Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 61–72
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2026. No. 6. P. 61–72
DOI: 10.17076/mat2352

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 004.01:006.72 (470.22)

ПОТЕНЦИАЛ В НЕКООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ УПРАВЛЕНИЯ ЗАДАНИЯМИ С ЛИНЕЙНЫМИ ЭКСТЕРНАЛИЯМИ

Н. Н. Кукушкина

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

Представлена и исследована теоретико-игровая математическая модель управления заданиями в вычислительной системе с линейными экстерналиями. Каждый игрок стремится максимизировать свою производительность в присутствии положительных экстерналий. Предложенная модель описывает управление заданиями в системе добровольных вычислений типа Desktop Grid, а экстерналии выражают обмен информацией в процессе решения научной задачи. Системы Desktop Grid задействуют вычислительные мощности неспециализированных компьютеров, объединенных сетью передачи данных и выполняющих вычисления в то время, когда они не заняты другой работой. В таких системах вычислительноемкая научная задача зачастую делится на несколько взаимосвязанных подзадач, выполняемых параллельно. Промежуточные результаты решения одной подзадачи способны помогать в решении остальных подзадач, оптимизируя или сокращая вычисления. В данной работе доказано, что игра является потенциальной в случаях однородных процессоров или заданий и одинаковых экстерналий, инвариантных или симметричных экстерналий. При этом в случаях с однородными процессорами или заданиями и одинаковыми экстерналиями или инвариантными экстерналиями равновесие по Нэшу единственно и глобально оптимально, в то время как случай с симметричными экстерналиями допускает множество равновесий по Нэшу в чистых стратегиях. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по моделированию управления заданиями предложенным методом в сравнении с рядом популярных алгоритмов. Представленные результаты расширяют область применения классических моделей, доказывая существование равновесия и сходимость к нему как в задачах минимизации задержки, так и в задачах максимизации производительности. Найденный вид функции потенциала позволяет использовать методы глобальной оптимизации для поиска равновесий.

Ключевые слова: управление заданиями; задача покрытия машин; равновесие по Нэшу; потенциал; линейные экстерналии

Для цитирования: Кукушкина Н. Н. Потенциал в некооперативной игре управления заданиями с линейными экстерналиями // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 61–72. doi: 10.17076/mat2352

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

N. N. Kukushkina. POTENTIAL IN A NON-COOPERATIVE TASK SCHEDULING GAME WITH LINEAR EXTERNALITIES

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

This paper investigates a game-theoretic mathematical model of task scheduling in a computational system with linear externalities. Each player aims to maximize their performance in the presence of positive externalities. The proposed model describes task scheduling in a volunteer computing system of Desktop Grid type, while the externalities express the information exchange in the process of solving a scientific problem. Desktop Grid systems employ computational capacities of non-dedicated computers that are united by a data transmission network and perform computations in their idle time. In such systems, a computationally intensive scientific problem is often divided into several interconnected subproblems to be performed in parallel. The intermediate results of solving one subproblem can aid in solving other subproblems by optimizing or reducing the computations. Proof is provided that the game is a potential game in cases of homogeneous processors or tasks and equal externalities, invariant or symmetric externalities. In the cases with homogeneous processors or tasks and equal externalities or invariant externalities, the Nash equilibrium is unique and globally optimal, while the case with symmetric externalities allows multiple Nash equilibriums in pure strategies. We present the results of computational experiments modeling task scheduling using the proposed method in comparison with a number of popular algorithms. The provided results expand the applicability of classical models, proving the existence of an equilibrium and convergence to it in both delay minimization and performance maximization problems. The potential function form found here facilitates the use of global optimization methods to search for equilibriums.

Keywords: task scheduling; machine covering problem; Nash equilibrium; potential; linear externalities

For citation: Kukushkina N. N. Potential in a non-cooperative task scheduling game with linear externalities. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2026. No. 6. P. 61–72. doi: 10.17076/mat2352

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

Введение

В современной теории расписаний и математической теории игр особое место занимают игры распределения ресурсов. В играх такого типа эгоистичные участники претендуют на ограниченные ресурсы, и стратегия каждого игрока определяется не только его действиями, но и действиями конкурентов. Математические модели игр распределения ресурсов применяются в различных прикладных областях: например, для управления трафиком в сетях передачи данных, распределения нагрузки в облачных сервисах, оптимизации логистических цепочек и т. д.

В частности, рассматриваются игры покрытия машин [13, 18], в которых эгоистичные участники стремятся оптимизировать использование ресурсов, распределяя свои задачи по машинам (процессорам) таким образом, чтобы максимизировать минимальную задержку. При этом в классической модели функция выигрыша или затрат игрока зависит исключительно от состояния выбранного им ресурса, а не от действий игроков на других машинах.

В дополнение к классической модели рассматриваются также модели с экстерналиями – эффектами, выражающими влияние текущей загрузки каждого процессора на производительность каждого из остальных процессоров. В игре покрытия машин такое влияние обусловлено необходимостью координированного управления совокупностью вычислительных заданий с сопутствующим обменом данными между процессорами.

В общем случае в играх распределения ресурсов отрицательные экстерналии позволяют моделировать эффект конкуренции [1, 4, 8], а положительные – эффекты взаимовыгодности, такие как, например, обмен информацией между агентами, разделение затрат и др. [4].

В литературе целый ряд математических моделей берут начало из KP-модели [6] с параллельными каналами различной емкости. В работе [1] рассмотрена задача максимизации минимальной задержки по процессорам в присутствии линейных экстерналий. Доказано существование равновесия по Нэшу и показано, что в общем случае цена анархии конечна. При этом в общем случае равновесие по Нэшу может отсутствовать, а алгоритм лучших ответов – зацикливаться.

Рассматривались также задачи с экстерналиями в сетевой постановке [2, 4, 7]. В таких моделях взаимное влияние игроков друг на друга определяется топологией сети.

В данной работе исследована математическая модель управления заданиями с линейными экстерналиями. В отличие от работы [1], каждый игрок стремится максимизировать свою производительность в присутствии экстерналий, оказывающих положительный эффект. Модель описывает управление заданиями в системе добровольных вычислений. Экстерналии выражают обмен информацией в процессе решения научной задачи, и игроки, действуя эгоистично, в равновесии поступают оптимальным образом, чтобы решить общую задачу. Доказано, что при соблюдении ряда условий игра является потенциальной и, таким образом, в ней существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях, которого игроки достигают при помощи алгоритма лучших или наилучших ответов.

Предложенная модель описывает вычислительные системы, в которых большая задача разбита на несколько взаимосвязанных подзадач, что характерно для научного поиска. Получаемые в динамике результаты одной подзадачи косвенно помогают в решении остальных, например, сужая пространство поиска.

При этом рассматриваются системы добровольных вычислений, участники которых – независящие друг от друга агенты, стремящиеся максимизировать свой собственный выигрыш, отдавая свои мощности на решение той или иной задачи. Благодаря структуре математической модели агенты делят между собой пространство поиска в одном и том же блоке, а от остальных блоков тем временем поступает полезная информация, что увеличивает производительность системы. Таким образом, интенсивность поиска в соседних блоках имеет значение и позволяет игрокам оптимизировать собственные вычисления.

Управление заданиями в системах добровольных вычислений

Научные задачи тесно связаны с генерацией и анализом больших объемов данных, что требует специальных алгоритмов управления заданиями в современных гетерогенных вычислительных системах [12, 15]. Активно используются Desktop Grid – распределенные системы неспециализированных компьютеров, объединенных сетью передачи данных и выполняющих вычисления в то время, когда они не заняты другой работой. В Desktop Grid владельцы компьютеров добровольно предоставляют свои вычислительные мощности для решения той или иной научной задачи. На сегодняшний день существует множество проектов добровольных вычислений в различных областях науки; среди примеров можно отметить Einstein@home [3] (астрофизика), World Community Grid [17] (биология и медицина), PrimeGrid [11] (математика) и другие.

Системы типа Desktop Grid наиболее хорошо подходят для решения задач, требующих значительных вычислительных мощностей и при этом поддающихся разделению на большое число независимых рабочих заданий, каждое из которых можно за сравнительно небольшое время выполнить на обычном компьютере (задачи типа Bag-of-Tasks). Подобные задачи часто возникают в научных исследованиях: например, проверка свойств математических объектов в комбинаторике [14] и криптографии [19], проведение экспериментов *in silico* по большим базам данных [10, 16] и т. д.

Несмотря на то что в отдельных ситуациях в системах добровольных вычислений может возникать конкуренция за ресурсы сервера [5], в общем случае приход нового участника увеличивает производительность системы для всех: если участников станет больше, то научная задача будет решена быстрее.

При этом вычислительная научная задача зачастую логически подразделяется на несколько подзадач, которые могут выполняться параллельно друг с другом. Промежуточные результаты решения одной подзадачи способны помогать в решении остальных подзадач, оптимизируя или сокращая вычисления. Это отражает специфику научного поиска. Поясним эту идею на примере виртуального скрининга лекарств. Виртуальный скрининг – это перебор миллионов малых молекул *in silico* и выбор среди них кандидатов в лекарства, удовлетворяющих определенным условиям. Пусть библиотека молекул, среди которых ищутся кандидаты в лекарства, разделена на несколько кластеров и в каждом кластере одновременно проводится виртуальный скрининг. Если в некотором кластере обнаружены бесперспективные (например, ввиду токсичности) молекулы, содержащие определенный структурный фрагмент, то аналогичные молекулы можно исключить из обработки и в других кластерах. Таким образом, обмен промежуточными данными и статистикой поиска способен ускорить работу всей системы в целом. При этом обнаружение конкретного целевого результата носит случайный характер и может быть редким событием.

На рис. 1 показана общая схема вычислительного процесса в Desktop Grid: научная задача делится на подзадачи, а подзадачи – на рабочие задания, каждое из которых может выполняться на любом вычислительном узле независимо от других рабочих заданий.

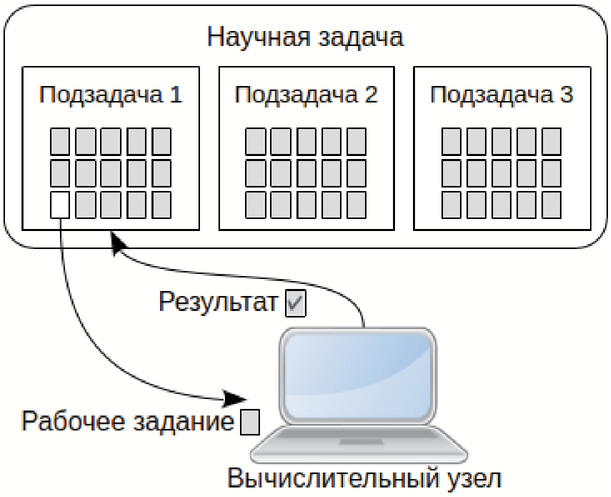

Рис. 1. Вычислительный процесс в Desktop Grid
Fig. 1. Computational process in a Desktop Grid

Далее рассмотрим математическую модель управления заданиями в Desktop Grid. Докажем, что в случаях однородных процессоров или заданий и одинаковых экстерналий, инвариантных или симметричных экстерналий игра является потенциальной и имеет равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

Математическая модель

Рассмотрим вычислительную систему $S = S(\mathcal{N}, p, e)$ со множеством заданий $\mathcal{N}$, вероятностями получения полезных результатов p и множеством экстерналий e. Множество заданий $\mathcal{N}$ разбито на n кластеров (для краткости будем далее называть их блоками) $N_1, \dots, N_n$. Обозначим как $N = \{1, 2, \dots, n\}$ множество индексов блоков заданий; $N_i \cap N_k = \varnothing \; \forall i \neq k$, $i, k \in N$, $\bigcup_{i=1}^{n} N_i = \mathcal{N}$.

Для каждого блока N_i задана вероятность получения полезных результатов в данном блоке p_i, $0 < p_i \leqslant 1$. В контексте виртуального скрининга качество результата может выражаться, например, предсказанной энергией Гиббса связывания молекулы с мишенью (ккал/моль). Чем ниже отрицательное значение энергии, тем сильнее молекула теоретически взаимодействует с мишенью. Тогда полезным результатом может считаться хит – молекула с предсказанной энергией связывания ниже заданного порога. Вероятность получения полезных результатов p_i будет выше в блоках, содержащих молекулы небольшого размера, простой формы или схожих с известными лигандами для того же класса мишеней. Поскольку процесс виртуального скрининга носит стохастический характер, а молекулы внутри одного блока схожи между собой, можно оценить значение p_i, проверив небольшую выборку молекул из блока N_i.

Коэффициент e_{ik}, где $i, k \in N, i \neq k$, выражает вклад загрузки блока заданий N_k в производительность вычислений в блоке N_i.

Задания выполняются процессорами из множества $U = U(M, w)$, которые имеют скорости $w_1, w_2, \dots, w_m$ (количество выполняемых заданий в единицу времени), где $m = |M|$. Обозначим как $W = \sum_{j=1}^{m} w_j$ суммарную скорость всех процессоров. Каждый процессор из множества M выбирает блок, в котором будет выполнять задания.

В данной модели процессоры можно считать игроками. Стратегия игрока j – это выбор блока заданий l_j. Тогда профиль стратегий представим в виде вектора $L = (l_1, \dots, l_m)$. Обозначим суммарную мощность всех процессоров, выбравших блок заданий i, как $\delta_i(L) = \sum_{\substack{j \in M: \\ l_j = i}} w_j$. Производительность вычислений в блоке заданий i имеет вид

$$\lambda_i(L) = \delta_i(L) p_i + \sum_{k \neq i} e_{ik} \delta_k(L). \qquad (1)$$

Выражение (1) представляет собой производительность любого из игроков, выбравших блок заданий N_i, поскольку получаемые общими усилиями полезные результаты имеют одинаковую ценность для всех игроков.

Таким образом, имеется некооперативная игра $\Gamma = \langle S(\mathcal{N}, p, e), U(M, w), \lambda \rangle$. Профиль стратегий является равновесием по Нэшу, если в нем ни одному игроку не выгодно в одностороннем порядке отклониться от выбранной стратегии. Формально профиль стратегий L – равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда для любого игрока $j \in M$ выполняется неравенство $\lambda_{l_j}(L) \geqslant \lambda_i(L_{j:l_j \to i})$ для всех блоков заданий $i \in N$.

Будем полагать, что выполнены условия, вытекающие из физического смысла поведения вычислительной системы [1]:

$$e_{ik} > p_i \;\; \forall i \neq k, \;\; i,k \in N \tag{2}$$

$$e_{ki} > p_i \;\; \forall i \neq k, \;\; i,k \in N \tag{3}$$

$$\sum_{l \neq i} e_{il} \geqslant \sum_{l \neq k} e_{kl} \;\; \forall i \neq k : p_i \leqslant p_k, \;\; i,k \in N. \tag{4}$$

Условия (2) и (3) означают, что блоки заданий сильно взаимосвязаны и значимость их взаимодействия превышает вероятность получения полезного результата внутри одного блока изолированно. Условие (4) означает, что влияние результатов других блоков на более продуктивный блок оказывается выше, чем на менее продуктивный блок.

Известно, что в игре с конечным числом стратегий наличие потенциальной функции гарантирует существование равновесия по Нэшу в чистых стратегиях [9]. По определению потенциальной игры, если один игрок меняет стратегию и увеличивает свой выигрыш («лучший ответ»), то значение потенциальной функции тоже строго увеличивается. В точке максимума потенциала ни один игрок не может увеличить значение функции, изменив свою стратегию, а значит, не может увеличить и свой собственный выигрыш. Это и есть определение равновесия по Нэшу. При этом в точных потенциальных играх изменение значения потенциала в точности совпадает с изменением выигрыша отклонившегося игрока, во взвешенных – совпадает с точностью до множителя – веса игрока. Каждая точка локального максимума потенциальной функции является равновесием по Нэшу в чистых стратегиях.

Рассмотрим варианты игры Γ, в которых всегда существует равновесие по Нэшу.

Игра с однородными процессорами и одинаковыми экстерналиями

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle S(\mathcal{N}, p, e), U(M, w), \lambda \rangle$. Пусть $w_1 = w_2 = \ldots = w_m = w$ и $e_{ik} = e$ для всех i и k. Обозначим число игроков, выбравших блок i, как m_i. Тогда производительность в блоке i примет вид

$$\lambda_i(L) = w\left(m_i\left(p_i - e\right) + em\right).$$

Теорема 1. *Игра Γ с однородными процессорами и одинаковыми экстерналиями имеет точный потенциал*

$$P(L) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} wk\left(p_i - e\right) = \frac{w}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i - e)(m_i^2 + m_i). \tag{5}$$

Доказательство. Предположим, что некоторый процессор $j \in M$ переходит с блока s в блок t и профиль стратегий меняется с L на L'. Изменение затрат процессора j составит

$$\Delta C_j = w(m_t + 1)\left(p_t - e\right) - wm_s\left(p_s - e\right).$$

Вычислим изменение значения потенциала.

$$\begin{aligned}\Delta P = &\sum_{k=1}^{m_t+1} wk\left(p_t - e\right) + \sum_{k=1}^{m_s-1} wk\left(p_s - e\right) \\ &- \sum_{k=1}^{m_t} wk\left(p_t - e\right) - \sum_{k=1}^{m_s} wk\left(p_s - e\right) \\ &= w(m_t + 1)\left(p_t - e\right) - wm_s\left(p_s - e\right),\end{aligned}$$

что совпадает с выражением для ΔC_j. Следовательно, игра является потенциальной. $\square$

Следствие 1. *Непрерывное расширение функции $P(L)$ (5) на область $\mathbb{R}_+^n$ является строго вогнутой функцией, т. к. квадратичная форма отрицательно определена в силу условия (2). Поэтому игра имеет единственное равновесие по Нэшу (с точностью до дискретности переменных m_i), которое соответствует глобальному максимуму функции $P(L)$ в точке m^* с координатами*

$$m_i^* = \frac{m + n/2}{(p_i - e) \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k - e}}.$$

Игра с однородными блоками заданий и одинаковыми экстерналиями

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle S(\mathcal{N}, p, e), U(M, w), \lambda \rangle$. Пусть $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ и $e_{ik} = e$ для всех i и k.

Теорема 2. *Игра Γ с однородными блоками заданий и одинаковыми экстерналиями имеет взвешенный потенциал*

$$P(L) = \frac{1}{2}\left(p - e\right) \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2(L). \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что некоторый процессор $j \in M$ переходит с блока заданий s на блок заданий t и профиль стратегий меняется с L на L'. Изменение производительности процессора j составит

$$\Delta C_j = -e\delta_t(L') + \delta_t(L')p + e\delta_s(L) - \delta_s(L)p = -e(\delta_t(L) + w_j) + (\delta_t(L) + w_j)p + e\delta_s(L) - \delta_s(L)p = (p - e)\,\delta_t(L) - (p - e)\,\delta_s(L) + (p - e)\,w_j = (p - e)\,(\delta_t(L) - \delta_s(L) + w_j).$$

Вычислим изменение значения потенциала. Для этого заметим, что все слагаемые (6) для $i \neq s, t$ остаются неизменными, меняются лишь значения слагаемых для $i = s$ и $i = t$.

$$\Delta P = \frac{1}{2}(p - e)(\delta_t^2(L') - \delta_t^2(L) + \delta_s^2(L') - \delta_s^2(L)) = \frac{1}{2}(p - e)((\delta_t(L) + w_j)^2 - \delta_t^2(L) + (\delta_s(L) - w_j)^2 - \delta_s^2(L)) = \frac{1}{2}(p - e) \times (2\delta_t(L)w_j + w_j^2 - 2\delta_s(L)w_j + w_j^2) = w_j\,(p - e)\,(\delta_t(L) - \delta_s(L) + w_j),$$

что с точностью до множителя совпадает с выражением для ΔC_j. Следовательно, игра является потенциальной. □

Следствие 2. *Непрерывное расширение функции $P(L)$ (6) на область $\mathbb{R}_+^n$ является строго вогнутой функцией как сумма квадратов с отрицательным множителем. Поэтому игра имеет единственное равновесие по Нэшу (с точностью до дискретности переменных δ_i), которое соответствует глобальному максимуму функции $P(L)$ в точке δ^* с координатами*

$$\delta_1^* = \delta_2^* = \ldots = \delta_n^* = \frac{W}{n}.$$

Игра с инвариантными экстерналиями

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle S(\mathcal{N}, p, e), U(M, w), \lambda\rangle$. Пусть экстерналии инвариантны: для любого $i \in N$ влияние загрузки в блоке заданий N_i на производительность во всех остальных блоках одинаково, то есть $e_{ik} = e_{jk} = e_k$ $\forall i, j, k \in N$, $k \neq i$, $k \neq j$.

Теорема 3. *Игра Γ с инвариантными экстерналиями имеет взвешенный потенциал*

$$P(L) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i - e_i}{2}\delta_i^2(L) + \frac{p_i + e_i}{2} \sum_{k:l_k=i} w_k^2 \right). \quad (7)$$

Доказательство. Предположим, что некоторый процессор $j \in M$ переходит с блока s в блок t и профиль стратегий меняется с L на L'. Изменение затрат процессора j составит

$$\Delta C_j = \delta_s(L)(e_s - p_s) + \delta_t(L)(p_t - e_t) + w_j(p_t - e_s).$$

Вычислим изменение значения потенциала.

$$\Delta P = \frac{p_s - e_s}{2}(\delta_s^2(L) - 2\delta_s(L)w_j + w_j^2) + \frac{p_t - e_t}{2}(\delta_t^2(L) + 2\delta_t(L)w_j + w_j^2) + \frac{p_s - e_s}{2} \sum_{\substack{k:l_k(L)=s,\\ k\neq j}} w_j^2 + \frac{p_t - e_t}{2} \sum_{\substack{k:l_k(L)=t,\\ k\neq j}} w_j^2 = (e_s - p_s)\delta_s(L)w_j + \frac{p_s - e_s}{2}w_j^2 - \frac{p_s + e_s}{2}w_j^2 + (p_t - e_t)\delta_t(L)w_j + \frac{p_t - e_t}{2}w_j^2 + \frac{p_t + e_t}{2}w_j^2 = w_j(\delta_s(L)(e_s - p_s) + \delta_t(L)(p_t - e_t) + w_j(p_t - e_s)),$$

что совпадает с выражением для ΔC_j. Следовательно, игра является потенциальной. □

Следствие 3. *Непрерывное расширение функции $P(L)$ (7) на область $\mathbb{R}_+^n$ является строго вогнутой функцией по переменным δ_i, т. к. квадратичная форма отрицательно определена в силу условия (2). Поэтому игра имеет единственное равновесие по Нэшу (с точностью до дискретности переменных δ_i), которое соответствует глобальному максимуму функции $P(L)$ в точке δ^* с координатами*

$$\delta_i^* = \frac{W}{(p_i - e_i)\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k - e_k}}.$$

Игра с симметричными экстерналиями

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle S(\mathcal{N}, p, e), U(M, w), \lambda\rangle$. Пусть экстерналии симметричны: $e_{ik} = e_{ki}$ $\forall i, k \in N$, $k \neq i$.

Теорема 4. *Игра Γ с симметричными экстерналиями имеет взвешенный потенциал*

$$P(L) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{2} \left(\delta_i^2(L) + \sum_{j:l_j=i} w_j^2 \right) + \sum_{i<k} e_{ik}\delta_i(L)\delta_k(L). \quad (8)$$

Доказательство. Предположим, что некоторый процессор $j \in M$ переходит с блока s в блок t и профиль стратегий меняется с L на L'. Изменение затрат процессора j составит

$$\Delta C_j = \delta_s(L)(e_{ts} - p_s) + \delta_t(L)(p_t - e_{st}) + w_j(p_t - e_{ts}) + \sum_{k \neq s,t} \delta_k(L)(e_{tk} - e_{sk}).$$

Вычислим изменение значения потенциала.

$$\Delta P = \frac{p_s}{2}(\delta_s(L) - w_j)^2 + \frac{p_s}{2} \sum_{j:l_j(L')=s} w_j^2 + \frac{p_t}{2}(\delta_t(L) + w_j)^2 + \frac{p_t}{2} \sum_{j:l_j(L')=t} w_j^2 + \sum_{i<k} e_{ik}\delta_i(L')\delta_k(L') - \frac{p_s}{2}\delta_s^2(L) - \frac{p_t}{2}\delta_t^2(L) - \frac{p_s}{2} \sum_{j:l_j(L)=s} w_j^2 - \frac{p_t}{2} \sum_{j:l_j(L)=t} w_j^2 - \sum_{i<k} e_{ik}\delta_i(L)\delta_k(L) = w_j \left(\delta_s(L)(e_{ts} - p_s) + \delta_t(L)(p_t - e_{st}) + w_j(p_t - e_{ts}) + \sum_{k \neq s,t} \delta_k(L)(e_{tk} - e_{sk})\right),$$

что с точностью до множителя совпадает с выражением для ΔC_j. Следовательно, игра является потенциальной. □

Следствие 4. *В игре с симметричными экстерналиями может существовать несколько различных равновесий по Нэшу, в каждом из которых производительности во всех задействованных блоках заданий равны (с точностью до дискретности переменных):*

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* = \ldots = \lambda_n^*.$$

Доказательство. Запишем непрерывное расширение функции $P(L)$ (8) на область $\mathbb{R}_+^n$ в матричной форме:

$$P(L) \approx \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta},$$

где элементы матрицы $\boldsymbol{A}$: $A_{ik} = e_{ik}$, $A_{ii} = p_i$. Поскольку $e_{ik} > p_i$, собственные числа матрицы могут принимать как отрицательные, так и положительные значения, и может существовать несколько локальных экстремумов потенциала. Найдем точки экстремума, записав условия Лагранжа:

$$\begin{cases} p_1\delta_1 + e_{12}\delta_2 + \ldots + e_{1n}\delta_n = \eta \\ e_{21}\delta_1 + p_2\delta_2 + \ldots + e_{2n}\delta_n = \eta \\ \ldots \\ e_{n1}\delta_1 + e_{n2}\delta_2 + \ldots + p_n\delta_n = \eta \\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i = W \end{cases}$$

Заметим, что в левой части каждого из первых n уравнений стоит формула производительности вычислений в блоке i, λ_i (1). Видно, что в точке экстремума потенциала производительности во всех задействованных блоках равны между собой: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \eta$. □

Из теорем 1–4 следует, что алгоритм лучших ответов A1 сходится к равновесию по Нэшу для любого из перечисленных вариантов игры управления заданиями Γ, причем в первых трех вариантах – к единственному равновесию, а в четвертом – к одному из равновесий, если их несколько. В записи алгоритма используем следующие структуры данных:

- массив $L = (l_1, \ldots, l_m)$ хранит номера блоков, выбранных игроками $1, \ldots, m$. Назовем его расписанием;
- $random\_schedule(\Gamma)$ – это любое выбранное случайным образом расписание в игре Γ;
- $L_{j:s \to t}$ – это расписание, полученное из расписания L переходом игрока j с блока s на блок t. Стратегии других игроков при этом не меняются.

Алгоритм управления заданиями

Алгоритм управления заданиями A1 начинает работу с расписания L, выбранного случайным образом. Далее в цикле по всем игрокам $j \in M$ проверяется существование лучшего ответа (то есть строго выгодного перехода $s \to t$) для текущего игрока, и если такой ответ найден, то игрок совершает его. Цикл лучших ответов продолжается до тех пор, пока в установившемся расписании ни один игрок не сможет никуда перейти с выгодой для себя.

Алгоритм A1.

$L \leftarrow random\_schedule(\Gamma)$
moveFound $\leftarrow false$
loop
  for $j \in M$ **do**
    $s \leftarrow L[j]$
    for $t \in N, t \neq s$ **do**
      if $C_j(L_{j:s \to t}) > C_j(L)$ **then**
        $L \leftarrow L_{j:s \to t}$

```
            moveFound ← true
            break
        end if
    end for
    if moveFound then
        break
    end if
end for
if !moveFound then
    break
end if
end loop
return L
```

Вычислительные эксперименты

Пример 1. Рассмотрим игру Γ с инвариантными экстерналиями и разнородными игроками. Пусть $n = 10$, $m = 1000$, $e_1 = 0.3$, $e_2 = 0.32$, $e_3 = 0.33$, $e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = 0.35$, $e_8 = 0.4$, $e_9 = 0.42$, $e_{10} = 0.45$; $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.025$, $p_3 = 0.05$, $p_4 = 0.075$, $p_5 = 0.1$, $p_6 = 0.125$, $p_7 = 0.15$, $p_8 = 0.175$, $p_9 = 0.2$, $p_{10} = 0.225$. Веса игроков сгенерированы случайным образом в диапазоне от 1 до 100.

На рис. 2 приведена динамика сходимости алгоритма A1 к равновесию по Нэшу в игре Γ.

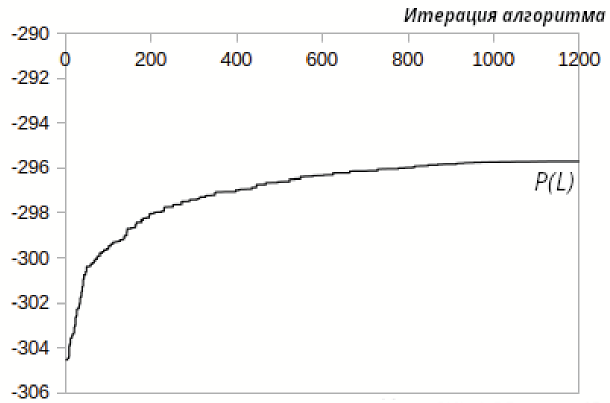

Рис. 2. Динамика сходимости алгоритма A1 к равновесию по Нэшу в игре с инвариантными экстерналиями ($n = 10$, $m = 1000$)
Fig. 2. Dynamics of convergence to the Nash equilibrium in a game with invariant externalities ($n = 10$, $m = 1000$)

В полученном равновесии по Нэшу

$$\delta = (4317, 4244, 4471, 4561, 5008, 6261, 5565, 5567, 5695, 5567),$$

что, с учетом дискретности переменных, совпадает с округленным аналитическим решением из следствия 3

$$\delta^* = (4318.8, 4245.6, 4473.0, 4554.4, 5009.8, 6262.2, 5566.4, 5566.4, 5692.9, 5566.4).$$

Заметим, что в играх с неоднородными блоками заданий и различными экстерналиями в равновесии по Нэшу, в зависимости от значений параметров модели, производительность вычислений в некотором блоке t может оказаться нулевой, так как ни одному игроку не выгодно выбрать этот блок. Таких блоков может быть и несколько (но не более n). Это обусловлено спецификой модели (1)–(4): при определенном соотношении параметров всем игрокам будет выгоднее работать в блоке заданий с высоким p_i, чем распределиться по разным блокам заданий и помогать друг другу через обмен информацией. В итоге задания блока t не будет выполнять никто. Чтобы подобной ситуации не возникало, можно действовать разными способами, например:

1) Выполнить фиксированное количество заданий из блоков, выбранных игроками, а затем запретить выбор этих блоков, оставив лишь не выбранные ранее блоки. Тогда результаты из всех блоков будут поступать последовательно, множество доступных блоков заданий будет меняться на каждом этапе, а в остальном игра останется неизменной.

2) Направить в каждый блок вычислительные мощности фиксированного объема (например, собственные компьютеры администраторов проекта добровольных вычислений) и запретить им переходить в другие блоки. Тогда поток результатов из всех блоков будет обеспечен базовыми мощностями $\delta_i^0 > 0$, суммарные мощности δ_i в формуле (1) будут вычисляться с учетом базовых мощностей, а в остальном игра останется неизменной.

3) Изменить параметры математической модели, увеличив вознаграждения участников за работу в непопулярных блоках или снизив их за работу в популярных блоках (увеличить p_t или уменьшить p_i). Значения параметров подобрать так, чтобы равновесное расписание заданий стало более сбалансированным.

Пример 2. Рассмотрим игру Γ с одинаковыми экстерналиями и однородными игроками. Пусть $n = 10$, $e = 0.23$, $w = 5$, а частоты получения полезных результатов p_i такие же, как в примере 1. На рис. 3 приведена зависимость числа блоков с $\delta_i(L) > 0$ в равновесии от числа игроков в игре Γ. Здесь начальное расписание выбрано случайным образом и зафиксировано на протяжении всей серии экспериментов. Большинство игроков в равновесии выбирают блок 10 с минимальной разницей $|p_i - e|$. График показывает, что при малых m есть никем не выбранные блоки заданий, но при $m > 61$ выбраны все блоки заданий.

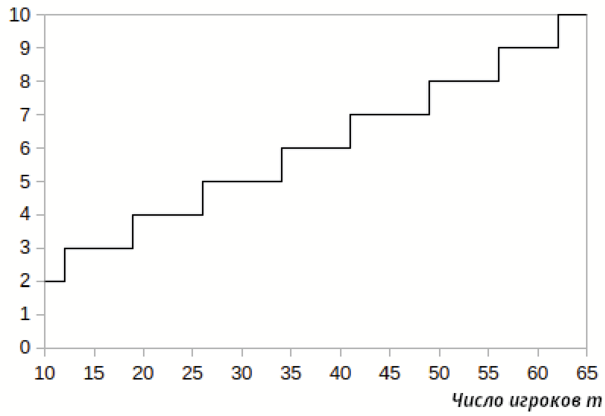

Рис. 3. Число блоков с $\delta_i > 0$ в равновесии в игре с одинаковыми экстерналиями и однородными игроками в зависимости от числа игроков m

Fig. 3. The number of the blocks with $\delta_i > 0$ in the equilibrium in the game with equal externalities and homogeneous players, depending on the number of players m

Пример 3. Рассмотрим игру Γ с симметричными экстерналиями, разнородными игроками и блоками заданий. Пусть $n = 3$, $m = 20$, $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.02$, $p_3 = 0.2$, $e_{12} = e_{21} = 0.5$, $e_{13} = e_{31} = 0.25$, $e_{23} = e_{32} = 0.25$. Веса игроков сгенерированы случайным образом в диапазоне от 1 до 500.

В общем случае равновесие по Нэшу может быть неоптимальным с точки зрения системы в целом, поскольку игроки преследуют эгоистические цели и действуют независимо друг от друга. В зависимости от целей вычислительного проекта (скорейшее получение всех результатов, скорейшее получение первых полезных результатов и т. д.) оптимальным может оказаться централизованное назначение заданий игрокам. Рассмотрим две меры эффективности системы и оценим эффективность равновесий по Нэшу.

Пусть $E_1(L) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(L)$ – полнота охвата подзадач, которые кто-либо выполняет; $E_2(L) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(L)\lambda_i(L)$ – суммарная производительность всех вычислительных узлов. Введем меры эффективности

$$E_1^*(L) = \frac{E_1(L)}{\max\limits_L E_1(L)}, \quad E_2^*(L) = \frac{E_2(L)}{\max\limits_L E_2(L)}.$$

Сравним поведение системы при различных алгоритмах управления заданиями:

- L_{NE} – расписание в равновесии по Нэшу, найденное при помощи алгоритма A1.
- L_1 – расписание, найденное последовательным «жадным» назначением процессоров на блоки заданий: каждый игрок выбирает для себя лучший вариант, исходя из текущего состояния системы.
- L_2 – расписание, найденное последовательной «жадной» максимизацией минимума: каждый игрок назначается в тот блок, где текущая производительность минимальна.
- L_3 – расписание, найденное алгоритмом Round Robin с учетом частот получения полезных результатов и экстерналий.
- L_4 – расписание, найденное случайным назначением процессоров на блоки.

Максимально возможная эффективность системы найдена полным перебором профилей стратегий и составляет $\max\limits_L E_1(L) = 3\,956.76$, $\max\limits_L E_2(L) = 6\,803\,728$. В таблице приведена эффективность системы, описанной в примере 3, усредненная по 1000 экспериментов.

Эффективность вычислительной системы при различных алгоритмах управления заданиями (пример 3)

Efficiency of the computational system with different task scheduling algorithms (example 3)

	L_{NE}	L_1	L_2	L_3	L_4
E_1^*	0.884	0.971	0.972	**0.973**	0.965
E_2^*	**0.995**	0.971	0.390	0.974	0.924

При этом в равновесиях по Нэшу ни один игрок не выбирает третий блок. Таким образом, эгоистичное поведение игроков приводит к неоптимальной полноте охвата блоков заданий, но обеспечивает максимальную суммарную производительность (это следует из вида функции потенциала). Если целью является гарантированное получение промежуточных результатов всех подзадач, необходимо использовать механизмы балансировки, описанные выше. Например, чтобы сбалансировать загрузку и улучшить эффективность в равновесии, назначим в каждый блок фиксированные вычислительные мощности по $\delta_i^0 = 100$ единиц каждая. Скорректируем меру эффективности с учетом введенных мощностей:

$$E_1'(L) = E_1(L) - \sum_{i=1}^{n}(\delta_i^0 p_i + \sum e_{ik}\delta_k^0).$$

Теперь усредненная эффективность системы с эгоистичными игроками близка к единице: $E_1'^*(L_{NE}) = 0.9897$.

Заключение

В статье представлена и исследована математическая модель управления заданиями с линейными экстерналиями, где каждый игрок стремится максимизировать свою производительность в присутствии экстерналий, оказывающих положительный эффект. Экстерналии выражают обмен информацией в процессе решения научной задачи, например, в системе добровольных вычислений.

Доказано, что игра является потенциальной в случаях однородных процессоров или заданий и одинаковых экстерналий, инвариантных или симметричных экстерналий. Доказано также, что в случаях с однородными процессорами или заданиями и одинаковыми экстерналиями или инвариантными экстерналиями равновесие по Нэшу единственно и глобально оптимально, в то время как случай с симметричными экстерналиями допускает множество равновесий, что требует применения алгоритма лучших ответов. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по моделированию управления заданиями.

Представленные результаты расширяют область применения классических моделей, доказывая существование равновесия и сходимость к нему как в задачах минимизации задержки, так и в задачах максимизации производительности. Найденный вид функции потенциала позволяет использовать методы глобальной оптимизации для поиска равновесий, что эффективнее прямого перебора стратегий.

Литература

1. *Chirkova J. V.* Maximizing the minimum processor load with linear externalities // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2021: 20th International Conference. CCIS. Vol. 1476 / A. Strekalovsky, Yu. Kochetov, T. Gruzdeva, A. Orlov (eds.). Cham: Springer, 2021. P. 147–162. doi: 10.1007/978-3-030-86433-0_10

2. *Chirkova J. V.* Potential game in general transport network with symmetric externalities // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2024. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 14766 / A. Eremeev, M. Khachay, Yu. Kochetov, V. Mazalov, P. Pardalos (eds.). Cham: Springer, 2024. P. 231–242. doi: 10.1007/978-3-031-62792-7_16

3. Einstein@Home. URL: https://einsteinathome.org/ (дата обращения: 18.03.2026).

4. *Etesami S. R.* Maximizing social welfare subject to network externalities: a unifying submodular optimization approach // IEEE Trans. Network Sci. Eng. 2024. Vol. 11(5). P. 4860–4874. doi: 10.1109/TNSE.2024.3397188

5. *Ivashko E., Nikitina N.* Characterization of a desktop grid project as a queueing system // Supercomputing. RuSCDays 2024. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 15407 / V. Voevodin, A. Antonov, D. Nikitenko (eds.). 2025. P. 32–43. doi: 10.1007/978-3-031-78462-0_3

6. *Koutsoupias E., Papadimitriou C.* Worst-case equilibria // STACS 1999. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1563 / C. Meinel, S. Tison (eds.). Heidelberg: Springer, 1999. P. 404–413. doi: 10.1007/3-540-49116-3_38

7. *Kuang Z., Mazalov V., Tang X., Zheng J.* Transportation network with externalities // J. Comput. Appl. Math. 2021. Vol. 382. Art. 113091. doi: 10.1016/j.cam.2020.113091

8. *Liao W., Wang L., Li J.* Congestion game with inter-cell interference for cell selection in heterogeneous cellular network // 2014 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC). 2014. P. 603–608. doi: 10.1109/ICCChina.2014.7008348

9. *Monderer D., Shapley L. S.* Potential games // Games and economic behavior. 1996. Vol. 14, iss. 1. P. 124–143. doi: 10.1006/game.1996.0044

10. *Nikitina N., Manzyuk M., Podlipnik Č., Jukić M.* Volunteer computing project SiDock@home for virtual drug screening against SARS-CoV-2 // IFIP Advances in Information and Communication Technology. 2021. Vol. 616. P. 23–34. doi: 10.1007/978-3-030-86582-5_3

11. PrimeGrid. URL: https://www.primegrid.com/ (дата обращения: 18.03.2026).

12. *Quang B. T., Kim J. S., Rho S., Kim S., Kim S., Hwang S., Medernach E., Breton V.* A comparative analysis of scheduling mechanisms for virtual screening workflow in a shared resource environment // 2015 15th IEEE/ACM International Symposium on Cluster, Cloud and Grid Computing. 2015. P. 853–862. doi: 10.1109/CCGrid.2015.123

13. *Tan Z., Wan L., Zhang Q., Ren W.* Inefficiency of equilibria for the machine covering game on uniform machines // Acta Informatica. 2012. Vol. 49. P. 361–379. doi: 10.1007/s00236-012-0163-1

14. *Vatutin E., Belyshev A., Nikitina N., Manzuk M., Albertian A., Kurochkin I., Kripachev A., Pykhtin A.* Diagonalization and canonization of Latin squares // Supercomputing. RuSCDays 2023. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 14389 / V. Voevodin, S. Sobolev, M. Yakobovskiy, R. Shagaliev (eds.). 2023. P. 48–61. doi: 10.1007/978-3-031-49435-2_4

15. *Vivas A., Tchernykh A., Castro H.* Trends, approaches, and gaps in scientific workflow scheduling: a systematic review // IEEE Access. 2024. Vol. 12. P. 182203–182231. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3509218

16. *Voelz V. A., Pande V. S., Bowman G. R.* Folding@home: Achievements from over 20 years of citizen science herald the exascale era // Biophys. J. 2023. Vol. 122, iss. 14. P. 2852–2863. doi: 10.1016/j.bpj.2023.03.028

17. World Community Grid. URL: https://www.worldcommunitygrid.org/ (дата обращения: 18.03.2026).

18. *Wu Y., Cheng T. C. E., Ji M.* Inefficiency of the Nash equilibrium for selfish machine covering on two hierarchical uniform machines // Inf. Process. Lett. 2015. Vol. 115. P. 838–844. doi: 10.1016/j.ipl.2015.06.005

19. *Zaikin O.* SAT-Based cryptanalysis: from parallel computing to volunteer computing // Supercomputing. RuSCDays 2019. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1129 / V. Voevodin, S. Sobolev (eds.). 2019. P. 701–712. doi: 10.1007/978-3-030-36592-9_57

References

1. *Chirkova J. V.* Maximizing the minimum processor load with linear externalities. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2021: 20th International Conference. CCIS.* Vol. 1476. Cham: Springer; 2021. P. 147–162. doi: 10.1007/978-3-030-86433-0_10

2. *Chirkova J. V.* Potential game in general transport network with symmetric externalities. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2024. Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 14766. Cham: Springer; 2024. P. 231–242. doi: 10.1007/978-3-031-62792-7_16

3. Einstein@Home. URL: https://einsteinathome.org/ (accessed: 18.03.2026).

4. *Etesami S. R.* Maximizing social welfare subject to network externalities: a unifying submodular optimization approach. *IEEE Trans. Network Sci. Eng.* 2024;11(5):4860–4874. doi: 10.1109/TNSE.2024.3397188

5. *Ivashko E., Nikitina N.* Characterization of a desktop grid project as a queueing system. *Supercomputing. RuSCDays 2024. Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 15407. 2025. P. 32–43. doi: 10.1007/978-3-031-78462-0_3

6. *Koutsoupias E., Papadimitriou C.* Worst-case equilibria. *STACS 1999. Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 1563. Heidelberg: Springer; 1999. P. 404–413. doi: 10.1007/3-540-49116-3_38

7. *Kuang Z., Mazalov V., Tang X., Zheng J.* Transportation network with externalities. *J. Comput. Appl. Math.* 2021;382:113091. doi: 10.1016/j.cam.2020.113091

8. *Liao W., Wang L., Li J.* Congestion game with inter-cell interference for cell selection in heterogeneous cellular network. *2014 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC).* 2014. P. 603–608. doi: 10.1109/ICCChina.2014.7008348

9. *Monderer D., Shapley L. S.* Potential games. *Games and economic behavior.* 1996;14(1):124–143. doi: 10.1006/game.1996.0044

10. *Nikitina N., Manzyuk M., Podlipnik Č., Jukić M.* Volunteer computing project SiDock@home for virtual drug screening against SARS-CoV-2. *IFIP Advances in Information and Communication Technology.* 2021;616:23–34. doi: 10.1007/978-3-030-86582-5_3

11. PrimeGrid. URL: https://www.primegrid.com/ (accessed: 18.03.2026).

12. *Quang B. T., Kim J. S., Rho S., Kim S., Kim S., Hwang S., Medernach E., Breton V.* A comparative analysis of scheduling mechanisms for virtual screening workflow in a shared resource environment. *2015 15th IEEE/ACM International Symposium on Cluster, Cloud and Grid Computing.* 2015. P. 853–862. doi: 10.1109/CCGrid.2015.123

13. *Tan Z., Wan L., Zhang Q., Ren W.* Inefficiency of equilibria for the machine covering game on uniform machines. *Acta Informatica.* 2012;49:361–379. doi: 10.1007/s00236-012-0163-1

14. *Vatutin E., Belyshev A., Nikitina N., Manzuk M., Albertian A., Kurochkin I., Kripachev A., Pykhtin A.* Diagonalization and canonization of Latin squares. *Supercomputing. RuSCDays 2023. Lecture Notes in Computer Science.* Vol. 14389. 2023. P. 48–61. doi: 10.1007/978-3-031-49435-2_4

15. *Vivas A., Tchernykh A., Castro H.* Trends, approaches, and gaps in scientific workflow scheduling: a systematic review. *IEEE Access.* 2024;12:182203–182231. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3509218

16. *Voelz V. A., Pande V. S., Bowman G. R.* Folding@home: Achievements from over 20 years of citizen science herald the exascale era. *Biophys. J.* 2023;122(14):2852–2863. doi: 10.1016/j.bpj.2023.03.028

17. World Community Grid. URL: https://www.worldcommunitygrid.org/ (accessed: 18.03.2026).

18. *Wu Y., Cheng T. C. E., Ji M.* Inefficiency of the Nash equilibrium for selfish machine covering on

two hierarchical uniform machines. *Inf. Process. Lett.* 2015;115:838–844. doi: 10.1016/j.ipl.2015.06.005

19. *Zaikin O.* SAT-Based cryptanalysis: from parallel computing to volunteer computing. *Supercomputing. RuSCDays 2019. Communications in Computer and Information Science.* Vol. 1129. 2019. P. 701–712. doi: 10.1007/978-3-030-36592-9_57

Поступила в редакцию / received: 31.03.2026; принята к публикации / accepted: 19.05.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Кукушкина Наталия Николаевна
канд. техн. наук, старший научный сотрудник

e-mail: kukushkina@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Kukushkina, Natalia
Cand. Sci. (Tech.), Senior Researcher