Труды Карельского научного центра РАН
№ 8. 2016. С. 62–72
DOI: 10.17076/mat313

УДК 519.175.4

ОБ УСЛОВНЫХ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФАХ СО СЛУЧАЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

Ю. Л. Павлов

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Рассматривается случайный конфигурационный граф с N вершинами, степени которых независимы и одинаково распределены по дискретному степенному закону с положительным параметром τ. Они равны числу выходящих из вершин занумерованных полуребер. Граф образуется путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Свойства графа зависят от значения показателя τ. Исследования последних лет показали, что конфигурационные графы хорошо описывают топологию сети Интернет, если $\tau \in (1, 2)$. Такие графы можно использовать также для моделирования лесных пожаров и банковских кризисов. В этом случае обычно $\tau > 2$. Параметр τ может зависеть от N и даже быть случайным. В статье изучаются конфигурационные случайные графы при условии, что сумма степеней вершин равна n. Предполагается, что при $N \to \infty$ развитие графа происходит в случайной среде, в которой параметр τ является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b], 0 < a < b < \infty$. При $N, n \to \infty$ найдены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени.

Ключевые слова: случайный конфигурационный граф; случайная среда; степень вершины; предельные теоремы.

Yu. L. Pavlov. ON CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPHS WITH RANDOM DISTRIBUTION OF VERTEX DEGREES

We consider a configuration graph with N vertices. The degrees of the vertices are drawn independently from a discrete power-law distribution with positive parameter τ. They are equal to the number of each vertex's numbered semiedges. The graph is constructed by joining all of the semiedges pairwise equiprobably to form edges. Research in the last years showed that configuration power-law random graphs with $\tau \in (1, 2)$ are deemed to be a good implementation of Internet topology. Such graphs could be used also for modeling forest fires as well as banking system defaults. But in these cases usually $\tau > 2$. Parameter τ may depend on N and even be random. In the paper we consider configuration random graphs under the condition that the sum of vertex degrees is equal to n. Random graph dynamics as $N \to \infty$ is assumed to take place in a random environment, where τ is a random variable following uniform distribution on the interval $[a, b], 0 < a < b < \infty$. We obtained the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree as $N, n \to \infty$.

Keywords: configuration random graph; random environment; vertex degree; limit theorems.

Введение

Случайные графы часто используются в качестве моделей современных сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет, социальные, транспортные, телефонные сети (см., например, [8]). Одним из наиболее подходящих для таких моделей видов графов является так называемый конфигурационный граф, впервые введенный в [11]. Наблюдения за реальными сетями показали [12, 13], что во многих случаях достаточно использовать конфигурационный граф со случайными независимыми одинаково распределенными степенями вершин, принимающими натуральные значения. Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее различимых полуребер, т. е. ребер, для которых смежные вершины еще не определены. Пусть число вершин графа равно N. Кроме того, поскольку сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, в случае нечетной суммы в граф вводится еще вспомогательная вершина единичной степени. В [15] отмечается, что эта дополнительная вершина не влияет на асимптотические свойства графа при $N \to \infty$. Построение графа завершается путем попарного равновероятного соединения полуребер для образования ребер. Нетрудно видеть, что в такой конструкции возможно появление петель и кратных ребер.

Для исследования структуры и динамики развития конфигурационных графов в [15] предложено использовать следующее распределение вероятностей случайной величины ξ, равной степени любой вершины графа:

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \qquad (1)$$

где $k = 1, 2, \ldots, \quad \tau > 0$. Наблюдения показали [13], что конфигурационные графы с распределением (1) степеней вершин достаточно адекватно описывают сети, при этом в соответствующих моделях обычно $\tau \in (1, 2)$. Различные свойства таких моделей изучались в [3, 6, 15].

В [7] впервые рассматривались условные конфигурационные графы при условии, что число ребер графа известно. Такие графы полезны для моделирования сетей, в которых число связей можно оценить. Понятно, что свойства графа в значительной степени определяются структурой степеней вершин. Пусть сумма степеней вершин известна и равна n. В работах [4, 5, 7] получены предельные распределения максимальной степени вершины $\xi_{(N)}$ и случайных величин μ_r, равных числу вершин степени r, при различном характере стремления N и n к бесконечности.

В последнее время стали появляться работы, в которых отмечается, что по мере развития сетей распределения степеней вершин могут меняться и даже носить случайный характер [9, 10]. В связи с этим далее мы будем предполагать, что параметр τ распределения (1) является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[a, b], 0 < a < b < \infty$. Тогда из (1) следует, что

$$p_1 = 1 - \frac{1}{(b-a)\ln 2}\left(\frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b}\right), \qquad (2)$$

$$p_k = \frac{1}{(b-a)\ln k}\left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{k^b}\right) - -\frac{1}{(b-a)\ln(k+1)}\left(\frac{1}{(k+1)^a} - \frac{1}{(k+1)^b}\right), \qquad (3)$$

где $k = 2, 3, \ldots$

В статье доказаны предельные теоремы для случайных величин $\xi_{(N)}$ и μ_r в условном конфигурационном графе, степени вершин которого имеют распределение (2), (3), а сумма степеней равна n, при различных соотношениях между стремящимися к бесконечности N и n. В соответствии с приведенным выше замечанием мы можем далее не учитывать дополнительную вершину вместе с инцидентным ей полуребром в случае ее появления.

В следующем разделе формулируются полученные результаты в виде теорем 1–3 для $\xi_{(N)}$ и теорем 4, 5 для μ_r. Далее приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–13), с помощью которых в конце статьи доказываются теоремы 1–5.

Основные результаты

Обозначим $\xi_1, \ldots, \xi_N$ степени вершин $1, \ldots, N$ соответственно. Все они независимы и имеют распределение (2), (3). Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$, такие, что

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta_i = k\} = \frac{\lambda^k p_k}{B(\lambda)}, \qquad (4)$$

где $k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, N, \quad 0 < \lambda < 1$ и

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k p_k. \qquad (5)$$

Пусть m и σ^2 означают математическое ожидание и дисперсию распределения (4) соответственно. Из (4) следует, что

$$m = B^{-1}(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k p_k, \tag{6}$$

$$\sigma^2 = B^{-1}(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty} k^2\lambda^k p_k - m^2. \tag{7}$$

Мы будем рассматривать предельное поведение $\xi_{(N)}$ и μ_r в тех случаях, когда существует $\lambda, 0 < \lambda < 1$, являющееся единственным решением уравнения

$$m = n/N. \tag{8}$$

Это решение и будет использоваться в качестве параметра λ распределения (4). Символами $C_1, C_2, \ldots$ ниже обозначены некоторые положительные постоянные.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to 1, (n-N)^3/N^2 \to \infty$, а $r = r(N,n)$ – наименьшие натуральные числа такие, что $N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \to \gamma$, где γ – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда $\mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r\} \to e^{-\gamma}$, $\quad \mathbf{P}\{\xi_{(N)} = r+1\} \to 1 - e^{-\gamma}$.*

Теорема 2. *Пусть $a \leqslant 1$, $N, n \to \infty$ так, что $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$, а $r = r(N,n)$ выбраны так, что*

$$\frac{aN\lambda^{r+1}}{(b-a)B(\lambda)r^{a+1}\ln r} \to \gamma, \tag{9}$$

где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leqslant r+k\} = \exp\{-\gamma\lambda^k(1-\lambda)^{-1}\}(1+o(1)).$$

Теорема 3. *Пусть $a \leqslant 1$, $\quad N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, и существует такое $\delta > 0$, что $N(1-\lambda)^{2+\delta} \to \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{|\ln\lambda|\xi_{(N)} - u \leqslant z\} \to e^{-e^{-z}},$$

где $-\infty < z < \infty$, а $u = u(N,n)$ выбраны так, что

$$\frac{N|\ln\lambda|^a}{e^u u^{a+1}\ln(u/|\ln\lambda|)} \to \frac{b-a}{a}. \tag{10}$$

Замечание 1. Логарифмируя (10), легко найти, что в условиях теоремы 3 $u \sim \ln N$.

Теорема 4. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to 1, n - N \to \infty$. Тогда для любого фиксированного натурального $r \geqslant 3$ и для целых неотрицательных k равномерно относительно $(k - Np_r(\lambda))/\sqrt{Np_r(\lambda)}$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r(\lambda))^k}{k!}e^{-Np_r(\lambda)}(1+o(1)).$$

Теорема 5. *Пусть $N, n \to \infty$ и выполнено одно из следующих условий:*

1. $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$;
2. $a \leqslant 1, \quad n/N \to \infty, \quad N(1-\lambda)^{2+\delta} \to \infty$,

где δ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного натурального r равномерно относительно $u_r = (k - Np_r(\lambda))/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N})^{-1}e^{-u_r^2/2}(1+o(1)),$$

где

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\lambda)(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2}p_r(\lambda)).$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что условия теорем 1–5 не охватывают всех возможных случаев поведения параметров N, n, λ. Рассмотренные в статье случаи объединяет то, что, как будет показано ниже, сумма степеней вершин при этих условиях имеет предельное нормальное распределение. Другие случаи будут изучены в следующих работах.

Замечание 3. Следуя приведенным ниже доказательствам теорем 3 и 5, нетрудно проверить, что в случае $n/N \to \infty$ утверждения этих теорем сохраняют силу при $\delta = \delta(N,n) \to 0$ так, что $\delta \leqslant \ln\ln s/\ln s$ при достаточно больших s.

Вспомогательные утверждения

В рассматриваемом множестве графов сумма степеней вершин равна n, поэтому из (2) – (4) легко получаем следующий результат.

Лемма 1. *Справедливо равенство:*

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N\} = \\ &= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \ldots + \eta_N = n\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \ldots, \eta_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \leqslant r\}, \tag{12}$$

где $i = 1, \ldots, N$. Обозначим также $\zeta_N = \eta_1 + \ldots + \eta_N$, $\quad \zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \ldots + \eta_N^{(r)}$,

$$P_r = \mathbf{P}\{\eta_1 > r\}. \tag{13}$$

Лемма 1 показывает, что два набора случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ и $\eta_1, \ldots, \eta_N$ удовлетворяют условиям обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, введенной и исследованной В. Ф. Колчиным (см., например, [2]). Из (11) нетрудно получить такое утверждение.

Лемма 2. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\xi_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Пусть $\tilde{\eta}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{\eta}_N^{(r)}$ означают независимые случайные величины, имеющие распределение:

$$\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \qquad (14)$$

где $i = 1, \ldots, N$. Следующая лемма, как показано в [2], легко выводится из (11).

Лемма 3. *Справедливо равенство:*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k(\lambda)(1 - p_r(\lambda))^{N-k} \times$$

$$\times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

где $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = \tilde{\eta}_1^{(r)} + \ldots + \tilde{\eta}_{N-k}^{(r)}$.

Из лемм 2 и 3 видно, что для изучения предельного поведения $\eta_{(N)}$ и μ_r достаточно рассмотреть асимптотику сумм независимых случайных величин ζ_N, $\zeta_N^{(r)}$, $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)}$, бинома $(1 - P_r)^N$ и биномиальных вероятностей. Для этого мы будем использовать доказанные ниже (в лемме 4) свойства параметра λ.

Лемма 4. *Пусть* $N, n \to \infty$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $n/N \to 1$, *то*

$$\lambda = \frac{(n - N)p_1}{2Np_2}(1 + o(1)). \qquad (15)$$

2. *Если* $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$, $a \leqslant 1$, *то* $0 < C_3 \leqslant \lambda \leqslant C_4 < 1$.

3. *Если* $n/N \to \infty$, $\quad a \leqslant 1$, *то* $\lambda \to 1$.

Доказательство. Из (4)–(6) и (8) очевидным образом следует, что при $n/N \to 1$ справедливы соотношения $\lambda \to 0$ и (15). Нетрудно видеть также, что если $n/N \geqslant C_1 > 1$, то $\lambda \geqslant C_3 > 0$. Из (3) вытекает, что при $k \to \infty$

$$p_k \sim \frac{a}{(b - a)k^{a+1} \ln k}. \qquad (16)$$

Используя это соотношение, а также (3) – (6) и (8), находим, что при $n/N \leqslant C_2$ и любом $\lambda < 1$ ряды в (5) и (6) сходятся. Это значит, что второе утверждение леммы 4 доказано. Отсюда ясно также, что при $n/N \to \infty$ и $a \leqslant 1$ равенство (8) справедливо только при $\lambda \to 1$.

В следующих трех леммах рассматривается предельное поведение бинома $(1 - P_r)^N$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$NP_r \to \gamma, \quad NP_{r+1} \to 0, \quad NP_{r-1} \to \infty.$$

Доказательство. Согласно лемме 4 $\lambda \to 0$ и из (4) следует, что

$$NP_r = Np_{r+1}(\lambda)(1 + o(1)) = \\ = N\frac{\lambda^{r+1}p_{r+1}}{B(\lambda)}(1 + o(1)). \qquad (17)$$

Из (5) видно, что $B(\lambda) \sim \lambda p_1$, поэтому из (17) получаем:

$$NP_r \sim N\lambda^r p_{r+1}/p_1, \qquad (18)$$

что и доказывает первое утверждение леммы. Другие утверждения очевидным образом следуют из (18), соотношения $\lambda \to 0$ и условия минимальности r, таких, что $N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \nrightarrow \infty$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$NP_{r+k} = \gamma\lambda^k(1 - \lambda)^{-1}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Из (4) и леммы 4 следует, что

$$NP_{r+k} = Np_{r+1}(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_{r+j+k+1}(\lambda)}{p_{r+1}(\lambda)}, \qquad (19)$$

и (9) выполняется, только если $r \to \infty$. Тогда из (3), (4) и (16) получаем, что равномерно по j

$$p_{r+j+k+1}(\lambda)/p_{r+1}(\lambda) = \lambda^{j+k}(1 + o(1)). \qquad (20)$$

Отсюда и из (4), (16), (19) вытекает соотношение:

$$NP_{r+k} \sim \frac{aN\lambda^{r+k+1}}{(b - a)B(\lambda)(1 - \lambda)r^{a+1}\ln r},$$

или

$$NP_{r+k} \sim \gamma\lambda^k(1 - \lambda)^{-1},$$

что и завершает доказательство леммы 6.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $r = (u+z)/|\ln\lambda|$. *Тогда* $NP_r \to e^{-z}$.

Доказательство. Из леммы 4 и (5) следует, что $\lambda \to 1, \quad B(\lambda) \to 1$. Поэтому из (4) получаем:

$$P_r = (1+o(1))\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{r+j}p_{r+j}. \qquad (21)$$

Из замечания 1 ясно, что $r \to \infty$, и из (3), (16), (20), (21) выводим, что

$$P_r = \frac{a+o(1)}{b-a}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{r+j}}{(r+j)^{a+1}\ln(r+j)}.$$

Заменяя суммирование интегрированием, находим отсюда:

$$P_r \sim \frac{a}{b-a}\int_r^{\infty}\frac{\lambda^y}{y^{a+1}\ln y}dy.$$

Нетрудно проверить, что предельное поведение последнего интеграла при $r \to \infty$ приводит к соотношению:

$$P_r \sim \frac{a}{b-a}(|\ln\lambda|e^{r|\ln\lambda|}r^{a+1}\ln r)^{-1}. \qquad (22)$$

Учитывая выбор r и (10), приходим к утверждению леммы 7.

Рассмотрим асимптотику суммы ζ_N. Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$. Докажем следующую лемму.

Лемма 8. *Пусть* $N, n \to \infty$ *так, что выполнено одно из следующих условий:*

1. $n/N \to 1, \quad n - N \to \infty$;
2. $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$;
3. $a \leqslant 1, \quad n/N \to \infty$ *и существует такое* $\delta > 0$, *что* $N(1-\lambda)^{2+\delta} \to \infty$.

Тогда для любого фиксированного t

$$\varphi_N(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ означает характеристическую функцию распределения (4):

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}e^{itk}p_k(\lambda). \qquad (23)$$

Известно, что при достаточно малых t справедливо разложение:

$$\ln\varphi(t) = imt - \frac{\sigma^2t^2}{2} + \frac{t^3}{6}Q(t), \qquad (24)$$

где

$$|Q(t)| \leqslant 2\max_{|v|\leqslant|t|}|(\ln\varphi(t))_v'''|. \qquad (25)$$

Далее нам потребуются нижние оценки σ^2. Их нетрудно получить с помощью леммы 4 и (1)–(7). Заметим, в частности, что если $n/N \to \infty$, то для любого ε такого, что $0 < \varepsilon < 2-a$,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &> C_3\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k/k^{a-1+\varepsilon} = \\ &= C_3\lambda^{-1}\Phi(\lambda, a-1+\varepsilon, 1),\end{aligned} \qquad (26)$$

где $\Phi(x,s,d)$ – известная (см., например, [14]) трансцендентная функция Лерча, имеющая вид:

$$\Phi(x,s,d) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{(j+d)^s}. \qquad (27)$$

Используя разложение $\Phi(\lambda, a-1-\varepsilon, 1)$ в ряд по степеням $1-\lambda$ [1] и учитывая соотношение $\lambda \to 1$, находим, что

$$\Phi(\lambda, a-1+\varepsilon, 1) \sim \Gamma(2-a-\varepsilon)(1-\lambda)^{a-2+\varepsilon}, \qquad (28)$$

где $\Gamma(x)$ – значение гамма-функции в точке x. Учитывая (26), (28) и свойства гамма-функции, приходим к оценкам:

$$\sigma^2 \geqslant \begin{cases} C_4\lambda, & \text{если } n/N \to 1; \\ C_5, & \text{если } 1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty; \\ C_6(1-\lambda)^{a-2+\varepsilon}, & \text{если } n/N \to \infty. \end{cases} \qquad (29)$$

Кроме того, будет полезно следующее легко проверяемое соотношение, справедливое при $n/N \to 1$ и, согласно лемме 4, при $\lambda \to 0$:

$$\sigma^2 = O(\lambda). \qquad (30)$$

Из (15) и (29) следует, что в рассматриваемых условиях

$$\sigma\sqrt{N} \to \infty. \qquad (31)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp\left\{-\frac{iNmt}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\varphi^N\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right), \qquad (32)$$

из (24), (25) ясно, что для доказательства леммы 8 достаточно установить справедливость соотношения:

$$Q(t/(\sigma\sqrt{N}))/(\sigma^3\sqrt{N}) \to 0. \qquad (33)$$

Используя (4), (15) и (23), нетрудно показать путем прямых вычислений, что

$$\begin{aligned}&(\ln\varphi(t))_t''' = \\ &= -i\left(\frac{f_4(t)}{f_1(t)} - 3\frac{f_3(t)f_2(t)}{f_1^2(t)} + 2\left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)}\right)^3\right),\end{aligned} \qquad (34)$$

где

$$f_j(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{j-1}(\lambda e^{it})^k p_k, \quad j=1,2,3,4.$$

Из (34) и явного вида вероятностей (3) можно получить следующие оценки:

$$|(\ln\varphi(t))_t'''|\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases} C_4\lambda, & \text{если } n/N\to 1;\\ C_5, & \text{если } 1<C_1\leqslant n/N\leqslant C_2<\infty;\\ C_6(1-\lambda)^{a-3}, & \text{если } n/N\to\infty. \end{cases} \tag{35}$$

Сопоставляя (29) и (35), приходим к (33), что и доказывает лемму.

Лемма 8 показывает, что распределения сумм ζ_N слабо сходятся к нормальному закону. Покажем, что на самом деле имеет место локальная сходимость.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z=(k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N=k\}=\frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-z^2/2}.$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\{\zeta_N=k\}=(2\pi\sigma\sqrt{N})^{-1}\int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}}e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$

кроме того,

$$(2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-izt-t^2/2\}dt.$$

Рассмотрим разность

$$R_N=2\pi\left[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi e^{z^2}}}\right] \tag{36}$$

и представим ее в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{37}$$

где

$$I_1=\int\limits_{-A}^{A}e^{-izt}[\varphi_N(t)-e^{-t^2/2}]dt,$$

$$I_2=\int\limits_{A<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{N}}e^{-izt}\varphi_N(t)dt, \tag{38}$$

$$I_3=\int\limits_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}\leqslant|t|\leqslant\pi\sigma\sqrt{N}}e^{-izt}\varphi_N(t)dt,$$

$$I_4=-\int\limits_{A<|t|}e^{-izt-t^2/2}dt,$$

а положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Из (36) и (37) понятно, что лемма будет доказана, если обнаружим, что каждый из интегралов I_1–I_4 стремится к нулю.

Из леммы 8 следует, что $I_1\to 0$. Далее,

$$|I_4|\leqslant\int\limits_{A<|t|}e^{-t^2/2}dt, \tag{39}$$

а последний интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Осталось рассмотреть I_2 и I_3. Сначала оценим эти интегралы в наиболее простом случае $1<C_1\leqslant n/N\leqslant C_2<\infty$, а затем изучим их поведение в других случаях. Из (24), (29) и (35) следует, что при $A<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{N}$

$$|\varphi_N(t)|\leqslant e^{-C_3t^2}, \tag{40}$$

поэтому

$$|I_2|\leqslant\int\limits_{A<|t|}e^{-C_3t^2}dt, \tag{41}$$

что оценивается аналогично (39). При $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$ справедливо неравенство $|\varphi(t)|\leqslant e^{-C_4}$, поэтому с помощью (32) находим, что

$$|I_3|\leqslant 2\pi\sigma\sqrt{N}e^{-C_4N}\to 0. \tag{42}$$

Пусть $n/N\to 1$. Учитывая (29) и (35), легко получить, что в области интегрирования I_2

$$|Q(t/(\sigma\sqrt{N}))t/(\sigma^3\sqrt{N})|\leqslant C_5\varepsilon,$$

поэтому из (24), (32) и (38) видим, что оценки (40) и (41) остаются справедливыми. Из леммы 4, (4), (5) и (23) находим, что

$$\varphi(t)=e^{it}(1-p_2\lambda(1-e^{it})/p_1+O(\lambda^2)), \tag{43}$$

следовательно, при $\varepsilon\leqslant|t/(\sigma\sqrt{N})|\leqslant\pi$

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right|\leqslant\exp\left\{-C_6\frac{n-N}{N}\right\}.$$

Отсюда, из леммы 4, (30), (32), (38) и условия $n-N\to\infty$ вытекает соотношение:

$$|I_3|\leqslant C_7\sqrt{n-N}e^{-C_6(n-N)}\to 0. \tag{44}$$

Рассмотрим случай $n/N\to\infty, a\leqslant 1$. Представим I_2 в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\mathrm{I}_2'+\mathrm{I}_2'', \tag{45}$$

где области интегрирования I_2' и I_2'' соответственно равны:

$$\{t : A < |t| \leqslant \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N}\},$$

$$\{t : \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N} < |t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}\}.$$

Опять применяя (29), (32), (35), (38) для I_2', приходим к оценкам вида (40) и (41). Рассмотрим I_2''. Из (23) следует, что

$$\varphi(t) = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty}(e^{itk}-1)\lambda^{k-1}p_k}{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}p_k},$$

поэтому при $|t| < \varepsilon\sigma\sqrt{N}$

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right|^N \leqslant \leqslant \exp\left\{-C_8 N\left(1-\cos\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right\}. \tag{46}$$

Тогда

$$|\mathrm{I}_2''| \leqslant 2\int_{\varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{\mathrm{N}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{C}_9\mathrm{t}^2/\sigma^2}\mathrm{dt},$$

откуда

$$|\mathrm{I}_2''| \leqslant 2 \int\limits_{\varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{\mathrm{N}}}^{\infty} \exp\left\{\frac{-\mathrm{C}_9|\mathrm{t}|^{\mathrm{q}}|\mathrm{t}|^{2-\mathrm{q}}}{\sigma^2}\right\}\mathrm{dt}, \tag{47}$$

где выбор положительной постоянной q указан ниже. Используя оценку (29) для случая $n/N \to \infty$, а также проводя рассуждения, аналогичные получению этой оценки с помощью (28), находим, что

$$(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N} \to \infty, \quad \sigma^2 \leqslant C_{10}(1-\lambda)^{a-2}. \tag{48}$$

Из последнего неравенства и соотношения $N(1-\lambda)^{a-2} \to \infty$ видно, что при $|t| > \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma\sqrt{N}$ можно выбрать $q = q(\delta)$ так, что $|t|^{2-q}/\sigma^2 \geqslant C_{11}$. Отсюда и из (47) понятно, что $\mathrm{I}_2'' \to 0$, и, согласно (45), $I_2 \to 0$.

Легко видеть, что для I_3 выполнено неравенство (42) в силу (48) и условия $N(1-\lambda)^{a-2} \to \infty$. Лемма 9 доказана.

Далее рассмотрим предельное поведение суммы $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$. Из (4), (12) и (23) следует, что

$$\varphi_N^{(r)}(t) = (1-P_r)^{-N}\exp\left\{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \times \times \left[\varphi\left[\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right] - \sum_{j=1}^{\infty}p_{r+j}(\lambda)\exp\left[\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right]\right]^N. \tag{49}$$

Лемма 10. *Следующие утверждения справедливы для любого фиксированного t.*

1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при $s = 0, \pm 1$*

$$\varphi_N^{(r+s)}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

2. *Пусть выполнены условия теоремы 2 или теоремы 3 и леммы 7. Тогда*

$$\varphi_N^{(r)}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Из леммы 8 и (49) получаем, что

$$\varphi_N^{(r)}(t) = (1-P_r)^{-N}e^{-t^2/2}(1+o(1))[1- - (1+o(1))\sum_{j=1}^{\infty}p_{r+j}(\lambda)\exp\left\{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right\}\Bigg]^N. \tag{50}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty}p_{r+j}(\lambda)\exp\left\{\frac{it(r+j)}{\sigma\sqrt{N}}\right\} = P_r + R(t), \tag{51}$$

где P_r определено в (13), а

$$R(t) \leqslant |t/(\sigma\sqrt{N})|\sum_{j=1}^{\infty}(r+j)p_{r+j}(\lambda), \tag{52}$$

из (50) и (51) ясно, что для доказательства первого утверждения леммы при $s = 0$ и второго утверждения достаточно установить, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}(r+j)p_{r+j}(\lambda) = o(1/N). \tag{53}$$

При выполнении условий теорем 1–3 из лемм 5–7 следует, что

$$NP_r \to \gamma', \tag{54}$$

где $0 \leqslant \gamma' < \infty$ при $n/N \to 1$ и $0 < \gamma' < \infty$ в других случаях. Отсюда и из (13) следует, что $r \to \infty$ при $n/N \geqslant C_1 > 1$. Это же верно и в случае $n/N \to 1$, если $N\lambda^r \to \infty$ для любого фиксированного r (см. лемму 4 и (18)). Используя (4) и (16), нетрудно найти, что при $r \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(r+j)p_{r+j}(\lambda) < C_3\frac{(r+1)p_{r+1}(\lambda)}{(1-\lambda)}. \tag{55}$$

Пусть $n/N \geqslant C_1 > 1$. Из (19) (20) и (54) следует, что

$$p_{r+1}(\lambda) = O((1-\lambda)/N). \tag{56}$$

Легко проверить, что

$$r = o(\sqrt{N}). \tag{57}$$

Действительно, если бы это было не так при выполнении условий теоремы 2, то с помощью леммы 4 находим, что соотношение (9) было бы неверно. Аналогично, в условиях теоремы 3, (57) доказывается с помощью (10) и леммы 7. Если $n/N \to 1$ и $r \to \infty$, то из (3), (16), (18) и лемм 4, 5 следует, что условия теоремы 1 выполнены только в случае (57). Теперь понятно, что (53) следует из (29), (55)–(57), включая случай $s = 0$. Очевидно также, в силу леммы 4 и (16), что тем более (53) верно при $s = 1$. Если $s = -1$, то, заменяя в (53) r на $r-1$, находим, учитывая уже доказанное соотношение (53), что

$$\begin{aligned}(\sigma\sqrt{N})^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}(r-1+j)p_{r-1+j}(\lambda) = \\ = (\sigma\sqrt{N})^{-1} r p_r(\lambda) + o(1/N).\end{aligned} \tag{58}$$

Опять используя (3), (4), (29) и условия $r \to \infty, N\lambda^r p_{r+1}/p_1 \to \gamma$, видим, что

$$(\sigma\sqrt{N})^{-1} r p_r(\lambda) = o(1/N),$$

поэтому из (58) вытекает, что

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{\infty}(r-1+j)p_{r-1+j}(\lambda) = o(1/N). \tag{59}$$

Отсюда и из (49), (50) понятно, что первое утверждение леммы доказано.

Остался случай фиксированного r при $n/N \to 1$. Нетрудно проверить, что при $s = 0, \pm 1$ из (4), (30) и леммы 4 следуют соотношения (53) и (59), что и завершает доказательство леммы 10.

Докажем теперь локальную сходимость $\zeta_N^{(r)}$.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1+o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}}e^{-z^2/2}$$

равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $z = (k-n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале. Если $n/N \to 1$, то это утверждение остается справедливым и при замене r на $r-1$ или $r+1$.

Доказательство. Следуя схеме доказательства леммы 9, представим разность

$$R_N^{(r)} = 2\pi\left[\sigma\sqrt{N}\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} - \frac{1}{\sqrt{(2\pi)e^{z^2}}}\right]$$

в виде суммы четырех интегралов:

$$R_N^{(r)} = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)} + I_4^{(r)},$$

где $I_1^{(r)}$–$I_4^{(r)}$ отличаются от интегралов $I_1 - I_4$, определенных в (38), только заменой $\varphi_N(t)$ на $\varphi_N^{(r)}(t)$. Как и раньше, для доказательства леммы 11 достаточно установить, что все интегралы $I_1^{(r)}$–$I_4^{(r)}$ стремятся к нулю. Ясно, что $I_1^{(r)} \to 0$ по лемме 10, а для $I_4^{(r)}$ справедлива оценка вида (39). Из (51) – (54) получаем, что при любом t

$$|\varphi_N^{(r)}(t)| \leqslant C_1|\varphi_N(t)|,$$

поэтому для интегралов $I_2^{(r)}$ и $I_3^{(r)}$ справедливы оценки, полученные в доказательстве леммы 9 для I_2 и I_3 соответственно. Лемма 11 доказана.

Рассмотрим теперь предельное поведение суммы $\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)}$ из леммы 3. Обозначим m_r и σ_r^2 математическое ожидание и дисперсию распределения (14). Используя (4), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned}m_r = \frac{m - rp_r(\lambda)}{1-p_r(\lambda)}, \quad \sigma_r^2 = \\ = \frac{\sigma^2}{(1-p_r(\lambda))^2}\left(1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2}p_r(\lambda)\right),\end{aligned} \tag{60}$$

где m и σ^2 определены в (6) и (7). Обозначим $\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\tilde{\zeta}_S^{(r)} - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$.

Лемма 12. *Пусть $N, n \to \infty, r$ – фиксированное натуральное число и выполнено одно из следующих условий:*

1. $n/N \to 1, \quad n - N \to \infty, \quad r \geqslant 3;$
2. $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty;$
3. $a \leqslant 1, \quad n/N \to \infty$ *и существует такое* $\delta > 0$, *что* $N(1-\lambda)^{2+\delta} \to \infty$.

Тогда при $S = N(1-p_r(\lambda))(1+o(1))$ для любого фиксированного t

$$\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{\varphi}_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\tilde{\eta}_1^{(r)}$. Из (4) и (14) следует, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \frac{\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}}{1 - p_r(\lambda)}. \qquad (61)$$

Кроме того,

$$\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t) = \\ = \exp\{-Sm_r t/(\sigma_r\sqrt{S})\}(\tilde{\varphi}_r(t/(\sigma_r\sqrt{S}))^S. \qquad (62)$$

По аналогии с (24), (25) получаем, что

$$\ln\tilde{\varphi}_r(t) = im_r t - \frac{\sigma_r^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\tilde{Q}(t), \qquad (63)$$

где

$$|\tilde{Q}(t)| \leqslant 2\max_{|v|\leqslant|t|} |(\ln\tilde{\varphi}_r(v))_v^{'''}|. \qquad (64)$$

Используя лемму 4 и (3), (4), (6), легко проверить, что при $n/N \leqslant C_2 < \infty$

$$0 < C_3 \leqslant 1 - p_r(\lambda) - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2}p_r(\lambda) < 1. \quad (65)$$

Эти неравенства остаются в силе и при $n/N \to \infty, a \leqslant 1$, что легко следует из (3), (4), (16), (26) и (27). Таким образом, из (60) и (65) вытекает, что

$$\sigma_r^2 \geqslant C_4\sigma^2, \qquad (66)$$

а это значит, как и в (31), что

$$\sigma_r\sqrt{S} \to \infty. \qquad (67)$$

Понятно, что, как и при доказательстве леммы 8, нам достаточно обнаружить справедливость соотношения

$$\tilde{Q}(t/(\sigma_r\sqrt{S}))/(\sigma^3\sqrt{S}) \to 0. \qquad (68)$$

Вычисляя производные от $\ln\tilde{\varphi}_r(t)$, находим, что

$$(\ln\tilde{\varphi}_r(t))_t^{'''} = (\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^{-3}\times \\ \times((\varphi^{'''}(t) + ir^3 p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr})^2 - \\ - 3(\varphi^{''}(t) + r^2 p_r(\lambda)e^{itr})(\varphi^{'}(t) - irp_r(\lambda)e^{itr})\times \\ \times(\varphi(t) - p_r(\lambda)e^{itr}) + 2(\varphi^{'}(t) - irp_r(\lambda)e^{itr})^3).$$

Отсюда нетрудно получить, используя (23) и (34), что

$$|\ln\tilde{\varphi}_r(t))_t^{'''}| \leqslant C_5|\ln\varphi(t))_t^{'''}|. \qquad (69)$$

Теперь соотношение (68) очевидным образом вытекает из (29), (35), (66), (67) и (69). Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть выполнены условия леммы 12. Тогда при $S = N(1 - p_r(\lambda))(1 + o(1))$ для целых неотрицательных k равномерно относительно $z_r = (k - Sm_r)/(\sigma_r\sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_r\sqrt{2\pi S}}e^{-z_r^2/2}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 9, рассмотрим разность

$$\tilde{R}_S^{(r)} = 2\pi\left[\sigma_r\sqrt{S}\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{z_r^2}}}\right] = \\ \tilde{I}_1^{(r)} + \tilde{I}_2^{(r)} + \tilde{I}_3^{(r)} + \tilde{I}_4^{(r)},$$

где интегралы $\tilde{I}_1^{(r)}$–$\tilde{I}_4^{(r)}$ отличаются от I_1–I_4 (см. (38)) заменой $\varphi_N(t)$ на $\tilde{\varphi}_S^{(r)}(t)$, σ на σ_r и N на S. Как и раньше, покажем, что $\tilde{I}_j^{(r)} \to 0, j = 1, 2, 3, 4$, что и будет означать справедливость утверждения леммы.

Очевидно, что $\tilde{I}_1^{(r)} \to 0$ по лемме 12, а для $\tilde{I}_4^{(r)}$ можно применить (39). Пусть $1 < C_1 \leqslant n/N \leqslant C_2 < \infty$. Тогда из (29), (35), (66) и (69) следует, что

$$|(\ln\tilde{\varphi}_r(t))_t^{'''}|/\sigma_r^3 \leqslant C_3$$

и из (62) – (64) вытекает оценка, подобная (41).

В силу известного неравенства

$$|\tilde{\varphi}^{(r)}(t)| \leqslant e^{-C_4},$$

справедливого в области интегрирования $\tilde{I}_3^{(r)}$, находим, что

$$|\tilde{I}_3^{(r)}| \leqslant C_5\sqrt{S}e^{-C_4 S} \to 0.$$

Пусть $n/N \to 1$. По лемме 4 $\lambda = (n - N)p_1/(Np_2)(1 + o(1))$ и из (29), (35), (66) и (69) вытекает, что в области интегрирования $\tilde{I}_2^{(r)}$ справедливо соотношение (68). Поэтому из (62) – (64) видим, что

$$|\tilde{I}_2^{(r)}| \leqslant \int_{A<|t|} e^{-C_5 t^2}dt, \qquad (70)$$

и этот интеграл, как обычно, можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A. Из леммы 4, (4) и (61) нетрудно получить, что

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \varphi(t)(1 + O(\lambda^2)).$$

Отсюда и из (43) находим, что

$$|\tilde{\varphi}_r(t)| \leqslant e^{-C_6\lambda N},$$

поэтому из леммы 4, (29) и условия $n - N \to \infty$ следует оценка, аналогичная (44).

Осталось рассмотреть случай $n/N \to \infty$. Представим $\tilde{I}_2^{(r)}$ в виде суммы двух интегралов:

$$\tilde{I}_2^{(r)} = \tilde{I}_2' + \tilde{I}_2'',$$

где области интегрирования $\tilde{I}_2'$ и $\tilde{I}_2''$ соответственно равны:

$$\{t : A < |t| \leqslant \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma_r\sqrt{S}\},$$

$$\{t : \varepsilon(1-\lambda)^{1+\varepsilon}\sigma_r\sqrt{S} < |t| < \varepsilon\sigma_r\sqrt{S}\}.$$

Нетрудно проверить, что в первой из этих областей выполняется (68), поэтому для $\tilde{I}_2'$ из (61)–(63) получаем оценку, подобную (70).

Рассмотрим $\tilde{I}_2''$. Из (61) следует, что при $t \to 0$

$$\tilde{\varphi}_r(t) = \varphi(t)\left(1 - \frac{p_r(\lambda)}{1-p_r(\lambda)}(e^{itr}-1)(1+o(1))\right).$$

Отсюда и из (46), (62) нетрудно получить, что

$$\left|\tilde{\varphi}_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right)\right|^S \leqslant \exp\left\{-C_7 S\left(1-\cos\frac{t}{\sigma_r\sqrt{S}}\right)\right\}$$

и далее $\tilde{I}_2''$ оценивается аналогично (47) и, как и при доказательстве леммы 9, $\tilde{I}_2'' \to 0$.

Для оценки $\tilde{I}_3^{(r)}$ воспользуемся (48), откуда находим, учитывая условия $a \leqslant 1, N(1-\lambda)^{2+\delta} \to \infty$, что

$$|\tilde{I}_3^{(r)}| \leqslant 2\pi\sigma_r\sqrt{S}e^{-C_8 S} \to 0.$$

Лемма 13 доказана.

Доказательства теорем

Теперь мы можем доказать теоремы 1–5. Из леммы 9 видно, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \sim (\sigma\sqrt{2\pi N})^{-1}.$$

Отсюда и из леммы 11 находим, что при выполнении условий теорем 1–3

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1.$$

В силу леммы 2 из этого соотношения получаем, что теоремы 1–3 следуют из лемм 5, 6 и 7 соответственно.

Нетрудно проверить, используя леммы 9 и 13, что в условиях теоремы 4

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} = n - kr\}/\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \to 1, \qquad (71)$$

а биномиальные вероятности $\binom{N}{k}p_r^k(\lambda)(1-p_r(\lambda))^{N-k}$ при $p_r(\lambda) \to 0$, как известно, допускают пуассоновское приближение. Осталось сослаться на лемму 3 и (71).

В справедливости утверждения теоремы 5 легко убедиться путем непосредственных вычислений с использованием лемм 3, 13 и нормального приближения биномиальных вероятностей, справедливого при $Np_r(\lambda)(1-p_r(\lambda)) \to \infty$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00005.

Литература

1. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

2. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

3. *Павлов Ю. Л.* Предельные распределения объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа // Дискретная математика. 2007. Т. 19, вып. 3. С. 22–34. doi: 10.4213/dm963

4. *Павлов Ю. Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 20–33. doi: 10.4213/dm1104

5. *Павлов Ю. Л., Дертишникова Е. Н.* О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе Интернет-типа // Труды КарНЦ РАН. 2010. № 3, вып. 1. С. 59–65.

6. *Павлов Ю. Л., Степанов М. М.* Предельные распределения числа петель случайного конфигурационного графа // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 282. С. 212–230. doi: 10.1134/S0371968513030175

7. *Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

8. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011. 136 с.

9. *Самосват Е. А.* Моделирование Интернета с помощью случайных графов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 98 с.

10. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

11. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // Eur. J. Comb. 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

12. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

13. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology // Computer communications Rev. 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

14. *Laurinskas A., Garunksis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

15. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Поступила в редакцию 16.02.2016

References

1. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. New York; Toronto; London: Megraw-hill book company, inc, 1953. 317 p.

2. *Kolchin V. F.* Random graphs. Cambridge: University Press, 1999. 252 p.

3. *Pavlov Yu. L.* The limit distribution of the size of a giant component in an Internet-type random graph. *Discrete Mathematics and Applications*. 2007. Vol. 17, iss. 5. P. 425–438. doi: 10.1515/dma.2007.034

4. *Pavlov Yu. L.* On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation. *Discrete Mathematics and Applications*. 2010. Vol. 20, iss. 5–6. P. 509–524. doi: 10.1515/dma.2010.031

5. *Pavlov Yu. L., Dertishnikova E. N.* O predel'nom raspredelenii maksimal'noj stepeni vershiny v sluchajnom grafe Internet-tipa [On limit distribution of maximum vertex degree in random graph of Internet type]. *Trudy KarNC RAN* [*Transactions of KarRC of RAS*]. 2010. No. 3, iss. 1. P. 59–65.

6. *Pavlov Yu. L., Stepanov M. M.* Limit distributions of the number of loops in a random configuration graph. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013. Vol. 282, iss. 1. P. 202–219. doi: 10.1134/S0081543813060175

7. *Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A.* Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008. Vol. 18, iss. 5. P. 447–464. doi: 10.1515/DMA.2008.033

8. *Rajgorodskij A. M.* Modeli sluchainyh grafov [Models of random graphs]. Moscow: MCNMO, 2011. 136 p.

9. *Samosvat E. A.* Modelirovanie Interneta s pomoshju sluchainyh grafov [Internet modeling with help of random graphs]: DSc (Cand. of Phys.-Math.) thesis. Moscow, 2014. 98 p.

10. *Bianconi G., Barabasi A.-L.* Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. P. 5632–5635. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5632

11. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980. Vol. 1. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

12. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge University Press. 2006. doi: 10.1017/CBO9780511546594

13. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology. *Computer communications Rev.* 1999. Vol. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

14. *Laurinskas A., Garunksis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer, 2002. 189 p.

15. *Reittu H., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Performance Evaluation*. 2004. Vol. 55, no. 4. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-53/6(3)00097-x

Received February 16, 2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович
главный научный сотрудник, д. ф.-м. н., профессор
Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910
эл. почта: pavlov@krc.karelia.ru
тел.: (8142) 781218

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury
Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Centre,
Russian Academy of Sciences
11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk,
Karelia, Russia
e-mail: pavlov@krc.karelia.ru
tel.: (8142) 781218