$$

Моделирование исходов схемы сочетаний приведено в [7].

В [8] проведены исследования схемы сочетаний по указанным в аннотации для схемы сочетаний с повторением направлениям методом графов на основе визуального перечисления всех ее исходов с возможностями учета различных ограничений в ней.

Схема сочетаний с повторением с параметрами n и r известна в двух интерпретациях (в терминах выбора и размещений): это – 1) число различных выборов из n различимых (нумерованных) элементов по r с возвращением и без учета их порядка или – 2) число размещений r неразличимых шаров по n различимым ящикам. Число исходов схемы $N^*(n,r)$ известно и равно C_{n+r-1}^r. В случае $r \geqslant n$ число исходов схемы выбора, в которых присутствуют все n элементов, или в схеме размещений шаров по ячейкам – число описанных размещений по ящикам без пустых ящиков есть C_{r-1}^{n-1}.

Предложим еще одну наглядную интерпретацию схемы – 3) это заполнение фишек (обобщенного) домино, использующего n цифр с r концами, заполняемыми по правилам обычного традиционного домино, т. е. всеми комбинациями r из n данных цифр с возможными их повторениями. Будем считать имеющими значение только составы цифр на фишках домино, но не их порядок. Поэтому для удобства сравнения фишек будем задавать их форму в виде звездочек, на концах которых стоят цифры, и располагать их в порядке возрастания по часовой стрелке. Тогда число фишек домино есть C_{n+r-1}^r, а при $r \geqslant n$ число фишек, содержащих все n цифр, есть C_{r-1}^{n-1}.

Введем обозначения для вида исхода схемы. Так как порядок элементов в исходе схемы (фишке домино) не имеет значения, для стандартности и удобства сравнения будем представлять его в виде вектора с компонентами выбранных r цифр на фишке домино в неубывающем порядке $R^{(r)} = (a_1, \ldots, a_r)$, определяемом соответствующим вектором номеров исходов в пучках графа их перечисления $\bar{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$. (Используемые в домино цифры идут подряд, начиная с нуля.) Размером фишки домино будем считать число ее концов.

Будем проводить намеченные исследования в терминах «домино» двумя способами: непосредственным анализом ее исходов или с использованием соответствующих результатов из [8] для схемы сочетаний.

1. Непосредственный анализ схемы домино

1.1. Перечисление исходов схемы домино

Для наглядности графом перечисления всех фишек домино представим пошаговую процедуру последовательного поединичного увеличения числа их концов от 1 до заданного значения r, нумеруя исходы в порядке роста чисел A, описывающих фишки домино промежуточных размеров с фиксацией на первом шаге значений минимальных цифр на них и с последующим равновероятным добавлением на каждом шаге всех возможных допустимых цифр, не меняющих ранее установленных минимумов.

Приведем примеры построения графов перечисления фишек домино.

Пример 1. а) $n = 7, r = 2$ (традиционное домино);

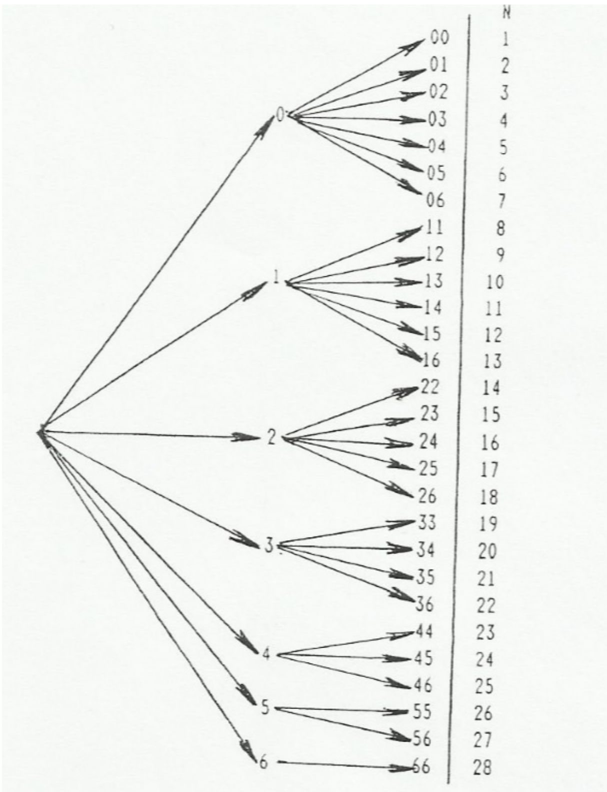

Рис. 1. Граф перечисления фишек домино ($n = 7$, $r = 2$)

б) $n = 4$, $r = 3$.

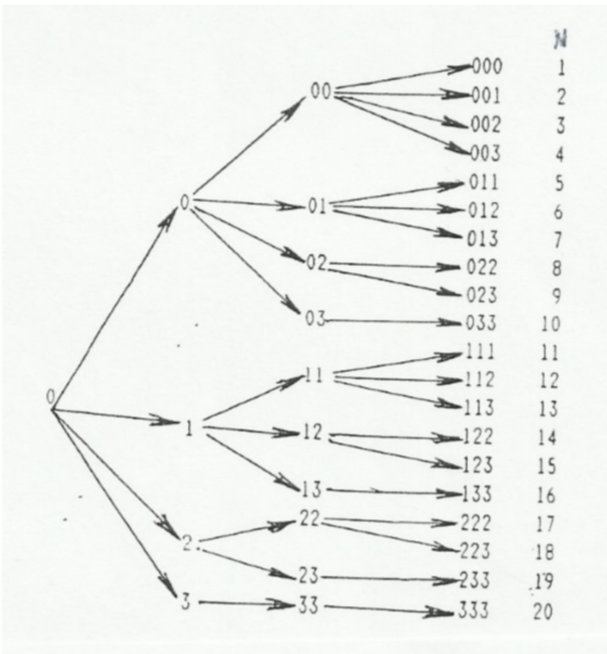

Рис. 2. Граф перечисления фишек домино ($n = 4$, $r = 3$)

1.2. Структура графа перечисления исходов схемы домино

Исследование пучковой структуры графа потребуется для проведения дальнейших, определенных в аннотации направлений прямого анализа схемы домино или схемы сочетаний с повторением без ссылок на результаты аналогичных исследований схемы сочетаний в [8].

Назовем число исходов из одного состояния в графе размером пучка, а численности совокупностей исходов подряд идущих пучков размерами, убывающими до 1, – монотонным участком размером общего числа входящих в него исходов. Тогда в этих терминах на основе визуального анализа приведенных на рисунках 1 и 2 графов перечисления исходов схемы с конкретными числовыми параметрами опишем закономерности его структуры:

1) общее число исходов схемы на i-м шаге ($i = \overline{1, r}$) равно C^i_{n+i-1};

2) число пучков на i-м шаге равно числу исходов на $(i-1)$-м шаге и равно C^{i-1}_{n+i-2};

3) число монотонных участков на i-м шаге равно числу пучков на $(i-1)$-м шаге и равно C^{i-2}_{n+i-3};

4) размеры первых монотонных участков на любом шаге $i \geqslant 2$ совпадают с общим числом исходов 2-го шага C^2_{n+2-1};

5) размеры пучков на каждом участке монотонности убывают на 1 до 1.

6) добавленные элементы исходов пучка на i-м шаге размера t_i, $i = \overline{1, r}$, $t_i = \overline{1, n}$ начинаются с исхода $(n - t_i)$ и поединично возрастают в пучке до $(n-1)$;

7) добавленный элемент исхода a_i в пучке размером t_i на i-м шаге определяется его номером в пучке n_i по формуле

$$a_i = (n - t_i) + n_i - 1; \tag{1}$$

8) номер исхода n_i в пучке размером t_i на i-м шаге определяется видом исхода a_i по формуле

$$n_i = a_i - (n - t_i) + 1. \tag{2}$$

Обозначим число исходов схемы на i-м шаге C^i_{n+i-1} через $N^*(n, i)$, $N^*(1, i) = 1$. Тогда по графам на рисунках 1 и 2 очевидно равенство

$$N^*(n, i) = N^*(n, i-1) + N^*(n-1, i-1) +$$
$$+ N^*(n-2, i-1) + \cdots + 1,$$

откуда следует рекуррентная формула для сочетаний

$$C^i_{n+i-1} = C^{i-1}_{n+i-1} + C^{i-1}_{n+i-2} + \cdots + 1, \tag{3}$$

в которой левая часть задает общее число исходов схемы на i-м шаге ($i > 1$), а слагаемые правой части задают численности исходов за $(i-1)$ шагов с поединично возрастающими от 0 до $(n-1)$ фиксированными минимальными цифрами домино на первом шаге. Причем при $(i-1)=1$ в качестве слагаемых в правой части (3) получаем размеры пучков. Таким образом, по рекурренте (3), представив число исходов на i-м шаге C^{i}_{n+i-1} последовательными итерациями через сумму сочетаний с единичным верхним индексом, получим в качестве пучковой структуры графа перечисления исходов схемы перечень последовательных слагаемых правой части (3).

Обозначив пучковую структуру графа на i-м шаге через $K_i=(k^{(i)}_1,\ldots,k_{N^*(n,i-1)})$, где в круглых скобках перечислены размеры последовательных в порядке перечисления пучков на i-м шаге, на основании (3) можно получать пучковую структуру графа перечисления исходов схемы по очевидному размеру пучка первого шага, равному $C^1_{n+1-1}=n=N^*(n,1)$, откуда $K_1=(n)$; на втором шаге $C^2_{n+2-1}=C^2_{n+1}=C^1_n+C^1_{n-1}+\cdots+1=n+(n-1)+\cdots+1$, откуда $K_2=(n,n-1,\ldots,1)$; на третьем шаге $C^3_{n+3-1}=C^2_{n+2-1}+C^2_{n+1-1}+\ldots+1=((n+1)+n+\ldots+1)+(n+(n-1)+\ldots+1)+\ldots+(2+1)+(1)$, откуда $K_3=(n+1,n,\ldots,1,n,n-1,\ldots,1,\ldots),2,1)$ и т. д. Покажем это в условиях примера 1б.

Пример 2. Пусть $n=4,\ r=3$, см. рисунок 2 по (3).

$N^*(4,1)=4$, откуда $K_1=(4)$;

$N^*(n,2)=C^2_{4+2-1}=C^2_5=C^1_4+C^1_3+C^1_2+C^1_1=4+3+2+1$, откуда $K_2=(4,3,2,1)$;

$N^*(n,3)=C^3_{4+3-1}=C^3_6=C^2_5+C^2_4+C^2_3+C^2_2=(C^1_4+C^1_3+C^1_2+C^1_1)+(C^1_3+C^1_2+C^1_1)+(C^1_2+C^1_1)+C^1_1=(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1$, откуда $K_3=(4,3,2,1,3,2,1,2,1,1)$, что совпадает с результатами на рисунке 2.

1.3. Задача нумерации для исходов схемы

На основании п. 1.2 будем считать пучковую структуру K_i на i-м шаге $(i=\overline{1,r})$ графа известной.

Прямая задача нумерации

Даны параметры схемы n и r. Требуется по номеру $N=N^{(r)}$ исхода схемы в порядке, принятом в п. 1, найти вид исхода $R^{(r)}=(a_1,\ldots,a_r)$ – цифр на фишке домино.

Решение. Будем определять искомый вид исхода через форму $\bar{n}=(n_1,\ldots,n_r)$, которая задает в качестве компонент номера исходов в пучках последовательных предсостояний, приводящих к итоговому исходу с заданным номером. Для дальнейшего введем обозначение $N^{(i)}$ – номер исхода в траектории T на i-м шаге графа, приводящей из начального состояния незаполненной фишки домино к состоянию полного заполнения всех r ее концов. Тогда заданный номер $N=N^{(r)}$, а траекторию T можно задавать еще и в виде $T=(N^{(1)},\ldots,N^{(r)})$.

Задача нахождения вида исхода по его номеру существенно опирается на пучковую структуру исходов K_i.

Вид исхода $\bar{n}$ будем находить покомпонентно от n_r до n_1. Из приведенных в п. 1.2 закономерностей пучковой структуры графа следует, что

$$n_r=N^{(r)}-max_{s_r}S:\left\{S=\sum_{j=1}^{s_r}k^{(r)}_j<N^{(r)}\right\}.$$

Тогда $N^{(r-1)}=s_r+1$, как номер пучка на r-м шаге графа или исхода на $(r-1)$-м шаге графа, содержащегося в траектории T. Отсюда по пучковой структуре графа K_{r-1} аналогично получаем, что

$$n_{r-1}=N^{(r-1)}-max_{s_{r-1}}S:$$
$$:\left\{S=\sum_{j=1}^{s_{r-1}}k^{(r-1)}_j<N^{(r-1)}\right\}.$$

Аналогичным рассуждением досчитываем $\bar{n}$ до компоненты n_2, принадлежащей единственному пучку графа на втором шаге размера 2, а, очевидно, $n_1=1$ всегда.

Теперь на основании выше приведенных рассуждений можем выписать общую формулу для нахождения компоненты n_i искомого вектора $\bar{n}$ по пучковым структурам графа:

$$n_i=N^{(i)}-max_{s_i}S:\left\{S=\sum_{j=1}^{s_i}k^{(i)}_j<N^{(i)}\right\},\tag{4}$$

где $N^{(i)}=s_{i+1}+1$.

Далее по (1) п. 1.2 находим вид исхода $R^{(r)}=(a_1,\ldots,a_r)$, где

$$t_i=k^{(i)}_{N^{(i-1)}}.\tag{5}$$

Покажем порядок вычислений при решении прямой задачи нумерации на числовом примере.

Пример 3. Пусть $n=4,\ r=3$ и номер исхода схемы $N=N^{(3)}=15$. Требуется найти вид исхода схемы $R^{(3)}=(a_1,a_2,a_3)$.

Приведем по шагам полученные в примере 2 при тех же параметрах пучковые структуры графа до $r=3$:

$$K_1=(4),\ K_2=(4,3,2,1),$$

$$K_3 = (4,3,2,1,3,2,1,2,1,1). \qquad (6)$$

По (4) $n_3 = 15-(4+3+2+1+3) = 2$, откуда $s_3 = 5,\ N^{(2)} = 6$;

$n_2 = 6-4 = 2$, откуда $s_2 = 1,\ N^{(1)} = 2$;

$n_1 = 2-0 = 2$, откуда $s_1 = 0,\ N^{(0)} = 1$.

Далее по (5) и (6) находим $t_1 = 4; t_2 = 3; t_3 = 2$, подставляя значения которых в (1), вычисляем компоненты вектора искомого вида исхода:

$a_1 = (4-4)+2-1 = 1; a_2 = (4-3)+2-1 = 2; a_3 = (4-2)+2-1 = 3$, откуда $R^{(3)} = (1,2,3)$, что совпадает с результатом на рисунке 2.

Обратная задача нумерации

Даны параметры схемы n и r. Требуется по данному виду исхода схемы $R^{(r)}$ найти его номер $N^{(r)}$ в принятом в п. 2 порядке нумерации исходов при известной пучковой структуре графа $K_i, i = \overline{1,r}$.

Решение.

Будем, начиная с 1-го шага, по (2) из $R^{(r)} = (a_1,\dots,a_r)$ находить компоненты вектора номеров предшествующих исходов в пучках графа перечисления исходов схемы $\bar{n} = (n_1,\dots,n_r)$ и их номеров по шагам перечисления $N^{(1)},\dots,N^{(r)}$ по формуле для i-го шага $(i = 1,2,\dots,r)$.

При $i = 1$ $n_1 = 1$ всегда, откуда $N^{(1)} = a_1+1$; для $i > 1$ получаем

$$N^{(i)} = \sum_{j=1}^{N^{(i-1)}-1} k_j^{(i)} + n_i, \qquad (7)$$

следующей из структуры графа. Тогда при $i = r$ по (7) получим искомый результат.

Покажем порядок вычислений при решении обратной задачи нумерации на числовом примере.

Пример 4. Пусть $n = 4,\ r = 3$ и вид исхода схемы $R^{(3)} = (1,2,3)$. Требуется найти номер исхода схемы $N^{(3)}$.

Приведем по шагам полученные в примере 2 при тех же параметрах пучковые структуры графа до $r = 3$:

$$K_1 = (4),\ K_2 = (4,3,2,1),$$

$$K_3 = (4,3,2,1,3,2,1,2,1,1).$$

Далее по (2) и (7) получаем

$n_1 = 1$, откуда $N^{(1)} = 2;\ k_2^{(2)} = 3$ из K_2;

$n_2 = 2-(4-3)+1 = 2$, откуда $N^{(2)} = 4+2 = 6;\ k_6^{(3)} = 2$ из K_3;

$n_3 = 3-(4-2)+1 = 2$, откуда $N^{(3)} = (4+3+2+1+3)+2 = 15$, что совпадает с результатом на рисунке 2.

Замечание 1. В частности, для традиционного домино при $r = 2$ с n цифрами в отличие от приведенного здесь рекуррентного результата задачи нумерации найдены явные формулы ее решения в прямой и обратной постановках, т. е. для соответствия вида $R^{(2)} = R(a,b)$ исхода и его номера $N = N^{(2)}$:

$$a = min\ r : \left\{\sum_{j=0}^{r}(n-j) \geqslant N\right\};$$

$$b = a + \left\{N - \sum_{j=0}^{a-1}(n-j) - 1\right\}$$

для прямой задачи нумерации и

$$N = \sum_{j=0}^{a-1}(n-j) + (b-a+1)$$

для обратной задачи нумерации.

1.4. Моделирование исходов схемы домино (схемы сочетаний с повторением)

В условиях решенной прямой задачи нумерации для исходов схемы при очевидной их равновероятности предлагается проводить «быстрое» моделирование ее исходов путем равновероятного разыгрывания их номеров, каждого по одному случайному числу.

2. Анализ схемы домино – схемы сочетаний с повторением на основе анализа схемы сочетаний

В [8] для схемы сочетаний перечислены все ее исходы, решена задача нумерации и построено моделирование исходов схемы. Используя связь схем сочетаний, сочетаний с повторением и домино, будем проводить все исследования в схеме домино путем пересчета из аналогичных результатов первых двух схем.

2.1. О пересчете видов исходов схем сочетаний, сочетаний с повторением и домино и перечисление исходов схемы домино

По логике исследования схемы домино с использованием первых двух схем ее исход может быть последовательно получен в видах исходов этих вспомогательных схем: сначала в виде $R = (v_1,\dots,v_r)$ одного из $C^r_{n+r-1}C^r_{n^*}$ выборов r элементов из n^* схемы сочетаний, потом пересчитан в виде $R^{(n)} = (b_1,\dots,b_n)$ уровней заполнения n ячеек схемы сочетаний с повторением при размещении r неразличимых частиц по n различимым ячейкам и, наконец, в виде $R^{(r)} = (a_1, \ldots, a_r)$ исхода заполнения фишки домино с r концами n цифрами от 0 до $(n-1)$ в возрастающем по часовой стрелке порядке.

Исходя из связи интерпретаций этих трех схем для пересчета их видов исходов, получаем следующие правила:

ПРАВИЛО 1 (перевода вида исхода схемы сочетаний R в вид исхода схемы сочетаний с повторением $R^{(n)}$) – **невыбранные в R цифры в порядке их роста с краев заменяются нулями, а не с краев – числом нулей, на 1 меньшим их числа, а выбранные подряд цифры – их числом** – получаем вид $R^{(n)}$;

ПРАВИЛО 2 (перевода вида исхода схемы сочетаний с повторением $R^{(n)}$ в вид исхода схемы домино $R^{(r)}$) – **по каждой j-й ненулевой компоненте b_j, $j = \overline{1,n}$, в векторы $R^{(n)}$ выписываются b_j одинаковых чисел, равных** $(j-1)$ (очевидно, $\sum_{j=1}^{n} b_j = r$) – получаем вид $R^{(r)}$.

Замечание 2. Оказывается, что можно пересчитывать вид R исхода схемы сочетаний непосредственно в исход схемы домино $R^{(r)}$ без получения промежуточного вида $R^{(n)}$ схемы сочетаний с повторением по формуле $a_i = v_i - i$. Назовем это ПРАВИЛОМ 3, которое дает более быстрый пересчет исходов схем.

В [8] методом графов построена процедура перечисления исходов схемы сочетаний, пусть это параметры $n^* = (n+r-1)$ и r. Заменяя виды всех ее промежуточных и итоговых исходов на соответствующие исходы схемы домино, получаем граф перечисления ее исходов. Таким образом, задача перечисления исходов в схеме домино сводится к пересчету видов исходов схемы сочетаний с определенными параметрами к виду исходов схемы домино.

Покажем на примере пересчет исхода R в искомый исход $R^{(r)}$.

Пример 5. Пусть $n = 5$, $r = 4$. Отсюда $n^* = 8$ и пусть $R = (2, 3, 6, 7)$. Тогда по ПРАВИЛУ 1 $R^{(n)} = (0, 2, 0, 2, 0)$, а по ПРАВИЛУ 2 получаем $R^{(r)} = (1, 1, 3, 3)$ – цифры на концах фишки домино.

Такой же результат получаем и по ПРАВИЛУ 3, т. к. $a_1 = 2 - 1 = 1$, $a_2 = 3 - 2 = 1$, $a_3 = 6 - 3 = 3$, $a_4 = 7 - 4 = 3$.

2.2. Задача нумерации для исходов схем сочетаний с повторением и домино

В [8] решена задача нумерации для исходов схемы сочетаний в прямой и обратной постановках. Для перенесения этих результатов на схемы сочетаний с повторением и домино нужно только в них параметр схемы сочетаний n заменить на определенный в п. 2.1 n^* и все виды исходов схемы сочетаний пересчитать в них по п. 2.1 в виды исходов схемы сочетаний с повторением и схемы домино.

2.3. Моделирование исходов схемы сочетаний с повторением и схемы домино

В [8] предложены разные способы моделирования исходов схемы сочетаний, лучшим из которых в связи с решением для нее прямой задачи нумерации является «быстрое» моделирование. Все эти способы годятся и для схемы сочетаний с повторением с заменой параметра n в схеме сочетаний на определенный в п. 2.1 параметр n^*.

Замечание 3. Сравнение приведенных двух способов анализа схемы сочетаний с повторением не дает явного преимущества ни одному из них, т. к. оба способа приводят к результатам одного уровня, но первый способ более нагляден с точки зрения понимания структуры графа перечисления исходов схемы и дает готовые результаты, не требующие дополнительных пересчетов, хотя полученные формулы анализа схемы сочетаний с повторением несколько сложнее, чем для схемы сочетаний, а краткость приведенного второго способа анализа схемы по сравнению с первым подразумевает достаточно объемную работу по осмыслению и пересчету приведенных в [8] результатов для нашей схемы сочетаний с повторением в терминах обобщенного домино.

3. Анализ схемы домино с фиксированной минимальной цифрой на фишке

Пусть при прежних параметрах схемы n и r заданная минимальная цифра на фишке домино есть m. Будем анализировать схему по тем же направлениям, что и общую схему сочетаний с повторением с использованием полученных для нее результатов.

3.1 Число исходов и их перечисление в схеме домино с фиксированной минимальной цифрой на фишке

Как следует из пп. 2.1 и 2.2 число исходов и их перечисление в схемах перестановок с повторением и домино совпадают при аналогичных ограничениях, поэтому исследования будем проводить в терминах обеих схем, называя их схемой. Число исходов схемы

$$N_1^* = N^*(n-m, r) = C_{n+r-m-1}^{r}, \qquad (8)$$

они составляют часть подряд идущих исходов общей схемы сочетаний с повторением, которые, как видно из рисунков 1 и 2, имеют номера с W_1 до W_2 следующего вида:

$$W_1 = \sum_{j=0}^{m-1} N^*(n-1, r-j)+1 = \sum_{j=0}^{m-1} C_{n+r-j-2}^{r-m}+1; \tag{9}$$

$$W_2 = \sum_{j=0}^{m-1} N^*(n-1, r-m) = W_1+N_1^*-1. \tag{10}$$

Проверим эти формулы на численном примере.

Пример 6. Пусть, как в примере 1б, $n = 4, r = 3, m = 1$. Тогда по рисунку 2 $N_1^* = 6$, $W_1 = 11$, $W_2 = 16$. Вычислим эти значения по формулам (8)–(10):

$N_1^* = C_{4+3-1-2}^2 = C_4^2 = 6$; $W_1 = N^*(4-1, 3-1) = C_5^2+1 = 11$; $W_2 = 11+6-1 = 16$. Результаты совпали.

3.2. Задача нумерации для исходов схемы

Задача нумерации в прямой и обратной постановках решена в пп. 1 и 2 для схемы сочетаний с повторениями, значит, на основании (8) она решена и для нашей схемы с заменой в ее решении параметров n, r на параметры $n-1, r-m$.

3.3. Вероятностное распределение исходов схемы

В схеме сочетаний с повторением без ограничений все исходы равновероятны, каждый с вероятностью $p = 1/C_{n+r-1}^r$, а вероятность того, что в исходах минимальный номер равен m, есть $p_1 = N_1^*/N^* = C_{n+r-m-1}^{r-1}/C_{n+r-1}^r$, откуда по теореме умножения исходы нашей схемы равновероятны с вероятностью $P = p \cdot p_1 = 1/C_{n+r-m-1}^{r-1}$.

3.4. Моделирование исходов схемы

По результату прямой задачи нумерации производим «быстрое» моделирование исхода схемы, разыгрывая по одному случайному числу его номер, из которого следует его искомый вид, т. е. заполнение фишки домино.

Литература

1. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.
2. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. Пер. с англ. М.: Изд-во иностран. литер., 1963. 288 с.
3. *Рыбников К. А.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд. моск. ун-та, 1985. 308 с.
4. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы в дискретной математике. М.: Наука, 1977. 320 с.
5. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982. 384 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.
7. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.
8. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. Вып. 8. С. 35–40.

Поступила в редакцию 27.12.2016

References

1. *Vilenkin N. Ya.* Kombinatorika [Combinatorics]. Moscow: Nauka, 1969. 323 p.
2. *Riordan Dzh.* Vvedenie v kombinatornyi analiz. Per. s angl. [An introduction to combinatorial analysis. Tr. from Eng.]. Moscow: Foreign Literature Publ., 1963. 288 p.
3. *Rybnikov K. A.* Vvedenie v kombinatornyi analiz [An introduction to combinatorial analysis]. Moscow: MSU Publishing House, 1985. 308 p.
4. *Sachkov V. N.* Kombinatornye metody v diskretnoi matematike [Combinatorics in discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1977. 320 p.
5. *Sachkov V. N.* Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoi matematiki [An introduction to combinatorial methods in discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1982. 384 p.
6. *Feller V.* Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya [An introduction to probability theory and its application]. Moscow: Mir, 1970. 528 p.
7. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.
8. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [The analysis of the combination scheme]. Promyshlennye ASU i kontrollery [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 35–40.

Received December 27, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345