Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 131–136
DOI: 10.17076/mat247

УДК 519.115:519.2

АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПОДСТАНОВОК С S-ЗАПРЕТОМ

Н. Ю. Энатская

Национальный исследовательский университет. Высшая школа экономики

Рассматриваются перестановки нижних строк случайных подстановок размера n с запрещенной подпоследовательностью размера $s < n$. Находится число таких перестановок, производится их перечисление, решается задача нумерации исходов схемы и обсуждается их моделирование.

Ключевые слова: схема перестановок; s-запрет; случайная подстановка; моделирование.

N. Yu. Enatskaya. THE ANALYSIS OF RANDOM PERMUTATIONS WITH S-PROHIBITION

Transpositions of lower lines of random permutanions of size n with forbiden subsequences of size $s < n$ are considered. The number of such transpositions are finded, their enumerations are realized, the numeration problem of outcomes of the scheme is decided and their modelling is considered.

Key words: permutation scheme; s-prohibition; random permutation; modelling.

Введение

Вводится понятие подстановок размера n с s-запретами, когда в их нижних строках запрещена фиксированная подпоследовательность $\bar{P}_s$ длины $s < n$. Такие перестановки тоже будем называть с s-запретами.

Не нарушая общности, будем считать, что запрещенный участок (подпоследовательность) состоит из s подряд идущих старших номеров элементов перестановки: $(n-s+1, n-s+2, \ldots, n)$, иначе этого можно достигнуть при соответствующей перенумерации элементов перестановки и полученных в этом предположении результатах по определенным в аннотации направлениям, если произвести обратную перенумерацию элементов.

Число исходов схемы

$$M = n! - (n-s+1)! \tag{1}$$

где $(n-s+1)!$ – число перестановок $\bar{P}_s$ со всеми остальными $(n-s)$ элементами.

Все исследования схемы существенно опираются на логику перебора всех исходов схемы перестановок размера n из [1] методом графов (см. [2]), которую для удобства приведем здесь.

Строим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до n номерами, ставя каждый из них последовательно и случайно относительно каждой имеющейся перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого и нумеруя слева направо получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, т. е. при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ i-ое состояние процесса (т. е. i-ую перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_j$) на j-ом шаге. Тогда граф переходов будет иметь вид:

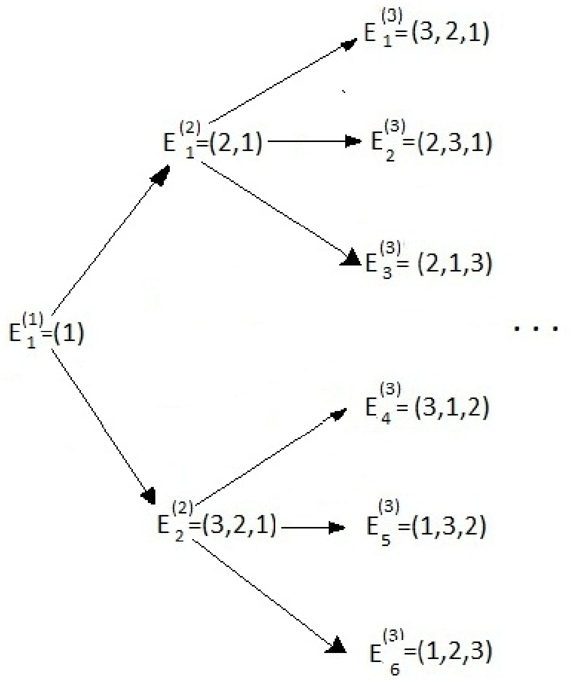

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы перестановок

1. Перечисление исходов схемы и их число

Первый способ (для больших значений s). Перечислим по [1] все исходы схем перестановок $n!$ ее элементов и элементов с номерами $1, 2, \ldots, n-s+1$, где первые $n-s$ элементов у них совпадает, а последний элемент второй перестановки представляет собой $\bar{P}_s$. Далее исключим из первого перебора второй.

Второй способ (для небольших значений s). Произведем прямое перечисление исходов нашей схемы – схемы перестановок с s-запретами. Для этого исключим последний n-ый элемент (заключительный в запретной подпоследовательности). Тогда $(n-1)!$ исходов перестановок из остальных элементов не будут содержать $\bar{P}_s$ и будут допустимы как предсостояния требуемых перестановок. В [1] решены задачи их перечисления и нумерации. Теперь будем добавлять по процедуре перечисления [1] методом графов номер последнего элемента так, чтобы не получать в перестановках запретную подпоследовательность $\bar{P}_s$. Для перечисления допустимых добавлений последнего элемента нужно разделить предсостояния на два типа: 1-ого типа, содержащие подпоследовательность номеров элементов $\bar{P}_{s-1} = (n-s+1, n_s+2, \ldots, n-1)$ в перечисленном здесь порядке – их число $N_{n-1} = (n-s+1)!$, и – второго типа, не содержащие $\bar{P}_{s-1}$ – их число $\bar{N}_{n-1} = (n-1)! - (n-s+1)!$ Для предсостояний этих двух типов числа допустимых расстановок последнего элемента разные и, очевидно, равны соответственно n и $n-1$. Отсюда общее число требуемых перестановок получается как сумма

$$M = M_1 + M_2, \qquad (2)$$

где M_i, $i = 1, 2$ – число требуемых перестановок с i-ым предсостоянием, т. е. $M_1 = N_{n-1}(n-1)$; $M_2 = \bar{N}_{n-1}n$, откуда $M = (n-s+1)!(n-1) + (n! - (n-s+1)!(n-1) = (n-s+1)!$, что совпадает с (1).

Приведем числовой пример прямого перечисления требуемых перестановок.

Пример 1. Пусть $n = 5$, $s = 3$, $\bar{P} = (345)$. Перечислим все требуемые перестановки вторым способом.

По (1) их число должно быть $M = 5! - 3! = 114$. К моменту добавления последнего элемента с номером 5 имеем $4! = 24$ перестановки номеров 1, 2, 3, 4. По (1) имеем следущие перестановки: (4321), (3421), (3241), (3214), (4231), (2431), (2341), (2314), (4213), (2413), (2143), (2134), (4312), (3412), (3142), (3124), (4132), (1432), (1342), (1324), (4123), (1423), (1243), (1234). Из них к предсостояниям первого типа относятся следующие перестановки: (3421),(2431),(2134),(3412),(1342),(1234) – их $s! = 6$. Остальные перестановки представляют предсостояния второго типа – их число по (1) есть $4! - 2! = 18$. Теперь добавляем элемент с номером 5 к предсостояниям первого типа на все 4 места, кроме последнего, а к предсостояниям второго типа – на все возможные 5 мест. По (2) получаем общее число требуемых перестановок $M = 6 \cdot 4 + 18 \cdot 5 = 114$, что совпадает с результатом по (1).

В силу большого размера графа перечисления всех исходов нашей схемы (114 исходов) приведем фрагмент графа их перечисления из первых 4-х предсостояний, среди которых второе (3412) – первого типа:

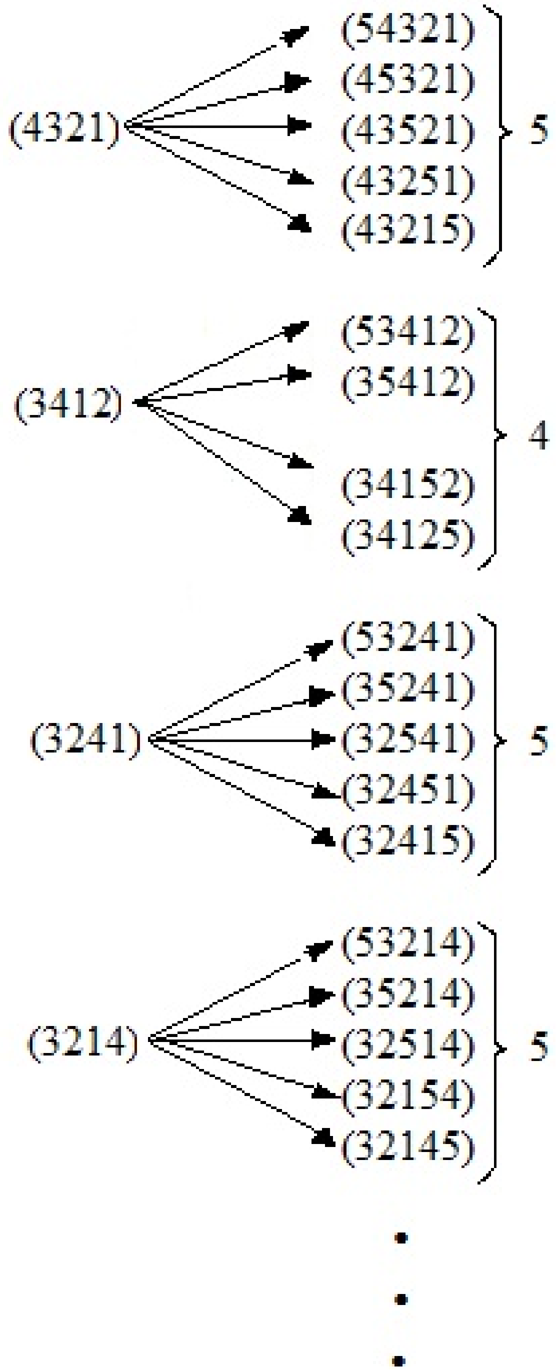

Рис. 2. Фрагмент графа перечисления исходов схемы перестановок на 5-ом шаге

2. Задача нумерации

Будем называть порождающим состоянием (ПС) при перечислении исходов схемы перестановок по мере их поединичного роста такой исход, который может привести или уже привел на n-ом шаге к запретному n-ому состоянию, т. е. исход ПС содержит все элементы с номерами $> n - s$ в том же порядке, что и в $\bar{P}_n$. (Выше эти состояния на $(n-1)$-ом шаге перечисления мы называли предсостояниями 1-ого типа.) Очевидно, что до $(n-s+1)$-ого шага включительно все исходы перечисления схемы перестановок являются ПС. Их число – на $(n-s+1)$-ом шаге равно $(n-s+1)!$ Оказывается, что это число ПС наибольшее и остается тем же по мере роста числа шагов, т. е. равно M_n, что совпадает с ранее полученным из других соображений по (1). Это следует из того, что из каждого ПС через любое число шагов, (значит и на n-ом шаге) по дисциплине перечисления исходов схемы перестановки (см. Введение) получается только одно ПС, т. к. запрещенные исходы отличаются друг от друга только взаимным расположением элементов с номерами $< (n-s+1)$, а их места определяются до $(n-s+1)$-ого шага, и местом $\bar{P}_n$, которое определяется данным ПС на $(n-s+1)$-ом шаге.

Будем находить номера исходов ПС на n-ом шаге рекуррентно пошагово за s шагов из их номеров на предшествующих шагах, начиная со всех, идущих подряд исходов схемы перестановок на $(n-s+1)$-ом шаге до n-ого, для чего выразим номера исходов ПС через номера содержащих их пучков и их номера в пучке с учетом логики их пошагового перечисления сверху вниз в схеме перестановок и структуры графа на рис. 1, обозначив на i-ом шаге $d_i = i$ – размеры пучков, N_i^* – номер ПС на i-ом шаге, а l_i – номер ПС в пучке, $i = \overline{1,n}$. Рекуррента для пошаговых номеров ПС:

$$N_{i+1}^* = (N_i^* - 1)i + l_i. \tag{3}$$

Будем находить номера l_i, $i = \overline{n-s+1, n}$ ПС в своих пучках:

1) на $i = (n-s+1)$-ом шаге ПС идут подряд с номерами от 1 до $(n-s+1)!$;

2) на $(n-s+2)$-ом шаге первое ПС определяется первым ПС на $(n-s+1)$-ом шаге, т. е. стоит в первом пучке на втором месте (из логики перечисления исходов схемы перестановок), т. к. номер $(n-s+2)$ должен в ПС стоять после номера $(n-s+1)$, который в ПС занимает второе место, а добавление номера $(n-s+2)$ начинается с первого места;

второе ПС на $(n-s+2)$-ом шаге определяется вторым ПС на $(n-s+1)$-ом шаге и произойдет во втором пучке на 3-ем месте по причине, аналогичной приведенной для первого пучка, т. е. через число номеров $1 + d_{n-s+1} = n-s+3$; тенденция, описанная выше на $(n-s+2)$-ом шаге, сохраняется до тех пор, пока ПС не оказывается последним в пучке, т. е. $(n-s+2)-1$ раз, т. к. началось со второго места в первом пучке, после чего места ПС для следующих пучков повторяют описанные выше до последнего пучка;

3) на $(n-s+3)$-ем шаге все повторяется с заменой номера шага и размера пучков на единицу большими и т. д. до n-ого шага, где, очевидно, последний исход схемы перестановок вида $(1, 2, \ldots, n)$ является ПС.

При $d_i = i$ по (3) для каждого ПС из $(n-s+1)!$ значений последовательно определяем их номера по шагам перечисления от $(n-s+1)$-ого до n-ого, т. е. окончательно имеем номера ПС на последнем n-ом шаге $\bar{N}^* = (N_n^{(1)}, \ldots, N_n^{((n-s+1)!)})$.

Теперь, исключив из $n!$ номеров всех исходов схемы перестановок размера n номера исходов ПС на n-ом шаге, получим все возможные номера исходов нашей схемы с s-запретами, а т. к. задача нумерации для схемы перестановок решена в [1], то между этими номерами и их видом установлено требуемое взаимно-однозначное соответствие, в чем и состоит задача нумерации для нашей схемы.

Таким образом, получено рекуррентно-алгоритмическое решение задачи нумерации исходов схемы с s запретами.

Кратко повторим шаги АЛГОРИТМА пошагового вычисления номеров ПС:

а) на $(n-s+1)$-ом шаге выписываем все подряд идущие номера исходов ПС;

б) последовательно с $(n-s+2)$-ого до n-ого шага, предварительно определив номера ПС в пучках, по (3) находим их номера.

Приведем числовой пример нахождения номеров ПС на последнем шаге перечисления всех исходов схемы перестановок размера n.

Пример 2. Пусть $n = 5$, $s = 3$, откуда считаем $\bar{P}_s = 345$. Найти номера ПС на 5-ом (последнем) шаге перечисления исходов схемы перестановок, размера 5.

Вычисления по АЛГОРИТМУ:

$n-s+1 = 3$, $3! = 6$, из них исходы ПС имеют номера: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

$n-s+2 = 4$, $4! = 24$, из них исходы ПС имеют по (3) номера: $(1-1)4+2 = 2$; $(2-1)4+3 = 7$; $(3-1)4+4 = 12$; $(4-1)4+2 = 14$; $(5-1)4+3 = 19$; $(6-1)4+4 = 24$;

$n-s+3 = 5$, $5! = 120$, из них исходы ПС имеют по (3) номера: $(2-1)5+3 = 8$; $(7-1)5+4 = 34$; $(12-1)5+5 = 60$; $(14-1)5+3 = 68$; $(19-1)5+4 = 94$; $(24-1)5+5 = 120$.

Для наглядности и контроля результата вычисления ниже приведем полные перечни пронумерованных исходов схем перестановок по шагам их перечисления, начиная с шага $n-s+1 = 3$, где $*$ отмечены исходы ПС:

$n = 3$: (321), (231), (213), (312), (132), (123) – все $(n-s=1)! = 6$ исходов есть ПС;

$n = 4$, всего $4! = 24$ исхода, среди которых $*$ отметим исходы ПС в табл. 1:

Таблица 1

Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС
1	4321		13	4312	
2	3421	*	14	3412	*
3	3241		15	3142	
4	3214		16	3124	
5	4231		17	4132	
6	2431		18	1432	
7	2341	*	19	1342	*
8	2314		20	1324	
9	4213		21	4123	
10	2413		22	1423	
11	2143		23	1243	
12	2134	*	24	1234	*

$n = 5$, всего $5! = 120$ исходов, среди которых $*$ отметим исходы ПС в табл. 2:

Таблица 2

Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС
1	54321		41	54213		81	54132	
2	45321		42	45213		82	45132	
3	43521		43	42513		83	41532	
4	43251		44	42153		84	41352	
5	43215		45	42135		85	41325	
6	53421		46	52413		86	51432	
7	35421		47	25413		87	15432	
8	34521	*	48	24513		88	14532	
9	34251		49	24153		89	14352	
10	34215		50	24135		90	14325	
11	53241		51	52143		91	51342	
12	35241		52	25143		92	15342	
13	32541		53	21543		93	13542	

Продолжение таблицы 2

Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС	Номер	Исход	ПС
14	32451		54	21453		94	13452	$*$
15	32415		55	21435		95	13425	
18	32514		58	21534		98	13524	
19	32154		59	21354		99	13254	
16	53214		56	52134		96	51324	
17	35214		57	25134		97	15324	
20	32145		60	21345	$*$	100	13245	
21	54231		61	5412		101	54123	
22	45231		62	45312		102	45123	
23	42531		63	43512		103	41523	
24	42351		64	43152		104	412353	
25	42315		65	43125		105	41235	
26	52431		66	53412		106	51423	
27	25431		67	35412		107	15423	
28	24531		68	34512	$*$	108	14523	
29	24351		69	34152		109	14253	
30	24315		70	34125		110	14235	
31	52341		71	53142		111	51243	
32	25341		72	35142		112	15243	
33	23541		73	31542		113	12543	
34	23451	$*$	74	31452		114	12453	
35	23415		75	31425		115	12435	
36	52314		76	53124		116	51234	
37	25314		77	35124		117	15234	
38	23514		78	31524		118	12534	
39	23154		79	31254		119	12354	
40	23145		80	31245		120	12345	$*$

Номера ПС по АЛГОРИТМУ и таблицам совпали.

3. Моделирование исходов схемы с s-запретами

Первый способ состоит в использовании табличного соответствия во втором способе прямого перечисления исходов нашей схемы. Тогда, разыгрывая номер исхода схемы по одному случайному числу, получаем по таблице вид исхода.

Второй способ использует АЛГОРИТМ п. 2 вычисления номеров ПС среди исходов схемы перестановок. В п. 2 получен набор последовательных $n!-(n-s+1)!$ номеров исходов нашей схемы из номеров всех исходов схемы перестановок. В этом случае в памяти не требуется хранить таблицу соответствия номеров исходов с их видами.

Разыгрывая одним случайным числом номер исхода нашей схемы, номера исходов которой представляют собой часть номеров всех исходов схемы перестановок, для которой в [1] решена задача нумерации, по номеру находим вид исхода.

Литература

1. *Колчин А. В., Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2014. № 4. С. 80–86.

2. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики. Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. М., 2014. № 8. С. 15–21.

Поступила в редакцию 07.07.2015

References

1. *Kolchin A. V., Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyj analiz shemy perestanovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. Trudy KarNC RAN. [Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences]. 2014. N 4. P. 80–86.
2. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Metod grafov dlja reshenija zadach perechislitel'noj kombinatoriki [Graphs method for solving enumerative Combinatorics]. Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika [Devices and systems. Direction. Control, diagnostics]. Moscow, 2014. N 8. P. 15–21.

Received July 07, 2015

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной математики,
к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет,
Высшая школа экономики, МИЭМ
Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: (8903) 741 13 45

CONTRIBUTOR:

Enatskaya Natalia
National Research University,
Higher School of Economics
(Moscow Institute of Electronics and Mathematics)
Tallinskaya, 34, Moscow, Russia, 123458
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: (8903) 741 13 45