

УДК 519.115:519.2

## КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ С ЗАДАННЫМ МИНИМАЛЬНЫМ РАЗМАХОМ ВЫБОРКИ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики  
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»*

Производится прямой перебор исходов схемы методом графов, находится их число, определяется вероятность появления ее исходов в общей схеме сочетаний, для исходов схемы решается задача нумерации и на ее основе предлагается алгоритм их быстрого моделирования.

Ключевые слова: схема сочетаний; минимальный размах выборки; задача нумерации; моделирование.

### N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF A COMBINATIONS CIRCUIT WITH GIVEN MINIMAL RANGE OF SAMPLE

Outputs of the circuit are enumerated directly by the graph method, their number and probability in the general combinations circuit are determined, the problem of enumeration of outputs is solved and the algorithm of their rapid modeling is suggested on this basis.

Key words: combinations circuit; minimal range of sample; enumeration problem; modeling.

### ВВЕДЕНИЕ

Схема сочетаний – одна из основных широко распространенных в теории и практике комбинаторных схем [1–7], возникает при выборе  $r$  элементов из  $n$  различных элементов без возвращения и без учета их порядка или при размещении  $r$  неразличимых частиц по одной по  $n$  различным ячейкам. Интерпретация размещения частиц по ячейкам схемы сочетаний используется в статистике Ферми–Дирака [6], а при неограниченном числе частиц в ячейке – в статистике Бозе–Эйнштейна и является в этом случае схемой сочетаний с повторением, т. е. схемой выбора с возвраще-

нием или размещения частиц по ячейкам без ограничения числа частиц в каждой из них.

Схема сочетаний участвует во многих важных распространенных математических формулах: биноме Ньютона, биномиальной схеме и биномиальном распределении вероятностей, в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем и т. д.

Число исходов схемы сочетаний есть  $C_n^r = n!/r!(n-r)!$ . (В схеме сочетаний с повторениями число исходов –  $C_{n+r-1}^r$ ).

Свойства сочетаний подробно рассмотрены, например, в [6].

Производящая функция последовательности чисел  $C_n^r$  и  $C_{n+r-1}^r$  приведена в [2] и [6]:

$$\sum_{r=0}^n C_n^r x^r = (1+x)^n;$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r x^r = (1-x)^{-n}.$$

Моделирование исходов схемы сочетаний приведено в [7].

В [9] и [10] соответственно проведено исследование схемы сочетаний и схемы сочетаний с ограниченным размахом по указанным в аннотации направлениям методом графов на основе визуального перечисления всех их исходов с возможностями учета различных ограничений в них.

Однако путь отбраковки исходов в более общей схеме (в данном случае схеме сочетаний) для перечисления исходов изучаемой схемы и ее дальнейшего анализа приводит к рассмотрению большого числа «лишних» исходов и годится для численного расчета по схеме, а для аналитического исследования схемы требуется выявление общих закономерностей в ней, которые лучше проявляются и легче улавливаются при построении процедуры прямого перечисления ее исходов, что и даст основу ее анализа.

### 1. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ И ЧИСЛО ВСЕХ ИСХОДОВ СХЕМЫ

Зададим параметры схемы:  $n$  – число различных номерами от 1 до  $n$  элементов схемы;  $r$  – размер выборки;  $S$  – заданный минимальный размах выборки, где под размахом выборки (исхода схемы) будем понимать максимальную разность между номерами ее элементов, т. е. между ее крайними компонентами, т. к. номера элементов в исходах будем перечислять в возрастающем порядке.

Для перечисления исходов схемы будем перебирать все допустимые значения наименьшего номера  $m$  в исходе от 1 до  $(n - S)$ , который определит диапазон перебора значений максимального номера  $M$  в нем от  $(m + S)$  до  $n$ , а остальные  $(r - 2)$  номеров элементов исхода будем выбирать по схеме сочетаний из значений от  $(m + 1)$  до  $(M - 1)$ .

Граф перечисления исходов схемы в соответствии с процедурой их перебора будет состоять из объединения результатов трех этапов: перебора минимального номера  $m$  в исходе схемы, для каждого – перебор возможного максимального номера  $M$  от  $(m + S)$  до  $n$  в нем и описанный выше выбор остальных  $(r - 2)$  номеров между числами  $m$  и  $M$ .

Число исходов первого этапа и пучков второго этапа равно  $d = n - S$ , при каждом фиксированном значении  $m$  размер пучка второго этапа равен  $n - m - S + 1$ , т. к. множество значений  $M$  есть числа  $(m + S, m + S + 1, \dots, n)$ , а при каждом фиксированном значении  $M$  размер пучка третьего этапа равен  $C_{M-m-1}^{r-2}$ . Установление порядка при перечислении и граф перечисления равновероятных исходов схемы сочетания даны в [9]. Тогда из процедуры перебора следует формула для числа  $N$  исходов схемы

$$N = \sum_{m=1}^d \sum_{M=m+S}^n C_{M-m-1}^{r-2}. \quad (1)$$

Приведем граф перечисления исходов схемы (рис. 1).

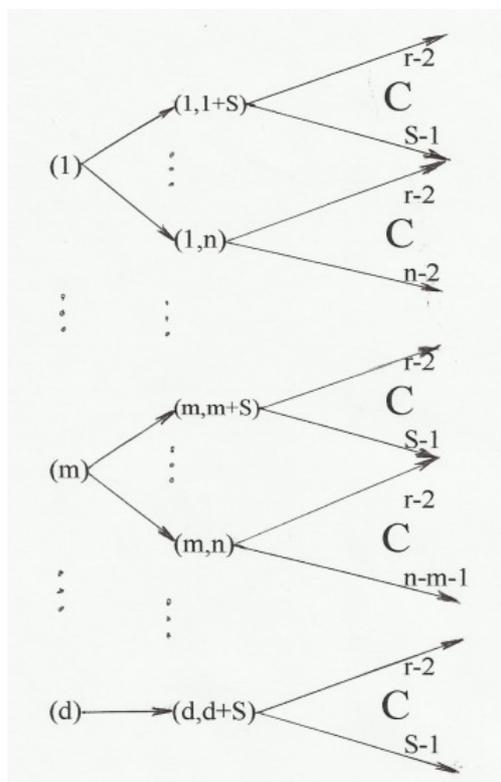


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы

**Пример 1.** Пусть  $n = 7$ ,  $r = 4$ ,  $S = 4$ . Отсюда по (1) при  $d = 3$  имеем

$$N = \sum_{m=1}^3 \sum_{M=m+4}^7 C_{M-m-1}^2 =$$

$$= (C_3^2 + C_4^2 + C_5^2) + (C_3^2 + C_4^2) + C_3^2 = 31. \quad (2)$$

Приведем граф перечисления всех исходов схемы и их число  $N$  по графу (рис. 2).

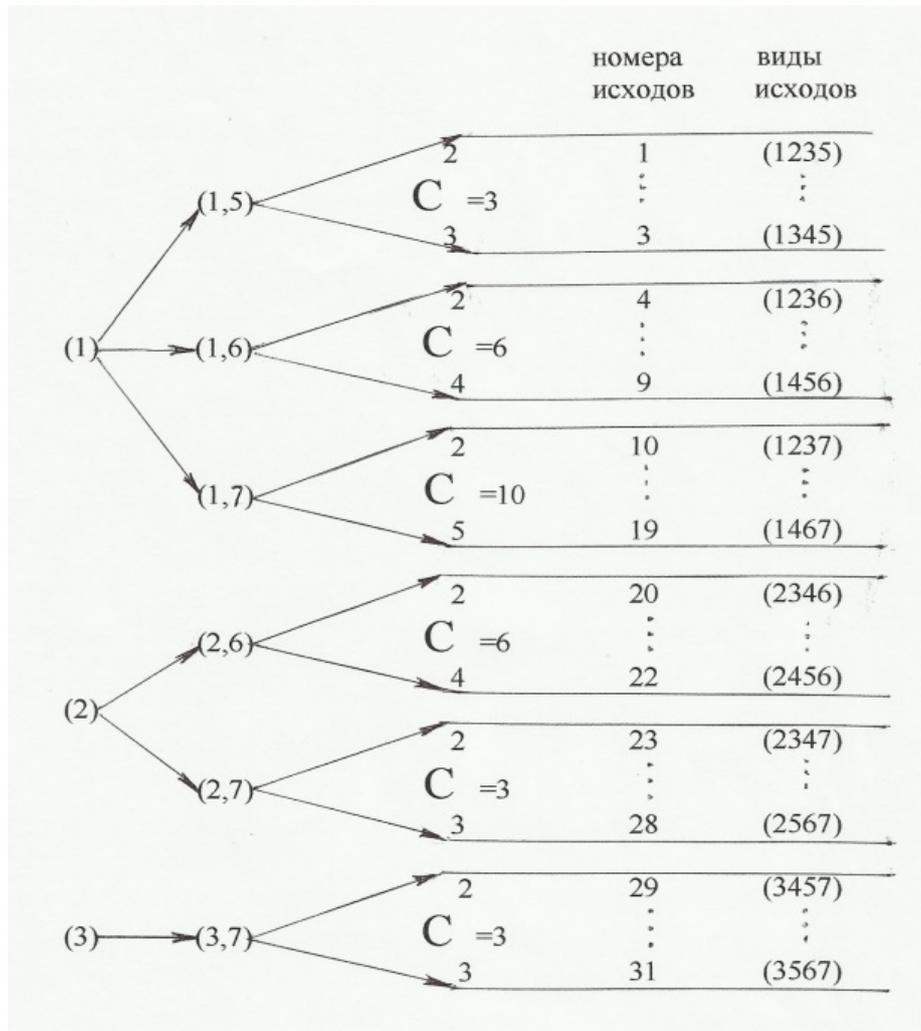


Рис. 2. Граф перечисления исходов в примере 1

По графу на рисунке 2 и по (1) получаем  $N = 31$ .

## 2. ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ ДЛЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ

При решении задачи нумерации будем использовать соответствующие результаты для схемы сочетаний из [9], т. е., во избежание громоздкости выражений не приводя явных формул соответствия номеров и видов исходов схемы сочетаний  $C_a^b = c$ , будем обозначать их как  $N_c$  и  $R_c$  для выбора из элементов с номерами от 1 до  $a$  с переобозначением на номера элементов от  $m + 1$  до  $M - 1$  и соответствующими значениями параметров  $a = M - m - 1$  и  $b = r - 2$ .

Здесь будет существенно использована известная из п.1 пучковая структура графа перечисления исходов схемы на каждом его этапе. Введем удобные для дальнейшего рассмотрения обозначения и выпишем поэтапные пуч-

ковые структуры графов в фигурных скобках, перечисляя в них в круглых скобках через запятую поэтапные размеры пучков исходов:

1-й этап –  $\{(d)\}$  с множеством исходов  $(1, 2, \dots, d)$ ;

2-й этап –  $\{(n - S), (n - S - 1), \dots, (1)\} = \{A_1, A_2, \dots, A_d\}$ ;  $\sum_{i=1}^d A_i = D$ ;

3-й этап –  $\{(C_{S-1}^{r-2}), (C_S^{r-2}), \dots, (C_{n-2}^{r-2}), (C_{S-1}^{r-2}), (C_S^{r-2}), \dots, (C_{n-3}^{r-2}), \dots, (C_{S-1}^{r-2})\} = \{B_1, B_2, \dots, B_D\}$ .

### 2.1. Прямая задача нумерации

Пусть известен номер  $N^* = N_3^*$  исхода схемы по перечислению. Требуется определить его вид  $R^* = (a_1^*, \dots, a_r^*)$ , где элементы выборки упорядочены по возрастанию номеров.

Обозначим через  $N_3^*, N_2^*, N_1^*$  номера исходов этапов в траектории графа их перечисления, ведущей к итоговому исходу с данным видом  $R^*$ .

### Шаги решения:

- 1) находим  $N_2^* = \min n_2 : (\sum_{i=1}^{n_2} B_i \geq N_3^*)$ ;
- 2) находим номер итогового исхода  $p_3 = N_c$  в пучке 3-го этапа  $p_3 = N_3^* - \sum_{i=1}^{N_2^*-1} B_i$ ;
- 3) из  $N_c$  по [9] находим  $R_c = (a_2, \dots, a_{r-1})$  в стандартной форме при нумерации элементов подряд начиная с 1;
- 4) находим  $N_1^* = a_1 = \min n_1 : (\sum_{i=1}^{n_1} A_i \geq N_2^*)$ ;
- 5) находим номер  $p_2$  предшествующего итоговому исходу в пучке 2-го этапа  $p_2 = N_2^* - \sum_{i=1}^{N_1^*-1} A_i$ ;
- 6) по  $a_1^*$  и  $p_2$  находим  $a_r^* = a_1^* + S + p_2 - 1$ ;
- 7) пересчитываем  $R_c$  к виду  $R_c^*$  с начальным элементом  $a_2^* = a_1^* + 1$  по формуле  $a_i^* = a_i + a_1^*$ ,  $i = 2, r-1$ ;
- 8) получаем искомый вид  $R^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_r^*)$ .

**Пример 2.** Пусть  $n = 7, r = 4, S = 4$  и дан номер исхода  $N^* = N_3^* = 23$ . Требуется найти его вид  $R^* = R_3^* = (a_1^*, \dots, a_r^*)$  по алгоритму. По графу на рисунке 2  $R^* = (2, 3, 4, 7)$ .

Решение: 1)  $N_2^* = \min n_2 : (C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_3^2 + C_4^2 = B_1 + \dots + B_5 = 28 > 23)$ , откуда  $n_2 = N_2^* = 5$ ; 2)  $p_3 = 23 - (3 + 6 + 10 + 3) = 1 = N_c$ ; 3) из  $N_c = 1$  следует по [9], что  $R_c = (1, 2)$ ; 4)  $N_1^* = \min n_1 : (3 + 2 = A_1 + A_2 = 5 = N_2^*)$ , откуда  $N_1^* = 2$ ; 5)  $p_2 = 5 - 3 = 2$ , откуда  $a_1^* = 2$ ; 6)  $a_4^* = 2 + 4 + 2 - 1 = 7$ ; 7) из  $R_c = (1, 2)$  получаем  $R_c^* = (a_2^* = 1 + 2 = 3, a_3^* = 2 + 2 = 4)$ ; 8)  $R^* = (a_1^*, R_c^*, a_r^*) = (2, 3, 4, 7)$ , что совпадает с результатом по рисунку 2.

### 2.2. Обратная задача нумерации

Пусть известен вид  $R^* = (a_1^*, \dots, a_r^*)$  исхода схемы по перечислению. Требуется определить его номер  $N^*$ .

Обозначим через  $N_3^*, N_2^*, N_1^*$  номера исходов этапов в траектории графа их перечисления, ведущей к итоговому исходу с данным номером  $N^*$ .

### Шаги решения:

- 1) из вида  $R^*$  получаем  $a_1^*$ , откуда  $N_1^* = a_1^*$ ;
  - 2) из вида  $R^*$  получаем  $a_r^*$ , откуда  $N_2^* = \sum_{i=1}^{a_1^*-1} A_i + a_r^* - a_1^* - S + 1$ ;
  - 3) из вида  $R^*$ , отбрасывая крайние компоненты, получаем  $R_c$  и приводим его к стандартному виду  $R_c = (a_1, \dots, a_{r-2})$  (с нумерацией элементов подряд начиная с единицы) по формуле  $a_i = a_i^* - a_1^*$ ,  $i = 2, r-1$ ;
  - 4) по [9] из  $R_c$  получаем номер  $N_c$  искомого исхода в пучке 3-го этапа;
  - 5) искомый номер вычисляем по формуле  $N^* = \sum_{i=1}^{N_2^*} B_i + N_c$ .
- Пример 3.** Пусть в условиях примера 2 задан вид исхода  $R^* = (2, 3, 4, 7)$ . Требуется найти его номер  $N^*$  по алгоритму. По рисунку 2  $N^* = 23$ .

Решение: 1)  $a_1^* = 2 = N_1^*$ ; 2)  $a_4^* = 7$ , откуда  $N_2^* = \sum_{i=1}^{2-1} A_i + 7 - 2 - 4 + 1 = 3 + 7 - 2 - 4 + 1 = 5$ ; 3)  $R_c^* = (3, 4)$ , откуда  $R_c = (1, 2)$ ; 4) по [9]  $N_c = 1$ ; 5)  $N_3^* = N^* = \sum_{i=1}^{5-1} B_i + 1 = 3 + 6 + 10 + 3 + 1 = 23$ , что совпадает с результатом по рисунку 2.

### 3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ СРЕДИ ВСЕХ ИСХОДОВ СХЕМЫ СОЧЕТАНИЙ

Из равновероятности всех исходов схемы сочетаний по [9] и из (1) следует выражение для определенной в заголовке вероятности

$$P = \sum_{m=1}^d \sum_{M=m+S}^n C_{M-m-1}^{r-2} / C_n^r.$$

### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ

**Первый способ** – отбраковкой лишних смоделированных по [9] исходов схемы сочетаний до получения нужного числа исходов.

**Второй способ** – быстрое моделирование каждого исхода по результату решения прямой задачи нумерации путем разыгрывания номера исхода по одному случайному числу.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.
2. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ / пер. с англ., М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 288 с.
3. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. М.: МГУ, 1985. 308 с.
4. Сачков В. Н. Комбинаторные методы в дискретной математике. М.: Наука, 1977. 320 с.
5. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982. 308 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1970. 528 с.
7. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Стохастическое моделирование. М., МИЭМ, 2012. 118 с.
8. Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. Вып. 8. С. 15–21.
9. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.
10. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы сочетаний с ограниченным размахом // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 10. С. 28–31.

Поступила в редакцию 05.04.2016

## REFERENCES

1. *Vilenkin N. Yu.* Kombinatorika [Combinatorics]. Moscow: Nauka, 1969. 323 p.
2. *Riordan Dzh.* Vvedenie v kombinatornyi analiz [Introduction to Combinatorial Analysis]. Moscow: Foreign Literature Publ., 1963. 288 p.
3. *Rybnikov K. A.* Vvedenie v kombinatornyi analiz [Introduction to Combinatorial Analysis]. Moscow: Moscow University Publ., 1985. 308 p.
4. *Sachkov V. N.* Kombinatornye metody v diskretnoi matematike [Combinatorial methods in discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1977. 320 p.
5. *Sachkov V. N.* Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoi matematiki [Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1982. 308 p.
6. *Feller V.* Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya [An introduction to probability theory and its applicatios]. Moscow: Mir, 1970. 528 p.
7. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modeling]. Moscow: MIEM, 2012. 118 p.
8. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitel'noi kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative combinatorics]. Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika [Instruments and systems: monitoring, control, and diagnostics]. 2014. No. 8. 15–21 p.
9. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of combination scheme]. Promyshlennye ASU i kontroly [Industrial automatic control systems and controllers]. 2015. No. 8. 35–40 p.
10. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii s ogranichenym razmakhom [The analysis of the combination scheme with a limited range]. Promyshlennye ASU i kontroly [Industrial automatic control systems and controllers]. 2015. No. 10. 28–31 p.

Received April 05, 2016

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталья Юрьевна**  
доцент Департамента прикладной  
математики, к. ф.-м. н.  
Московский институт электроники и математики  
Национального исследовательского университета  
«Высшая школа экономики»  
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458  
эл. почта: nat1943@mail.ru  
тел.: 89037411345

## CONTRIBUTOR:

**Enatskaya, Natalia**  
Moscow Institute of Electronics and Mathematics  
National Research University  
Higher School of Economics  
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia  
e-mail: nat1943@mail.ru  
tel.: 89037411345