Труды Карельского научного центра РАН
№ 10. 2015. С. 137–144
**DOI: 10.17076/mat246**

*УДК 519.115:519.2*

# О ЧИСЛЕ ИНВЕРСИЙ В ИСХОДАХ СХЕМЫ ПЕРЕСТАНОВОК И ИХ АНАЛИЗ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ИНВЕРСИЙ

**Н. Ю. Энатская**

*Национальный исследовательский университет. Высшая школа экономики*

Численный подсчет инверсий в перестановках основан на использовании методов теории графов. В результате выписаны рекурренты пересчета чисел инверсий по пучкам графа и нахождения вероятностного распределения числа инверсий по мере поединичного роста размера перестановки.
Определенная в названии схема исследуется отбраковкой некоторых исходов аналогичной схемы без ограничений. Получено число исходов схемы, проведено прямое их перечисление, найдено их вероятностное распределение, решена задача нумерации и предложены алгоритмы моделирования исходов схемы.

Ключевые слова: перечисление исходов; схема перестановок; рекуррента; число инверсий; моделирование.

**N. Yu. Enatskaya. ON THE NUMBER OF INVERSION OUTCOMES OF THE PERMUTATION SCHEME AND ITS ANALYSIS WITH FIXED NUMBER OF INVERSIONS**

The numerical method of calculation of inversions in permutations uses the method of graph theory. As the result we colculate the recurrence for colculation of the numbers of inversions with the use of the bunchs of graphs and finding the probability distribution of the number of inversions with the increes of the size of the permutanion.
The scheme definded in its name is investigated by asiding some outcomes of the similar scheme without restriction. The number of outcomes of the scheme is obtained, the direct enumeration is fulfiled, thier probability distribution is finded the problem of their numeration is solved and the scheme suggested.

Key words: enumeration of outcomes; permutation scheme; recurrence; number of inversions; modelling.

## Введение

Перестановку размера $n$ будем записывать в круглых скобках набором номеров входящих в нее элементов через запятую в данном порядке.

Под инверсией в перестановке будем понимать нарушение порядка монотонности возрастания (по умолчанию или убыванию) номеров ее элементов.

Числом инверсий (неинверсий – ни) для данного элемента перестановки будем называть число номеров, меньших данного, стоящих правее (левее) него. Числом инверсий (ни) $I = I_n = I_v = I_{v_n}$, $(I_u = I_{u_n})$ для перестановки будем считать суммарное число инверсий (ни) всех ее элементов.

Очевидно, что для перестановки размера $n$

$$I_v + I_u = I^* = I_n^*, \qquad (1)$$

где $I_n^*$ – максимальное число инверсий, которое содержит перестановка $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$, и равно

$$I_n^* = (n-1)+(n-2)+\ldots+2+1 = n(n-1)/2, \qquad (2)$$

а минимальное число инверсий содержит перестановка $(1, 2, \ldots, n-1, n)$, и есть

$$I_{n*} = 0. \qquad (3)$$

В связи с выбранным подходом к организации перечня исходов нашей схемы указанной отбраковкой исходов общей схемы перестановок напомним из [1] процедуру их перечисления и нумерации методом графов (см. [2]).

Строим случайный процесс поединичного добавления в перестановку элементов с растущими от 1 до $n$ номерами, ставя каждый из них последовательно и случайно относительно каждой имеющейся перестановки на одно из мест: левее левого элемента, между всеми элементами и правее правого и нумеруя слева направо получающиеся на данном шаге процесса перестановки в порядке попадания добавленного элемента. Изобразим описанную процедуру получения всех возможных перестановок фиксированного размера в виде графа переходов из состояния в состояние заданного случайного процесса от шага к шагу, т. е. при росте перестановок на один элемент. Будем обозначать через $E_i^{(j)} = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$ $i$-ое состояние процесса (т. е. $i$-ую перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_j$) на $j$-ом шаге. Тогда граф переходов будет иметь вид:

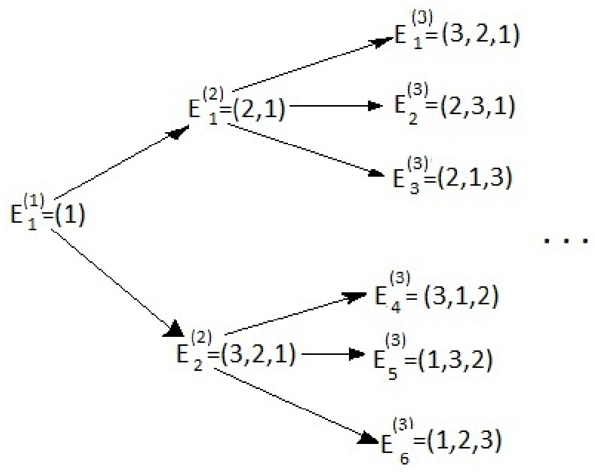


*Рис. 1.* Граф перечисления исходов схемы перестановок

## 1. Численный подсчет чисел инверсий всех исходов схемы перестановок

С учетом логики и порядка нумерации всех исходов схемы перестановок, приведенных во введении, оказывается, что соответствующие им числа инверсий на $k$-ом шаге процесса их перебора ($k = 1, \ldots, n$) находятся в промежутке, определяемом по (2), (3) от $I_k^* = k(k-1)/2$ до $I_* = 0$, причем с ростом номеров исходов в каждом из $(k-1)!$ пучков исходов, размером $k$, исходящих из одного предшествующего исхода, они убывают на единицу. Для наглядности рассмотрим числовой пример.

**Пример 1.** Пусть $k = n = 5$. Приведем в виде табл. 1 все занумерованные $N$ в методе графов исходы $R$ схемы перестановок размера 5 с их числами инверсий $I$ (табл. 1).

*Таблица 1*

| N | R | I | N | R | I | N | R | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 54321 | 10 | 41 | 54213 | 8 | 81 | 54132 | 8 |
| 2 | 45321 | 9 | 42 | 45213 | 7 | 82 | 45132 | 7 |
| 3 | 43521 | 8 | 43 | 42513 | 6 | 83 | 41532 | 6 |
| 4 | 43251 | 7 | 44 | 42153 | 5 | 84 | 41352 | 5 |
| 5 | 43215 | 6 | 45 | 42135 | 4 | 85 | 41325 | 4 |
| 6 | 53421 | 9 | 46 | 52413 | 7 | 86 | 51432 | 7 |
| 7 | 35421 | 8 | 47 | 25413 | 6 | 87 | 15432 | 6 |
| 8 | 34521 | 7 | 48 | 24513 | 5 | 88 | 14532 | 5 |
| 9 | 34251 | 6 | 49 | 24153 | 4 | 89 | 14352 | 4 |
| 10 | 34215 | 5 | 50 | 24135 | 3 | 90 | 14352 | 3 |
| 11 | 53241 | 8 | 51 | 52143 | 6 | 91 | 51342 | 6 |
| 12 | 35241 | 7 | 52 | 25143 | 5 | 92 | 15342 | 5 |

*Продолжение таблицы 1*

| N | R | I | N | R | I | N | R | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 32541 | 6 | 53 | 21543 | 4 | 93 | 13542 | 4 |
| 14 | 32451 | 5 | 54 | 21453 | 3 | 94 | 13452 | 3 |
| 15 | 32415 | 4 | 55 | 21435 | 2 | 95 | 13425 | 2 |
| 16 | 53214 | 5 | 56 | 52134 | 5 | 96 | 51324 | 5 |
| 17 | 35214 | 6 | 57 | 25134 | 4 | 97 | 15324 | 4 |
| 18 | 32514 | 5 | 58 | 21534 | 3 | 98 | 13524 | 3 |
| 19 | 32154 | 4 | 59 | 21354 | 2 | 99 | 13254 | 2 |
| 20 | 32145 | 3 | 60 | 21345 | 1 | 100 | 13245 | 1 |
| 21 | 54231 | 9 | 61 | 54312 | 9 | 101 | 54123 | 7 |
| 22 | 45231 | 8 | 62 | 45312 | 8 | 102 | 45123 | 6 |
| 23 | 42531 | 7 | 63 | 43512 | 8 | 103 | 41523 | 5 |
| 24 | 42351 | 6 | 64 | 43152 | 6 | 104 | 41253 | 4 |
| 25 | 42315 | 5 | 65 | 43125 | 5 | 105 | 41235 | 3 |
| 26 | 52431 | 8 | 66 | 53412 | 8 | 106 | 51423 | 6 |
| 27 | 25431 | 7 | 67 | 35412 | 7 | 107 | 15423 | 5 |
| 28 | 24531 | 6 | 68 | 34512 | 6 | 108 | 14523 | 4 |
| 29 | 24351 | 5 | 69 | 34152 | 5 | 109 | 14253 | 3 |
| 30 | 24315 | 4 | 70 | 34125 | 4 | 110 | 14352 | 2 |
| 31 | 52341 | 7 | 71 | 53142 | 7 | 111 | 51243 | 5 |
| 32 | 25341 | 6 | 72 | 35142 | 6 | 112 | 15243 | 4 |
| 33 | 23541 | 5 | 73 | 31542 | 5 | 113 | 12543 | 3 |
| 34 | 23451 | 4 | 74 | 31452 | 4 | 114 | 12453 | 2 |
| 35 | 23415 | 3 | 75 | 31425 | 3 | 115 | 12435 | 1 |
| 36 | 52314 | 6 | 76 | 53124 | 6 | 116 | 51234 | 4 |
| 37 | 25314 | 5 | 77 | 35124 | 5 | 117 | 15234 | 3 |
| 38 | 23514 | 4 | 78 | 31524 | 4 | 118 | 12534 | 2 |
| 39 | 23154 | 3 | 79 | 31254 | 3 | 119 | 12354 | 1 |
| 40 | 23145 | 2 | 80 | 31245 | 2 | 120 | 12345 | 0 |

Опять же из логики нумерации исходов схемы перестановок с иллюстрацией на последнем примере, очевидно, следует ПРАВИЛО:

**при переходе от $k$-ого шага перебора исходов перестановки для нахождения чисел инверсий в исходах $(k+1)$-ого шага нужно ко всем числам инверсий $k$ исходов каждого пучка $k$-ого шага прибавить соответственно числа $\bar{b}_k = k, k-1, \ldots, 1, 0$.**

Таким образом, для подсчета чисел инверсий всех исходов схемы перестановок размера $k$ в графе перечисления его исходов по шагам можно, не приводя видов исходов, вычислять по тому же графу числа инверсий всех исходов схемы перестановок на всех шагах, руководствуясь приведенным выше ПРАВИЛОМ, указывая в графе в качестве исходов процесса числа инверсий в них. Приведем пример такого вычисления чисел инверсий, указывая на ребрах графа значения компонент вектора $\bar{b}_k$, суммируемые с числом инверсий исходов предыдущего $k$-ого шага для получения чисел инверсий исхода $(k+1)$-ого шага в порядке перечисления исходов.

**Пример 2.** В условиях примера 1 для вычисления чисел инверсий всех исходов схемы перестановок получаем следующий граф (см. рис. 2).

В результате мы получаем картину соответствия всех нумерованных исходов схемы перестановок с числами их инверсий.

Приведенный алгоритм вычисления чисел инверсий всех исходов всех перестановок размерами $k \leqslant n$ можно, предварительно обозначив через $\bar{I}^{(k+1)} = (I^{(k+1)}, I^{(k)}, \ldots, I^{(1)})$ – числа инверсий исходов перестановки из данного состояния на $k$-ом шаге с числом инверсий $I^{(k)}$ по пучкам графа, размерами $k+1$, представить рекуррентным соотношением

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} + j, \tag{4}$$

где $j$ принимает последовательно значения компонент вектора $\bar{b}_k = k, k-1, \ldots, 0$.

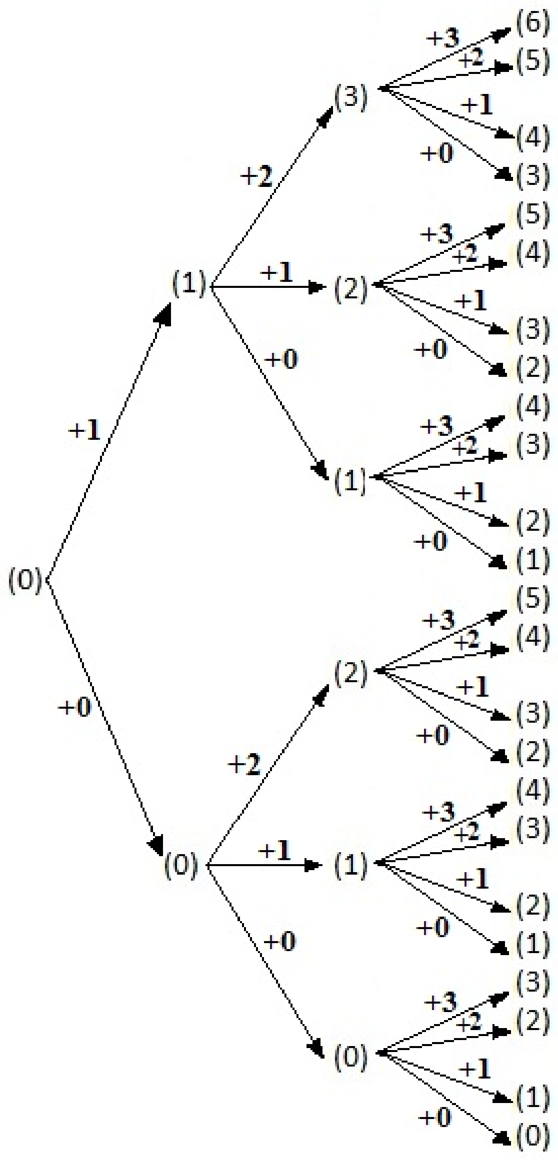


*Рис. 2.* Граф вычисления инверсий схемы перестановок

## 2. Вычисление вероятностного распределения чисел инверсий в исходах схемы перестановок

Нахождение вероятностного распределения числа инверсий в исходах схемы перестановок размера $n$ можно производить по результату п. 1 путем маркировки всех ее исходов по числу инверсий в них с делением их на общее число исходов схемы перестановок размера $n$ на $n!$ В связи с тем, что в данной задаче не используется соответствие чисел инверсий с конкретными исходами схемы перестановок, а числа инверсий для разных перестановок могут совпадать, как это видно из примера 2, то можно предложить более компактную форму алгоритма расчета количеств инверсий исходов схемы перестановок. Смысл рационализации состоит в том, что на $k$-ом шаге графа рис. 2 ($k = 1, \dots, n$) мы будем указывать частоты убывающих на 1 чисел инверсий от своего максимального значения на этом шаге $I_k^*$ до $I_k^* = 0$ и пересчитывать их по ПРАВИЛУ в аналогичную информацию на $(k+1)$-ом шаге: снова в порядке убывания все числа инверсий исходов от своего максимального $I_{k+1}^*$ до 0, получаемых сложением с компонентами вектора $\bar{b}_k$, будем ставить в соответствие с их частотами, вычисляемыми путем сложения частот предшествующих чисел инверсий. Имея полную подобную исходную информацию для первого шага, т. е. $I_1^* = I_1^* = 0$, $\bar{b}_1 = (1, 0)$, мы получаем рекуррентный метод расчета частот чисел инверсий для всех исходов всех перестановок до данного размера $n$. Для пояснения вычислений приведем их на числовом примере, введя обозначения для величин, участвующих в расчете соответствия чисел инверсий со своими частотами на $k$-ом шаге ($k = 1, 2, \dots, n$) перечисления исходов схемы перестановок размера $n$: числа инверсий – $I_k = (I_{k_1}, \dots, I_{k_s})$, где $s = I_k^* + 1$, $I_{k_s} = 0$; частоты инверсий – $\omega_k = (\omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_s})$, где $s = I_k^* + 1$; вектор роста чисел инверсий при пересчете с $(k-1)$-ого шага – $\bar{b}_k = (k-1, k-2, \dots, 1, 0) = (b_{k_1}, \dots, b_{k_k})$.

**Пример 3.** Пусть $n = 5$. Представим расчеты в виде табл. 2 (в порядке ее столбцов) значений на $k$-ом шаге частот чисел инверсий $\omega_k$, поединично убывающих чисел инверсий $I_k$ и (в круглых скобках) компонент вектора $\bar{b}_k$. Т. к. длины столбцов по шагам разные, будем при отсутствии информации оставлять их пустыми. Для проверки будем сверять суммы по столбцам $\omega_k$ на каждом $k$-ом шаге ($k = 1, 2, 3, 4$) с первого по 4-ый с числом всех его исходов (на $k$-ом шаге оно равно $k!$), представленные последней строкой табл. 2 в столбцах $\omega_k$.

В табл. 2 введенные обозначения для компонент $\omega_k$, $I_k$ соответствуют их перечислению сверху вниз.

*Таблица 2*

| $\omega_1$ | $I_1$ | $b_2$ | $\omega_2$ | $I_2$ | $b_3$ | $\omega_3$ | $I_3$ | $b_4$ | $\omega_4$ | $I_4$ | $b_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | (1, 0) | 1 | 1 | (2, 1, 0) | 1 | 3 | (3, 2, 1, 0) | 1 | 6 | (4, 3, 2, 1, 0) |
| | | | 1 | 0 | | 2 | 2 | | 3 | 5 | |
| | | | | | | 2 | 1 | | 5 | 4 | |
| | | | | | | 1 | 0 | | 6 | 3 | |
| | | | | | | | | | 5 | 2 | |
| | | | | | | | | | 3 | 1 | |
| | | | | | | | | | 1 | 0 | |
| 1 | | | 2 | | | 6 | | | 24 | | |

Рекуррентное заполнение табл. 2 значений чисел инверсий исходов схемы перестановок $I_k$ с их частотами $\omega_k$ на $k$-ом шаге ($k = 1, 2, \ldots, n$) производится из следующих соображений:

1) каждое из значений чисел инверсий $I_k$ на $k$-ом шаге получается путем перебора разных сумм чисел инверсий $I_{k-1}$ на $(k-1)$-ом шаге с компонентами вектора $\bar{b}_k$ (в соответствии с рис. 2);

2) компоненты вектора $\bar{b}_k$ принимают значения от $(k-1)$ до 0 (в соответствии с рис. 2), откуда следует, что значения $I_k$ в п. 1) принимают значения от $I_k^*$ до 0 (по всем целым значениям);

3) значения частот каждого из чисел инверсий исходов схемы перестановок на $k$-ом шаге получаются путем сложений частот $\omega_k$ значений чисел инверсий $I_{k-1}$ на $(k-1)$-ом шаге с компонентами вектора $\bar{b}_k$, приводящие к данному числу инверсий $I_k$.

Все полученные числа в нижней строке таблицы совпадают с числами исходов, соответствующих шагам перестановок.

Поясним на примере заполнение табл. 2. Например, при $k = 4$ значение $I_{4_2} = 5$ может быть получено сложением $I_{3_1} + b_{4_2} = 3 + 2 = 5$ с частотой $\omega_{3_1} = 1$ или – сложением $I_{3_2} + b_{4_1} = 2 + 3 = 5$ с частотой $\omega_{3_2} = 2$, откуда получаем, что число инверсий $I_{4_2}$ имеет частоту $\omega_{4_2} = \omega_{3_1} + \omega_{3_2} = 3$.

Теперь рассуждением, аналогичным проведенному в примере 3, можно получить рекуррентное соотношение для вычисления частоты заданного числа инверсий $t$ на $k$-ом шаге.

Числа инверсий на $k$-ом шаге известны $I_k = (I_{k_1}^* = k(k-1)/2, I_{k_2} = I_{k_1}^* - 1, \ldots, 1, 0)$, заданное число инверсий $t$ имеет компонента $I_{k_m}$, где $m = I_{k_1}^* - t + 1$. Найдем значения $i$ такие, что $I_{(k-1)_i} + j = t$ для $j \in \bar{b}_k$. Тогда искомая частота числа инверсий $t$ на $k$-ом шаге есть

$$\omega_{k_m} = \sum_i \omega_{(k-1)_i} \qquad (5)$$

– это рекуррента для получения частоты заданного числа инверсий на $k$-ом шаге через частоты чисел инверсий с индексами $(k-1)_i$ на $k$-ом шаге.

Проверим теперь один из результатов табл. 2 по полученной формуле (5).

**Пример 4.** Пусть $k = 4$, $t = 5$ и на $k = 3$-ем шаге известны $\omega_3 = (\omega_{3_1} = 1, \omega_{3_2} = 2, \omega_{3_3} = 2, \omega_{3_4} = 1)$ и $I_3 = (I_{3_1} = 3, I_{3_2} = 2, I_{3_3} = 1, I_{3_4} = 1)$, а $\bar{b}_4 = (3, 2, 1, 0)$. Найдем значения $i$ такие, что $I_{3_i} + j = t = 5$ для $j \in \bar{b}_4$. Это из значений $i_3$ может быть $i = 1$, т. к. для $j = 2$ $I_{3_1} + 2 = 3 + 2 = 5$, или – $i = 2$, т. к. для $j = 1$ $I_{3_2} + 3 = 2 + 3 = 5$. Отсюда при $I_4^* = 4 \cdot 3/2 = 6$ и $m = 6 - 5 + 1 = 2$ получаем $\omega_{4_2} = \omega_{3_1} + \omega_{3_2} = 1 + 2 = 3$, что совпадает с соответствующим результатом из табл. 2.

## 3. Решение задачи нумерации

Если для нахождения вероятностного распределения чисел инверсий исходов схемы перестановок были важны лишь частоты их разных значений, то для решения задачи нумерации исходов с фиксированным числом инверсий важна последовательность чисел инверсий в порядке перечисления всех исходов схемы перестановок, т. к. исходы этой схемы получаются путем отбраковки несоответствующих из всех общей схемы перестановок. Поэтому будем изучать структуру последовательности чисел инверсий исходов общей схемы перестановок в соответствии с их номерами, определенными при перечислении всех ее исходов методом графов на $n$-ом шаге, для чего потребуется аналогичная информация и на всех предшествующих шагах.

Порядок перечисления чисел инверсий состояний в соответствии с принятой выше нумерацией исходов схемы перестановок следует из графа на рис. 2 и опирается на следующие закономерности пучковой структуры графа и изменения чисел инверсий состояний внутри каждого пучка и между пучками:

1) число пучков состояний (по $k$, ($k \leqslant n$) исходов в каждом) на $k$-ом шаге равно $(k-1)!$;

2) размеры пучков от шага к шагу процесса увеличиваются на единицу и на $k$-ом шаге имеют размер $k$;

3) числа инверсий исходов внутри каждого пучка уменьшаются поединично в порядке их нумерации;

4) при пересчете чисел инверсий на $k$-ом шаге из чисел инверсий на $(k-1)$-ом шаге они возрастают в порядке нумерации исходов перестановок (сверху вниз) на числа $(k-1, k-2, \ldots, 1, 0)$.

Перечислять числа инверсий всех исходов схемы перестановок будем последовательно через запятую по пучкам, заключая их в круглые скобки.

Таким образом, АЛГОРИТМ 1 перечисления на $k$-ом шаге чисел инверсий исходов схемы перестановок в порядке их нумерации состоит в выполнении последовательности действий:

1) выписываем максимальное число инверсий по формуле (2) $I_k^* = k(k-1)/2$;

2) результат 1) повторяем $k$ раз, начиная с него и поединично уменьшая все последующие значения как числа инверсий первого пучка исходов;

3) результат 2) повторяем $(k-1)$ раз, начиная с него и уменьшая все последующие значения из 2) в каждой следующей круглой скобке на 1;

4) результат 3) повторяем $(k-2)$ раза, начиная с него и уменьшая все последующие значения из 3) в каждой следующей круглой скобке на 1;

5) и т. д. аналогично до тех пор, пока число требуемых повторов не станет равным 1, т. е. $(k-1)$ раз. Тогда результат предыдущего пункта будет итоговым.

**Пример 5.** Выпишем последовательность чисел инверсий для $k = 4$ по приведенному алгоритму и сверим результат с полученным по графу на рис. 2.

Получаем по 1) $I_4^* = 4 \cdot 3/2 = 6$; по 2) при $k = 4$ – (6, 5, 4, 3); по 3) при $k-1 = 3$ – (6, 5, 4, 3),(5, 4, 3, 2),(4, 3, 2, 1); по 4) при $k-2 = 2$ – $(6,5,4,3), (5,4,3,2), (4,3,2,1), (5,4,3,2), (4,3,2,1), (3,2,1,0)$ – (6) это окончательный результат (т. к. $k-3 = 1$), который совпадает с результатом по графу на рис. 2.

**Замечание 1.** Результат применения АЛГОРИТМА 1 перечисления чисел инверсий для всех исходов схемы перестановок, занумерованных подряд, дает основу получения как численного, так и теоретического решения задачи нумерации для любого заданного числа инверсий путем установления соответствующих ему исходов схемы. Тогда при новой перенумерации разных чисел инверсий получаем для любого заданного числом размера перестановки программно-табличный результат решения задачи нумерации для чисел инверсий ее исходов с расширением взаимнооднозначного соответствия номеров чисел инверсий с исходами схемы перестановок на их соответствие с некоторыми непересекающимися множествами исходов схемы. Покажем это на примере.

**Пример 6.** Представим результат примера 5 в форме численного результата решения задачи нумерации для чисел инверсий исходов схемы перестановок при $k = 4$ в виде табл. 3.

*Таблица 3*

| № | $I_k$ | исходы схемы перестановок |
|---|---|---|
| 1 | 6 | (4, 3, 2, 1) |
| 2 | 5 | (3, 4, 2, 1), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2) |
| 3 | 4 | (3, 2, 4, 1), (2, 4, 3, 1), (4, 2, 1, 3), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 3, 2) |
| 4 | 3 | (3, 2, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (1, 4, 3, 2), (4, 1, 2, 3) |
| 5 | 2 | (2, 3, 1, 4), (2, 1, 4, 3), (3, 1, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3) |
| 6 | 1 | (2, 1, 3, 4), (1, 3, 2, 4), (1, 2, 4, 3) |
| 7 | 0 | (1, 2, 3, 4) |

## Прямая задача нумерации

Пусть даны номера исходов схемы перестановок с фиксированным числом инверсий $t$. Требуется найти виды соответствующих исходов. Эта задача решена, т. к. она эквивалентна прямой задаче нумерации в схеме перестановок, а она теоретически решена в [1].

## Обратная задача нумерации

Пусть дано число инверсий исхода схемы перестановок. Требуется найти номера соответствующих ее исходов. Численно-программное решение следует из примера 6, т. к. соответствие чисел инверсий исходов с их видами получается как в примере 6, а из теоретически решенной в [1] прямой задачи нумерации для схемы перестановок из видов исходов находятся их номера.

**Замечание 2.** Теоретическое решение обратной задачи нумерации (в силу ее решения в [1] для схемы перестановок) может быть получено или в форме номеров исходов схемы перестановок, или в форме видов конкретных ее исходов, соответствующих заданному числу числа инверсий в них.

Представим теоретическое решение обратной задачи нумерации в форме некоторого алгоритма в продолжение к АЛГОРИТМУ 1, приведя необходимые пояснения и обозначения.

АЛГОРИТМ 1 дает перечень чисел инверсий всех исходов схемы перестановок по их объединенным в круглые скобки пучкам в порядке их перечисления. На $k$-ом шаге ($k = 1, 2, \ldots, n$) имеем $(k-1)!$ таких круглых скобок, в которых находятся убывающие на единицу целые числа из множества (по (2) и (3)) $k(k-1)/2, k(k-1)/2-1, \ldots, 1, 0$.

Для заданного числа инверсий $t$ будем находить соответствующие ему номера исходов схемы перестановок через порядковые номера при перечислении по АЛГОРИТМУ 1 круглых скобок, их содержащих, и их номера в круглых скобках, считая элементы в каждой круглой скобке, с единицы. Назовем эти действия АЛГОРИТМОМ 2, состоящим из следующих шагов:

1) пронумеруем круглые скобки в результате применения АЛГОРИТМА 1 с 1 в порядке их получения, обозначая их номера через $C_1, C_2, \ldots, C_{(k-1)!}$, а номера элементов $r$-ой из них ($r = 1, 2, \ldots, (k-1)!$) через $j_{r_1}, \ldots, j_{r_k}$;

2) обозначим наименьшие значения чисел в круглых скобках соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_{(k-1)!}$, а наибольшие – $b_1, b_2, \ldots, b_{(k-1)!}$ и для заданного числа инверсий $t$ найдем номера круглых скобок, содержащих элемент $t$ из условий для $j$-ой скобки $a_j \leqslant t \leqslant b_j,\ j = 1, 2, \ldots, (k-1)!$;

3) для каждого из найденных в п. 2) значений номеров круглых скобок $j \in J$, содержащих значение $t$, найдем его номер $x_j = b_j - t + 1$;

4) искомые номера исходов схемы перестановок с заданным числом инверсий $t$ получаются для каждого $j$ по формуле

$$N_{(C_j)} = (C_j - 1)k + x_j. \qquad (7)$$

По решенной в [1] задаче нумерации для схемы перестановок при найденных по (7) номерах ее исходов будем считать известными их виды.

Покажем работу АЛГОРИТМА 2 на примере.

**Пример 7.** Пусть $k = 4$, $t = 2$. Тогда в условиях примера 5 имеем по (6) перечень чисел инверсий, состоящий из $4! = 24$ исходам схемы перестановок в порядке их нумерации с номерами от 1 до 24, объединенных в круглые скобки по пучкам исходов схемы размера 4: (6, 5, 4, 3),(5, 4, 3, 2), (4, 3, 2, 1),(5, 4, 3, 2),(4, 3, 2, 1),(3, 2, 1, 0). Совершаем действия по АЛГОРИТМУ 2:

1) нумеруем круглые скобки чисел инверсий от 1 до 6 в порядке их представления в (6), а их элементы – номерами в каждой скобке от 1 до 4;

2) для каждой круглой скобки проверяем условия наличия в ней числа 2: $a_j \leqslant 2 \leqslant b_j$ при $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1,\ a_6 = 0$ и $b_1 = 6,\ b_2 = 5,\ b_3 = 4,\ b_4 = 5,\ b_5 = 4,\ b_6 = 3$; получаем значения $j : C_2 = 2,\ C_3 = 3, C_4 = 4, C_5 = 5,\ C_6 = 6$;

3) находим для найденных в п. 2) номеров круглых скобок $j = 2, 3, 4, 5, 6$, содержащих элемент $t = 2$, его номера в круглых скобках $x_j = 4, 3, 4, 3, 2$;

4) по результатам п. п. 2) и 3) вычисляем по (7) номера исходов схемы перестановок с заданным числом инверсий $t = 2$ – это номера: $N_{(2)} = (2-1)4+4 = 8,\ N_{(3)} = (3-1)4+3 = 11,\ N_{(4)} = (4-1)4+4 = 16,\ N_{(5)} = (5-1)4+3 = 19, N_{(6)} = (6-1)4+2 = 22$, что совпадает с прямым вычислением чисел инверсий по перечислению всех состояний схемы перестановок для $k = 4$.

Тогда по решенной в [2] задаче нумерации для исходов схемы перестановок приведем вид всех исходов с числом инверсий 2 по найденным в п. 4) их номерам: (2, 3, 1, 4), (2, 1, 4, 3), (3, 1, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), что совпадает с результатом прямого подсчета чисел инверсий исходов при $k = 4$ по графу на рис. 2.

## 4. Моделирование перестановок с заданным числом инверсий

Пусть в перестановке размера $n$ требуется смоделировать исход с заданным числом инверсий $t$.

**Шаги моделирования:**

1) перенумеруем подряд с 1 все виды исходов с данным числом инверсий, полученные в 3 по АЛГОРИТМУ 2, записав их в таблицу (число таких исходов $\omega$ определяется в п. 2);

2) разыгрывая его номер от 1 до $\omega$ по п. 1), находим вид смоделированного исхода.

## Литература

1. *Колчин А. В., Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок // Труды КарНЦ РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2014. № 4. С. 80–86.

2. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.


*Поступила в редакцию 07.07.2015*


## References

1. *Kolchin A. V., Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyj analiz shemy perestanovok [Combinatorial analysis of a permutation scheme]. Trudy KarNC RAN. [Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences]. 2014. N 4. P. 80–86.

2. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stohasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. M.: MIEM, 2012. 185 p.


*Received July 07, 2015*

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

**Энатская Наталия Юрьевна**
доцент Департамента прикладной математики,
к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет,
Высшая школа экономики, МИЭМ
Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: (8903) 741 13 45

## CONTRIBUTOR:

**Enatskaya Natalia**
National Research University,
Higher School of Economics
(Moscow Institute of Electronics and Mathematics)
Tallinskaya, 34, Moscow, Russia, 123458
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: (8903) 741 13 45