Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2016. С. 73–80
DOI: 10.17076/mat356

УДК 519.175.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ВЕРШИН ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, подчиняющимися степенному закону. Они определяют занумерованные в произвольном порядке полуребра. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер для формирования ребер. Такие модели можно использовать для описания различных сетей коммуникаций и топологии сети Интернет. Мы изучаем подмножество случайных графов при условии, что сумма степеней вершин равна n. Свойства графа зависят от значения параметра τ распределения степеней вершин. Пусть μ_r означает число вершин степени r. Получены предельные распределения μ_r при $N, n \to \infty$ и всех возможных значениях r и τ. Также в нашей модели параметр τ может изменяться вместе с N, n.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; степень вершины; предельные теоремы.

Yu. L. Pavlov. LIMIT DISTRIBUTIONS OF THE NUMBER OF VERTICES WITH GIVEN DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

We consider configuration graphs with N vertices. The degrees of the vertices are independent identically distributed random variables according to power-law distribution. Node degrees form semiedges that are numbered in an arbitrary order. The graph is constructed by joining all the stubs pairwise equiprobably to form edges. Such models can be used for describing different communication networks and Internet topology. We study the subset of random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is equal to n. The properties of the graph depend on the value of the parameter τ of the vertex degree distribution. Let μ_r be the number of vertices with degree r. We obtained the limit distributions of μ_r as $N, n \to \infty$ with all possible values of r and τ. Also in our model the parameter τ can be changed together with N, n.

Keywords: configuration random graph; vertex degree; limit theorems.

Введение

Понятие конфигурационного графа было введено Б. Боллобашем в статье [10]. Такие графы часто используются в качестве моделей разнообразных сложных сетей коммуникаций, в частности, сети Интернет (см., например, [11] и приведенную там библиографию). В наиболее известной [11, 12, 15] модели степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с дискретным степенным распределением. Значения этих случайных величин для каждой вершины определяют число выходящих из нее различимых полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. В случае нечетной суммы степеней вершин вводится дополнительная вершина единичной степени. Обозначим N число основных вершин графа. Согласно [14], появление дополнительной вершины вместе с ее полуребром не влияет на асимптотические свойства графа при $N \to \infty$.

Пусть ξ означает случайную величину, равную степени любой вершины графа (кроме дополнительной). В результате обсуждения свойств больших сетей коммуникаций в [14] предложено рассматривать модели, в которых

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \qquad (1)$$

где $k = 1, 2, \ldots, \quad \tau > 0$. Предельное поведение таких графов изучалось во многих работах, среди них [3, 4, 11, 14]. В некоторых статьях [3, 4, 14] распределение (1) рассматривалось только в случае $\tau \in (1, 2)$, поскольку именно такие значения параметра τ являются типичными для большинства сетей коммуникаций. Однако и другие значения этого параметра представляются интересными. Оказалось, например, что конфигурационные графы можно применять для моделирования лесных пожаров [13], при этом в наиболее важных случаях $\tau > 2$. В некоторых работах [7, 8] отмечается также, что по мере развития сетей распределения степеней вершин могут изменяться. Естественно предположить в этом случае, что параметр τ распределения (1) не является постоянной величиной. В статье [9] показано, что значения $\tau = 1$ и $\tau = 2$ являются точками фазового перехода (или критическими точками), поскольку при переходе значений τ через эти точки резко меняются свойства графа. Заметим, что если $\tau > 3$, то распределение (1) имеет конечную дисперсию, но при $\tau \leqslant 3$ дисперсия не существует, поэтому значение $\tau = 3$ также представляет определенный интерес.

В статьях [5, 6] рассматривались условные конфигурационные графы при условии, что число ребер известно. Обозначим $\xi_1, \ldots, \xi_N$ степени вершин $1, \ldots, N$ и предположим, что эти случайные величины имеют распределение (1), а $\xi_1 + \ldots + \xi_N = n$. Пусть μ_r равно числу вершин такого условного графа, степень которых равна r, $\quad r \leqslant n - N + 1$. В [5, 6] найдены предельные распределения μ_r во всех возможных зонах стремления N, n к бесконечности и при всех возможных фиксированных значениях параметра τ. Следуя доказательствам предельных теорем для μ_r в [5, 6] и учитывая непрерывность участвующих в этих доказательствах функций, нетрудно убедиться, что утверждения теорем справедливы и в случае изменяющихся значений τ, если только они не приближаются к критическим точкам $\tau = 1, 2, 3$. Таким образом, осталось нерассмотренным предельное поведение μ_r при приближении τ к этим точкам. На решение этой задачи и направлена настоящая статья. В соответствии с приведенным выше замечанием мы можем далее не учитывать дополнительную вершину, вместе с инцидентным ей полуребром, в случае ее появления. В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1 и 2. Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–5), с помощью которых в конце статьи доказываются теоремы 1, 2.

Основные результаты

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$, такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{\lambda^k p_k}{1 - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \quad (2)$$

где $k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, N, \quad 0 < \lambda < 1$, а $\Phi(z, s, a)$ – функция Лерча:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}. \qquad (3)$$

Используя (1) – (3), находим, что

$$m = \mathbf{E}\eta_i = \\ = \frac{\Phi(\lambda, \tau, 1) - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau-1, 1)}{1 - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \qquad (4)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\eta_i = (2\Phi(\lambda, \tau-1, 1) - \\ - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau-2, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)) \times \\ \times \quad (1 - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1} - m^2. \qquad (5)$$

Легко проверить, что уравнение

$$m = n/N \qquad (6)$$

имеет единственное решение $\lambda, \quad 0 < \lambda < 1$, которое мы и будем использовать в качестве параметра распределения (2). В [6] показано, что если $\tau \leqslant 1$ и $n/N \to \infty$, то $\lambda \to 1$. Это же верно и в случае $\tau > 1, n/N \to \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ – значение дзета-функции Римана в точке τ. Нас интересуют только эти случаи, поскольку, как легко проверить, если $n/N \leqslant c < \infty, \tau < 1$ или $n/N \leqslant c < \zeta(\tau), \tau > 1$, результаты работ [5, 6] остаются в силе. Здесь и далее символом c обозначены некоторые положительные постоянные, не обязательно одинаковые.

Теорема 1. *Пусть r фиксировано, $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, если $\tau \leqslant 1$, и $n/N \to \zeta(\tau)$, если $\tau > 1$. Пусть*

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda) - (m-r)^2 p_r(\lambda)/\sigma^2) \quad (7)$$

и выполнено одно из следующих условий:

1. $\tau \downarrow 3, (1-\lambda)^{\tau-3} \leqslant c < 1, \sqrt{N}(\tau - 3) \to \infty$;
2. $\tau \to 3, \quad (1-\lambda)^{\tau-3} \to 1, \quad \frac{\sqrt{N}}{|\ln(1-\lambda)|} \to \infty$;
3. $\tau \uparrow 3, \quad (1-\lambda)^{\tau-3} \geqslant c > 1, \frac{\sqrt{N}(3-\tau)}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \to \infty$;
4. $\tau \downarrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2} \leqslant c < 1, \frac{\sqrt{N}(1-\lambda)^{3-\tau}}{\tau-2} \to \infty$;
5. $\tau \to 2, \quad (1-\lambda)^{\tau-2} \to 1, \frac{\sqrt{N}|\ln(1-\lambda)|}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \to \infty$;
6. $\tau \uparrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2} \geqslant c > 1, \sqrt{\frac{N}{|\ln(1-\lambda)|}\frac{1-\lambda}{2-\tau}} \to \infty$;
7. $\tau \downarrow 1, \quad (1-\lambda)^{\tau-1} \leqslant c < 1, \frac{N(1-\lambda)^2}{(\tau-1)} \to \infty$;
8. $\tau \to 1, \quad (1-\lambda)^{\tau-1} \to 1, \frac{N|\ln(1-\lambda)|}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \to \infty$;
9. $\tau \uparrow 1, (1-\lambda)^{\tau-1} \geqslant c > 1, \frac{N(1-\lambda)^{\tau+1}}{(1-\tau)|\ln(1-\lambda)|} \to \infty$.

Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1} e^{-u_r^2/2}(1 + o(1)).$$

Теорема 2. *Пусть $N, n, r \to \infty$ и $n/N \to \infty$, если $\tau \leqslant 1$, или $n/N \to \zeta(\tau)$, если $\tau > 1$. Пусть, кроме того, выполнено одно из девяти условий, перечисленных в теореме 1. Тогда равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!} e^{-Np_r(\lambda)}(1 + o(1)).$$

Вспомогательные утверждения

В этом разделе доказываются леммы 1–5. Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \ldots, \eta_N^{(r)}$, имеющие распределение:

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \qquad (8)$$

где $k = 1, 2, \ldots, r = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, N$. Пусть $\zeta_N = \eta_1 + \ldots + \eta_N, \zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \ldots + \eta_N^{(r)}$.

Лемма 1. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times$$

$$\times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Доказательство. Из (1), (2) и (8) следует, что

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N\} = \\ = \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \ldots + \eta_N = n\}.\end{gathered} \quad (9)$$

Это равенство означает, что для двух наборов случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ и $\eta_1, \ldots, \eta_N$ выполнены условия обобщенной схемы размещения, введенной и исследованной В. Ф. Колчиным [2]. В этом случае утверждение леммы 1 является известным следствием обобщенной схемы, легко выводящимся из (9).

Слабая сходимость распределения суммы ζ_N к нормальному закону была доказана в лемме 4 работы [5]. В следующей лемме удалось ослабить условия леммы 4 [5], поэтому она приводится с доказательством. Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию суммы $(\zeta_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 2. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, если $\tau \leqslant 1$, и $n/N \to \zeta(\tau)$, если $\tau > 1$. Пусть выполнено одно из следующих условий:*

1. $\tau \downarrow 3, (1-\lambda)^{\tau-3} \leqslant c < 1, \sqrt{N}(\tau - 3) \to \infty$;
2. $\tau \to 3, \quad (1-\lambda)^{\tau-3} \to 1, \quad \frac{\sqrt{N}}{|\ln(1-\lambda)|} \to \infty$;
3. $\tau \uparrow 3, \quad (1-\lambda)^{\tau-3} \geqslant c > 1, \frac{\sqrt{N}(3-\tau)}{(1-\lambda)^{\tau-3}} \to \infty$;
4. $\tau \downarrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2} \leqslant c < 1, \frac{\sqrt{N}(1-\lambda)^{3-\tau}}{(\tau-2)^{3/2}} \to \infty$;
5. $\tau \to 2, \quad (1-\lambda)^{\tau-2} \to 1, \frac{N|\ln(1-\lambda)|^3}{(1-\lambda)^{\tau-4}} \to \infty$;
6. $\tau \uparrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2} \geqslant c > 1, \frac{N(1-\lambda)^{\tau}}{(2-\tau)^3} \to \infty$;
7. $\tau \to 1, \quad N(1-\lambda)^{\tau} \to \infty$;

Тогда для любого фиксированного t

$$\varphi_N(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины η_1. Из (1)–(3) следует, что

$$\varphi(t) = \frac{1-(1-\lambda)\Phi(\lambda e^{it},\tau,1)}{1-(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)}. \qquad (10)$$

При достаточно малых t

$$\ln\varphi(t) = imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6}Q(t), \qquad (11)$$

где

$$|Q(t)| \leqslant 2\max_{|v|\leqslant|t|}|(\ln\varphi(t))'''_v|. \qquad (12)$$

Учитывая равенство

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{int}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right) \qquad (13)$$

и очевидное соотношение $\sigma\sqrt{N}\to\infty$, из (11)–(13) получаем, что

$$\ln\varphi_N(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{N}}Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right). \qquad (14)$$

Отсюда следует, что для доказательства леммы достаточно показать, что

$$Q(t/(\sigma\sqrt{N}))/(\sigma^3\sqrt{N}) \to 0. \qquad (15)$$

При доказательстве леммы 4 [5] получены следующие оценки σ^2 и $|Q(t/(\sigma\sqrt{N}))|$:

$$\sigma^2 = \qquad (16)$$

$$= \begin{cases} \Theta(1), & \text{если } \tau\to 3;\\ \Theta((\tau-2)^{-1}), & \text{если } \tau\downarrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2}\leqslant c<1;\\ \Theta(-\ln(1-\lambda)), & \text{если } \tau\to 2, (1-\lambda)^{\tau-2}\to 1;\\ \Theta(\frac{(1-\lambda)^{\tau-2}}{2-\tau})), & \text{если } \tau\uparrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2}\geqslant c>1;\\ \Theta((1-\lambda)^{\tau-2}), & \text{если } \tau\to 1, \end{cases}$$

где равенство $x=\Theta(y)$ означает, что существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, что $C_1|y|\leqslant|x|\leqslant C_2|y|$;

$$\left|Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right| = \qquad (17)$$

$$= \begin{cases} O((\tau-3)^{-1}), & \text{если } \tau\downarrow 3, (1-\lambda)^{\tau-3}\leqslant c<1;\\ O(-\ln(1-\lambda)), & \text{если } \tau\to 3, (1-\lambda)^{\tau-3}\to 1;\\ O(\frac{(1-\lambda)^{\tau-3}}{3-\tau}), & \text{если } \tau\uparrow 3, (1-\lambda)^{\tau-3}\geqslant c>1;\\ O((1-\lambda)^{\tau-3}), & \text{если } \tau\to 2 \text{ или } \tau\to 1. \end{cases}$$

Сравнивая (15)–(17), легко установить справедливость утверждения леммы 2.

Кроме доказанной выше слабой сходимости распределения суммы ζ_N имеет место и локальная сходимость к нормальному закону. Ранее она была доказана в лемме 5 [5], но ее условия удалось существенно упростить, что отражено ниже, в лемме 3.

Лемма 3. *Пусть $N,n\to\infty$ так, что $n/N\to\infty$, если $\tau\leqslant 1$ и $n/N\to\zeta(\tau)$, если $\tau>1$. Пусть выполнено одно из условий 1–9 теоремы 1. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z=(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N=k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-z^2/2}.$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N=k\} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{N}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt, \qquad (18)$$

кроме того,

$$\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-izt-t^2/2\}dt. \qquad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что разность

$$R_N = 2\pi\left(\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N=k\} - \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right) \qquad (20)$$

можно представить в виде суммы:

$$R_N = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5, \qquad (21)$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izt}(\varphi_N(t)-e^{-t^2/2})dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{A<|t|<\varepsilon b\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon b\sigma\sqrt{N}<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$

$$I_4 = \int\limits_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}\leqslant|t|\leqslant\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$

$$I_5 = -\int\limits_{A<|t|} e^{-izt-t^2/2}dt,$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее, а величины $b=b(\lambda,\tau)$ определяются так:

$$b(\lambda,\tau) = \qquad (22)$$

$$= \begin{cases} \tau-3, \quad \text{если } \tau\downarrow 3, \quad (1-\lambda)^{\tau-3}\leqslant c<1; \\ (-\ln(1-\lambda))^{-1}, \text{если } \tau\to 3, (1-\lambda)^{\tau-3}\to 1; \\ \frac{3-\tau}{(1-\lambda)^{\tau-3}}, \quad \text{если } \tau\uparrow 3, \quad (1-\lambda)^{\tau-3}\geqslant c>1; \\ \frac{(1-\lambda)^{3-\tau}}{\tau-2}, \quad \text{если } \tau\downarrow 2, \quad (1-\lambda)^{\tau-2}\leqslant c<1; \\ \frac{|-\ln(1-\lambda)|}{(1-\lambda)^{\tau-3}}, \quad \text{если } \tau\to 2, \quad (1-\lambda)^{\tau-2}\to 1; \\ \frac{(1-\lambda)}{2-\tau}, \quad \text{если } \tau\to 2; 1, \quad (1-\lambda)^{\tau-2}\geqslant c>1. \end{cases}$$

Очевидно, что утверждение леммы справедливо, если разность R_N стремится к нулю. Рассмотрим интегралы I_1–I_5 в сумме (21). По лемме 2 $I_1 \to 0$. Далее

$$|I_5| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-t^2/2}dt, \tag{23}$$

и последний интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A. Используя (13), (14), (16), (17) и (22), легко получить, что

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A<|t|} e^{-ct^2}dt, \tag{24}$$

что оценивается аналогично (23). Известно, что если $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$, то существует такое $c>0$, что $|\varphi(t)| \leqslant e^{-c}$, поэтому

$$|I_4| \leqslant 2\pi\sigma\sqrt{N}e^{-cN}. \tag{25}$$

Отсюда и из (16) ясно, что при $\tau\to 3$

$$I_4 \to 0. \tag{26}$$

Пусть $\tau\downarrow 2$. Тогда из (16) и (25) следует, что

$$|I_4| \leqslant \sqrt{N/(\tau-2)}e^{-cN}. \tag{27}$$

Учитывая условие $(1-\lambda)^{\tau-2}\leqslant c<1$, из (27) находим, что

$$|I_4| \leqslant c\sqrt{N}e^{-cN} \to 0.$$

Пусть $\tau\to 2, (1-\lambda)^{\tau-2}\to 1$. Тогда

$$|I_4| \leqslant c\sqrt{N|\ln(1-\lambda)|}e^{-cN}. \tag{28}$$

По условию $N(1-\lambda)^2|\ln(1-\lambda)|^2\to\infty$, поэтому $\sqrt{N/|\ln(1-\lambda)|}\to\infty$ и из (28) получаем, что

$$|I_4| \leqslant c\sqrt{N|\ln(1-\lambda)|}\exp\{-c\sqrt{N|\ln(1-\lambda)|}\},$$

а последнее выражение, очевидно, стремится к нулю. Рассуждая подобным же образом в других случаях изменения τ, опять приходим к соотношению (26).

Осталось рассмотреть интеграл I_3. Из (3) следует, что если $\tau>1$, то $\Phi(\lambda,\tau,1)$ конечно и

$$(1-\lambda)\Phi(\lambda,\tau,1)\to 0. \tag{29}$$

Известно [1], что при $\tau\neq 1,2,3,\ldots$

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda,\tau,1) = \lambda^{-1}(\Gamma(1-\tau)(-\ln\lambda)^{\tau-1}+ \\ +\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta(\tau-k)}{k!}(\ln\lambda)^k),\end{aligned} \tag{30}$$

где значения $\zeta(x)$ при $x<1$ берутся в смысле аналитического продолжения дзета-функции. Из (30) находим, что при $\tau\to 1$

$$\Phi(\lambda,\tau,1)\sim\Gamma(1-\tau)(-\ln\lambda)^{\tau-1}+\zeta(\tau). \tag{31}$$

Используя известные [1] разложения в ряд гамма-функции и дзета-функции, получаем, что при $\tau\to 1$

$$\Gamma(1-\tau)\sim(1-\tau)^{-1}, \quad \zeta(\tau)\sim(\tau-1)^{-1}. \tag{32}$$

Из (31) и (32) находим, что при $\tau\to 1, \lambda\to 1$

$$\Phi(\lambda,\tau,1)\sim\frac{1-(1-\lambda)^{\tau-1}}{\tau-1}. \tag{33}$$

Отсюда видим, что и при $\tau\to 1$ выполняется соотношение (29). Поскольку $1-\lambda e^{it} = 1-\lambda(\cos t + i\sin t)$, из (10) получаем, что

$$\begin{aligned}\varphi(t) = 1-\frac{t^2}{2}\Phi(\lambda,\tau,1)(1+o(1))+ \\ +it\Phi(\lambda,\tau,1)(1+o(1)),\end{aligned} \tag{34}$$

поэтому

$$|\varphi(t/(\sigma\sqrt{N}|^N \leqslant \exp\{-ct^2\Phi(\lambda,\tau,1)/\sigma^2\}.$$

Следовательно,

$$|I_3| \leqslant 2\int_{\varepsilon b\sigma\sqrt{N}}^{\infty}\exp\{-ct^2\Phi(\lambda,\tau,1)/\sigma^2\}dt.$$

Отсюда

$$|I_3| \leqslant \frac{2\sigma}{\sqrt{\Phi(\lambda,\tau,1)}}\int\limits_{\varepsilon b\sqrt{N\Phi(\lambda,\tau,1)}}^{\infty} e^{-cx^2}dx. \tag{35}$$

Из условий леммы, (16), (17), (22) и (33) следует, как нетрудно проверить, что во всех случаях

$$b\sqrt{N\Phi(\lambda,\tau,1)}\to\infty.$$

Заметим, что при $x\to\infty$

$$\int_x^{\infty} e^{-cx^2}dx \sim (2cx)^{-1}e^{-cx^2}.$$

Отсюда и из (35) получаем, что

$$|I_3| \leqslant \frac{c\sigma\exp\{-cNb^2\Phi(\lambda,\tau,1)\}}{b\sqrt{N}\Phi(\lambda,\tau,1)}. \tag{36}$$

Если $\tau \to 3$, то из (3) и (16) ясно, что $\sigma, \Phi(\lambda,\tau,1) = \Theta(1)$, поэтому при $\tau \downarrow 3, (1-\lambda)^{\tau-3} \leqslant c < 1$, учитывая условие $\sqrt{N}(\tau-3) \to \infty$, из (22) и (36) находим, что

$$|I_3| \leqslant \frac{c\exp\{-cN(\tau-3)^2\}}{\sqrt{N}(\tau-3)} \to 0.$$

Аналогичным образом выводим соотношение $I_3 \to 0$ и в других случаях изменения τ. Таким образом, все интегралы стремятся к нулю и из (20), (21) следует, что лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь предельное поведение суммы $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\eta_1^{(r)}$. Из (2), (8) и (10) следует, что

$$\varphi_r(t) = \frac{\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}}{1-p_r(\lambda)}. \tag{37}$$

Легко видеть также, что

$$m_r = \mathbf{E}\eta_1^{(r)} = \frac{m - rp_r(\lambda)}{1-p_r(\lambda)}, \tag{38}$$

$$\sigma_r^2 = \mathbf{D}\eta_1^{(r)} = \\ = \frac{\sigma^2}{1-p_r(\lambda)}\left(1-p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2}p_r(\lambda)\right). \tag{39}$$

Пусть $\varphi_S^{(r)}(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$. Тогда

$$\varphi_S^{(r)}(t) = \exp\left\{-\frac{iSm_rt}{\sigma_r\sqrt{S}}\right\}\varphi_r^S\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right). \tag{40}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 2 и, кроме того, пусть $S = N(1-p_r(\lambda))(1+o(1))$. Тогда*

$$\varphi_S^{(r)}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Это утверждение остается в силе и при $r \to \infty$.

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства леммы 2. По аналогии с (11) получаем, что

$$\ln\varphi_r(t) = im_rt - \frac{\sigma_r^2t^2}{2} + \frac{t^3}{6}Q_r(t), \tag{41}$$

где

$$|Q_r(t)| \leqslant 2\max_{|v|\leqslant|t|}|(\ln\varphi_r(t))_v^{'''}|. \tag{42}$$

Тогда из (40)–(42) находим, что

$$\ln\varphi_S^{(r)}(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma_r^3\sqrt{S}}Q_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right). \tag{43}$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно установить соотношение, подобное (15):

$$Q_r(t/(\sigma_r\sqrt{S}))/(\sigma_r^3\sqrt{S}) \to 0. \tag{44}$$

Используя (2)–(5), (16), (38), (39), асимптотическое разложение функции Лерча (30), а также свойства гамма и дзета функций [1], можно оценить предельное поведение σ_r^2. Проводя хоть и громоздкие, но элементарные рассуждения, находим, что в условиях леммы

$$\sigma_r^2 = \Theta(\sigma^2). \tag{45}$$

Из (37) нетрудно получить, что

$$(\ln\varphi_r(t))^{'''} = (\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^{-3}\times \\ \times[(\varphi^{'''}(t) + ir^3p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^2 - \\ - 3((\varphi^{''}(t) + r^2p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi^{'}(t) - irp_r(\lambda)e^{itr})\times \\ \times(\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}) + 2(\varphi^{'}(t) - irp_r(\lambda)e^{itr})^3].$$

Взяв первые три производные от характеристической функции $\varphi(t)$ (см. (10)), используя тот же подход, что и при выводе (45), и учитывая (17), приходим к соотношению:

$$|Q_r(t/(\sigma_r\sqrt{S}))| = \Theta(|Q(t/(\sigma\sqrt{N}))|). \tag{46}$$

Заметим еще, что (45) и (46) остаются справедливыми и при $r \to \infty$. Теперь ясно, что, как и в лемме 2, из (16), (17), (45), (46) следует (44), а это и значит, что лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 3 и $S = N(1-p_r(\lambda))(1+o(1))$. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z_r = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}}e^{-z_r^2/2}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3, представим разность

$$R_S^{(r)} = 2\pi\left(\sigma_r\sqrt{S}\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = k\} - \frac{e^{-z_r^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

в виде суммы пяти интегралов:

$$R_S^{(r)} = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4^{(r)} + I_5^{(r)},$$

которые определяются аналогично интегралам I_1–I_5 из леммы 3 с заменой $\varphi_N(t)$ на $\varphi_S^{(r)}(t)$. Понятно, что нам достаточно доказать, что каждый из интегралов $I_1^{(r)}$–$I_5^{(r)}$ стремится к нулю. Легко проверить, что из условий леммы 3 следуют условия леммы 4, а из нее соотношение $I_1^{(r)} \to 0$. Для $I_5^{(r)}$ справедлива оценка, аналогичная (23). Интеграл $I_2^{(r)}$ оценивается так же, как и I_2 (см. (24)), при этом используются соотношения (43)–(46). В силу (44) для $I_4^{(r)}$ справедливы оценки, подобные (25)–(28).

Осталось рассмотреть $I_3^{(r)}$. Из (34) и (37) следует, что

$$\varphi_r(t/(\sigma_r\sqrt{S}) = (1-p_r(\lambda))^{-1}(1- \\ -((t^2+o(1))/(2\sigma_r^2 S))\Phi(\lambda\exp\{it/(\sigma_r\sqrt{S})\},\tau,1)+ \\ +((it+o(1))/(\sigma_r\sqrt{S}))\Phi(\lambda\exp\{it/(\sigma_r\sqrt{S})\},\tau,1)- \\ -p_r(\lambda)(1+(itr/(\sigma_r\sqrt{S}))+T)),$$

где $|T| < (tr)^2/(2\sigma_r^2 S)$. Нетрудно проверить, что при всех условиях леммы $r^2 p_r(\lambda) < \Phi(\lambda,\tau,1)$, поэтому

$$|\varphi_r(t/(\sigma_r\sqrt{S})|^S \leqslant \exp\{-ct^2\Phi(\lambda,\tau,1)/\sigma_r^2\}.$$

Это неравенство вместе с (45) означает, что интеграл $I_3^{(r)}$ можно оценить так же, как и интеграл I_3 в лемме 3. Лемма 5 доказана.

Доказательства теорем

Известно, что если $Np_r(\lambda)(1-p_r(\lambda)\to\infty$, то равномерно относительно целых k, для которых $(k-Nm)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале, справедливо нормальное приближение биномиальных вероятностей:

$$\binom{N}{k}p_r^k(\lambda)(1-p_r(\lambda))^{N-k} = \\ = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(\lambda)(1-p_r(\lambda))}}\exp\left\{\frac{(k-Nm)^2}{2\sigma^2 N}\right\}. \tag{47}$$

Используя (6), (7), (39), (47) и проводя необходимые вычисления, из лемм 1, 3, 5 получаем утверждение теоремы 1.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что в силу лемм 3 и 5

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n-kr\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}\to 1. \tag{48}$$

Ясно, что $p_r(\lambda)\to 0$, поскольку $r\to\infty$. Тогда равномерно относительно $(k-Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ для биномиальных вероятностей имеет место пуассоновское приближение:

$$\binom{N}{k}p_r^k(\lambda)(1-p_r(\lambda))^{N-k} = \\ = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!}e^{-Np_r(\lambda)}. \tag{49}$$

Теорема 2 следует непосредственно из леммы 1, (48) и (49).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00005.

Литература

1. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

3. *Павлов Ю. Л.* Предельные распределения объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22–34. doi: 10.4213/dm963

4. *Павлов Ю. Л., Степанов М. М.* Предельные распределения числа петель случайного конфигурационного графа // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 282. С. 212–230. doi: 10.1134/S0371968513030175

5. *Павлов Ю. Л., Феклистова Е. В.* О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа вблизи критических точек // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 2 (в печати).

6. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

7. *Самосват Е. А.* Моделирование Интернета с помощью случайных графов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 98 с.

8. *Aiello W., Chang F., Lu L.* A random graph model for massive graphs // Proceedings of the 32nd ACM Symposium on theory of computing. 2000. P. 171–180.

9. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

10. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // Eur. J. Comb. 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

11. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

12. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology // Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

13. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graphs robustness: link saving and forest fire model // Austrian Journal of Statistics. 2014. Vol. 43, iss. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/asj.v.43i4.34

14. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

15. *Wats D. J., Strogats S. H.* Collective dynamics of "small-word"networks // Nature, 1998. Vol. 393. P. 440–442. doi: 10.1038/30916

Поступила в редакцию 05.04.2016

References

1. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. New York; Toronto; London: Megraw-hill book company, inc, 1953. 317 p.

2. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: University Press, 1999. 252 p.

3. *Pavlov Yu. L.* The limit distribution of the size of a giant component in an Internet-type random graph. *Discrete Mathematics and Applications*. 2007. Vol. 17, iss. 5. P. 425–438. doi: 10.1515/dma.2007.034

4. *Pavlov Yu. L., Stepanov M. M.* Limit distributions of the number of loops in a random configuration graph. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013. Vol. 282, iss. 1. P. 202–219. doi: 10.1134/S0081543813060175

5. *Pavlov Yu. L., Feklistova E. V.* On limit behavior of the maximum vertex degrees in a conditional configuration graph near critical points. *Discrete Mathematics and Applications*. 2016 (in print).

6. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

7. *Samosvat E. A.* Modelirovanie Interneta s pomoshju sluchainyh grafov [Internet modeling with help of random graphs]: DSc (Cand. of Phys.-Math.) thesis. Moscow, 2014. 98 p.

8. *Aiello W., Chang F., Lu L.* A random graph model for massive graphs. Proceedings of the 32nd ACM Symposium on theory of computing. 2000. P. 171–180.

9. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

10. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

11. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

12. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology. *Computer communications Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

13. *Leri M., Pavlov Yu.* Power-law random graphs robustness: link saving and forest fire model. *Austrian Journal of Statistics*. 2014. Vol., 43, iss. 4. P. 229–236. doi: 10.17713/asj.v.43i4.34

14. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

15. *Wats D. J., Strogats S. H.* Collective dynamics of "small-word"networks. *Nature*, 1998. Vol. 393. P. 440–442. doi: 10.1038/30916

Received April 5, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218