

УДК 519.179.4

О ГЛОБАЛЬНОМ КЛАСТЕРНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ УСЛОВНОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО ГРАФА

И. А. Чеплюкова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин графа являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, распределение которых удовлетворяет условию: при $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{h(k)}{k^{\tau+1}}, \quad \tau > 0,$$

где случайная величина ξ равна степени любой вершины графа, а $h(x)$ обозначает медленно меняющуюся на бесконечности функцию. Исследуется глобальный кластерный коэффициент условного конфигурационного графа при различных значениях параметра $\tau > 0$. Получены предельные теоремы для этой характеристики при стремлении числа вершин к бесконечности.

Ключевые слова: конфигурационный граф; кластерный коэффициент; предельные теоремы

Для цитирования: Чеплюкова И. А. О глобальном кластерном коэффициенте условного конфигурационного графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 106–113. doi: 10.17076/mat2367

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

I. A. Cheplyukova. ON THE GLOBAL CLUSTERING COEFFICIENT OF A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian
Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

We consider configuration graphs with N vertices. The vertex degrees are independent equally distributed random variables whose distribution satisfies the following condition: as $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{h(k)}{k^{\tau+1}},$$

where the random value η is equal to the degree of any vertex of the graph and

the function $h(x)$ is slowly varying (in the Karamata sense). The global clustering coefficient of a conditional configuration graph is investigated for different values of the parameter $\tau > 0$. Limit theorems are obtained for this characteristic as the number of vertices tends to infinity.

Keywords: configuration graph; clustering coefficient; limit theorems

For citation: Cheplyukova I. A. On the global clustering coefficient of a conditional configuration graph. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 106–113. doi: 10.17076/mat2367

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию случайных графов, которые получили широкое применение при моделировании сложных сетей коммуникаций, таких как Интернет (например, [5, 6]). Одной из таких моделей является конфигурационный граф. Как показали многочисленные наблюдения за реальными сетями, степени узлов можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, при этом число вершин степени, не меньшей чем k , при достаточно больших k пропорционально $1/k^\alpha$, где α – некоторый параметр, $\alpha > 0$. Это значит, что распределение случайной величины η , равной степени любой вершины, при больших значениях k можно определить соотношением

$$\mathbf{P}\{\eta \geq k\} \sim \frac{h(k)}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

где $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция (например, [4]).

Процесс построения конфигурационного графа можно описать следующим образом. Обозначим через N число вершин графа. Через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ обозначим случайные величины, равные степеням вершин графа с номерами $1, 2, \dots, N$ соответственно. Значения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ равны числу полуребер, инцидентных конкретной вершине, т. е. ребер, для которых смежные вершины еще не определены [8]. Все полуребра считаются различными и, соединяясь друг с другом попарно и равновероятно, образуют ребра. Поскольку сумма степеней всех вершин графа должна быть четной, при необходимости вводится вспомогательная вершина единичной степени. В [8] замечено, что эта дополнительная вершина не влияет на асимптотические свойства графа при $N \rightarrow \infty$. Поэтому

в дальнейшем мы будем рассматривать степени только основных вершин. Нетрудно понять, что такая конструкция допускает появление и петель, и кратных ребер.

В современной литературе, посвященной случайным графам, большое внимание уделяется исследованию их структуры (см., например, [5]). Кластерный коэффициент является одной из важных характеристик в теории сетей, он количественно определяет степень, в которой узлы в сети имеют тенденцию группироваться вместе. Проще говоря, он измеряет, насколько связаны друг с другом соседи узла как локально для данного узла, так и для сети в целом. Обычно выделяют глобальный, локальный и средний кластерные коэффициенты (см., например, [7], [6]).

Далее мы будем рассматривать глобальный кластерный коэффициент случайного графа. Введем необходимые определения. Под «глобальным кластерным коэффициентом» будем понимать определение кластерного коэффициента для всей сети, предложенное в [5]. Сначала напомним определение глобального кластерного коэффициента графа, затем – определение для случайного графа. Следуя [5], глобальным кластерным коэффициентом графа называется отношение утроенного числа различных треугольников к числу пар смежных вершин. Пусть $G = G(V, E)$ – случайный граф, где V обозначает множество вершин графа, а E – множество ребер. Согласно [5] (соотношение (4.7.1)) глобальным кластерным коэффициентом C_G случайного графа будем называть

$$C_G = \frac{\mathbf{E}(\Delta_G)}{\mathbf{E}(W_G)},$$

где

$$\Delta_G = \sum_{i,j,k \in V} \mathbf{I}\{\text{вершины } i, j, k \text{ образуют треугольник}\},$$

$$W_G = \sum_{i,j,k \in V} \mathbf{I}\{\text{ребра } (i,j) \text{ и } (j,k) \text{ смежные}\},$$

$\mathbf{I}\{A\}$ обозначает индикатор события A . Заметим, что число треугольников между тремя вершинами может быть больше одного, если существуют кратные ребра. Учитывая особенности конфигурационных графов, в [7] была получена формула для нахождения глобального кластерного коэффициента конфигурационного графа:

$$C_G = \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} k q_k\right)^2}{N \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{P}\{\eta = k\}},$$

где

$$q_k = (k+1) \mathbf{P}\{\eta = k+1\} / \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{P}\{\eta = k\}.$$

В данной работе исследуется предельное поведение глобального кластерного коэффициента конфигурационного графа с N вершинами, степени вершин которого являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с распределением, удовлетворяющим условию: при $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \mathbf{P}\{\xi = k\} \sim \frac{h(k)}{k^{\tau+1}}, \quad (1)$$

где $\tau > 0$, $i = 1, \dots, N$, а $h(x)$ обозначает медленно меняющуюся на бесконечности функцию.

В [2] рассматривается асимптотика глобального кластерного коэффициента конфигурационного графа, степени вершин которого имеют распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{h(k)}{k^{\tau+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \tau \in (2, 3).$$

Кроме того, в [2] было доказано следующее утверждение (лемма) о максимальной степени вершины конфигурационного графа. Пусть

$$\xi_{(N)} = \max_{1 \leq i \leq N} \xi_i.$$

Лемма. Пусть $N \rightarrow \infty$, z – фиксированное положительное число, а u – решение уравнения

$$u = h\left(\left(\frac{Nu}{\tau z}\right)^{1/\tau}\right). \quad (2)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\xi_{(N)} < \left(\frac{Nu}{\tau z}\right)^{1/\tau}\right\} \rightarrow e^{-z}.$$

Используя свойства медленно меняющейся на бесконечности функции и (2), нетрудно видеть, что для любого β , $0 < \beta < 1$, справедливо

$$N^{-\beta/(1+\beta)} < u < N^{\beta/(1-\beta)}. \quad (3)$$

Учитывая это, можно рассматривать не все множество конфигурационных графов, а ограничиться его подмножеством, в котором степень любой вершины не превосходит $(Nu/(\tau z))^{1/\tau}$, где u определено в (2), z – некоторое фиксированное положительное число. В данной работе исследуется предельное поведение глобального кластерного коэффициента такого условного конфигурационного графа при всех значениях параметра распределения $\tau > 0$ и стремлении числа вершин графа к бесконечности.

Сформулируем основные результаты данной работы. Пусть

$$m_\tau = \mathbf{E}\xi.$$

Через $C_1, C_2, \dots$ будем обозначать некоторые положительные постоянные.

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$ и выполнено одно из условий:

1. дисперсия случайной величины ξ конечна;
2. $\tau \searrow 2$, $u/(\tau - 2) \rightarrow \gamma$, где $0 \leq \gamma < \infty$;
3. $\tau = 2$, $u \ln(Nu) \rightarrow \gamma$, где $0 \leq \gamma < \infty$;
4. $\tau \nearrow 2$, $u^{2/\tau} N^{(2-\tau)/\tau} / (2 - \tau) \rightarrow \gamma$, где $0 \leq \gamma < \infty$,

тогда с вероятностью сколь угодно близкой к единице

$$C_G \asymp \frac{1}{N}.$$

Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда с вероятностью сколь угодно близкой к единице справедливы следующие утверждения.

1. Если $\tau \searrow 2$ и $u/(\tau - 2) \rightarrow \infty$, то

$$C_G \asymp \frac{u^2}{N(\tau - 2)^2}.$$

2. Если $\tau = 2$ и $u \ln(Nu) \rightarrow \infty$, то

$$C_G \sim \frac{e^{-z}}{4Nm_2^3} u^2 \ln^2(uN).$$

3. Если $\tau \nearrow 2$ и $u^{2/\tau} N^{(2-\tau)/\tau} / (2 - \tau) \rightarrow \infty$, то

$$C_G \sim \frac{e^{-z} u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau}}{m_2^3 (2 - \tau)^2}.$$

4. Если $1 < C_1 \leq \tau \leq C_2 < 2$, то

$$C_G \sim \frac{e^{-z}(z\tau)^{2(\tau-2)/\tau}}{m_\tau^3(2-\tau)^2} u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau}.$$

5. Если $\tau \searrow 1$, $u/(1-\tau) \rightarrow \gamma$, где $0 \leq \gamma < \infty$, то

$$C_G \asymp N^{(4-3\tau)/\tau} u^{4/\tau}.$$

6. Если $\tau \searrow 1$, $u/(\tau-1) \rightarrow \infty$, то

$$C_G \asymp (\tau-1)^3 (Nu)^{(4-3\tau)/\tau}.$$

7. Если $\tau = 1$, $m_1 < \infty$, то

$$C_G \sim \frac{e^{-z}}{z^2 m_1^3} u^4 N.$$

8. Если $\tau = 1$, $u \ln(Nu) \rightarrow \gamma$, где $0 \leq \gamma < \infty$, то

$$C_G \asymp u^4 N.$$

9. Если $\tau = 1$, $u \ln(Nu) \rightarrow \infty$, то

$$C_G \sim \frac{e^{-z} Nu}{z^2 \ln^3(Nu)}.$$

10. Если $\tau \nearrow 1$, $u^{1/\tau} N^{(1-\tau)/\tau} / (1-\tau) \rightarrow \gamma$, где $0 \leq \gamma < \infty$, то

$$C_G \asymp u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau}.$$

11. Если $\tau \nearrow 1$, $u^{1/\tau} N^{(1-\tau)/\tau} / (1-\tau) \rightarrow \infty$, то

$$C_G \sim \frac{e^{-z}(1-\tau)^3}{z^2} (Nu)^{1/\tau}.$$

12. Если $0 < C_3 \leq \tau \leq C_4 < 1$, то

$$C_G \sim \frac{e^{-z}(1-\tau)^3}{(2-\tau)^2(z\tau)^{(1+\tau)/\tau}} (Nu)^{1/\tau}.$$

Доказательство. Используя формулу (1), получим, что для глобального кластерного коэффициента C_G условного графа справедлива нижеуказанная формула:

$$C_G = \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} k q'_k \right)^2}{N m'_\tau}, \quad (4)$$

где

$$p'_k = \mathbf{P} \left\{ \xi = k \mid \xi_i \leq \left(\frac{Nu}{\tau z} \right)^{1/\tau}, i = 1, \dots, N \right\},$$

$$q'_k = (k+1)p'_{k+1}/m'_\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$m'_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} k p'_k.$$

Обозначим

$$X = X(z, \tau, N) = \left(\frac{Nu}{z\tau} \right)^{1/\tau}. \quad (5)$$

Из (1), (4) и (5) находим, что для достаточно большого A

$$C_G = \frac{(\mathbf{P} \{ \xi \leq X \})^N}{N} \frac{\left(\sum_{k=1}^X k(k+1)p_{k+1} \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^X k p_k \right)^3} = \frac{(\mathbf{P} \{ \xi \leq X \})^N}{N} \quad (6)$$

$$\times \frac{\left(\sum_{k=1}^A k(k+1)p_{k+1} + \sum_{k=A+1}^X k(k+1) \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau+1}} \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^X k p_k \right)^3}.$$

Используя (1), (5), [3, гл. VIII, § 9, теорема 1, а] и свойства медленно меняющейся функции, получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \{ \xi \leq X \} = 1 - \mathbf{P} \{ \xi > X \}$$

$$= 1 - (1 + o(1)) \int_X^\infty y^{-\tau-1} h(y) dy$$

$$= 1 - \frac{h(X)(1 + o(1))}{\tau X^\tau} = 1 + o(1).$$

Отсюда и из (2), (5), (6) следует, что

$$C_G = \frac{e^{-z}(1 + o(1))}{N} \quad (7)$$

$$\times \frac{\left(\sum_{k=1}^A k(k+1)p_{k+1} + \sum_{k=A+1}^X k(k+1) \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau+1}} \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^X k p_k \right)^3}.$$

Докажем теорему 1. Утверждение пункта 1 теоремы 1 следует из [1, теорема 1, п. 1].

Используя известные свойства медленно меняющихся функций, из (1) находим, что при достаточно больших l и любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k>l} \frac{h(k)}{k^\tau} \leq \sum_{k>l} \frac{1}{k^{\tau-\varepsilon}}$$

$$\sim \int_l^\infty x^{-\tau+\varepsilon} dx \leq C_5 l^{-\tau+\varepsilon+1}. \quad (8)$$

Пусть выполнены условия пункта 2 теоремы 1. Из (1) и (8) получаем, что

$$\sum_{k=1}^X kp_k = \sum_{k=1}^\infty kp_k - \sum_{k>X} kp_k \sim m_2. \quad (9)$$

Используя определение медленно меняющейся функции, нетрудно показать, что при достаточно больших A

$$\begin{aligned} \sum_{A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau-1}} &\sim \int_A^X \frac{h(x)}{x^{\tau-1}} dx \\ &= X^{2-\tau} \int_{A/X}^1 \frac{h(tX)}{t^{\tau-1}} dt \\ &\sim X^{2-\tau} h(X) \int_{A/X}^1 \frac{1}{t^{\tau-1}} dt \\ &= \frac{h(X)}{\tau-2} (-X^{2-\tau} + A^{2-\tau}). \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что

$$\sum_{A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau-1}} > 0 \quad (11)$$

и условие $\tau \searrow 2$, нетрудно видеть, что дробь $h(X)/(\tau-2)$ положительна, тогда из (10) следует, что

$$\sum_{A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau-1}} \asymp \left(\frac{h(X)}{\tau-2} \right). \quad (12)$$

Из (2), (5), (7), (9), (12) условий пункта 2 находим, что

$$C_G \asymp 1/N.$$

Пусть выполнены условия пункта 3 теоремы 1. Из (7) находим, что при достаточно больших A

$$\begin{aligned} C_G &\sim \frac{e^{-z}}{N} \left(\sum_{k=1}^A k(k+1)p_{k+1} \right. \\ &+ \sum_{k=A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)} - \sum_{k=A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)^2} \Big)^2 \\ &\quad \times \left(\sum_{k=1}^X kp_k \right)^{-3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя хорошо известную формулу:

$$\sum_{k=1}^{[l]} \frac{1}{k} = \ln l + c + \varepsilon(l), \quad (14)$$

где c – постоянная Эйлера – Маскерони, $\varepsilon(l) \sim 1/(2l)$, можно показать, что при $N \rightarrow \infty$ и достаточно большом A

$$\begin{aligned} \sum_{k=A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)} &= \sum_{k=A+2}^{X+1} \frac{h(k)}{k} \\ &= \sum_{k=(A+2)/X}^1 \frac{h(kX)}{kX} \sim h(X) \sum_{k=A+2}^X \frac{1}{k} \\ &\sim h(X) \ln(X). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (2), (5), (8), (9), (13), (15) находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \asymp 1/N.$$

Пусть выполнены условия пункта 4 теоремы 1. Из (10), (11) и условия $\tau \nearrow 2$ получаем, что

$$\sum_{k=A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau-1}} \asymp \frac{X^{2-\tau} h(X)}{2-\tau}. \quad (16)$$

Тогда отсюда и из (2), (5), (7), (9) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \asymp 1/N.$$

Значит, теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Если выполнены условия пункта 1, то, учитывая, что в этом случае

$$\sum_{A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau-1}} \rightarrow \infty,$$

из (2), (5), (7), (9), (12) получаем, что

$$C_G \asymp \left(\frac{u^2}{N(\tau-2)^2} \right).$$

Рассмотрим случай $\tau = 2$. Учитывая условия пункта 2 теоремы 2 и соотношение (15), при $N \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$\sum_{A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)} \rightarrow \infty, \quad (17)$$

тогда из (2), (5), (8), (9), (13), (15) и (17) находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \sim \frac{e^{-z}}{Nm_2^3} h^2(X) \ln^2(X) \sim \frac{e^{-z}}{4Nm_2^3} u^2 \ln^2(uN).$$

Если выполнены условия пункта 3, то из (2), (5), (7)–(9) и (16) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \sim \frac{e^{-z}}{m_2^3 N (2-\tau)^2} (X^{2-\tau} h(X))^2 \sim \frac{e^{-z} u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau}}{4m_2^3 (2-\tau)^2 z^2}.$$

Рассмотрим случай, когда $1 < C_1 \leq \tau \leq C_2 < 2$. Из леммы 1.3.2 и утверждения 1.5.8 [4] получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=A+1}^X \frac{h(k+1)}{(k+1)^{\tau-1}} = \int_A^X \frac{h(x)}{x^{\tau-1}} dx (1+o(1)) = X^{2-\tau} h(X) / (2-\tau)(1+o(1)). \quad (18)$$

Соотношение (9) выполняется и в этом случае. Из (2), (5), (7)–(9) и (18) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \sim \frac{e^{-z}}{m_\tau^3 N (2-\tau)^2} (X^{2-\tau} h(X))^2 = \frac{e^{-z}}{m_\tau^3 (2-\tau)^2} (z\tau)^{2(\tau-2)/\tau} u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau}.$$

Пусть выполнены условия пункта 5. Тогда, используя лемму 1.3.2 и утверждение 1.5.8 [4], получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=A+1}^X k p_k = \sum_{k=A+1}^X \frac{h(k)}{k^\tau} \asymp \frac{h(X)}{1-\tau}. \quad (19)$$

Отсюда, из (2), (5) и условия $u/(1-\tau) \rightarrow \gamma$ находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^X k p_k &= \sum_{k=1}^A k p_k + \sum_{k=A+1}^X k p_k \\ &= \sum_{k=1}^A k p_k + \frac{h(X)}{1-\tau} \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда из (2), (5), (7) и (18) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \asymp N^{(4-3\tau)/\tau} u^{4/\tau}.$$

Пусть выполнены условия пункта 6. Тогда нетрудно видеть, что при достаточно больших A

$$\sum_{k=1}^X k p_k = \sum_{k=1}^A k p_k + \sum_{k=A+1}^X \frac{h(k)}{k^\tau}. \quad (20)$$

Из (2), (5), (19) следует, что

$$\sum_{k=A+1}^X \frac{h(k)}{k^\tau} \rightarrow \infty.$$

Тогда из (2), (5), (7), (18)–(20) находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C_G &\asymp \frac{(\tau-1)^3}{N h^3(X)} \left(\frac{X^{2-\tau} h(X)}{2-\tau} - \frac{h(X)}{\tau-1} \right)^2 \\ &= \frac{(\tau-1)^3}{N h(X)} \left(\frac{X^{2-\tau}}{2-\tau} - \frac{1}{\tau-1} \right)^2 \\ &\sim \frac{(\tau-1)^3}{N u} \left(\frac{(Nu)^{(2-\tau)/\tau}}{z} - \frac{1}{\tau-1} \right)^2. \quad (21) \end{aligned}$$

Согласно определению медленно меняющейся функции, несложно видеть, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{k=A}^X \frac{h(k)}{k^\tau} &= \sum_{A/X \leq t \leq 1} \frac{h(tX)}{(tX)^\tau} \\ &\sim h(X) \sum_{k=A}^X \frac{1}{k^\tau} < h(X) \sum_{k=A}^X \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Тогда из (14) получаем, что

$$\sum_{k=A}^X \frac{h(k)}{k^\tau} < C_6 h(X) \ln X.$$

Отсюда и из (2), (19) следует, что

$$\frac{1}{\tau-1} < C_7 \ln(uN).$$

Учитывая последнее соотношение и (21), получаем, что

$$C_G \asymp (\tau-1)^3 (Nu)^{(4-3\tau)/\tau}.$$

Пусть $\tau = 1$ и $m_1 < \infty$. Тогда из (2), (5), (7) находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \sim \frac{e^{-z}}{N m_1^3} h^2(X) X^2 = \frac{e^{-z}}{z^2 m_1^3} u^4 N.$$

Пусть выполнены условия пункта 8. Тогда из (1) и (15) получаем, что при достаточно большом A

$$\begin{aligned} \sum_1^X k p_k &\sim \sum_1^A k p_k + \sum_{A+1}^X \frac{h(k)}{k} \\ &\sim \sum_1^A k p_k + h(X) \ln X. \quad (22) \end{aligned}$$

Отсюда, из (2), (5), (7) и условия пункта 8 находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \asymp \frac{1}{N} h^2(X) X^2 \asymp u^4 N.$$

Если выполнены условия пункта 9, то из (1), (2), (5), (7), (14) и (22) нетрудно получить, что при достаточно большом A и $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C_G &\sim \frac{e^{-z}}{N} h^{-3}(X) \ln^{-3}(X) (h(X) X \\ &\quad - h(X) \ln(X))^2 \\ &= \frac{e^{-z} X^2}{N h(X) \ln^3(X)} = \frac{e^{-z} N u}{z^2 \ln^3(N u)}. \end{aligned}$$

Пусть $0 < C_3 \leq \tau < C_4 < 1$. Согласно утверждению 1.5.8 и лемме 1.3.2 [4] для достаточно больших A и $N \rightarrow \infty$ справедливы соотношения (18) и

$$\sum_{A+1}^X \frac{h(k)}{k^\tau} = h(X) \frac{X^{1-\tau}}{1-\tau} (1 + o(1)). \quad (23)$$

Отсюда и из (2), (5), (7), (18) находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C_G &\sim \frac{e^{-z}(1-\tau)^3}{N h^3(X) X^{3(1-\tau)}} \left(\frac{h(X) X^{2-\tau}}{2-\tau} \right. \\ &\quad \left. - \frac{h(X) X^{1-\tau}}{1-\tau} \right)^2 \sim \frac{e^{-z}(1-\tau)^3}{N} \frac{X^{1+\tau}}{(2-\tau)^2 h(X)} \\ &= \frac{e^{-z}(1-\tau)^3}{(2-\tau)^2 (z\tau)^{(1+\tau)/\tau}} (Nu)^{1/\tau}. \end{aligned}$$

Если выполнены условия пункта 10, то соотношение (23) справедливо. Тогда из (2), (5), (7), (18), (23) и условий пункта 10 находим, что при $N \rightarrow \infty$

$$C_G \asymp \frac{1}{N} \left(\frac{h(X) X^{2-\tau}}{2-\tau} \right)^2 \sim u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau}.$$

Пусть выполнены условия пункта 11. Равенство (23) выполняется и в этом случае. Кроме того, используя свойства медленно меняющихся функций и переходя от суммирования к интегрированию, несложно видеть, что для $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{A+1}^X \frac{h(k)}{k^\tau} &< \sum_{A+1}^X \frac{1}{k^{\tau-\varepsilon}} = \int_A^X \frac{1}{x^{\tau-\varepsilon}} dx (1 + o(1)) \\ &= \frac{X^{1-\tau+\varepsilon}}{1-\tau+\varepsilon} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, можно заметить, что при выполнении условий пункта 11 из (23) и (24) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$1 - \tau > h(X) X^{-\varepsilon}.$$

Из (24) получаем, что

$$\begin{aligned} &\frac{h(X) X^{2-\tau}}{(2-\tau) \sum_A^X h(k)/k^\tau} \\ &> C_9 \frac{h(X) X^{2-\tau}}{(2-\tau) X^{-\tau+1+\varepsilon}} = C_9 \frac{h(X) X^{1-\varepsilon}}{2-\tau} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2), (5), (7), (18), (23) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C_G &\sim \frac{e^{-z}}{N} \frac{X^{4-2\tau} h^2(X)}{(2-\tau)^2} \left(1 - \frac{(2-\tau) \sum_A^X h(k)/k^\tau}{h(X) X^{2-\tau}} \right)^2 \\ &\quad \times \left(\frac{X^{1-\tau} h(X)}{1-\tau} \right)^3 \\ &\sim \frac{e^{-z}(1-\tau)^3 X^{1+\tau}}{N h(X)} \sim \frac{e^{-z}(1-\tau)^3 (Nu)^{1/\tau}}{z^2}. \end{aligned}$$

Теперь теорема 2 доказана полностью.

Несложно заметить, что из утверждений теорем 1 и 2, их доказательств и (3) вытекает следствие.

Следствие. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если выполнено одно из условий:

- $\tau \geq 2$;
- $\tau \rightarrow 2$;
- $1 < C_1 \leq \tau \leq C_2 < 2$,
 $u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau} \rightarrow 0$,

то $C_G \rightarrow 0$;

2. Если выполнено одно из условий:

- $0 < \tau \leq 1$;
- $\tau \rightarrow 1$;
- $1 < C_1 \leq \tau \leq C_2 < 2$,
 $u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau} \rightarrow \infty$,

то $C_G \rightarrow \infty$

3. Если $1 < C_1 \leq \tau \leq C_2 < 2$, $u^{4/\tau} N^{(4-3\tau)/\tau} \rightarrow \text{const} > 0$, то C_G стремится к некоторой положительной константе.

Такое поведение глобального кластерного коэффициента можно объяснить тем, что при малых значениях параметра τ в графе образуется много ребер, а значит, много треугольников. Поскольку u зависит от функции $h(x)$, N , τ , поведение кластерного коэффициента C_G также зависит от этих параметров. Такая особенность кластерного коэффициента конфигурационного графа отмечалась еще в работе [7], где в качестве медленно меняющейся функции $h(x)$ рассматривался нормирующий множитель $1/\zeta(\tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов Ю. Л. Об асимптотике кластерного коэффициента конфигурационного графа с неизвестным распределением степеней вершин // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, № 3. С. 3–19. doi: 10.14357/19922264190302
2. Павлов Ю. Л. О глобальном кластерном коэффициенте Интернет-графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2023. № 4. С. 50–53. doi: 10.17076/mat1765
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
4. Bibgman N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. R. Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 513 p.
5. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
6. Newman M. E. J. Networks. An introduction. Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. 772 p.
7. Newman M., E., J. The structure and function of complex networks // SIAM Rev. 2003. Vol. 45, no. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

8. Reittu Y., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Perform. Eval. 2004. Vol. 55, no. 1–2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

REFERENCES

1. Pavlov Yu. L. On the asymptotics of clustering coefficient in a configuration graph with unknown distribution of vertex degrees. *Informatika i ee primeneniya = Computer Science and its Applications*. 2019;13(3):3–19. (In Russ.). doi: 10.14357/19922264190302
2. Pavlov Yu. L. On the Internet-graph clustering coefficient. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2023;4:50–53. (In Russ.). doi: 10.17076/mat1765
3. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2. New York: John Wiley; 1991. 704 p.
4. Bibgman N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. R. Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1987. 513 p.
5. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
6. Newman M. E. J. Networks. An introduction. Oxford: Oxford Univ. Press; 2010. 772 p.
7. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev.* 2003;45(2):167–256. doi: 10.1137/S003614450342480
8. Reittu Y., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Perform. Eval.* 2004;55(1–2):3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию / received: 09.04.2026; принята к публикации / accepted: 08.06.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна

канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

e-mail: chia@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher