Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2016. С. 91–97
DOI: 10.17076/mat441

УДК 519.83

ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭКСПЛУАТАЦИИ БИОРЕСУРСОВ С АСИММЕТРИЧНЫМИ УЧАСТНИКАМИ

А. Н. Реттиева

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

Исследована теоретико-игровая модель эколого-экономической системы в дискретном времени. В игре участвуют агенты (фирмы или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на конечном промежутке времени. Агенты эколого-экономической системы различаются временем участия в процессе эксплуатации ресурса. Целью работы является определение кооперативного поведения участников и применение разработанной схемы для рационального использования биоресурсов водоемов Республики Карелия.

Ключевые слова: задача управления биоресурсами; асимметричные игроки; арбитражное решение Нэша.

A. N. Rettieva. ENVIRONMENTAL-ECONOMIC SYSTEM OF BIORESOURCE USE WITH ASYMMETRIC AGENTS

A discrete time game-theoretic model of an environmental-economic system is considered. Agents (firms or fishermen's artel cooperatives) that exploit the fish stock on a finite planning horizon are the participants of the game. The agents have different exploitation times. The main goal of the paper is to construct the cooperative behavior of the participants and to apply the presented setup for wise use of aquatic bioresources of the Republic of Karelia.

Keywords: bioresource management problem; asymmetric players; Nash bargaining solution.

Введение

Задачи рационального природопользования являются актуальными для Республики Карелия, обладающей большими запасами возобновляемых ресурсов. В связи с тем, что эгоистическое (некооперативное) поведение участников процесса эксплуатации негативно отражается на состоянии экологической системы, необходима разработка методов поддержания кооперативного поведения агентов эколого-экономической системы. Еще одной актуальной задачей является определение кооперативного поведения в случае несимметричности агентов, т. к. возобновляемые ресурсы Республики Карелия подвергаются совместной эксплуатации различными экономическими субъектами.

В данной статье исследована модель, в которой агенты различаются временем участия в процессе эксплуатации ресурса. Такая ситуация типична для водоемов Республики Карелия, где есть постоянный (или длительно существующий) хозяйствующий субъект. При этом в различные периоды могут возникать участники, получающие лицензию на эксплуатацию ресурсов на определенный срок. Когда время участия одного из агентов меньше, чем у другого, игрок включается в процесс эксплуатации на фиксированное время и готов вступить в кооперацию, зная, что это более прибыльно для него. Но так как у агента меньший, чем у партнера, горизонт планирования, то он должен получить выгоду от кооперации большую, чем игрок, который продолжает процесс эксплуатации ресурса дальше.

В работе [3] было предложено использование арбитражной схемы Нэша для определения кооперативных стратегий и выигрышей игроков в асимметричных задачах. При этом использовались две переговорные схемы: для всего периода продолжения игры и рекурсивная арбитражная процедура, в которой арбитражная схема применяется на каждом шаге игры.

В данной статье предложенный подход с использованием арбитражной схемы Нэша применяется для модели с различным временем участия. При этом агенты не различаются коэффициентами дисконтирования, как это было в [2], поскольку хозяйствующие субъекты Республики Карелия находятся в одних и тех же экономических условиях. Предложенная схема апробируется для популяции сига озера Сямозеро. По имеющимся данным матричным методом оценки запаса была восстановлена численность популяции и параметры функции развития. Проведено сравнение состояния экологической системы и прибыли агентов при кооперативном и эгоистическом поведении.

Модель и кооперативное поведение

Рассматривается теоретико-игровая модель эколого-экономической системы, связанной с эксплуатацией возобновляемых ресурсов. Для описания такой системы используется так называемая модель «рыбных войн» [4], характеризующаяся степенной функцией развития популяции и логарифмическими функциями выигрышей агентов. Пусть два агента (фирмы или рыболовецкие артели) эксплуатируют ресурс. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^{\alpha}\,,\ \ x_0 = x\,, \qquad (1)$$

где $x_t \geqslant 0$ – размер популяции в момент времени t, $\varepsilon \in (0,1)$ – коэффициент естественной выживаемости, $\alpha \in (0,1)$ – коэффициент естественного роста, $u_{it} \geqslant 0$ – вылов агента i, $i = 1,2$.

Заметим, что при отсутствии эксплуатации у данной системы существует стационарное состояние $x = 1$. Если $x_0 > 1$, то популяция убывает, неограниченно приближаясь к $x = 1$, если же $x_0 < 1$, то возрастает с такой же асимптотой.

Предполагается логарифмический вид функций выигрышей агентов эколого-экономической системы. Применение таких функций связано с задачей максимизации темпов роста функции производства (в данном случае – вылова), что легко показать в задаче с непрерывным временем. Рассмотрим суммарное дисконтированное значение удельной скорости роста функции $u(t)$

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{u'(t)}{u(t)}dt\,.$$

Проинтегрировав по частям, считая, что $u(0) = 1$ и $e^{-\rho t}\ln u(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{u'(t)}{u(t)}dt = \rho\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\ln u(t)dt\,.$$

Таким образом, задача максимизации скорости роста функции $u(t)$ эквивалентна задаче максимизации функции $\ln u(t)$ на бесконечном промежутке планирования.

В данной статье предполагается, что агенты эколого-экономической системы различаются горизонтами планирования, что соответствует реальным процессам эксплуатации биоресурсов водоемов Республики Карелия. Пусть первый агент эксплуатирует ресурс на протяжении n_1 моментов времени, а второй – на протяжении n_2 моментов времени. Предположим, для определенности, что $n_1 < n_2$. Таким образом, в данной модели на временном промежутке $[0, n_1]$ агенты вступают в кооперацию, и необходимо определить их кооперативные стратегии. После момента n_1 до момента n_2 второй агент продолжает процесс эксплуатации индивидуально. Следовательно, выигрыши агентов эколого-экономической системы имеют следующий вид:

$$J_1 = \sum_{t=0}^{n_1}\delta^t\ln(u_{1t}^c)\,,$$

$$J_2 = \sum_{t=0}^{n_1}\delta^t\ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2}\delta_2^t\ln(u_{2t}^a)\,, \qquad (2)$$

где u_i^c, $i = 1,2$ – кооперативные стратегии, u_2^a – стратегия второго агента, эксплуатирующего ресурс индивидуально.

Для построения кооперативных стратегий и выигрышей участников процесса эксплуатации применяется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры [3]. Таким образом, решается следующая задача:

$$(V_1^c(x)[0,n_1] - V_1^N(x)[0,n_1]) \times$$
$$\times(V_2^c(x)[0,n_1]+V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1,n_2] -$$
$$- V_2^N(x)[0,n_1]-V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2]) =$$
$$= (\sum_{t=0}^{n_1} \delta^t \ln(u_{1t}^c) - V_1^N(x)[0,n_1]) \times$$
$$\times(\sum_{t=0}^{n_1} \delta^t \ln(u_{2t}^c) + \sum_{t=n_1+1}^{n_2} \delta^t \ln(u_{2t}^a) -$$
$$- V_2^N(x)[0,n_1]-V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2]) \to \max, \quad (3)$$

где $V_i^N(x)[0,n_1]$ – выигрыши в равновесии по Нэшу, $V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1,n_2]$ – выигрыш второго агента, когда он эксплуатирует ресурс индивидуально после n_1 периодов кооперативного поведения участников, $V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2]$ – выигрыш второго агента, когда он эксплуатирует ресурс индивидуально после n_1 периодов некооперативного поведения участников.

Пользуясь результатами [2] и [3], запишем выигрыши в равновесии по Нэшу на промежутке времени $[0,n_1]$:

$$V_i^N(x)[0,n_1] = \sum_{j=0}^{n_1} a^j \ln x+\sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} A_j-\delta^{n_1} \ln k\,, \quad (4)$$

где $a = \alpha\delta$, $i = 1, 2$, k – параметр разделения ресурса в конечный момент времени,

$$A_j = \ln\Big[\Big(\frac{\varepsilon \sum_{l=1}^{j} a^l}{\big(\sum_{l=0}^{j} a^l\big)^2 - 1}\Big)^{\sum_{l=0}^{j} a^l} \big(\sum_{l=1}^{j} a^l\big)^{\sum_{l=1}^{j} a^l}\Big].$$

Тогда, при эгоистическом поведении обоих участников, размер популяции после n_1 периодов эксплуатации примет вид

$$x^{Nn_1} = x_0^{\alpha^{n_1}} (\varepsilon a^2)^{\sum_{j=1}^{n_1} \alpha^j} \prod_{l=1}^{n_1}\Big(\frac{\big(\sum_{j=0}^{l-1} a^j\big)^2}{\big(\sum_{j=0}^{l} a^j\big)^2 - 1}\Big)^{\alpha^{n_1-l+1}}. \quad (5)$$

Рассмотрим временной промежуток $[n_1,n_2]$, где второй агент эксплуатирует ресурс индивидуально. Используя [3], запишем выигрыш второго агента, оставшегося в процессе эксплуатации, в виде

$$V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1,n_2] = \sum_{j=0}^{n} a^j \ln x+\sum_{j=1}^{n} \delta^{n-j} B^j, \quad (6)$$

где $n = n_2 - n_1$,

$$B^j = \sum_{l=0}^{j} a^l \ln\Big(\frac{\varepsilon}{\sum_{p=0}^{j} a^p}\Big) + \sum_{l=1}^{j} a^l \ln\Big(\sum_{p=1}^{j} a^p\Big).$$

А выигрыш второго агента $V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2]$, когда он участвует в процессе эксплуатации индивидуально после некооперативного поведения участников, – это выигрыш (6) с начальным размером популяции x^{Nn_1} (см. (5)):

$$V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2] = \sum_{j=0}^{n} a^j \ln(x^{Nn_1})+\sum_{j=1}^{n} \delta^{n-j} B^j.$$

Следовательно, все выигрыши, кроме кооперативных, в задаче (3) определены, а кооперативные стратегии и выигрыши получены в следующем утверждении.

Утверждение 1. *Кооперативные выигрыши в задаче (1), (2) имеют вид*

$$H_{1n_1}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{1n_1}^c,\gamma_{21}^c,\ldots,\gamma_{2n_1}^c;x) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n_1} a^j \ln x+\sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \ln(\gamma_{1j}^c)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \sum_{i=1}^{j} a^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c)+\delta^{n_1} \ln k\,, \quad (7)$$

$$H_{2n_1}^c(\gamma_{11}^c,\ldots,\gamma_{1n_1}^c,\gamma_{21}^c,\ldots,\gamma_{2n_1}^c;x) =$$
$$=\sum_{j=0}^{n_2} a^j \ln x+\sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \ln(\gamma_{2j}^c)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n_1} \delta^{n_1-j} \sum_{i=1}^{n+j} a^i \ln(\varepsilon - \gamma_{1j}^c - \gamma_{2j}^c) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} \delta^{n_2-j} B^j+\delta^{n_1} \sum_{j=0}^{n} a^j \ln(1-k)\,, \quad (8)$$

где $n = n_2 - n_1$.

Кооперативные стратегии агентов связаны как

$$\gamma_{1t}^c = \frac{\varepsilon\gamma_{11}^c \sum_{j=0}^{n+t-1} a^j}{\varepsilon \sum_{j=0}^{n+t} a^j+\gamma_{11}^c \sum_{j=t}^{n+t-1} a^j}\,, \quad (9)$$

$$\gamma_{2t}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{1t}^c \sum_{j=0}^{t} a^j}{\sum_{j=0}^{n+t} a^j}\,. \quad (10)$$

Стратегия γ_{11}^c первого агента на последнем шаге определяется из решения одного из уравнений условий первого порядка.

Доказательство. Для определения кооперативного поведения в n_1-шаговой игре определим кооперативные стратегии, начиная с шага n_1.

Считаем, что после момента времени n_1 первый игрок получает в качестве компенсации долю k от оставшегося ресурса, а второй игрок продолжает процесс эксплуатации с доли $(1-k)$ неиспользованного ресурса. Этот подход отличается от традиционного равного деления, параметр k предполагается здесь заранее заданным, но он может быть использован и для регулирования кооперативного поведения.

Рассмотрим одношаговую игру, выигрыш первого агента имеет вид

$$H_{11}^c(u_1,u_2;x)=\ln(u_1)+\delta\ln(k(\varepsilon x-u_1-u_2)^\alpha)= \\ =(1+a)\ln x+a\ln(\varepsilon x-u_1-u_2)+\delta\ln k\,, \tag{11}$$

второго агента –

$$H_{21}^c(u_1,u_2;x)=\ln(u_2)+\delta V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1,n_2]= \\ =\ln(u_2)+\delta\sum_{j=0}^{n}a^j\ln((1-k)(\varepsilon x-u_1-u_2)^\alpha)+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\delta^{n+1-j}B^j= \\ =\ln(u_2)+\sum_{j=1}^{n+1}a^j\ln(\varepsilon x-u_1-u_2)+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\delta^{n+1-j}B^j+\delta\sum_{j=0}^{n}a^j\ln(1-k)\,. \tag{12}$$

Используя арбитражную схему Нэша, определим кооперативные стратегии из решения следующий задачи:

$$(H_{11}^c(u_1,u_2;x)-V_1^N(x)[n_1-1,n_1])\times \\ \times(H_{21}^c(u_1,u_2;x)- \\ -[V_2^N(x)[n_1-1,n_1]+V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2]])= \\ =(H_{11}^c-V_1^N)(H_{21}^c-\tilde{V}_2^N)\to\max_{u_1,u_2}, \tag{13}$$

где $\tilde{V}_2^N$ обозначено выражение в квадратных скобках, а H_{11}^c, H_{21}^c имеют вид (11), (12).

В [2] приведено доказательство того, что решения данной и последующих используемых в доказательстве оптимизационных задач достигаются во внутренней точке допустимого множества и единственны. Поэтому из условий первого порядка получим следующую связь кооперативных стратегий агентов в одношаговой игре:

$$u_2=\frac{\varepsilon x-u_1(1+a)}{\sum\limits_{j=0}^{n+1}a^j}\,. \tag{14}$$

Как и ранее [2], [3], предполагается, что стратегии агентов линейно зависят от количества ресурса $u_1=\gamma_{11}^c x$, $u_2=\gamma_{21}^c x$, откуда получаем

$$\gamma_{21}^c=\frac{\varepsilon-\gamma_{11}^c(1+a)}{\sum\limits_{j=0}^{n+1}a^j}\,. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим задачу (3) с двумя шагами, где стратегии агентов линейны $u_{1t}^c=\gamma_{1t}^c x$, $u_{2t}^c=\gamma_{2t}^c x$. Функция выигрыша первого агента в двухшаговой игре имеет вид

$$H_{12}^c(\gamma_{11}^c,\gamma_{12}^c,\gamma_{12}^c,\gamma_{22}^c;x)= \\ =\ln(\gamma_{12}^c x)+\delta H_1^{1c}(\gamma_{11}^c,\gamma_{21}^c;(\varepsilon x-\gamma_{12}^c x-\gamma_{22}^c x)^\alpha)= \\ =\ln(\gamma_{12}^c x)+\delta(1+a)\ln(\varepsilon x-\gamma_{12}^c x-\gamma_{22}^c x)^\alpha+ \\ +\delta(\ln(\gamma_{11}^c)+a\ln(\varepsilon-\gamma_{11}^c-\gamma_{21}^c)+\delta\ln k)= \\ =(1+a+a^2)\ln x+\ln(\gamma_{12}^c)+ \\ +a(1+a)\ln(\varepsilon-\gamma_{12}^c-\gamma_{22}^c)+ \\ +\delta\ln(\gamma_{11}^c)+\delta a\ln(\varepsilon-\gamma_{11}^c-\gamma_{21}^c)+\delta^2\ln k\,,$$

а второго –

$$H_{22}^c(\gamma_{11}^c,\gamma_{21}^c,\gamma_{12}^c,\gamma_{22}^c;x)= \\ =\ln(\gamma_{22}^c x)+\delta H_2^{1c}(\gamma_{11}^c,\gamma_{21}^c;(\varepsilon x-\gamma_{12}^c x-\gamma_{22}^c x)^\alpha)= \\ =\ln(\gamma_{22}^c x)+\delta\sum_{j=0}^{n+1}a^j\ln(\varepsilon x-\gamma_{12}^c x-\gamma_{22}^c x)^\alpha+ \\ +\delta\ln(\gamma_{21}^c)+\delta\sum_{j=1}^{n+1}a^j\ln(\varepsilon-\gamma_{11}^c-\gamma_{21}^c)+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\delta_2^{n+2-j}B^j+\delta^2\sum_{j=0}^{n}a^j\ln(1-k)= \\ =\ln(\gamma_{22}^c)+\sum_{j=0}^{n+2}a^j\ln x+\sum_{j=1}^{n+2}a^j\ln(\varepsilon-\gamma_{12}^c-\gamma_{22}^c)+ \\ +\delta\ln(\gamma_{21}^c)+\delta\sum_{j=1}^{n+1}a^j\ln(\varepsilon-\gamma_{11}^c-\gamma_{21}^c)+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\delta^{n+2-j}B^j+\delta^2\sum_{j=0}^{n}a^j\ln(1-k)\,.$$

Для определения кооперативного поведения в этой двухшаговой игре необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}(H_{12}^c(\gamma_{11}^c,\gamma_{21}^c,\gamma_{12}^c,\gamma_{22}^c;x) - V_1^N(x)[n_1-2,n_1])\times \\ \times(H_{22}^c(\gamma_{11}^c,\gamma_{21}^c,\gamma_{12}^c,\gamma_{22}^c;x) - \\ - [V_2^N(x)[n_1-2,n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2]]) = \\ = (H_{21}^c - V_1^N)(H_{22}^c - \tilde V_2^N) \to \max_{\gamma_{11}^c,\gamma_{21}^c,\gamma_{12}^c,\gamma_{22}^c}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\tilde V_2^N$ обозначено выражение в квадратных скобках.

Аналогично одношаговой игре для определения оптимального решения необходимо и достаточно использовать условия первого порядка, откуда получим связь между кооперативными стратегиями агентов на втором шаге вида

$$\gamma_{22}^c = \frac{\varepsilon - \gamma_{12}^c(1+a+a^2)}{\sum\limits_{j=0}^{n+2} a^j}$$

и соотношение между кооперативными стратегиями первого агента на обоих шагах:

$$\gamma_{12}^c = \frac{\varepsilon\gamma_{11}^c \sum\limits_{j=0}^{n+1} a^j}{\varepsilon \sum\limits_{j=0}^{n+2} a^j + \gamma_{11}^c a^2 \sum\limits_{j=0}^{n-1}}. \tag{17}$$

Следовательно, все параметры выражены через одну неизвестную стратегию γ_{11}^c первого агента на последнем шаге, для определения которой необходимо численно решить одно из уравнений условий первого порядка.

Продолжая процесс для n_1-шаговой игры, получим кооперативные выигрыши в виде (7), (8) и кооперативные стратегии в виде (9), (10). □

Моделирование популяции сига озера Сямозеро

Для моделирования использовались фактические данные о многотычинковом сиге озера Сямозеро [5]. Для восстановления численности сига был использован матричный метод оценки запаса [1].

Полученные оценки размера популяции за длительный период позволили оценить параметры функции ее развития. Наиболее адекватной ситуации оказалась степенная функция развития со следующими параметрами:

$$\alpha = 0,89\,,\ \ \varepsilon = 1,45\,.$$

Данные о восстановленной численности популяции и динамика популяции с такой функцией развития представлены на рисунке 1.

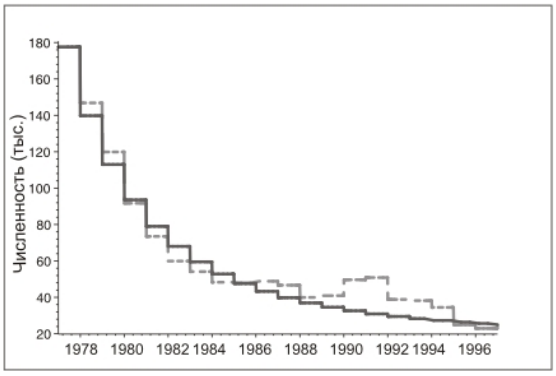

Рис. 1. Размер популяции: сплошная линия – степенная функция развития, пунктир – восстановленная функция развития

Численное моделирование было проведено со следующими параметрами:

$$x_0 = 177,547\,,\ \ \delta = 0,85\,,\ \ k = \frac{1}{3}\,.$$

Приведем результаты для горизонтов планирования

$$n_1 = 10\,,\ \ n_2 = 20\,.$$

Численно получено $\gamma_{11}^c = 0,3434$.

Сравним кооперативный и некооперативный выигрыши первого агента на временном промежутке $[0,n_1]$:

$$\begin{aligned} V_1^c(x)[0,n_1] = 11,6938 > \\ > V_1^N(x)[0,n_1] = 10,6075\,. \end{aligned}$$

Для второго агента сравним его кооперативный выигрыш на промежутке $[0,n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1,n_2]$ после кооперации с некооперативным выигрышем на промежутке $[0,n_1]$ плюс выигрыш от индивидуального поведения на промежутке времени $[n_1,n_2]$ после эгоистического поведения:

$$\begin{aligned} V_2^c(x)[0,n_1] + V_2^{ac}(x^{cn_1})[n_1,n_2] = 13,3032 > \\ > V_2^N(x)[0,n_1] + V_2^{aN}(x^{Nn_1})[n_1,n_2] = 12,6271\,. \end{aligned}$$

Заметим, что кооперативные выигрыши обоих агентов эколого-экономической системы больше, чем выигрыши в равновесии по Нэшу.

На рисунке 2 показан размер популяции на всем промежутке планирования $[0,n_2]$, откуда заметим, что кооперативное поведение благотворно влияет на экологическую обстановку.

Это связано с тем, что при кооперации устанавливается более «щадящий» режим эксплуатации.

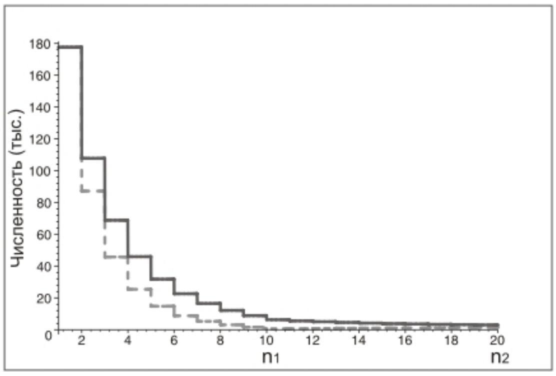

Рис. 2. Размер популяции: сплошная линия – кооперативное поведение, пунктир – равновесие по Нэшу

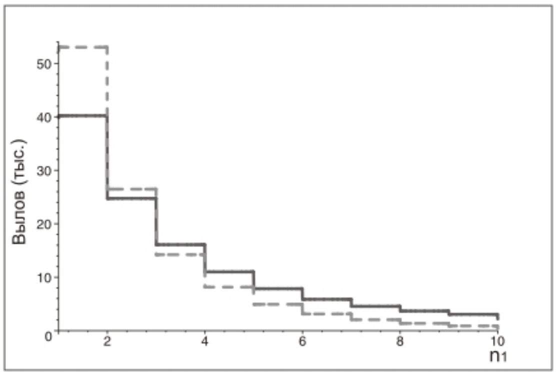

Рис. 3. Вылов первого игрока: сплошная линия – кооперативное поведение, пунктир – равновесие по Нэшу

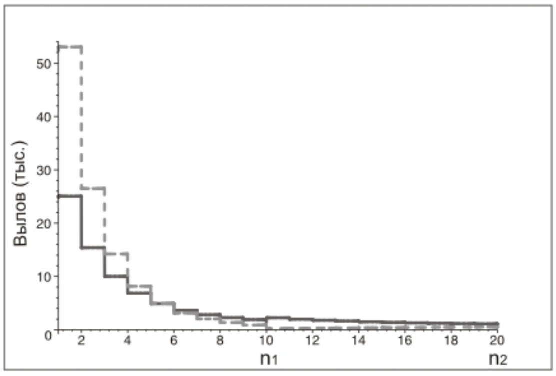

Рис. 4. Вылов второго игрока: сплошная линия – кооперативное поведение+индивидуальный, пунктир – равновесие по Нэшу+индивидуальный

Вылов первого агента на промежутке $[0, n_1]$ показан на рисунке 3, а вылов второго участника на промежутках $[0, n_1]$ и $[n_1, n_2]$ – на рисунке 4. Заметим, что при кооперации вылов второго агента меньше, чем в равновесии по Нэшу, но это компенсируется его дальнейшей индивидуальной эксплуатацией ресурса.

Заключение

Традиционно теоретико-игровые задачи управления биоресурсами рассматривались в предположении симметричности агентов. В предыдущих работах [2], [3] были исследованы модели, в которых участники имеют различные коэффициенты дисконтирования, и предложены схемы определения кооперативного поведения.

В данной статье метод построения кооперативных стратегий и выигрышей агентов с использованием арбитражной схемы Нэша применен для теоретико-игровой модели эксплуатации ресурсов с участниками, различающимися горизонтами планирования. Определены стратегии и выигрыши обоих агентов эколого-экономической системы.

Для численного моделирования были использованы данные о популяции сига озера Сямозеро. Использована степенная функция развития популяции и произведена калибровка параметров для соответствия данным о восстановленной матричным методом оценки запаса численности популяции сига. Показано, что применение арбитражной схемы для определения кооперативного поведения выгодно обоим агентам и при этом благоприятно влияет на состояние экологической системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 16-01-00183_ а, 16-41-100062 р_ а.

Литература

1. *Абакумов А. И., Кольев Н. В., Максименко В. П., Горр С. В.* Матричный метод оценки запаса и прогнозирования вылова популяций морских организмов // Вопросы ихтиологии. 1994. Т. 34, № 3. С. 400–407.

2. *Реттиева А. Н.* Задача управления биоресурсами с различными горизонтами планирования // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 3. С. 68–87.

3. *Реттиева А. Н.* Задача управления биоресурсами с асимметричными игроками // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 3. С. 72–87.

4. *Levhari D., Mirman L. J.* The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution //

The Bell J. of Economics. 1980. Vol. 11(1). P. 322–334.

5. *Стерлигова О. П., Павлов В. Н., Ильмаст Н. В. и др.* Экосистема Сямозера (биологический режим, использование). Петрозаводск: КарНЦ РАН, 2002. 119 с.

Поступила в редакцию 01.07.2016

References

1. *Abakumov A. I., Kol'ev N. V., Maksimenko V. P., Gorr S. V.* Matrichnii metod ocenki zapasa i prognozirovanie vilova populacii morskih organizmov [A matrix method for marine populations' stock estimation and catch prediction]. *Voprosi ihtiologii* [*Ichthyological aspects*]. 1994. Vol. 34, no. 3. P. 400–407.

2. *Rettieva A. N.* Zadacha upravleniya bioresursami s razlichnimi gorizontami planirovaniya [A bioresource management problem with different planning horizons]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya.* [*Mathematical game theory and its applications*]. 2014. Vol. 6, iss. 3. P. 68–87.

3. *Rettieva A. N.* Zadacha upravleniya bioresursami s asimmetrichnimi igrokami [A bioresource management problem with asymmetric players]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya* [*Mathematical game theory and its applications*]. 2013. Vol. 5, iss. 3. P. 72–87.

4. *Levhari D., Mirman L. J.* The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution. *The Bell J. of Economics*. 1980. Vol. 11(1). P. 322–334.

5. *Sterligova O. P., Pavlov V. N., Il'mast N. V., Pavlovskii S. A., Komulainen S. F., Kuchko Ya. A.* Ecosistema Syamozera (biologicheskii rezhim, ispol'zovanie) [Lake Syamozero ecosystem (biological regime, uses)]. Petrozavodsk: KarRC of RAS, 2002. 119 p.

Received July 05, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Реттиева Анна Николаевна
и. о. зам. директора по научной работе, к. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: annaret@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 766312

CONTRIBUTOR:

Rettieva, Anna
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia
e-mail: annaret@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 766312