

УДК 532.517+532.542

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА И ТРАНСПОРТИРОВКИ ГАЗА ПО МОРСКИМ ГАЗОПРОВОДАМ

Н. Н. Ермолаева

Санкт-Петербургский государственный университет

Предложены нестационарные модели транспортировки газа по морским газопроводам, включающие нестационарные модели теплообмена газа с окружающей средой. Представлены расчеты ряда нестационарных задач, приведены оценки допустимости упрощений модели теплообмена.

Ключевые слова: морские газопроводы; теплообмен; уравнение состояния; численное решение; схема Лакса–Вендроффа.

N. N. Ermolaeva. NON-STATIONARY MODELS OF HEAT EXCHANGE AND GAS TRANSPORTATION THROUGH A MARINE GAS PIPELINE

Non-stationary models of gas transportation through pipelines in the sea, including non-stationary models of heat exchange between the gas flow and the environment are suggested. The calculations for a number of non-stationary problems are presented. The admissibility of simplification of heat exchange models is assessed.

Keywords: marine gas pipelines; heat exchange; equation of state; numerical solution; Lax–Wendroff-type scheme.

ВВЕДЕНИЕ

Для протяженных морских газопроводов, работающих без промежуточных подстанций, характерны большие расходы и сверхвысокие давления [1]. В части газопровода температура газа может опускаться ниже температуры фазового перехода T_* вода-лед. Низкие температуры газа не приводят к оледенению газопровода, если температура морской воды существенно больше температуры T_* . Это имеет место, например, в Черном и Балтийском морях. Целью настоящей работы является моделирование нестационарных процессов транспортировки газа и анализ допустимости упрощения модели теплообмена между потоком и окружающей средой для морских газопроводов, эксплуатируемых в условиях, не допускающих возможности оледенения.

Запишем, следуя работе [2], одномерную нестационарную модель транспортировки смеси газов по морскому газопроводу. Для простоты опустим учет влияния силы тяжести, считая трассу горизонтальной, и положим, что коэффициент гидравлического сопротивления λ постоянный. Обобщение модели на учет этих зависимостей не вызывает принципиальной трудности.

Модель 1

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho u^2) = -\lambda \rho \frac{u|u|}{4R}; \quad (2)$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \right) = -\omega, \quad (3)$$

$$e = \varepsilon + u^2/2; \quad (4)$$

калорическое уравнение

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho); \quad (5)$$

уравнение состояния Редлиха–Квонга

$$p = \frac{h\rho T}{1 - \delta\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)T^{1/2}}, \quad (6)$$

$$h = R_g/M, \quad M = \sum_{i=1}^f \eta_i m_i, \quad \sum_{i=1}^f \eta_i = 1,$$

$$\delta = b/M, \quad c = a/M^2,$$

$$b = \Omega_b R_g T_c / p_c, \quad a = \Omega_a (R_g)^2 T_c^{2.5} / p_c.$$

Здесь z — координата вдоль оси цилиндрического газопровода в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; t — время; $\rho(z, t)$, $u(z, t)$, $p(z, t)$, $T(z, t)$ — плотность, скорость, давление и температура газа соответственно; $e(z, t)$, $\varepsilon(z, t)$ — массовые плотности полной и внутренней энергии газа соответственно; $\omega(z, t)$ — мощность объемного источника (стока) внутренней энергии в потоке газа; h, c, δ — размерные постоянные в уравнении состояния (6); R_g — универсальная газовая постоянная; m_i, η_i — молекулярный вес и доля i -й составляющей газовой смеси соответственно; f — количество компонент газовой смеси; Ω_a, Ω_b — числа, определяемые для заданного химического состава газовой смеси по значениям критических температуры T_c и давления p_c согласно таблицам, приведенным в [3].

Модель 1 написана на языке величин $\rho, u, p, T, e, \varepsilon$, осредненных по сечению газопровода. Система (1)–(6) должна быть дополнена начальными и граничными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче.

В качестве уравнения состояния выбрано уравнение Редлиха–Квонга (6) — аналитическое уравнение состояния, одно из наиболее точных в широком диапазоне изменений ρ, p и T , вплоть до сверхвысоких давлений [3]. Вывод калорического уравнения (5) приведен ниже. Для замыкания модели 1 необходимо найти выражение для слагаемого ω в уравнении энергии (3), моделирующее теплообмен газа с окружающей средой.

МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА, РАСЧЕТ ω

Для рассматриваемого круга задач характерны большие числа Рейнольдса: $Re \sim 10^8$.

Интенсивность турбулентных пульсаций в газовом потоке приводит к тому, что в радиальном направлении лимитирующей стадией теплообмена с внешней средой является теплопроводность через многослойную боковую поверхность газопровода. Это позволяет учитывать теплообмен с окружающей средой интегрально. В уравнение энергии вводится слагаемое ω типа мощности объемного источника (стока) внутренней энергии. Величина ω выражается через q_w — радиальную составляющую вектора плотности потока внутренней энергии (вектора потока тепла) на внутренней поверхности газопровода в z -м сечении:

$$\int_{\Omega} \tilde{\omega} dv = - \oint_{S_{\Omega}} \bar{q} \cdot \bar{n} ds, \quad \int_{\Omega} \tilde{\omega} dv = \omega \pi R^2 \delta z,$$

Ω — область, ограниченная поперечными сечениями газопровода, проходящими через z и $z + \delta z$, и боковой поверхностью газопровода между этими сечениями. Тепловые условия на внешней поверхности газопровода на малых расстояниях $\delta z \sim R$ (R — внутренний радиус газопровода) допустимо считать неизменными по z и по t . Дополнительный пульсационный перенос внутренней энергии газа в направлении оси z пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом внутренней энергии в этом направлении. Сказанное позволяет записать:

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in [z, z + \delta z], \quad q_w(\zeta, t) &= q_w(z, t) \rightarrow \\ \rightarrow \oint_{S_{\Omega}} \bar{q} \cdot \bar{n} ds &= \int_0^{2\pi} \int_z^{z+\delta z} q_w(\zeta, t) R d\zeta d\varphi \approx \\ &\approx 2\pi R \delta z q_w(z, t) \rightarrow \\ \rightarrow \omega(z, t) \pi R^2 \delta z &\approx -2\pi R \delta z q_w(z, t), \\ \omega(z, t) &\approx -\frac{2q_w(z, t)}{R}. \end{aligned}$$

Величина $q_w(z, t)$ зависит от z параметрически через зависимость от z температуры газа (при неизменных внешних условиях) и определяется из решения уравнения теплопроводности в области многослойной боковой поверхности газопровода при соответствующих начальных и граничных условиях.

Для установившегося варианта модели 1 в книге [1] приведены явные выражения для потока тепла q_w как при наличии слоя льда на боковой поверхности газопровода, так и при его отсутствии.

Для ряда нестационарных задач при отсутствии слоя льда представляется возможным использование квазистационарной модели теплообмена в нестационарной модели 1.

Анализ допустимости этого является актуальной задачей, например, [4]. В настоящей работе предложена методика оценки допустимости использования квазистационарной модели теплообмена в расчетах нестационарных неизоэтермических течений смеси реальных газов по морским газопроводам.

Запишем нестационарную модель (модель 2) теплообмена между потоком газа в z -м сечении газопровода и окружающей средой при наличии двух слоев обшивки – внутреннего, состоящего из стали, и внешнего – из бетона. Обобщение на большее количество слоев не вызывает трудности. Положим, что изменения как в окружающей среде, так и в потоке газа в направлении оси z на масштабах $\delta z \sim R$ пренебрежимо малы (это имеет место для большинства практических задач).

Модель 2

При $r \in (R, R_1)$, $t \in (0, \hat{t})$:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 L(T_1); \quad (7)$$

$$t = 0, \quad T_1(r) = T_1^0(r); \quad (8)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R$:

$$T_1 = T(z, t), \quad q_w = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}; \quad (9)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R_1$:

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \quad (10)$$

при $r \in (R_1, R_2)$, $t \in (0, \hat{t})$:

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 L(T_2); \quad (11)$$

$$t = 0, \quad T_2(r) = T_2^0(r); \quad (12)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R_2$:

$$T_2 = T_v, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial r}; \quad (13)$$

при $r \in (R_2, R_2 + \delta_*)$, $t \in (0, \hat{t})$:

$$\rho_v c_v \frac{\partial T_v}{\partial t} = \lambda_v L(T_v); \quad (14)$$

$$t = 0, \quad T_v(r) = T_v^0(r); \quad (15)$$

при $t \in (0, \hat{t})$, $r = R_2 + \delta_*$:

$$T_v = T^*. \quad (16)$$

Здесь r – радиальная координата в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; \hat{t} – заданное время процесса; $L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r})$ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат (r, z, φ) при $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$; δ_1, δ_2 –

толщины первого и второго слоев обшивки газопровода соответственно; $R_1 = R + \delta_1$; $R_2 = R + \delta_1 + \delta_2$ – внешний радиус газопровода.

Индексы: 1 – область первого слоя обшивки (стали); 2 – область второго слоя обшивки (бетона); v – область эффективного теплового погранслоя воды; δ_* – толщина эффективного теплового погранслоя воды; T^* – температура морской воды на удалении от газопровода; $\lambda_i, \rho_i, c_i, T_i^0(r)$ – коэффициент теплопроводности, плотность, удельный коэффициент теплоемкости и начальное распределение температуры в i -м слое соответственно ($i = 1, 2, v$); $T_i = T_i(r, t)$ – распределение температуры в i -м слое.

В модели 2 уравнения (7), (11) и (14) – одномерные линейные уравнения теплопроводности в слоях стали, бетона и в эффективном тепловом погранслое воды толщиной δ_* . В пределах этого погранслоя передача тепла моделируется линейным уравнением теплопроводности (14). Величина δ_* зависит от многих факторов, в частности от донных течений и от условий контакта газопровода с донным грунтом. Информация о δ_* может быть получена из решения обратной задачи. Оценка величины δ_* в установившихся режимах приведена в книге [1].

Расчет по модели 2 позволяет найти $\omega(z, t)$:

$$\omega(z, t) = -\frac{2q_w}{R} = -\frac{2}{R} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (17)$$

Модель 2 входит составной частью в модель 1. В общем случае система уравнений модели 1 не расщепляется.

Если допустимо использовать квазистационарный вариант модели 2, в котором все величины только параметрически зависят от времени, то интегрирование уравнений общей модели 1 существенно упрощается, так как ω явно выражается через $T(z, t)$ и другие параметры задачи.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ 2 В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ВАРИАНТЕ

При условии $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ решениями уравнений теплопроводности (7), (11) и (14) являются логарифмические профили температуры:

$$T_i(r) = A_i + B_i \ln r, \quad i = 1, 2, v.$$

Величины A_i, B_i определяются из граничных условий (9), (10), (13), (16) и имеют следующие

щий вид:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{T^* - T(z, t)}{\ln \frac{R_1}{R} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_v} \ln \frac{R_2 + \delta_*}{R_2}}, \\ A_1 &= T(z, t) - B_1 \ln R, \quad B_2 = (\lambda_1/\lambda_2)B_1, \\ B_v &= (\lambda_1/\lambda_v)B_1, \\ A_v &= T^* - B_v \ln(R_2 + \delta_*), \\ A_2 &= A_v + (B_v - B_2) \ln R_2. \end{aligned}$$

Выражение для потока тепла $q_w = \lambda_1 \frac{dT_1}{dr} \Big|_R$ в квазистационарной модели теплообмена находится в виде явной зависимости от температуры газа $T(z, t)$ и параметров задачи:

$$q_w = \frac{\lambda_1 B_1}{R}. \quad (18)$$

Численное интегрирование системы уравнений нестационарной модели 2 не представляет трудности и может быть проведено с использованием как явных, так и неявных разностных схем. В наших расчетах использовалась неявная разностная схема, основанная на монотонной схеме Самарского [5], аппроксимирующая задачу с первым порядком точности по Δt и вторым по Δr .

КАЛОРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Покажем, следуя работе [6], как связана внутренняя энергия реального газа, поведение которого удовлетворяет уравнению состояния (6), с его температурой и плотностью. Представим внутреннюю энергию ε локально как функцию независимых термодинамических переменных (T, V) , где $V = \frac{1}{\rho}$ — удельный объем. Дифференциал внутренней энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T dV = \\ &= c_v(T, V) dT + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T dV, \end{aligned}$$

где $c_v(T, V)$ — коэффициент удельной теплоемкости реального газа при постоянном объеме.

Выражение для $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T$ задается следующим соотношением:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T = T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right) \right)_V. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует:

$$\varepsilon(T, V) = \varepsilon(T, V_0) + \int_{V_0}^V T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right) \right)_V dV.$$

При условии $V_0 \rightarrow \infty$ плотность газа стремится к 0 и внутренняя энергия реального газа $\varepsilon(T, V_0)$ стремится к внутренней энергии ε_{id} идеального газа, равной $\varepsilon_{id} = \hat{c}_v T$, где \hat{c}_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме идеального газа того же химического состава. Это позволяет записать выражение для внутренней энергии реального газа в следующем виде:

$$\varepsilon(T, V) = \hat{c}_v T + \frac{3}{2} \frac{c}{\delta \sqrt{T}} \ln \left(\frac{V}{V + \delta} \right)$$

или в терминах плотности:

$$\varepsilon(T, \rho) = \hat{c}_v T - \frac{3}{2} \frac{c}{\delta \sqrt{T}} \ln(1 + \delta \rho), \quad (20)$$

где \hat{c}_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме *идеальной* газовой смеси того же химического состава.

ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим нестационарную задачу транспортировки газа, в которой нестационарность обусловлена колебаниями газопотребления.

Начальные условия. Начальными условиями в этой задаче служат распределения плотности $\rho_0(z)$ и температуры $T_0(z)$ в установившемся режиме:

$$t = 0 : \quad y = \rho u = \text{const} = \frac{Q}{\pi R^2},$$

$$\rho(z) = \rho_0(z), \quad T(z) = T_0(z).$$

Функции $\rho_0(z)$, $T_0(z)$ рассчитываются по стационарному варианту модели 1, Q — массовый расход газа, постоянный для установившегося режима. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась численно методом Рунге–Кутты, значение внутренней энергии $\varepsilon_0(z)$ находилось по плотности $\rho_0(z)$ и температуре $T_0(z)$ из уравнения (20), давление $p_0(z)$ — из уравнения состояния (6).

Граничные условия. В рассматриваемой задаче течение газа является дозвуковым, на входе в газопровод задаются неизменные во времени давление и температура газа, по ним из уравнений (6), (20) определяются значения плотности и внутренней энергии газа. На выходе задается закон изменения удельного расхода $y = \rho u$, соответствующий колебаниям газопотребления. Таким образом, граничные условия записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad & \rho(t, 0) = \rho_0, \quad \varepsilon(t, 0) = \varepsilon_0, \\ z = L : \quad & y(t, L) = y_*(t), \end{aligned}$$

L — длина газопровода, $y_*(t)$ — заданный закон изменения удельного расхода газа на выходе из газопровода (рис. 1).

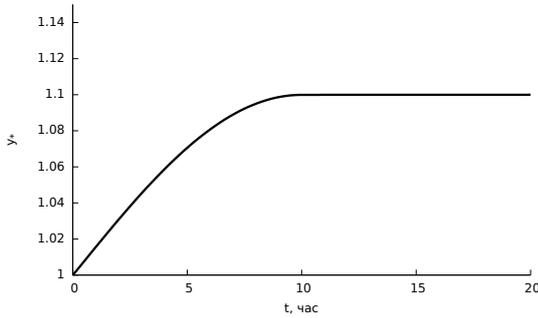


Рис. 1. Закон изменения безразмерного удельного расхода газа $y_*(t)$ на выходе из газопровода

Перейдем от скорости потока u к расходу $y = \rho u$ и запишем в безразмерной форме модель 1 в переменных ρ, y, p, ε , используя для безразмерных переменных те же обозначения.

Модель 1'

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y^2}{\rho} + m_1 p \right) &= -m_2 \frac{y^2}{\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + m_3 \frac{y^2}{\rho} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(y \varepsilon + m_3 \frac{y^3}{\rho^2} + m_4 \frac{y}{\rho} p \right) &= -m_5 \omega, \\ p &= m_6 \frac{\rho T}{(1 - m_{10} \rho)} - m_7 \frac{\rho^2}{(1 + m_{10} \rho) T^{1/2}}, \\ \varepsilon(T, \rho) &= m_8 T - m_9 \frac{\rho}{\sqrt{T}} \ln(1 + m_{10} \rho). \end{aligned}$$

Безразмерные комплексы $m_1 - m_{10}$ выражаются через физические параметры задачи и характерные величины по формулам:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p_x}{\rho_x u_x^2}, \quad m_2 = \frac{\lambda l_x}{4R}, \quad m_3 = \frac{u_x^2}{2\varepsilon_x}, \\ m_4 &= \frac{p_x}{\rho_x \varepsilon_x}, \quad m_5 = \frac{2\lambda_1 t_x}{\rho_x c_v R r_x}, \\ m_6 &= \frac{h \rho_x T_x}{p_x}, \quad m_7 = \frac{c \rho_x^2}{p_x T_x^{1/2}}, \\ m_8 &= \frac{\hat{c}_v T_x}{\varepsilon_x}, \quad m_9 = \frac{3c}{2\delta \varepsilon_x \sqrt{T_x}}, \quad m_{10} = \delta \rho_x, \end{aligned}$$

где $l_x, \rho_x, p_x, T_x, \varepsilon_x = c_v T_x, t_x, u_x = Q/(\rho_x \pi R^2)$ — характерные длина, плотность, давление, температура, внутренняя энергия, время и скорость соответственно, величины ρ_x, p_x, T_x связаны уравнением состояния (6).

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ 1'

Использовалась модифицированная схема Лакса–Вендроффа [7], которая по скорости счета и простоте реализации оказалась предпочтительнее других численных схем для рассматриваемых задач.

Алгоритм состоит из двух этапов. На каждом этапе искомые величины плотности, расхода, внутренней энергии, температуры и давления находятся явно. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \frac{y^2}{\rho} + m_1 p, \\ B &= \rho \varepsilon + m_3 \frac{y^2}{\rho}, \\ C &= y \varepsilon + m_3 \frac{y^3}{\rho^2} + m_4 \frac{y}{\rho} p. \end{aligned}$$

На первом этапе решается следующая система конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(\rho_k^n + \rho_{k+1}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{y_{k+1}^n - y_k^n}{\Delta} &= 0, \\ \frac{y_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(y_k^n + y_{k+1}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{A_{k+1}^n - A_k^n}{\Delta} &= \\ = -m_2 \left(\frac{y^2}{\rho} \right)_{k+1/2}^n, \\ \frac{B_{k+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(B_k^n + B_{k+1}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{C_{k+1}^n - C_k^n}{\Delta} &= \\ = -m_5 \omega_{k+1/2}^n. \end{aligned}$$

Здесь τ, n — величина и номер шага по времени; Δ, k — величина и номер шага по координате z .

Из системы уравнений первого этапа на временном слое $(n + 1/2)$ в узлах $k = 1, \dots, (N - 1)$ явно находятся значения плотности $\rho_k^{n+1/2}$, расхода $y_k^{n+1/2}$ и внутренней энергии $\varepsilon_k^{n+1/2}$, затем по уравнению (20) и уравнению состояния находятся значения температуры $T_k^{n+1/2}$ и давления $p_k^{n+1/2}$.

В узле $k = 0$ значения плотности $\rho_0^{n+1/2}$ и температуры $T_0^{n+1/2}$ известны из граничных условий, величина $\varepsilon_0^{n+1/2}$ определяется по

уравнению (20), $p_0^{n+1/2}$ — из уравнения состояния. Для определения расхода $y_0^{n+1/2}$ используется линейная экстраполяция из внутренних узлов.

В узле $k = N$ значения плотности $\rho_N^{n+1/2}$ и температуры $T_N^{n+1/2}$ определяются линейной экстраполяцией из внутренних узлов, по ним находятся внутренняя энергия $\varepsilon_N^{n+1/2}$ и давление $p_N^{n+1/2}$. Величина расхода $y_N^{n+1/2}$ известна из граничных условий.

На втором этапе решается следующая система конечно-разностных уравнений:

$$\frac{\rho_k^{n+1} - \rho_k^n}{\tau} + \frac{y_{k+1/2}^{n+1/2} - y_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta} = 0,$$

$$\frac{y_k^{n+1} - y_k^n}{\tau} + \frac{A_{k+1/2}^{n+1/2} - A_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta} = -m_2 \left(\frac{y^2}{\rho} \right)_k,$$

$$\frac{B_k^{n+1} - B_k^n}{\tau} + \frac{C_{k+1/2}^{n+1/2} - C_{k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta} = -m_5 \omega_k^{n+1/2}.$$

Значения величин $\rho_k^{n+1/2}$, $y_k^{n+1/2}$, $\varepsilon_k^{n+1/2}$, $T_k^{n+1/2}$, $p_k^{n+1/2}$, $k = 0 \dots N$ известны из первого этапа. Из системы уравнений второго этапа на $(n+1)$ -м временном слое в узлах $k = 1, \dots, (N-1)$ явно находятся значения плотности ρ_k^{n+1} , расхода y_k^{n+1} и внутренней энергии ε_k^{n+1} , затем по уравнениям (20), (6) находятся значения температуры T_k^{n+1} и давления p_k^{n+1} .

Значения всех величин в граничных узлах $k = 0$ и $k = N$ определяются аналогично схеме первого этапа.

Приведенная модифицированная схема Лакса–Вендроффа имеет второй порядок точности по шагу τ и по шагу Δ , кроме граничных узлов, где использовалась линейная экстраполяция. По заданной точности расчета по пространственной переменной в результате численного эксперимента выбирался оптимальный шаг по времени и была доказана практическая сходимость метода.

ПРИМЕР РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПО МОДЕЛИ 1'

Были проведены расчеты ряда вариантов неизотермического нестационарного течения газа по морскому газопроводу для квазистационарного (18) и нестационарного (модель 2) процессов теплообмена газа с окружающей средой. Рассчитанная погрешность такой замены позволила оценить допустимость замены

нестационарной модели теплообмена ее квазистационарным вариантом. Переход к квазистационарной модели теплообмена при численном интегрировании системы уравнений модели 1' позволил существенно упростить алгоритм вычисления.

В модельной задаче приняты следующие параметры морского газопровода: неизменный внутренний радиус $R = 0,5$ м; параметры первого слоя обшивки: толщина $\delta_1 = 0,04$ м, теплопроводность $\lambda_1 = 24$ Вт/(м·К), параметры второго слоя: толщина $\delta_2 = 0,12$ м, теплопроводность $\lambda_2 = 1,7$ Вт/(м·К); массовый расход Q газа в начальный момент времени равен 400 кг/с; температура T^* окружающей морской воды считается неизменной вдоль газопровода и равной 278,15 К; длина газопровода L принята равной 300 км. Значения характерных величин: $\rho_x = 138,02$ кг/м³, $T_x = 283,15$ К, $l_x = 10$ км, им соответствуют характерное давление $p_x = p(\rho_x, T_x) = 15,2$ МПа и характерная скорость $u_x = Q/(\pi R^2 \rho_x) = 3,69$ м/с.

Значения параметров h , c , δ , μ , c_v выбирались характерными для смеси газов с преобладанием метана, коэффициент гидравлического сопротивления λ принят равным 0,00829. Для указанного варианта параметров значения безразмерных комплексов m_1 – m_{10} равнялись:

$$m_1 = 8087,414, \quad m_2 = 41,488, \quad m_3 = 0,12 \cdot 10^{-6},$$

$$m_4 = 0,194, \quad m_5 = 125,199, \quad m_6 = 1,293,$$

$$m_7 = 0,916, \quad m_8 = 0,856,$$

$$m_9 = 1,056, \quad m_{10} = 0,253.$$

В исследуемых режимах для температуры $T(z, t)$ газовой смеси, как показали расчеты, выполняется условие: $T(z, t) > T_* \quad \forall z \in [0, L]$, где $T_* = 271$ К — температура фазового перехода морская вода-лед. При этом условии оледенение внешней поверхности газопровода невозможно.

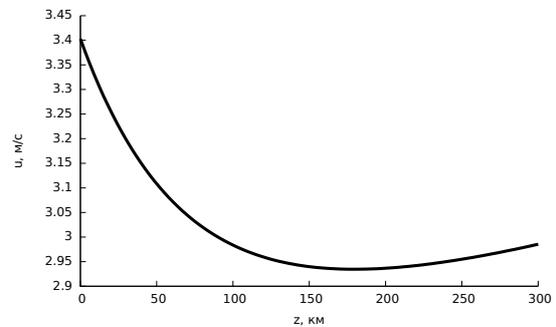


Рис. 2. Изменение размерной величины скорости потока u вдоль газопровода в момент $t = 10$ часов

На рисунке 2 приведено изменение скорости потока (м/с) вдоль газопровода в момент времени $t = 10$ часов, рассчитанное по модели 1 при нестационарной модели теплообмена. На рисунке 3 приведено изменение температуры (К) потока вдоль газопровода в момент $t = 10$ часов, рассчитанное по модели 1 при нестационарной модели теплообмена (1) и при квазистационарной модели (2).

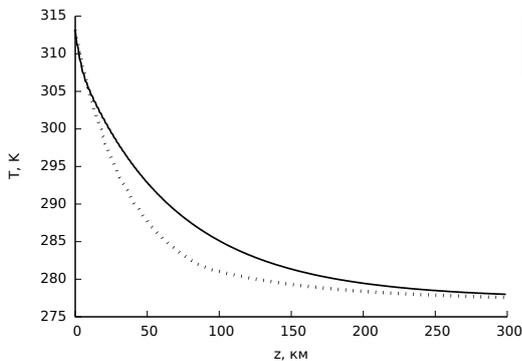


Рис. 3. Изменение температуры T потока вдоль газопровода в момент $t = 10$ часов: 1 — при нестационарной модели теплообмена; 2 — при квазистационарной модели теплообмена

На рисунке 4 приведена зависимость от времени потока тепла q_w [Дж/(с·м²)] в сечении газопровода $z = 10$ км для варианта нестационарной модели теплообмена (2) и квазистационарной модели (1).

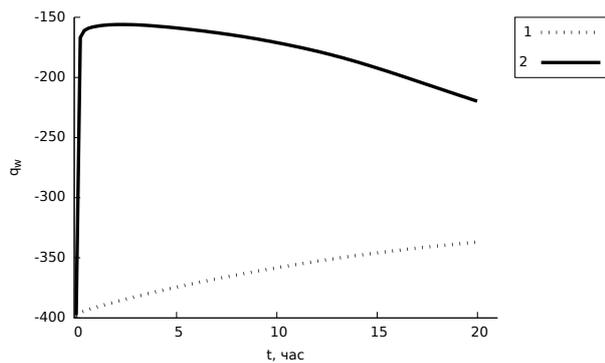


Рис. 4. Изменение потока тепла q_w в сечении газопровода $z = 10$ км: 1 — при квазистационарной модели теплообмена; 2 — при нестационарной модели теплообмена

На рисунке 5 приведено изменение во времени потока тепла q_w [Дж/(с·м²)] при $z = 200$ км.

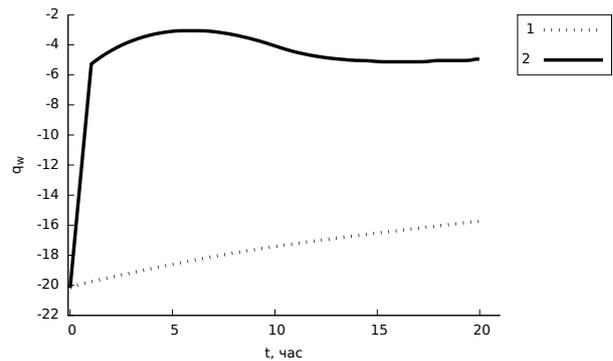


Рис. 5. Изменение потока тепла q_w в сечении газопровода $z = 200$ км: 1 — при квазистационарной модели теплообмена; 2 — при нестационарной модели теплообмена

Выводы

Предложена методика оценки допустимости использования квазистационарной модели теплообмена в расчетах нестационарных неизотермических течений смеси реальных газов по морским газопроводам. Приведен пример расчета нестационарного течения смеси газов по участку модельного морского газопровода при нестационарной и квазистационарной моделях теплообмена. Результаты компьютерного моделирования рассмотренной задачи позволяют определить область допустимости использования квазистационарной модели теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В. и др. Модели морских газопроводов. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2005. 156 с.
2. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Квазиодномерная нестационарная модель процессов в морских газопроводах // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2015. № 3. С. 55–66.
3. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей / пер. с англ.; под ред. Б. И. Соколова. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Химия, Ленингр. отд., 1982. 592 с.
4. Helgaker J. F., Oosterkamp A., Ytrehus T. Transmission of Natural Gas through Offshore Pipelines — Effect of Unsteady Heat Transfer Model [Conference] // MEKIT '13. Trondheim: Tapir, 2013.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Едиториал УРСС, 2005. 384 с.
6. Ермолаева Н. Н., Курбатова Г. И. Анализ подходов к моделированию термодинамических

процессов в газах при высоких давлениях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 1. С. 35–45.

7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1976. 618 с.

Поступила в редакцию 02.06.2016

REFERENCES

1. Kurbatova G. I., Popova E. A., Filippov B. V. et al. Modeli morskikh gazoprovodov [Models of sea gas-pipelines]. St. Petersburg: S.-Peterb. gos. un-t, 2005. 156 p.

2. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I. Qvasiodnomernaja nestacionarnaja model' processov v morskikh gazoprovodah [Quasi-one-dimensional non-stationary model of processes in a sea gas-pipeline]. *Vestnik S.-Peterb. un-ta* [Vestnik of St. Petersburg University]. Ser. 10. 2015. No. 3. P. 55–66.

3. Reid Robert C., Prausnitz John M., Sherwood Thomas K. The properties of gases and liquids. McGraw - Hill Book Company, New York. St. Louis, San Francisco, 1977. 592 p.

4. Helgaker J. F., Oosterkamp A., Ytrehus T. Transmission of Natural Gas through Offshore Pipelines - Effect of Unsteady Heat Transfer Model [Conference]. MEKIT '13. Trondheim: Tapir, 2013.

5. Samarskij A. A., Gulin A. V. Ustojchivost raznostnich shem [Stability of difference schemes]. Moscow: Editorial URSS, 2005. 384 p.

6. Ermolaeva N. N., Kurbatova G. I. Analiz podhodov k modelirovaniju termodinamicheskikh processov v gazah pri visikih davlenijah [The analysis of the approaches to the modeling of thermodynamic processes in gas flow at hyperpressure]. *Vestnik S.-Peterb. un-ta* [Vestnik of St. Petersburg University]. Ser. 10. 2013. No. 1. P. 35–45.

7. Roach P. J. Vichislitel'naja gidrodinamika [Computational Fluid Dynamics]. Moscow: Mir, 1976. 618 p.

Received June 2, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ермолаева Надежда Николаевна

к. ф.-м. н., доцент

Санкт-Петербургский государственный университет

Университетский пр., 35, Петергоф,

Санкт-Петербург, Россия, 198504

эл. почта: n.ermolaeva@spbu.ru

тел.: (812) 4287159

CONTRIBUTOR:

Ermolaeva, Nadezda

Saint Petersburg State University

35 Universitetskii pr., Petergof,

Saint Petersburg, Russia 198504

e-mail: n.ermolaeva@spbu.ru

tel.: (812) 4287159