

УДК 51-76

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД

А. Н. Кириллов¹, Н. В. Смирнов²

¹ *Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН*

² *Петрозаводский государственный университет*

Предложено дальнейшее развитие математической модели управления процессом биологической очистки сточных вод в аэротенке-смесителе. Найдено инвариантное множество системы дифференциальных уравнений, представляющей модель. Разработан алгоритм нахождения оптимального управления процессом биоочистки в задаче минимизации расхода кислорода. Приведены результаты апробации разработанного алгоритма.

Ключевые слова: аэротенк; биоочистка; окисление; оптимальное управление.

A. N. Kirillov, N. V. Smirnov. MATHEMATICAL MODEL OF WASTEWATER TREATMENT PROCESS OPTIMIZATION

Further development of the mathematical model for controlling wastewater biological treatment process in a mixing aeration tank is proposed. The invariant set of the system of differential equations representing the model was found. The algorithm of finding optimal process control in the problem of minimizing oxygen consumption was developed. The results of testing the developed algorithm are reported.

Key words: aeration tank; bioremediation; oxidation; optimal control.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс биоочистки в аэротенке — биохимический процесс для очистки бытовых и промышленных сточных вод, в котором используются воздух (или кислород) и микроорганизмы активного ила для окисления содержащегося в сточной воде субстрата.

Ограниченность запасов питьевой воды и увеличение требований к качеству очищения сточных вод обуславливают необходимость исследований в области математического моделирования процесса биологической очистки сточных вод. Этому направлению посвящено достаточно большое количество публикаций (например, [1–6]).

В статье продолжено исследование в области математического моделирования процесса биоочистки воды в аэротенке-смесителе, представленное в работах [7, 8], в частности, найдено инвариантное множество разработанной математической модели процесса биоочистки, обоснован результат об однократности переключения оптимального управления при минимизации расхода кислорода, разработан и апробирован алгоритм нахождения оптимального управления процессом биоочистки. Также в статье представлены формулы для получения начальных значений модельных концентраций, которые необходимы для практического использования предложенной модели.

ИНВАРИАНТНОЕ МНОЖЕСТВО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА БИОЧИСТКИ

Рассмотрим процесс биологической очистки сточных вод от субстрата одного типа в аэротенке-смесителе объемом V . Введем обозначения: X и S – концентрации активного ила и субстрата в аэротенке, S_{cv} и S_{il} – концентрации субстрата в сточной воде и в иловой смеси, X_{il} – концентрация активного ила во входящей иловой смеси, V_{il} и V_{cv} – расходы иловой смеси и сточных вод, \tilde{V}_{il} и \tilde{V}_{cv} – объемы иловой смеси и сточных вод, входящих в аэротенк за единицу времени (количественно равны V_{il} и V_{cv} соответственно), γ – удельная максимальная скорость роста микроорганизмов в расчете на единицу массы кислорода и на единицу массы субстрата, $Y \in (0, 1)$ – коэффициент перехода массы субстрата в биомассу микроорганизмов, $u = u(t)$ – удельная скорость подачи кислорода в аэротенк.

В аэротенке-смесителе происходит мгновенное перемешивание, поэтому начальные значения концентраций субстрата и активного ила находятся по формулам (1) и (2) соответственно:

$$\tilde{S}^{in} = \frac{S_{cv}\tilde{V}_{cv} + SV}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V}, \quad (1)$$

$$\tilde{X}^{in} = \frac{X_{il}\tilde{V}_{il} + XV}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V}. \quad (2)$$

Среднее время пребывания иловой смеси в аэротенке:

$$T = \frac{V}{V_{il} + V_{cv}}.$$

Преобразовав математическую модель процесса биоочистки, предложенную в работе [7], получим систему:

$$\dot{S} = Q(S^{in} - lS) - \frac{\gamma}{Y}SuX, \quad (3)$$

$$\dot{X} = Q(X^{in} - lX) + \gamma SuX, \quad (4)$$

где константа $Q = 1/T$, T – время биоочистки.

$$S^{in} = \frac{S_{cv}\tilde{V}_{cv}}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V},$$

$$X^{in} = \frac{X_{il}\tilde{V}_{il}}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V},$$

$$l = 1 - \frac{V}{\tilde{V}_{il} + \tilde{V}_{cv} + V}.$$

Для очистки сточных вод за ограниченное время T на канализационных очистных сооружениях (КОС) поддерживают отношение концентраций $X^{in} > S^{in}$, тогда в начальный момент времени $X(0) > S(0)$ и фазовая точка

принадлежит открытому треугольнику OAH (рис. 1).

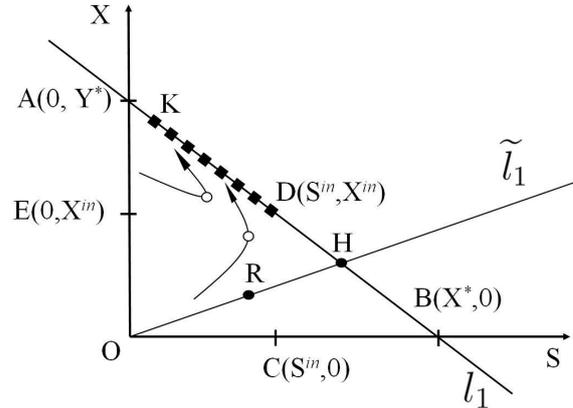


Рис. 1. Фазовый портрет системы (3), (4), где \blacksquare – положение равновесия, \circ – точка переключения управления, $l_1 = \{(S, X) : YS + X = (YS^{in} + X^{in})/l\}$, $\tilde{l}_1 = \{(X, S) : X = S\}$, $X^* = (YS^{in} + X^{in})/l$, $Y^* = (S^{in} + X^{in}/Y)/l$

Теорема 1. Открытый треугольник OAH является инвариантным множеством системы (3), (4) при $\forall u \geq 0$.

Доказательство. Если предположить, что фазовая траектория системы (3), (4) пересекает прямую $\tilde{l}_1 = \{(X, S) : X = S\}$ в точке R , то тангенс угла наклона вектора скорости фазовой траектории в точке R меньше тангенса угла наклона прямой \tilde{l}_1 , тогда

$$\frac{\dot{X}}{\dot{S}} < 1. \quad (5)$$

При проведении процесса биоочистки необходимо поддержание $X^{in} > S$, в результате $\dot{X} = Q(X^{in} - lS) + \gamma uS^2 > 0$ в точке R . Заметим, что, исходя из специфики процесса биоочистки, неравенство (5) может быть верно в двух случаях: либо $\dot{X} > 0$, $\dot{S} < 0$ (тогда фазовая траектория не покидает треугольник OAH через прямую \tilde{l}), либо $\dot{X} > 0$, $\dot{S} > 0$. Во втором случае (5) примет вид:

$$\dot{X} < \dot{S}. \quad (6)$$

Координаты X и S в точке R равны, поэтому неравенство (6) примет вид

$$Q(X^{in} - lS) + \gamma uS^2 < Q(S^{in} - lS) - \frac{\gamma uS^2}{Y},$$

тогда

$$Q(X^{in} - S^{in}) < -\gamma uS^2(1 + 1/Y),$$

где $Q(X^{in} - S^{in}) > 0$, $-\gamma u S^2(1 + 1/Y) < 0$. Получилось противоречие, следовательно, если начальная точка фазовой траектории системы (3), (4) находится в открытом треугольнике OAH , то она не пересекает прямую $\tilde{l}_1 = \{(X, S) : X = S\}$, то есть $X(t) > S(t)$ для $\forall t \in [0, T]$.

Концентрации субстрата и активного ила в аэротенке в начале процесса биоочистки $S(0) = S_0$ и $X(0) = X_0$ соответственно находятся по формулам (3) и (4) или экспериментально. Если $u = 0$, то система (3), (4) приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{S} &= Q(S^{in} - lS), \\ \dot{X} &= Q(X^{in} - lX),\end{aligned}$$

при этом фазовые траектории сходятся к положению равновесия – точке D на рисунке 1.

Умножим на Y уравнение (3) и прибавим его к (4), в результате получим уравнение, решение которого представимо в виде:

$$\begin{aligned}YS + X &= \\ = (YS_0 + X_0 - \frac{YS^{in} - X^{in}}{l})e^{-Qlt} + \frac{YS^{in} + X^{in}}{l}.\end{aligned}$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$ фазовые траектории будут сходиться к прямой

$$l_1 = \{(S, X) : YS + X = (YS^{in} + X^{in})/l\}.$$

Заметим, что вследствие неотрицательности значений концентраций фазовые траектории не пересекают прямую $S = 0$. Тогда фазовые траектории находятся в треугольнике OAH (рис. 1) для $\forall t \in [0, T]$. \square

Уточним поведение фазовых траекторий в нижеследующей теореме.

Теорема 2. При $t \rightarrow \infty$ отрезок KD (рис. 1) является интегральным притягивающим множеством системы (3), (4).

Доказательство. Приравняем к нулю правые части уравнений (3), (4) и сложим их, предварительно умножив (3) на Y . После введения новой переменной $z = z(t) = X + YS$ результат сложения представим в виде:

$$Q(z^{in} - zl) = 0, \quad (7)$$

где $z^{in} = X^{in} + YS^{in}$. Корнем (7) является $z = z^{in}/l$. Выразим $S = (z^{in} - lX)/Yl$ и подставим в приравненную к нулю правую часть уравнения (4), в таком случае получим уравнение

$$Q(X^{in} - lX) + \frac{\gamma u X}{Yl}(z^{in} - lX) = 0.$$

Умножим последнее уравнение на $-Yl/\gamma$ и перегруппируем, в результате получим уравнение

$$ulX^2 + X \left(\frac{l^2 YQ}{\gamma} - uz^{in} \right) - \frac{lYQX^{in}}{\gamma} = 0,$$

у которого только один корень имеет неотрицательное значение:

$$X_1 = \frac{z^{in}}{2l} - \frac{YQl}{2\gamma u} + \sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}.$$

Рассмотрим производную X_1 по u :

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{YQl}{2\gamma u^2} + \frac{\left(\frac{z^{in}}{l} - \frac{YQl}{\gamma u} \right) \frac{YQl}{2\gamma u^2} - \frac{YQX^{in}}{\gamma u^2}}{2\sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}}.$$

Умножим последнее на $\alpha_s = 2\gamma u^2/(YQl) > 0$, получим:

$$\alpha_s \frac{\partial X_1}{\partial u} = 1 + \frac{\frac{z^{in}}{l} - \frac{YQl}{\gamma u} - \frac{2X^{in}}{l}}{2\sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= \frac{z^{in}}{l} - \frac{YQ}{\gamma u} - \frac{2X^{in}}{l}, \\ \varsigma_2 &= 2\sqrt{\left(\frac{YQl}{2\gamma u} - \frac{z^{in}}{2l} \right)^2 + \frac{YQX^{in}}{\gamma u}}.\end{aligned}$$

Значения выражения

$$\varsigma_1^2 - \varsigma_2^2 = -\frac{4YZ^{in}X^{in}}{l^2} < 0,$$

в таком случае $\varsigma_1/\varsigma_2 \in (-1, 1)$ и $\frac{\partial X}{\partial u} > 0$ для $\forall u$. Последнее означает, что значение X увеличивается при увеличении u . Нетрудно доказать, что управлению $u = 0$ соответствует точка покоя D . Тогда положения равновесия, соответствующие $u > 0$, будут находиться на прямой l_1 , левее точки D , правее оси ординат. При этом крайне левая точка K (закрашенный квадрат на рисунке 1) соответствует положению равновесия при наибольшем допустимом управлении \bar{u} . Отрезок KD является интегральным притягивающим множеством системы (3), (4). \square

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ БИООЧИСТКИ

Рассмотрим кусочно-постоянное управление $u = u(t) \in U = [\underline{u}, \bar{u}]$ удельной скоростью подачи кислорода в аэротенк, где \underline{u} и \bar{u} — соответственно наименьшее и наибольшее ее допустимые значения. Поставим задачу нахождения управления оптимального в смысле минимизации расхода кислорода при обеспечении окисления субстрата до концентрации, наиболее близкой к значению нормативно допустимого сброса (НДС) за время T :

$$\int_0^T u dt \rightarrow \min \quad (8)$$

с ограничениями:

$$S(0) = S_0, X(0) = X_0, S(T) \leq \bar{S}, X(T) \leq \bar{X}, \quad (9)$$

где S_0 и X_0 — начальные значения соответствующих переменных, \bar{S} — НДС субстрата, $\bar{X} \in [0, YS^{in} + X^{in}]$ — концентрация активного ила на выходе из аэротенка.

Пусть $'$ — символ транспонирования, символ $\hat{}$ означает оптимальность значения переменной или выражения под ним. Введем вектор переменных $z = z(t) = (z_1(t) \ z_2(t))' = (S \ X)'$; $\varphi(z, u) = (\varphi_1(z, u) \ \varphi_2(z, u))'$, где $\varphi_1(z, u)$ и $\varphi_2(z, u)$ — правые части уравнений (3) и (4) соответственно; $\psi_1 = S(0) - S_0$, $\psi_2 = X(0) - X_0$, $\psi_3 = S(T) - \bar{S}$, $\psi_4 = X(T) - \bar{X}$ — ограничения; λ_i ($i = 0, \dots, 4$) и $p(t) = (p_1(t) \ p_2(t))'$ — множители Лагранжа.

В работе [9] сформулированы необходимые условия экстремума (10)–(16). Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи примет вид

$$\tilde{L} = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \lambda_3 \psi_3 + \lambda_4 \psi_4 + \int_0^T \left(\lambda_0 u + p_1(t)(\dot{S} - \varphi_1) + p_2(t)(\dot{X} - \varphi_2) \right) dt.$$

Уравнение Эйлера (условие стационарности по z) для лагранжиана $L = \lambda_0 u + p_1(t)(\dot{S} - \varphi_1) + p_2(t)(\dot{X} - \varphi_2)$:

$$\dot{p}(t) = \begin{pmatrix} p_1(t)(lQ + \frac{\gamma}{Y}\hat{X}\hat{u}) - p_2(t)\gamma\hat{S}\hat{u} \\ p_1(t)\frac{\gamma}{Y}\hat{S}\hat{u} + p_2(t)(lQ - \gamma\hat{S}\hat{u}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Условия трансверсальности по z для терминанта: $l = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \psi_i$:

$$\begin{aligned} p(0) &= \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \\ p(T) &= \begin{pmatrix} p_1(T) \\ p_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_3 \\ -\lambda_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Условие оптимальности по u — принцип минимума в лагранжевой форме:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \left(u \left(\lambda_0 + p_1(t) \frac{\gamma}{Y} \hat{S} \hat{X} - p_2(t) \gamma \hat{S} \hat{X} \right) \right) = \\ = \hat{u} \left(\lambda_0 + \gamma \hat{S} \hat{X} \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right) \right). \end{aligned}$$

Введем функцию

$$g(t) = \lambda_0 + \gamma \hat{S} \hat{X} \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right). \quad (12)$$

В силу условия оптимальности экстремальное управление всюду, кроме точек разрыва (в которых $g(t) = 0$), определяется следующим образом:

$$\hat{u} = \begin{cases} \underline{u}, & g(t) > 0, \\ \bar{u}, & g(t) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Так как в точке разрыва на значение u не накладывается ограничений, то будем считать, что $u = \underline{u}$ при $g(t) = 0$.

Условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_3(\hat{S}(T) - S^*) = 0, \quad (14)$$

$$\lambda_4(\hat{X}(T) - X^*) = 0, \quad (15)$$

Условие неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, 4. \quad (16)$$

Теорема 3. При выполнении условий (10)–(11), (13)–(16) в системе (3), (4) количество переключений управления не более одного.

Доказательство. Перепишем (10) в виде

$$\dot{p}_1(t) = \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right) \gamma \hat{X} \hat{u} + p_1(t) l Q,$$

$$\dot{p}_2(t) = \left(\frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t) \right) \gamma \hat{S} \hat{u} + p_2(t) l Q.$$

Рассмотрим функцию

$$r(t) = \frac{p_1(t)}{Y} - p_2(t)$$

и ее производную

$$\dot{r}(t) = r(t) \left(\frac{\gamma \hat{X} \hat{u}}{Y} - \gamma \hat{S} \hat{u} + l Q \right). \quad (17)$$

Пусть

$$\zeta(t) = \frac{\gamma \widehat{X} u}{Y} - \gamma \widehat{S} \widehat{u} + lQ.$$

Специфика процесса биоочистки такова, что $\widehat{X} > \widehat{S}$, поэтому $\zeta(t) > 0$ для $\forall t \in [0, T]$. Решение уравнения (17):

$$r(t) = r(0)e^{\int_0^t \zeta(t) dt}. \quad (18)$$

Значения $p_1(0), p_2(0) \geq 0$ в силу условий (11), (16). При $p_1(0) = p_2(0) = 0$ функция $g(t) > 0$ для $\forall t \in [0, T]$ (см. (12)), и переключений управления не будет, иначе возможны три варианта взаимного расположения значений $p_1(0)$ и $p_2(0)$ на числовой прямой.

1) Если

$$p_1(0) > Yp_2(0),$$

тогда из (18) следует, что поскольку $r(0) > 0$, то $r(t) > 0$ для $\forall t \in [0, T]$, и при этом с течением времени значение функции $r(t)$ будет увеличиваться. Тогда в силу (13) переключения управления не будет.

2) Если

$$p_1(0) < Yp_2(0),$$

то $r(0) < 0$, и в силу (18) $r(t)$ является убывающей функцией, а значит, $r(t) < 0$ для $\forall t \in [0, T]$. Значение λ_0 определяет три различных варианта переключения управления.

2.1) Если значение $g(t) \geq 0$ для $\forall t \in [0, T]$, то в силу (13) переключения управления не будет.

2.2) Если $g(0) \geq 0$ и существует такое $t^* \in (0, T]$, что $g(t^*) < 0$, то в силу (13) произойдет переключение управления. Найдем производную $g(t)$ в силу системы (3), (4):

$$\dot{g}(t) = \gamma r(t) \left(Q(S^{in} - \widehat{S}l)\widehat{X} + \widehat{S}QX^{in} \right). \quad (19)$$

По условию $\gamma r(t) < 0$. Так как $S^{in} > \widehat{S}l$ для $\forall t \in [0, T]$, то $Q(S^{in} - \widehat{S}l)\widehat{X} + \widehat{S}QX^{in} > 0$. В результате $\dot{g}(t) < 0$, а следовательно, функция $g(t)$ является убывающей. Таким образом, $g(t) < 0$ для $\forall t \in [\tilde{t}, T]$, где $g(\tilde{t}) = 0$. Последнее подтверждает, что управление переключается один раз на промежутке $[0, T]$

2.3) Если значение $g(0) < 0$, то вследствие убывания $g(t)$ получаем, что $g(t) < 0 \forall t \in [0, T]$ и в силу (13) переключения управления не будет.

3) Если

$$p_1(0) = Yp_2(0),$$

то $r(0) = 0$, в силу (18) получаем, что $r(t) = 0$ для $\forall t \in [0, T]$. В таком случае $g(t) = \lambda_0 \geq 0$, и в силу (13) переключения управления не будет. \square

Теорема 4. Управление u , для которого выполнены условия (10)–(11), (13)–(16), является оптимальным в смысле минимизации функционала (8) при соблюдении ограничитель (9).

Доказательство. Для выполнения условия (16) необходимо выполнение неравенства $\lambda_i \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, 4$), при этом для сохранения в лагранжиане L управления u необходимо выполнение условия $\lambda_0 \neq 0$. Функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$ задаются уравнением (10) с граничными условиями (11).

В качестве λ_1 возьмем любое положительное число, например, $\lambda_1 = 1$. Методом дихотомии значение λ_2 находится так, чтобы с допустимой погрешностью выполнялось условие $\psi_3 = 0$, что обеспечивает выполнение условия (14) при $\forall \lambda_3$. Для нахождения значения λ_2 численно решается система (3), (4), при этом момент переключения управления τ находится с помощью (13). Будем использовать значение $\bar{X} = X(T)$, что обеспечит выполнение (15) при $\forall \lambda_4$. Таким образом, необходимые условия оптимальности управления, приведенные в работе [9], выполнены.

Из теоремы 3 следует, что количество моментов переключения управления не более одного, при этом управление до момента переключения принимает значение \underline{u} , после момента переключения — \bar{u} . Различным управлениям соответствуют различные значения функционала (8) (рис. 2), тогда, если оптимальное управление существует, то оно единственно.

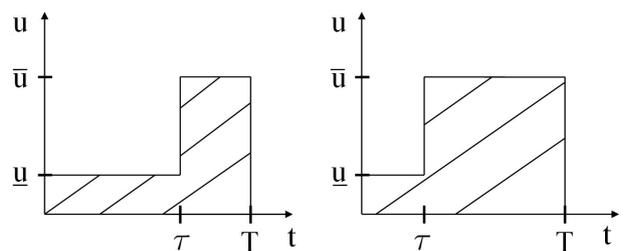


Рис. 2. Динамика удельной скорости подачи кислорода, τ — момент переключения управления, T — период аэрации

В работе [10] на странице 284 приведена теорема о существовании оптимального управления. Эту теорему можно применить к рассматриваемой задаче, при этом многие условия теоремы выполняются очевидным образом и проверки требуют только условия ограниченности и выпуклости. Ограниченность траектории $(S(t), X(t))$ следует из теоремы 1.

Выпуклость множества

$$V(S, X) = \left(u, Q(S^{in} - S) - \frac{\gamma}{Y} SuX, Q(X^{in} - X) + \gamma SuX \right) \equiv (u, a + bu, c + du) \text{ в } R^3,$$

при любых фиксированных S, X (т. е. a, b, c, d фиксированные) следует из того, что $V(S, X)$ — отрезок прямой в R^3 при $u \in [u, \bar{u}]$. \square

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Часто сточные воды промышленного предприятия содержат один тип субстрата, при этом процесс сброса сточных вод предприятием не является непрерывным, а повторяется с некоторой периодичностью. Очистка сточных вод занимает некоторое время T , в течение которого субстрат непрерывно поступает в аэротенк. Во избежание получения штрафов от управления Роспотребнадзора необходимо поддерживать значение выходной концентрации субстрата $S(t)$ в очищенной сточной воде меньше значения нормативно допустимого сброса (НДС) S^{lim} . Для обеспечения

$$S(t) < S^{lim}, \forall t \in [0, T] \quad (20)$$

необходимо, чтобы в конце процесса биоочистки $S(T) \leq \bar{S}$, где значение \bar{S} определяется технологом очистных сооружений.

Рассмотрим аэротенк-смеситель объемом $V = 600 \text{ м}^3$. Для вычислений использованы данные, близкие к экспериментальным, полученным на КОС г. Петрозаводска в 2015 г.: $S_{cv} = 139,4 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$ (БПК_{полн} — биохимическое потребление кислорода полное), $X_{il} = 1639,4 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $V_{cv} = 712,2 \text{ м}^3/\text{час}$, $V_{il} = 855 \text{ м}^3/\text{час}$, $X(0) = 910 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $S(0) = 2,95 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $Y = 0,67$ (безразмерная величина). Значение $\gamma = 0,00000825$ найдено по экспериментальным данным. В качестве значения $S^{lim} = 5 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$, $\bar{S} = 3 \text{ г БПК}_{\text{полн}}/\text{м}^3$. Для численного моделирования использовано значение $\lambda_0 = 0,01$, $\lambda_1 = 1$.

С применением разработанного метода найдены оптимальные управления для различных значений \bar{u} . Динамика концентрации S при различных \bar{u} изображена на рисунке 3. Этот рисунок также показывает, что условие (20) выполняется, а пики на графиках соответствуют моментам переключения управления. Если при нахождении оптимального управления существует такое t , что $S(t) > S^{lim}$, то это говорит о необходимости увеличения значения

концентрации X путем увеличения значения V_{il} .

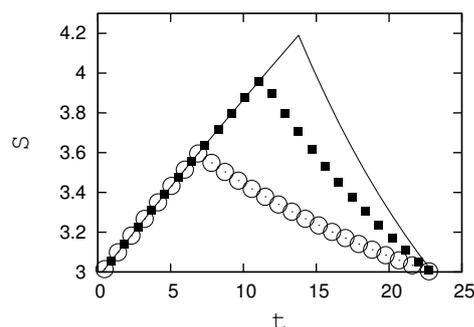


Рис. 3. Изменение концентрации S (г БПК_{полн}/м³) во времени t (мин) при различных значениях \bar{u} : \circ — при $\bar{u} = 4$, \blacksquare — при $\bar{u} = 5$, — — при $\bar{u} = 6$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель управления процессом биоочистки сточных вод в случае субстрата одного типа в аэротенке-смесителе. Произведено качественное исследование разработанной математической модели, найдено ее инвариантное множество и интегральное притягивающее множество.

С целью минимизации расхода кислорода разработан и апробирован алгоритм для нахождения оптимального управления процессом биоочистки в аэротенке-смесителе. Этот алгоритм позволяет оптимизировать расход кислорода при поддержании выходной концентрации субстрата в допустимых границах.

Приведены результаты численных экспериментов, показывающие адекватность разработанной модели процессу биоочистки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Henze M., Grady C. P. L., Gujer W. et al. Activated sludge model no. 1. Scientific and Technical Report 1, IAWPRC Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment Processes. IAWPRC, London, 1987.
2. Henze M., Gujer W., Mino T. et al. Activated Sludge Model No. 2d, ASM 2d // Water Science and Technology, 1999. No. 39(1). P. 165–182.
3. Henze M., Gujer W., Mino T., van Loosdrecht M. C. M. Activated Sludge Model No. 3 // Water Science and Technology. 1999. No. 39(1). P. 183–193.
4. Вавилин В. А. Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука, 1986. 143 с.
5. Кириллов А. Н., Рейсс Т. В., Смирнов Н. В. Математическое моделирование процессов нитрификации и окисления органических веществ

в проточной биосистеме // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. Естественные и технические науки, 2013. № 4 (133). С. 105–109.

6. Grigorieva E. V., Khailov E. N. Optimal control of a waste water cleaning plant // UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations. Electronic Journal of Differential Equations. USA. Eighth Mississippi State. 2010. P. 161–175.

7. Смирнов Н. В. Управление процессом биочистки воды в аэротенке // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16–19 июня 2014 г.: Труды. М.:

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 6792–6799.

8. Смирнов Н. В. Оптимальное управление процессом биочистки сточных вод в аэротенке // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1(17). С. 277–282.

9. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

10. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. Л.: Наука, 1972. 576 с.

Поступила в редакцию 02.04.2016

REFERENCES

1. Henze M., Grady C. P. L., Gujer W. et al. Activated sludge model no. 1. Scientific and Technical Report 1, IAWPRC Task Group on Mathematical Modelling for Design and Operation of Biological Wastewater Treatment Processes. IAWPRC, London, 1987.

2. Henze M., Gujer W., Mino T. et al. Activated Sludge Model No. 2d, ASM 2d. *Water Science and Technology*. 1999. No. 39(1). P. 165–182.

3. Henze M., Gujer W., Mino T., van Loosdrecht M. C. M. Activated Sludge Model No. 3. *Water Science and Technology*. 1999. No. 39(1). P. 183–193.

4. Vavilin V. A. Vremya oborota biomassyi i destrukttsiya organicheskogo veshchestva v sistemah biologicheskoy ochistki [Time of biomass turnover and destruction of organic matter in the systems of biological treatment]. Moscow: Nauka, 1986. 143 p.

5. Kirillov A. N., Reyss T. V., Smirnov N. V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov nitrifikatsii i okisleniya organicheskikh veshchestv v protochnoy biosisteme [Mathematical modeling of nitrification and organic matter oxidation processes in flow-through biosystem]. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennyye i tekhnicheskie nauki [Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser.: Natural and engineering sciences]*. 2013. No. 4(133). P. 105–109.

6. Grigorieva E. V., Khailov E. N. Optimal control of a waste water cleaning plant. UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations. Electronic Journal of Differential Equations. USA. Eighth Mississippi State, 2010. P. 161–175.

7. Smirnov N. V. Upravlenie protsessom bioochistki vodyi v aerotenke [Process control of biological water purification in the aeration tank]. XII Vserossiyskoe soveshanie po problemam upravleniya VSPU-2014. Moscow, 16–19 June 2014.: Trudy [Proc.: XII All-Russian meeting on control problems. Moscow, June 16-19, 2014]. Moscow: Institut problem upravleniya im. V. A. Trapeznikova RAN, 2014. P. 6792–6799.

8. Smirnov N. V. Optimalnoe upravlenie protsessom bioochistki stochnyih vod v aerotenke [Optimal control of the process of biological purification of sewage in the aeration tank]. *Protsessy upravleniya i ustoychivosti [Control processes and stability]*. 2014. Vol. 1(17). P. 277–282.

9. Alekseev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V. Optimalnoe upravlenie [Optimal control]. Moscow: Nauka, 1979. 432 p.

10. Li E. B., Markus L. Osnovy teorii optimalnogo upravleniya [Foundations of optimal control theory]. Leningrad: Nauka, 1972. 576 p.

Received April 02, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич
ведущий научный сотрудник, д. ф.-м. н.
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: kirillov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781108

Смирнов Николай Васильевич
старший преподаватель, к. т. н.
Петрозаводский государственный университет
пр. Ленина, 33, Петрозаводск, Республика Карелия,
Россия, 185910
эл. почта: fresh.87@mail.ru
тел.: (8142) 719621

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexandr
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: kirillov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781108

Smirnov, Nikolay
Petrozavodsk State University
33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: fresh.87@mail.ru
tel.: (8142) 719621