Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2016. С. 141–146
DOI: 10.17076/mat412

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ ПОДРЯД ИДУЩИХ ФИКСИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Предлагается процедура прямого перечисления исходов схемы с определенной дисциплиной их нумерации. На этой основе проводятся исследования по следующим направлениям: находится общее число исходов схемы, решается задача нумерации, строится алгоритм быстрого моделирования ее исходов.

Ключевые слова: перестановки; задача нумерации; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A PERMUTATION CIRCUIT WITH A GIVEN NUMBER OF CONSECUTIVE FIXED ELEMENTS

We suggest a procedure for direct enumeration of the outputs of the circuit with a given discipline of their enumeration. Proceeding from this, the following aspects are studied: the total number of outputs of the circuit is found, the enumeration problem is solved, the algorithm of rapid modeling of outputs is constructed.

Keywords: permutations; enumeration problem; modeling.

Введение

В отличие от ранее предложенного в [1] общего подхода к анализу схемы перестановок с ограничением на ее исходы на основе отбраковки исходов аналогичной схемы без ограничений, не соответствующих условиям ограничения, здесь при конкретном заданном ограничении на исходы оказывается возможным проводить исследования по данной схеме, определенной в названии статьи, на базе прямого явного перебора ее исходов. Это освобождает от необходимости работы с большими массивами «лишних» исходов, не отвечающих требованиям ограничений, и позволяет проводить анализ схемы и получать результаты теми же методами, по тем же направлениям и того же уровня, как и в уже исследованной в [1] аналогичной схеме без ограничений.

1. Описание схемы и вид ее исходов

В схеме перестановок с n элементами с номерами от 1 до n, где выделено t номеров $i_1, \ldots, i_t$ элементов из n, $t \leqslant n$, нас интересуют исходы, в которых элементы с этими номерами идут подряд. Будем называть их благоприятными исходами (схемы перестановок) или просто исходами схемы, имея в виду исследуемую схему перестановок с данным ограничением.

Разные исходы схемы задаются наборами номеров всех n элементов в разном порядке – будем их записывать в круглых скобках через запятую.

Пример 1. Пусть $n = 3,\ t = 2,\ i_1 = 1,$ $i_2 = 2$. Тогда все исходы схемы перестановок есть: $(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),$ $(3,2,1)$, а благоприятными будут исходы $(1,2,3),(2,1,3),(3,1,2),(3,2,1)$.

Не нарушая общности, в дальнейшем для удобства обозначений будем считать, что выделенные t номеров последние, т. е. идут от номера $(n-t+1)$ до n, что достигается соответствующей перенумерацией элементов.

2. Число и процедура прямого перечисления благоприятных исходов

Число N исходов схемы определяется из соображения их прямого перебора, который заключается в последовательном переборе всех взаимных порядков первых $n-t$ номеров элементов и одной группы t последних выделенных номеров в одном зафиксированном порядке (как один элемент перестановки), например, возрастающем, в сочетании со всеми взаимными порядками этих t номеров между собой. Первый перебор, как известно, совершается $(n-t+1)!$ способами, а второй – $t!$ способами, откуда по правилу умножения комбинаторики получаем

$$N = (n-t+1)!(t)!. \tag{1}$$

(В примере 1 по (1) находим $N = (3-2+1)!2! = 4$, что совпадает с визуальным результатом).

Процедуру перебора благоприятных исходов будем строить в соответствии с (1) методом графов по схеме двух последовательных действий, приведенной в [2], являющихся здесь перестановками размерами $(n-t+1)$ и t, а алгоритм перебора их исходов и комбинаторный анализ схемы перестановок представлен в [1].

Для дальнейших исследований напомним алгоритм построения случайного процесса перечисления исходов и их нумерации в схеме перестановок.

Строим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до n номерами, ставя каждый из них последовательно и случайно относительно каждой имеющейся перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого и нумеруя слева направо получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, т. е. при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ i-е состояние процесса (т. е. i-ю перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_j$) на j-м шаге. Тогда приведем вид графа переходов на примере первых трех шагов (рис. 1).

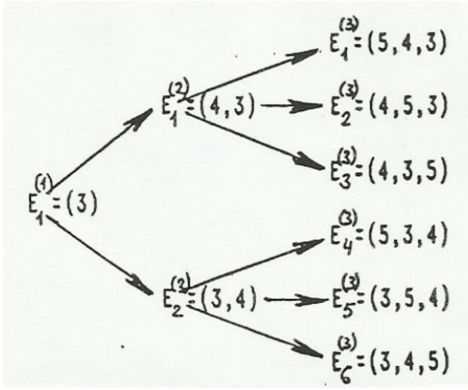

Рис. 1. Граф перечисления исходов первых трех шагов в примере 1

В частности, построим графы переборов всех исходов перестановок $n-t+1$ и t элементов на числовом примере.

Пример 2. Пусть $n = 5,\ t = 3$. Тогда получим следующие графы перечисления исходов перестановок сначала для t элементов с номерами 3, 4, 5 (рис. 1), а потом с номерами от 1 до $n-t$ и элемента с номером $*$, которым пока занумеруем группу из t следующих подряд в перестановке выделенных элементов без учета их взаимного порядка (рис. 2).

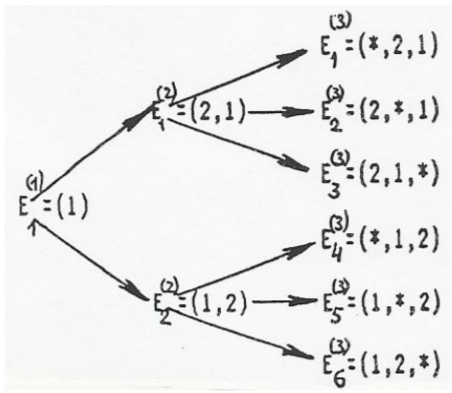

Рис. 2. Граф перечисления группы выделенных элементов с остальными элементами в примере 2

В схеме последовательных действий (в условиях исследуемой схемы – двух действий по схеме перестановок) из [2] получаем граф перебора исходов исследуемой схемы, т. е. благоприятных исходов вида (рис. 3).

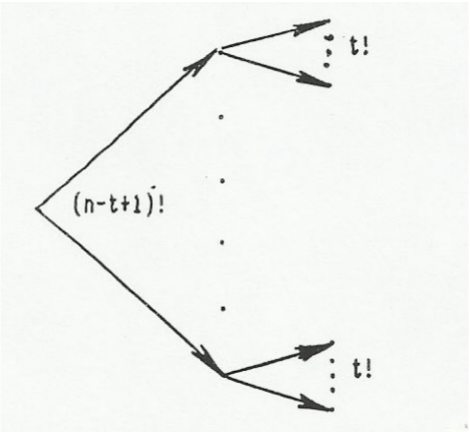

Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы в примере 2

Теперь для наглядности на примере представим граф прямого перечисления исходов исследуемой схемы, т. е. благоприятных исходов.

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, $n = 5$, $t = 3$, т. е. в перестановках элементы с номерами 3, 4, 5 должны стоять подряд в любом взаимном порядке.

Приведем граф перечисления всех исходов схемы (рис. 4).

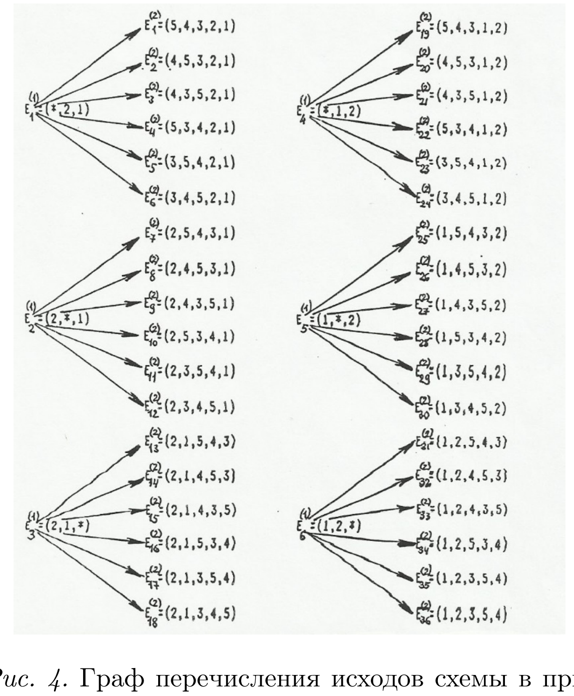

Рис. 4. Граф перечисления исходов схемы в примере 3

На всех рисунках состояния в графах обозначаем через $E_i^{(i)}$, где верхний индекс в круглых скобках обозначает номер шага процесса перебора его состояний (исходов схемы), а нижний – номер состояния на этом шаге.

3. Задача нумерации исходов схемы

Для решения задачи нумерации в форме прямой и обратной задач нумерации, состоящих соответственно в нахождении вида исхода схемы по его номеру и номера исхода по его виду, воспользуемся результатами ее решения для используемых здесь схем перестановок [1] и схемы последовательных действий [2].

Прямая задача нумерации

Пусть задан номер исхода схемы $N = N^{(2)}$. Требуется найти его вид $R = R^{(2)}$. Обозначения номера и исхода здесь даны в соответствии с принятыми в результирующей схеме двух последовательных действий [2] описанных выше схем перестановок. Введем определяющий эту схему вектор $\bar{n} = (n_1, n_2)$, задающий численности исходов этих двух действий, т. е. этих двух перестановок: $n_1 = (n - t + 1)!,\ n_2 = t!$. Далее схему перестановок с числом исходов n_1 будем называть первой, а с числом исходов n_2 – второй. Тогда по [2] из значения $N^{(2)}$ вычисляем номер $N^{(1)}$ исхода, приводящего к данному, после первого действия по формуле

$$N^{(1)} = \left[\frac{N^{(2)} + n_2 - 1}{n_2}\right], \qquad (2)$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z. Далее для каждого $i = 1, 2$ вычисляем значение $v_i = N^{(i)} \ mod \ n_i$ и

$$j_i = v_i + C^n_{n-v_i} n_i, \qquad (3)$$

где C_a^b – число сочетаний из a по b, n – любое натуральное число, а j_i – номер состояния (исхода) в пучке графа, приводящего к искомому с данным номером. Полученные числа j_1 и j_2 будут являться номерами исходов схем перестановок размерами соответственно $(n - t + 1)$ и t, приводящих к исходу с данным номером исследуемой схемы, состоящей из последовательного применения этих схем перестановок. Теперь по решенной для схемы перестановок прямой задаче нумерации в [1] в терминах индексов членов вариационного ряда входящих в них номеров в вычисляемом ниже порядке находим виды их исходов R_{1*} и R_{2*}. Причем в первой схеме заменяем элемент $*$ при стандартизации на число t.

В итоге обратной заменой номеров элементов перестановок их фактическими номерами получаем их виды R_1 и R_2 в нашей схеме.

Приведем используемые здесь формулы из [1] для определения видов исходов R_{1*} и R_{2*}:

$$N_1 = \left[\frac{j_2 + r - 1}{r}\right], \tag{4}$$

где r – размер перестановки, $N_m,\ m = 1, \ldots, r$ – номер исхода на m-м шаге перечисления исходов перестановки, приводящего к конечному с данным номером, а $[Z]$ – целая часть числа Z, и

$$M_s = (N_s - 1)\ mod\ s + 1, \tag{5}$$

где M_s – номер позиции элемента s среди чисел $1, 2, \ldots, s$ в перестановке слева направо.

Тогда искомые виды $\{R_{i*}\},\ i = 1, 2$ определяются взаимными порядками номеров элементов, заданных числами $\{M_s\}$ для $i = 1, 2$ (см. [1]).

Для определения окончательного вида исхода остается в вид исхода R_1, в котором вид исхода R_2 обозначен $*$, поставить его на ее место, предварительно получив виды исходов R_1 и R_2 заменой соответственно в видах исходов R_{1*} и R_{2*} номера их элементов на фактические.

Приведем численный пример.

Пример 4. Пусть параметры схемы заданы в примере 3, в соответствии с которыми на рисунке 4 приведен граф перечисления всех состояний, и пусть $N = N^{(2)} = 27$. Найдем вид исхода $R = R^{(2)}$. По графу $R = (1, 4, 3, 5, 2)$. По данным примера, $n_1 = n_2 = 3! = 6$. Определим R по формулам (2), (3): $N = N^{(2)} = 27$; $N^{(1)} = [(27 + 6 - 1)/6] = 5$; $v_2 = 27\ mod\ 6 = 3$; $v_1 = 5\ mod\ 6 = 5$; $j_1 5 + 0 = 5$; $j_2 = 3 + 0 = 3$. Отсюда в обозначениях [1] во второй схеме перестановок, состоящей из $t = 3$ элементов с номерами 3, 4, 5, заменяя их для стандартизации вычислений на номера 1, 2, 3, получаем исход R_{2*}, совпадающий с исходом R_2 при обратной замене номеров 1, 2, 3 на фактические 3, 4, 5, по формулам (4) и (5). (В силу того, что $r_1 = r_2 = 3$, в обеих схемах перестановок достаточно определить места двух номеров элементов.)

Во второй схеме перестановок исход определяем следующей цепочкой вычислений:

$N_3 = j_2 = 3$; $N_2 = [(3 - 3 + 1)/3] = 1$;

$M_3 = (3 - 1)\ mod\ 3 + 1 = 3$; $M_2 = (1 - 1)\ mod\ 2 + 1 = 1$, откуда получаем $R_{2*} = (2, \cdot, 3)$, значит $R_{2*} = (2, 1, 3)$, а тогда $R_2 = (4, 3, 5)$.

В первой схеме перестановок для стандартизации вычислений по (4) и (5) заменяем номер элемента $*$ на 3, а после получения результата R_{1*} производим обратную замену:

$N_3 = j_1 = 3$; $N_2 = [(5 - 3 + 1)/3] = 2$;

$M_3 = (5 - 1)\ mod\ 3 + 1 = 2$; $M_2 = (2 - 1)\ mod\ 2 + 1 = 2$, откуда получаем $R_{1*} = (\cdot, 3, 2)$, значит, $R_{1*} = (1, 3, 2)$, а тогда $R_1 = (1, *, 2)$.

Отсюда искомый вид исхода всей схемы есть $R = R^{(2)} = (1, 4, 3, 5, 2)$, что совпадает с визуальным результатом по графу на рисунке 4.

Обратная задача нумерации

Пусть задан вид исхода схемы $R = R^{(2)}$. Требуется найти его номер $N = N^{(2)}$. Обозначения номера и исхода здесь даны в соответствии с принятыми в результирующей схеме двух последовательных действия [2] описанных выше схем перестановок. Определяющий эту схему вектор $\bar{n} = (n_1, n_2)$ задает численности исходов этих двух действий, т. е. этих двух перестановок: $n_1 = (n - t + 1)!$, $n_2 = t!$. Как и раньше, схему перестановок с числом исходов n_1 будем называть первой, а с числом исходов n_2 – второй.

Для решения задачи по смыслу схемы последовательных действий, состоящих в двух перестановках, выписываем виды их исходов R_1 и R_2, приводящих к данному итоговому виду R. Для стандартизации расчета их номеров при перечислении исходов в схемах перестановок производим описанную в прямой задаче замену номеров их элементов и по решенной в [1] для схемы перестановок обратной задаче нумерации определяем их номера $N = N_1$ и $N = N_2$ по формуле

$$N = \sum_{i=2}^{r-1} (M_i - 1)\frac{r!}{i!} + M_r, \tag{6}$$

где числа r и M_i определены в прямой задаче нумерации. Далее значения N_1 и N_2, переобозначив соответственно через j_i и j_2, подставим в приведенную из [2] формулу

$$N^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^{k} n_i + j_k \tag{7}$$

при $k = 2$, откуда и получаем искомый номер $N^{(2)}$ итогового исхода схемы.

Приведем численный пример.

Пример 5. Пусть параметры схемы заданы в примере 3, в соответствии с которыми на рисунке 4 приведен граф перечисления всех состояний, и пусть вид исхода $R = R^{(2)} = (1, 4, 3, 5, 2)$. Требуется найти его номер $N = N^{(2)}$. По графу на рисунке 4 искомый номер равен 27. Определим его по формулам (6) и (7). По данным примера, $n_1 = n_2 = 3! = 6$.

Для этого выпишем составляющие нашу схему перестановки как два последовательных действия: $R_2 = (4, 3, 5)$ и $R_1 = (1, *, 2)$, заменив их для стандартизации вычислений по формулам [1] и [2] соответственно на $R_{2*} = (2, 1, 3)$ и $R_{1*} = (1, 3, 2)$. Найдем их номера по (6), указав значения M_2 и M_3 для обеих схем перестановок из их видов. Расчеты начинаем по (6) со второй схемы, т. к. она является внутренней для первой. Для второй схемы $M_2 = 3,\ M_3 = 1$, поэтому

$$N_2 = j_2 = (M_2 - 1)\frac{3!}{2!} + M_3 = (1 - 1)3 + 3 = 3.$$

Для первой схемы $M_2 = 2,\ M_3 = 2$, поэтому

$$N_1 = j_1 = (M_2 - 1)\frac{3!}{2!} + M_3 = (2 - 1)3 + 2 = 5.$$

Отсюда по формуле (7) получаем $N^{(2)} = (5 - 1)6 + 3 = 27$, что совпадает с визуальным результатом по графу на рисунке 4.

Пример 6. Проведем теперь проверку совпадения номера последнего исхода схемы с общим числом исходов в примере 3. По логике дисциплины нумерации исходов при их перечислении по методу графов вид последнего исхода очевиден и есть $R = (1, 2, 3, 4, 5)$. Решив обратную задачу нумерации, проверим, что его номер $N^{(2)}$ совпадает с числом исходов схемы N, вычисляемой по (1): $N = 3!3! = 36$. Здесь все рассуждения полностью повторяют пример 5 и будут опущены. Приведем только конкретные вычисления: $R_2 = (3, 4, 5)$ и $R_1 = (1, 2, *)$, $R_{2*} = (1, 2, 3)$ и $R_{1*} = (1, 2, 3)$. Для обеих схем перестановок $M_1 = 1,\ m_2 = 2,\ M_3 = 3$, поэтому

$$N_1 = N_2 = j_1 = j_2 = (M_2 - 1)\frac{3!}{2!} + M_3 = \\ = (2 - 1)3 + (3 - 1) + 1 = 6.$$

Отсюда по формуле (7) получаем $N^{(2)} = (6 - 1)6 + 6 = 36$, что совпадает с визуальным результатом по графу на рисунке 4 и совпадает с результатом по (1).

4. Вероятностное распределение исходов схемы

В силу очевидной симметрии исходов в процессе их перебора все они равновероятны. Отсюда следует, что условная вероятность любого из них при выполнении условия ограничения в схеме перестановок есть величина, обратная числу исходов нашей схемы (с данным ограничением) и равна $1/(n - t + 1)!t!$, доля же таких исходов среди всех в схеме перестановок p есть вероятность выполнения в ней данного ограничения и вычисляется по формуле отношения исходов в нашей схеме к числу исходов схемы перестановок:

$$p = \frac{(n - t + 1)!t!}{n!} = \frac{n - t + 1}{C_n^t} \qquad (8)$$

Проверим формулу (8) на примере.

Пример 7. Пусть параметры схемы заданы в примере 3, в соответствии с которыми на рисунке 4 приведен граф перечисления всех состояний. Их число по графу равно 36, а число исходов в схеме перестановок того же размера 5 равно $5! = 120$. Тогда получаем, что вероятность выполнения данного ограничения в схеме перестановок $p = 36/120 = 0,3$, а по формуле (8) $p = (5 - 3 + 1)/C_5^3 = 0,3$, т. е. результаты совпали.

5. Моделирование возможного исхода схемы

Первый способ заключается в моделировании возможных исходов схемы перестановок того же размера, приведенном в [1] и [3]. Тогда требуемое число исходов схемы перестановок для получения одного возможного значения нашей схемы имеет геометрическое распределение с параметром p, вычисляемым по (8), со средним числом $1/p$.

Второй способ состоит в «быстром» моделировании методом маркировки ([3]) для разыгрывания по одному случайному числу одного из равновероятных номеров, определенных по (1), возможных исходов схемы с дальнейшим нахождением его вида по результату решения прямой задачи нумерации.

Литература

1. *Колчин А. В., Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. Петрозаводск. 2014. № 4. С. 80–86.

2. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схем одновременных и последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 2. С. 35–41.

3. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

Поступила в редакцию 05.04.2016

References

1. *Kolchin A. V., Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN* [*Transactions of the KarRC of the RAS*]. 2014. No. 4. P. 80–86.

2. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhem odnovremennykh i posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial Analysis of the Scheme of simultaneous and Sequential Action]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [*Industrial Automatic Control Systems and Controllers*]. 2016. No. 2. P. 35–41.

3. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modeling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

Received April 05, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики, к. ф.-м. н.
Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: 89037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
National Research University
Higher School of Economics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: 89037411345