

УДК 532.516:532.546

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ИЗОБАРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

К. В. Губарева^{1*}, Е. Ю. Просвиряков^{2,3}, А. В. Еремин¹

¹ Самарский государственный технический университет (ул. Молодогвардейская, 244, Самара, Россия, 443100), *r.kristina2017@mail.ru

² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина (ул. Мира, 19, Екатеринбург, Россия, 620062)

³ Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН (ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Россия, 620049)

Представлено точное решение нестационарных уравнений Навье – Стокса, описывающее трехмерное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое с проницаемыми границами. Скоростное поле ищется в классе Линя, что позволяет свести исходную систему к одномерным уравнениям для амплитудных функций, зависящих от вертикальной координаты и времени. Показано, что вертикальная компонента скорости постоянна и соответствует равномерному отсосу или вдуву. Получены аналитические выражения для эволюции полей скорости, включая нелинейную компоненту, описывающую вертикальную завихренность. Задача Штурма – Лиувилля для оператора конвекции-диффузии решается аналитически с учетом условия проскальзывания Навье на нижней границе. Для компоненты, возбуждаемой нелинейным источником, использован интеграл Дюамеля. Проведен параметрический анализ влияния вертикального числа Рейнольдса, модифицированного числа Тейлора, угла направления скорости на верхней границе и параметра проскальзывания на динамику течения. Установлены режимы с развитыми противотечениями и застойными точками. Показано, что при отрицательном вертикальном числе Рейнольдса (отсос) время релаксации убывает с ростом проскальзывания, что качественно отличается от классического случая прилипания. Полученные результаты могут быть использованы для верификации численных алгоритмов и при моделировании гидродинамических процессов в пористых средах, мембранных аппаратах и каталитических слоях, где важны нестационарные эффекты и наличие проницаемых границ.

Ключевые слова: точные решения; уравнения Навье – Стокса; нестационарное течение; проницаемые границы; условие проскальзывания; вертикальная завихренность; противотечения; время релаксации

Для цитирования: Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю., Еремин А. В. Нестационарное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 20–31. doi: 10.17076/mat2344

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2025-0006) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета (создание новых молодежных лабораторий).

K. V. Gubareva^{1*}, E. Yu. Prosviryakov^{2,3}, A. V. Eremin¹.
UNSTEADY ISOBARIC FLOW OF A VISCOUS
INCOMPRESSIBLE FLUID IN A THIN LAYER WITH
PERMEABLE BOUNDARIES

¹Samara State Technical University (244 Molodogvardeyskaya St., 443100 Samara, Russia), *r.kristina2017@mail.ru

²Ural Federal University (19 Mira St., 620062 Yekaterinburg, Russia)

³Gorkunov Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (34 Komsomolskaya St., 620049 Yekaterinburg, Russia)

An exact solution of unsteady Navier–Stokes equations is presented for a three-dimensional isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a horizontal layer with permeable boundaries. The velocity field is sought in the Lin class, which reduces the original system to one-dimensional equations for amplitude functions depending on the vertical coordinate and time. It is shown that the vertical velocity component is constant, corresponding to uniform suction or injection. Analytical expressions for the evolution of the velocity fields are obtained, including the nonlinear component describing the vertical vorticity. The Sturm–Liouville problem for the convection–diffusion operator is solved analytically taking into account the Navier slip condition on the lower boundary. For the component excited by a nonlinear source, the Duhamel integral is used. Parametric analysis is performed for the impact of the vertical Reynolds number, the modified Taylor number, the angle of the velocity direction on the upper boundary, and the slip parameter on the flow dynamics. Regimes with developed counterflows and stagnation points are identified. It is shown that for a negative vertical Reynolds number (suction), the relaxation time decreases with increasing slip, which differs qualitatively from the classical no-slip case. The results obtained can be used for verifying numerical algorithms and in modelling hydrodynamic processes in porous media, membrane devices and catalytic layers, where unsteady effects and the presence of permeable boundaries are important.

Key words: exact solutions; Navier–Stokes equations; unsteady flow; permeable boundaries; slip condition; vertical vorticity; counterflows; relaxation time

For citation: Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Unsteady isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 20–31. doi: 10.17076/mat2344

Funding. The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSSE-2025-0006) within state assignment to the Samara State Technical University (creation of new youth laboratories).

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамические процессы в слоистых средах с проницаемыми границами широко распространены в природе и технике. К ним относятся фильтрация жидкостей через пористые материалы, течение в мембранных аппаратах, работа каталитических реакторов, а также крупномасштабные движения в океане и атмосфере [1, 10, 17]. Во всех этих случаях возможность точного математического описания полей скорости позволяет прогнозировать поведение системы, оптимизировать конструкцию устройств и верифицировать численные модели [9, 11].

Уравнения Навье–Стокса, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости, до

сих пор остаются предметом интенсивных исследований. Несмотря на их нелинейность, существуют классы точных решений, которые дают ценную информацию о структуре течений и служат эталонами для проверки приближенных методов [4, 6, 18]. Одним из наиболее продуктивных подходов является использование решений в классе Линя [14], где компоненты скорости представляются в виде линейных форм относительно двух пространственных переменных с коэффициентами, зависящими от третьей координаты и времени [4, 18]. Такие решения позволяют описать трехмерные течения, включая эффекты вертикальной завихренности, и находят применение в геофизической гидродинамике [2, 16], хими-

ческой технологии [3] и микрофлюидике [15]. При этом следует подчеркнуть, что подобные точные решения служат в первую очередь эталонами для верификации численных алгоритмов и инструментом для качественного анализа влияния различных факторов, а не прямым описанием конкретных природных или технологических процессов во всей их сложности. В частности, они позволяют исследовать вклад таких эффектов, как проницаемость границ, проскальзывание и нестационарность, в упрощенной, но математически строгой постановке.

Особый интерес представляют нестационарные режимы, возникающие при изменении граничных условий или начальных возмущений. В таких задачах необходимо учитывать изменения скорости во времени, время релаксации к стационарному состоянию, а также эволюцию во времени областей обратных течений и застойных зон (которые могут существовать и в стационарных состояниях) [8, 12]. Эти явления существенно влияют на эффективность теплообмена и химических превращений в аппаратах с проницаемыми стенками, например, в каталитических слоях или мембранных реакторах. Разработка аналитических моделей, учитывающих нестационарность, позволяет установить количественные критерии перехода к стационарному режиму, что важно для проектирования технологических процессов.

Цель работы – построение и анализ точного нестационарного решения уравнений Навье–Стокса для изобарического течения в горизонтальном слое с проницаемыми границами. В отличие от известных стационарных решений [5] в работе учитывается изменение возмущений, вызванных начальными отклонениями от равновесия. Исследуется влияние вертикального числа Рейнольдса, модифицированного числа Тейлора, угла направления скорости на верхней границе и параметра проскальзывания Навье на динамику формирования противотечений и застойных точек. Особое внимание уделяется зависимости времени релаксации от этих параметров. Полученные результаты могут служить основой для верификации численных алгоритмов и для анализа гидродинамических процессов в пористых и мембранных системах, где важна точная оценка переходных режимов.

Постановка задачи

Рассматривается бесконечный горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости толщины h . Система координат выбра-

на так, что ось Oz направлена вертикально вверх, а плоскости $z = 0$ и $z = h$ являются нижней и верхней границами. Границы считаются проницаемыми и недеформируемыми; через них может происходить равномерный отсос или вдув жидкости с постоянной вертикальной скоростью W . Жидкость предполагается изобарической – градиент давления отсутствует, что позволяет рассматривать чисто инерционно-вязкие течения. Такое приближение является стандартным для решений класса Линя [6, 14] и оправдано для тонких горизонтальных слоев ($\delta = h/l \ll 1$), где вертикальные вязкие напряжения доминируют над горизонтальными градиентами давления. Оценка порядков показывает, что условие $|\partial P/\partial x| \ll \mu|\partial^2 V_x/\partial z^2|$ выполняется при $\delta^2 \text{Re}_U \lesssim O(1)$. Для рассматриваемых далее параметров ($\delta = 0,01$) это условие удовлетворяется, что подтверждает применимость изобарической модели для описания течений в тонких слоях.

Исходная система уравнений Навье–Стокса и неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

где $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, P – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость. В изобарическом приближении $\nabla P = 0$, что существенно упрощает задачу.

Решение ищется в классе Линя, обобщенном на нестационарный случай [7]. Поле скоростей представляется в виде линейной комбинации по горизонтальным координатам:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z, t) + y u(z, t), \\ V_y &= V(z, t), \\ V_z &= w(z, t), \\ P &= P_0(z, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Все функции в (1) зависят только от вертикальной координаты z и времени t . Далее функции скорости записываются в виде $V_x(z, x, y, t)$, $V_y(z, x, y, t)$, $V_z(z, x, y, t)$, где первый аргумент – вертикальная координата z , далее следуют горизонтальные координаты x, y и время t . Такой порядок аргументов подчеркивает, что основное внимание в работе уделяется вертикальной структуре течения, а горизонтальные координаты играют роль параметров.

Представление (1) является частным случаем общего класса Линя [6, 14] и выбрано специально для описания течений с вертикальной завихренностью. Действительно, вертикальная компонента завихренности вычис-

ляется как $\omega_z = \partial V_y / \partial x - \partial V_x / \partial y$. Для принятого анзаца (V_y не зависит от x , а V_x линейно зависит от y) получаем $\omega_z = -u(z, t) \neq 0$. Таким образом, асимметрия в зависимости компонент скорости от горизонтальных координат не является ограничением общности, а отражает физическую природу рассматриваемого класса точных решений, позволяя моделировать вихревые структуры при сохранении пространственно-одномерной редукции уравнений Навье – Стокса.

Подстановка (1) в уравнения движения и неразрывности дает условие $\partial w / \partial z = 0$, откуда $w = w(t)$. Далее из уравнения для вертикальной компоненты при $\nabla P = 0$ следует $dw/dt = 0$, поэтому вертикальная скорость постоянна: $w(t) = W$.

Для оставшихся компонент получается система:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + W \frac{\partial V}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - Vu. \quad (4)$$

Уравнения (2) и (3) линейны и однородны, уравнение (4) линейно относительно U с неоднородностью, определяемой произведением уже найденных функций V и u .

Граничные и начальные условия

На нижней границе ($z = 0$) ставится условие проскальзывания Навье [13, 15]:

$$\alpha \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = V_x \Big|_{z=0}, \quad \alpha \frac{\partial V_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = V_y \Big|_{z=0},$$

где $\alpha = \beta/h$ – безразмерная длина скольжения, β – размерная длина скольжения. При $\alpha = 0$ получается классическое условие прилипания. Согласно экспериментальным данным [15], для гладких гидрофильных поверхностей β составляет единицы–десятки нанометров, что при толщине слоя $h \sim 1$ мм дает $\alpha \sim 10^{-6} - 10^{-4}$. Для гидрофобных или микроструктурированных поверхностей β может достигать микрометров, и тогда $\alpha \sim 10^{-3} - 10^{-1}$. На величину β влияют шероховатость, смачиваемость и адсорбция примесей. В работе рассматривается диапазон $\alpha \in [0, 5]$, охватывающий как практически важные малые значения, так и предельные случаи сильного проскальзывания. В функциях U, u, V эти условия

записываются как

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u}{\partial z}(0, t) &= u(0, t), \\ \alpha \frac{\partial V}{\partial z}(0, t) &= V(0, t), \\ \alpha \frac{\partial U}{\partial z}(0, t) &= U(0, t). \end{aligned} \quad (5)$$

На верхней границе ($z = 1$) задаются компоненты скорости как функции времени (в безразмерной форме). В общем случае:

$$\begin{aligned} u(1, t) &= u_1(t), \\ V(1, t) &= V_1(t), \\ U(1, t) &= U_1(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Для постоянных граничных условий, как в [5], принимаются значения

$$u_1 = \frac{\text{Ta}}{2\text{Re}_U}, \quad V_1 = \sin \varphi, \quad U_1 = \cos \varphi,$$

где $\text{Ta} = 2\Omega l^2/\nu$ – модифицированное число Тейлора, Ω – вертикальная компонента завихренности, φ – угол, задающий направление скорости на верхней границе.

Подчеркнем, что выбор граничных условий на верхней границе не преследует цели точного воспроизведения какого-либо конкретного физического сценария (например, ветрового воздействия на океанический слой), а служит удобной параметризацией для исследования влияния сдвиговых и вращательных компонент скорости на динамику течения. Аналогичный подход характерен для классических задач Куэтта и Экмана, в которых при малых числах Рейнольдса допустимо пренебрежение нелинейными членами и анализ проводится на основе линеаризованных уравнений.

Начальные условия при $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(z, 0) &= u_0(z), \\ V(z, 0) &= V_0(z), \\ U(z, 0) &= U_0(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Для перехода к безразмерным переменным вводятся масштабы: толщина слоя h для вертикальной координаты, характерный горизонтальный масштаб l , масштаб скорости $[U]$. Тогда

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{z}{h}, \quad t^* = \frac{t\nu}{h^2}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \\ u^* &= \frac{u}{[U]}, \quad V^* = \frac{V}{[U]}, \quad U^* = \frac{U}{[U]}, \quad W^* = \frac{Wh}{\nu} = \text{Re}_w. \end{aligned}$$

Вводятся числа Рейнольдса: $\text{Re}_w = Wh/\nu$ (вертикальное), $\text{Re}_U = [U]l/\nu$ (горизонтальное) и параметр геометрической анизотропии $\delta = h/l$.

Горизонтальный масштаб l определяет характерный размер области, в которой рассматриваемое течение описывается представлением (1). В силу линейной зависимости V_x от y данное решение является локальным и применимо лишь при $|x|, |y| \lesssim l$. Вне этой окрестности линейное приближение нарушается, и необходимо учитывать нелинейные эффекты либо градиенты давления. Никаких дополнительных граничных условий на горизонтальных границах не требуется, поскольку решение не претендует на описание конечного домена размером $l \times l$, а используется для анализа течения в локальной окрестности начала координат. Все последующие результаты относятся именно к этой ограниченной области, где поле скорости сохраняет физический смысл.

После подстановки и опускания звездочек система (2)–(4) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Re}_w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{Re}_w \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{Re}_w \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \delta^2 \text{Re}_U V u, \quad (10)$$

где $z \in [0, 1]$, $t \geq 0$. Граничные условия (5) и (6) и начальные условия (7) также записываются в безразмерной форме с сохранением тех же обозначений.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Стационарное решение

Для решения нестационарной задачи сначала находятся стационарные профили, отвечающие установившемуся режиму ($t \rightarrow \infty$). Уравнения (8)–(10) при $\partial/\partial t = 0$ дают (штрих обозначает производную по z)

$$u''_{\text{ст}} - \text{Re}_w u'_{\text{ст}} = 0, \quad V''_{\text{ст}} - \text{Re}_w V'_{\text{ст}} = 0,$$

$$U''_{\text{ст}} - \text{Re}_w U'_{\text{ст}} = -\delta^2 \text{Re}_U V_{\text{ст}} u_{\text{ст}}.$$

Граничные условия для стационарной части совпадают с (5)–(6), но без зависимости от времени. Решения для $u_{\text{ст}}$ и $V_{\text{ст}}$ находятся явно:

$$u_{\text{ст}}(z) = u_1 \frac{e^{\text{Re}_w z} + \alpha \text{Re}_w - 1}{e^{\text{Re}_w} + \alpha \text{Re}_w - 1},$$

$$V_{\text{ст}}(z) = V_1 \frac{e^{\text{Re}_w z} + \alpha \text{Re}_w - 1}{e^{\text{Re}_w} + \alpha \text{Re}_w - 1}.$$

Для случая $\text{Re}_w = 0$ эти выражения упрощаются до линейных функций: $u_{\text{ст}} = u_1(z + \alpha)/(1 + \alpha)$, $V_{\text{ст}} = V_1(z + \alpha)/(1 + \alpha)$.

Стационарное поле $U_{\text{ст}}$ определяется из краевой задачи второго порядка с переменными коэффициентами, которая решается численно с помощью метода конечных разностей (функция `bvp4c` в MATLAB). Полученное решение $U_{\text{ст}}(z)$ используется в качестве базового состояния.

Преобразование уравнений и задача Штурма – Лиувилля

Для исследования нестационарной части введем замену, преобразующую конвективный член к виду без первой производной. Пусть

$$f(z, t) = e^{\frac{\text{Re}_w}{2} z} \psi(z, t),$$

где f обозначает любую из функций u , V или U . Подстановка в (8)–(9) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\text{Re}_w^2}{4} \psi.$$

Граничные условия для ψ получаются из (5)–(6). На верхней границе:

$$\psi(1, t) = e^{-\frac{\text{Re}_w}{2}} f_1(t).$$

На нижней границе после преобразования условия (5) имеем

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial z}(0, t) + \left(\frac{\alpha \text{Re}_w}{2} - 1 \right) \psi(0, t) = 0. \quad (11)$$

Для построения базиса собственных функций рассматривается однородная задача, в которой граничное условие на верхней границе заменяется нулевым: $\psi(1, t) = 0$. Это дает самосопряженную краевую задачу Штурма – Лиувилля для оператора $L\psi = -\psi'' + \frac{\text{Re}_w^2}{4}\psi$ с граничными условиями (11) и $\varphi_n(1) = 0$ для собственных функций $\varphi_n(z)$. Отметим, что нулевое условие используется только для определения спектра и базисных функций; неоднородность граничных условий (6) будет учтена в дальнейшем через стационарное решение и разложение отклонений по найденному базису. Собственные функции $\varphi_n(z)$ и собственные значения λ_n удовлетворяют

$$-\varphi_n'' + \frac{\text{Re}_w^2}{4} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

с теми же однородными граничными условиями. Общее решение имеет вид

$$\varphi_n(z) = A_n \sin(k_n z) + B_n \cos(k_n z),$$

$$k_n^2 = \lambda_n - \frac{\text{Re}_w^2}{4}.$$

Из граничных условий получается характеристическое уравнение для k_n :

$$\alpha k_n \cos k_n + \left(\frac{\alpha \text{Re}_w}{2} - 1 \right) \sin k_n = 0. \quad (12)$$

При $\alpha = 0$ уравнение упрощается до $\sin k_n = 0$, откуда $k_n = n\pi$, $\lambda_n = (n\pi)^2 + \text{Re}e_w^2/4$. Для $\alpha > 0$ корни k_n находятся численно (методом Ньютона с выбором интервалов). После определения k_n строятся ненормированные функции

$$\varphi_n^{(0)}(z) = \sin(k_n z) + \frac{\alpha k_n}{1 - \alpha \text{Re}e_w/2} \cos(k_n z),$$

которые затем нормируются условием $\int_0^1 \varphi_n^2(z) dz = 1$. Собственные функции ортогональны и образуют полную систему в $L_2[0, 1]$.

Решение для u и V

Уравнения (8)–(9) однородны, поэтому их решения можно представить в виде разложения по собственным функциям. С учетом замены $f = e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z}\psi$ (где f – любая из функций u или V) имеем:

$$u(z, t) = u_{\text{ст}}(z) + e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^u e^{-\lambda_n t} \varphi_n(z),$$

$$V(z, t) = V_{\text{ст}}(z) + e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^V e^{-\lambda_n t} \varphi_n(z).$$

Коэффициенты C_n^u и C_n^V определяются из начальных условий (7) после разложения отклонений $u(z, 0) - u_{\text{ст}}(z)$ и $V(z, 0) - V_{\text{ст}}(z)$ на базис φ_n с весом $e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z}$:

$$C_n^u = \int_0^1 e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z} [u_0(z) - u_{\text{ст}}(z)] \varphi_n(z) dz,$$

$$C_n^V = \int_0^1 e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z} [V_0(z) - V_{\text{ст}}(z)] \varphi_n(z) dz.$$

Эти ряды сходятся экспоненциально быстро благодаря множителям $e^{-\lambda_n t}$.

Решение для U с интегралом Дюамеля

Уравнение (10) неоднородно: источник $Q(z, t) = -\delta^2 \text{Re}U V(z, t)u(z, t)$ зависит от уже найденных полей. После замены $U = e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z}\Psi$ и разложения Ψ по тем же собственным функциям

$$\Psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \varphi_n(z),$$

для коэффициентов $S_n(t)$ получаются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{dS_n}{dt} = -\lambda_n S_n + q_n(t),$$

где

$$q_n(t) = \int_0^1 e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z} [Q(z, t) - Q_{\text{ст}}(z)] \varphi_n(z) dz,$$

а $Q_{\text{ст}}(z) = -\delta^2 \text{Re}U V_{\text{ст}}(z)u_{\text{ст}}(z)$ – стационарная часть источника. Начальные условия для

$S_n(t)$ получаются из начального возмущения $U_0(z) - U_{\text{ст}}(z)$:

$$S_n(0) = \int_0^1 e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z} [U_0(z) - U_{\text{ст}}(z)] \varphi_n(z) dz.$$

Решение этих уравнений записывается в форме интеграла Дюамеля:

$$S_n(t) = S_n(0)e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} q_n(\tau) d\tau.$$

Интеграл вычисляется численно методом трапеций на заданной сетке моментов времени t_k . После нахождения $S_n(t)$ поле $U(z, t)$ находится как

$$U(z, t) = U_{\text{ст}}(z) + e^{-\frac{\text{Re}e_w}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \varphi_n(z).$$

Сходимость ряда обеспечивается экспоненциальным затуханием $e^{-\lambda_n t}$, поэтому для практических расчетов достаточно удержать несколько десятков первых мод.

На основе полученных полей скорости вычисляются интегральные характеристики. Процент области с противотечениями определяется как доля вертикальной координаты z , в которой $U(z, t) < 0$, усредненная по пространству в каждый момент времени. Застойные точки – положения z , где $U(z, t) = 0$ (для фиксированных x, y), находятся интерполяцией между узлами сетки. Время релаксации $T_{\text{rel}} = 1/\lambda_1$, где λ_1 – наименьшее собственное значение, характеризует скорость затухания возмущений.

Параметрические исследования проводятся для различных жидкостей (вода, масло SAE 30, глицерин при 20 °С) и варьирования управляющих параметров $\text{Re}e_w$, Ta , φ , α . Все расчеты выполняются в MATLAB 2023b с использованием разработанного алгоритма.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Прежде чем перейти к анализу профилей скорости, оценим выполнимость изобарического приближения для выбранных жидкостей. Как показано в разделе «Постановка задачи», условие малости горизонтальных градиентов давления имеет вид $\delta^2 \text{Re}U \lesssim O(1)$. Для воды ($\text{Re}U \approx 10^5$) получаем $\delta^2 \text{Re}U = 10$; для масла SAE 30 ($\text{Re}U \approx 10^3$) – 0,1; для глицерина ($\text{Re}U \approx 10^2$) – 0,01. Таким образом, для более вязких жидкостей (масло, глицерин) изобарическое приближение выполняется с большим запасом, тогда как для воды его применимость ограничена, но все же допустима в рамках оценочного анализа. Это качественно согласуется с наблюдаемым ниже поведением решений: для воды релаксация происходит быстрее, а профили скорости менее чувствительны к вариации параметров.

На рис. 1 представлена эволюция профиля $U(z, t)$ для трех жидкостей при $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$, $\alpha = 0,01$. Для воды ($Re_w = -10$) релаксация происходит быстро: уже к моменту $t = 0,1$ профиль близок к стационарному. Для масла и глицерина ($|Re_w| \ll 1$) процесс идет значительно медленнее, что отражается в большем времени релаксации (табл.). На всех профилях видна зона обратного течения ($U < 0$) вблизи верхней границы, которая со временем уменьшается, но не исчезает полностью.

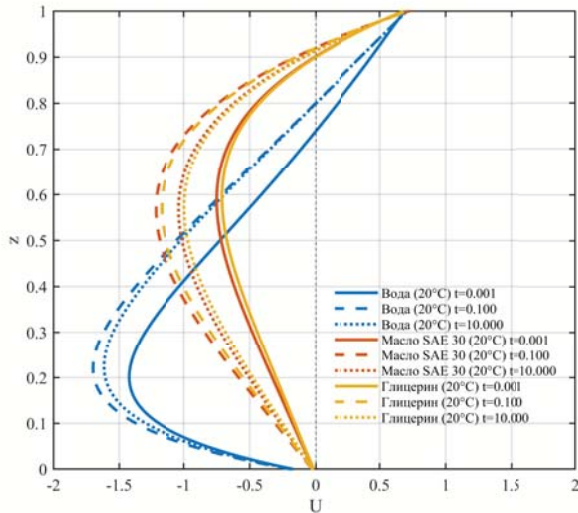


Рис. 1. Эволюция профиля $U(z, t)$ для трех жидкостей. Сплошные линии – $t = 0,001$, штриховые – $t = 0,1$, пунктирные – $t = 10$. Параметры: $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$, $\alpha = 0,01$

Fig. 1. Evolution of the $U(z, t)$ profile for three fluids. Solid lines – $t = 0.001$, dashed – $t = 0.1$, dotted – $t = 10$. Parameters: $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$, $\alpha = 0.01$

Характеристики жидкостей и параметры течения при $\alpha = 0,01$, $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$
 Fluid properties and flow parameters for $\alpha = 0.01$, $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$

Жидкость, 20 °C Fluid	Re_w	Доля, ($U < 0$), % Fraction	T_{rel}
Вода Water	-10,00	78,7	0,0285
Масло SAE 30 Oil	-0,10	91,0	0,0993
Глицерин Glycerin	-0,01	91,0	0,0993

На рис. 2 показаны распределения $U(z, t)$ в координатах (z, t) : цветом изображено значение скорости, а красной линией отмечена гра-

ница $U = 0$. По этим графикам хорошо видно, как область обратного течения ($U < 0$) изменяется во времени. Для воды граница $U = 0$ быстро достигает стационарного положения, тогда как для вязких жидкостей процесс растянут во времени. Стационарная граница для воды находится на $z \approx 0,8$, для масла и глицерина – на $z \approx 0,91$. Процент области с $U < 0$ в среднем составляет 78,7% для воды и около 91% для масла и глицерина.

Параметрический анализ для воды представлен на рис. 3. Зависимость доли противотечений и времени релаксации от Re_w (рис. 3, а) показывает, что максимальная доля обратного течения (около 91%) достигается при $Re_w \approx -2$. При увеличении Re_w в положительную сторону доля резко падает до 41% при $Re_w = 4$. Время релаксации минимально при больших $|Re_w|$ ($T_{rel} = 0,0285$ при $Re_w = -10$) и возрастает до 0,0993 при $Re_w = 0$. Такое поведение объясняется конкуренцией вязкой диффузии и вертикального конвективного переноса. При $Re_w = 0$ конвекция отсутствует, и возмущения затухают только за счет диффузии, что дает наибольшее время релаксации. При $Re_w \neq 0$ (отсос или вдув) конвективный унос возмущений ускоряет их вынос из слоя или подавление в пограничной области, сокращая T_{rel} . С ростом $|Re_w|$ вклад конвекции усиливается и время релаксации монотонно убывает. Математически это отражается в структуре собственных значений задачи Штурма–Лиувилля: $\lambda_n = k_n^2 + Re_w^2/4$. Слагаемое $Re_w^2/4$ всегда положительно и увеличивает скорость затухания возмущений.

График зависимости доли противотечений от φ (рис. 3, б) периодичен с периодом 2π . Противотечения отсутствуют (0%) при $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ]$, когда горизонтальная компонента скорости на верхней границе $U_1 = \cos \varphi \geq 0$. Максимальная доля противотечений (100%) достигается при $\varphi \in [180^\circ; 270^\circ]$, когда $U_1 = \cos \varphi < 0$ и течение направлено вдоль отрицательной оси x . В переходных диапазонах $\varphi \in [90^\circ; 180^\circ]$ и $[270^\circ; 360^\circ]$ доля противотечений монотонно изменяется от 0 до 100% и обратно.

Зависимость времени релаксации от параметра проскальзывания α (рис. 3, с) при $Re_w = -10$ показывает убывание T_{rel} с ростом α : от 0,0287 при $\alpha = 0$ до 0,0255 при $\alpha = 5$. Это качественно отличается от случая $Re_w = 0$, где T_{rel} возрастает с α . Причина заключается в несимметричном влиянии знака Re_w на спектр задачи Штурма–Лиувилля при наличии проскальзывания. Хотя формально $\lambda_n = k_n^2 + Re_w^2/4$, корни k_n определяются из харак-

теристического уравнения (12), которое содержит Re_w линейно. При $\alpha = 0$ (прилипание) уравнение не зависит от знака Re_w и $k_n = n\pi$. При $\alpha > 0$ знак Re_w влияет на k_n и для отрицательных Re_w (отсос) увеличение α приводит к росту k_1 и, следовательно, λ_1 , ускоряя

релаксацию. Для положительных Re_w (вдув) эффект обратный. Таким образом, наблюдаемое поведение является следствием совместного влияния конвекции и граничного условия проскальзывания.

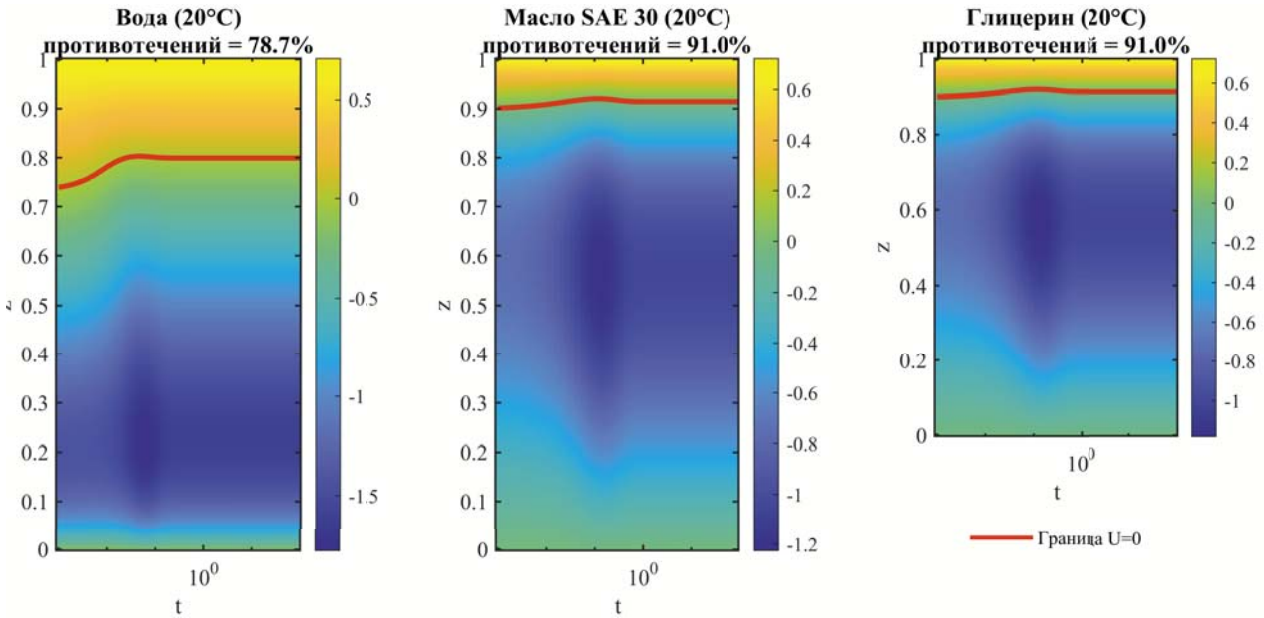


Рис. 2. Области противотечений на плоскости (z, t) . Красная линия – граница $U = 0$. Параметры: $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$, $\alpha = 0, 01$

Fig. 2. Counterflow regions in the (z, t) plane. Red line – boundary $U = 0$. Parameters: $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$, $\alpha = 0.01$

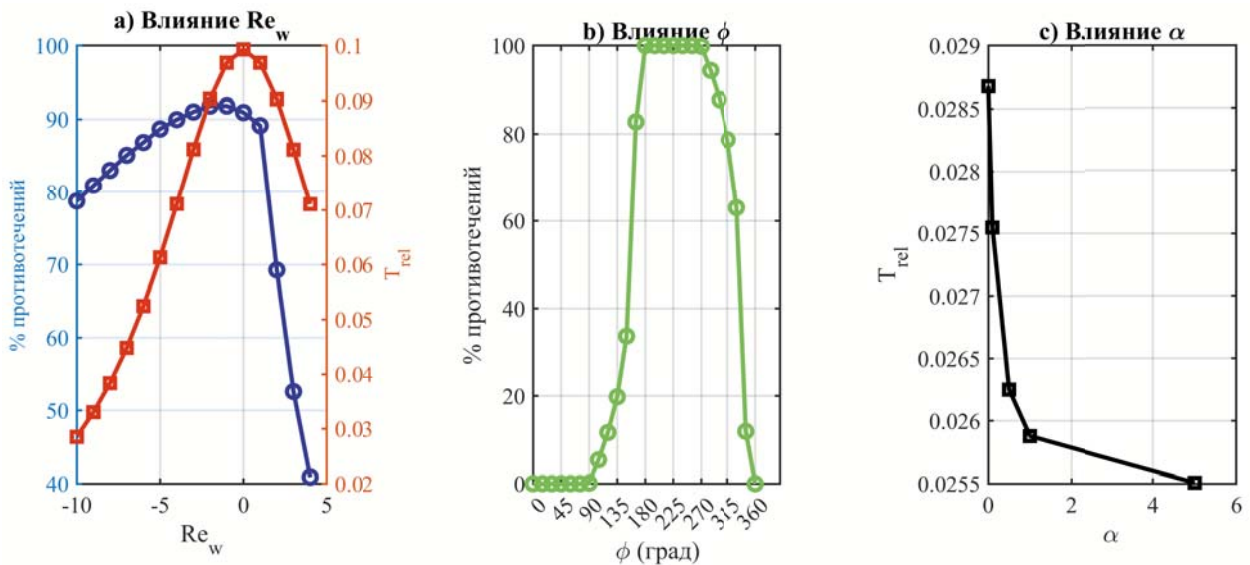


Рис. 3. Параметрические зависимости для воды: а) влияние Re_w ($Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$, $\alpha = 0, 01$); б) влияние φ ($Re_w = -10$, $Ta = 10^6$, $\alpha = 0, 01$); с) влияние α ($Re_w = -10$, $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$)

Fig. 3. Parametric dependencies for water: а) influence of Re_w ($Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$, $\alpha = 0.01$); б) influence of φ ($Re_w = -10$, $Ta = 10^6$, $\alpha = 0.01$); с) influence of α ($Re_w = -10$, $Ta = 10^6$, $\varphi = -\pi/4$)

На рис. 4 представлены линии тока в плоскости (x, z) при $y = 0$ для всех трех жидкостей в начальный ($t = 0,001$) и конечный ($t = 100$) моменты времени. Линии тока имеют наклонную структуру, обусловленную совместным действием горизонтального сдвига и вертикального отсоса ($Re_w < 0$). Для воды ($|Re_w| = 10$) наклон линий тока более выражен, тогда как для масла и глицерина

($|Re_w| \ll 1$) линии тока практически горизонтальны. Цветовая карта показывает, что область возвратного течения ($V_x < 0$, синий цвет) формируется в нижней части слоя и занимает около 20% толщины для воды и более 90% для масла и глицерина, что согласуется с данными таблицы и рис. 2. К моменту $t = 100$ структура течения стабилизируется, что подтверждает выход на стационарный режим.

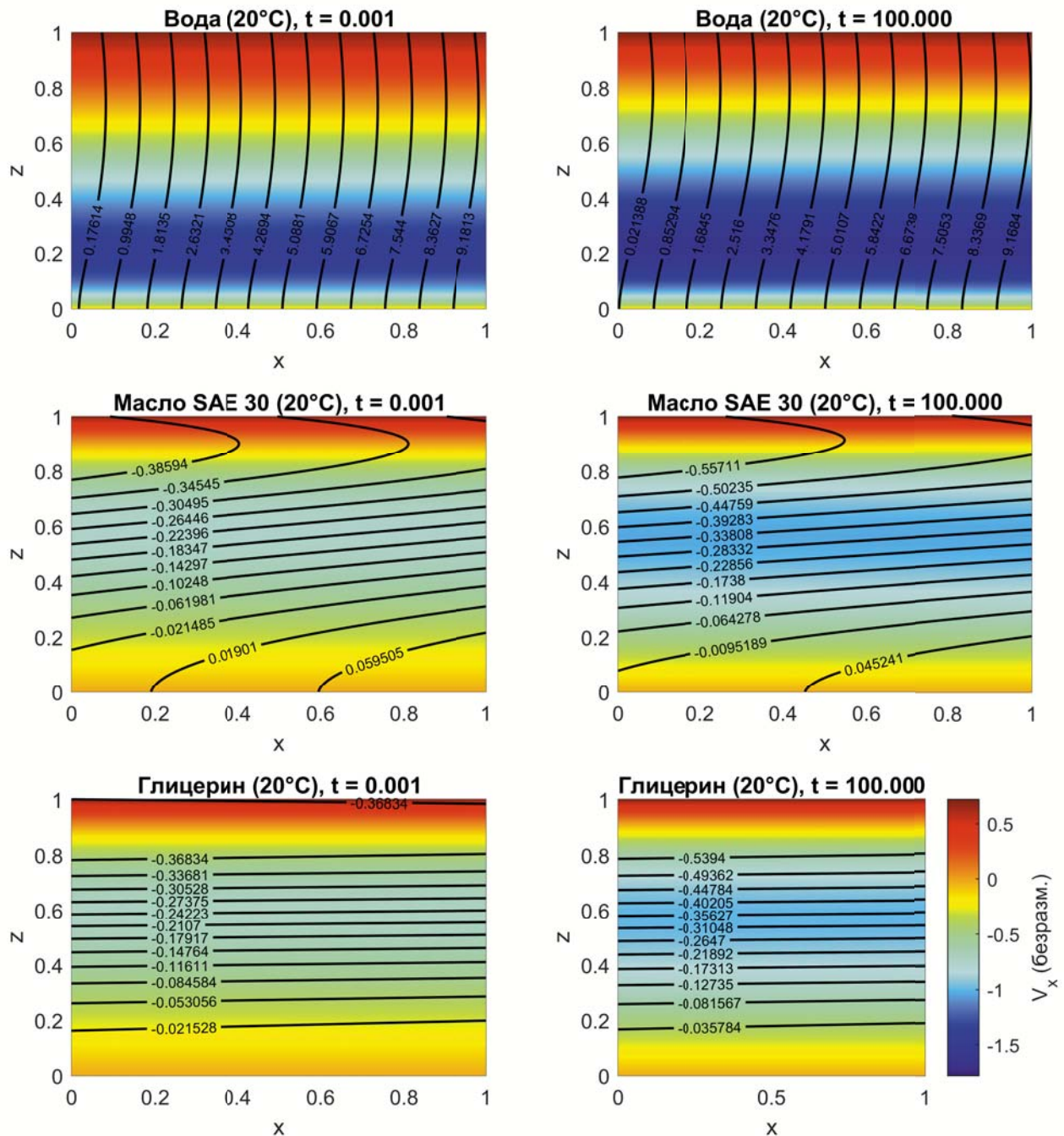


Рис. 4. Линии тока в плоскости (x, z) при $y = 0$ для трех жидкостей
 Fig. 4. Streamlines in the (x, z) -plane at $y = 0$ for three fluids

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построено точное решение нестационарных уравнений Навье–Стокса для трехмерного изобарического течения вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое с проницаемыми границами. Решение принадлежит классу Линя и обобщает известное стационарное решение на случай зависимости от времени.

Выведена замкнутая система уравнений для амплитудных функций $u(z, t)$, $V(z, t)$, $U(z, t)$. Показано, что вертикальная скорость постоянна и определяется режимом отсоса/вдува. Задача сведена к уравнению теплопроводности с потенциалом; решение представлено в виде рядов по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля с условиями Навье на нижней границе. Для компоненты U , возбуждаемой неоднородным источником, применен интеграл Дюамеля, что позволило точно учесть влияние нестационарного источника.

Проведен анализ для трех жидкостей (вода, масло SAE 30, глицерин) при варьировании Re_w , Ta , φ и α . Установлены режимы с развитыми противотечениями и застойными точками. Показано, что при отрицательном вертикальном числе Рейнольдса ($Re_w = -10$) время релаксации убывает с ростом параметра проскальзывания α , что качественно отличается от классического случая $Re_w = 0$.

Полученные результаты могут быть использованы в нескольких направлениях. Во-первых, найденное точное решение служит эталоном для верификации численных методов, предназначенных для моделирования нестационарных течений с проницаемыми границами и условиями частичного проскальзывания. Во-вторых, выявленная зависимость времени релаксации от α и знака Re_w (ускорение релаксации с ростом α при отсосе и замедление при вдуве) дает качественный критерий для управления переходными режимами в мембранных аппаратах и микрофлюидных устройствах. В-третьих, построенные карты противотечений и застойных точек позволяют оценить области возможного накопления частиц в слое, что важно для проектирования каталитических реакторов и фильтрационных систем с проницаемыми стенками.

Отметим также, что прямое экспериментальное воспроизведение рассмотренного течения сопряжено с известными трудностями (необходимость создания однородного вертикального потока через проницаемые границы и контролируемого неоднородного поля скорости на верхней поверхности слоя). Полученные аналитические решения могут служить

качественными ориентирами при планировании будущих экспериментальных исследований в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 2006. 155 с.
2. *Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Эволюция ветровой циркуляции в неизотермическом океане // *Океанология*. 1990. Т. 30, № 4. С. 562–566.
3. *Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю., Еремин А. В.* Аналитическое решение уравнений Навье–Стокса для описания неоднородного течения Куэтта с квадратичным профилем в слое с проницаемыми границами // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2026. Т. 26, № 1. С. 22–42. doi: 10.23947/2687-1653-2026-26-1-2242
4. *Полянин А. Д., Журов А. И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020. 384 с.
5. *Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю.* Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019. Т. 12, № 2. С. 230–242. doi: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20
6. *Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyinin A. D.* Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2009. Vol. 43, no. 5. P. 642–662. doi: 10.1134/S0040579509050066
7. *Aristov S. N., Prosviryakov E. Y.* Unsteady layered vortical fluid flows // *Fluid Dyn.* 2016. Vol. 51, no. 2. P. 148–154. doi: 10.1134/S0015462816020034
8. *Bogoyavlenskij O.* The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // *Phys. Fluids*. 2022. Vol. 34. Art. 083108. doi: 10.1063/5.0101870
9. *Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu.* Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // *Dynamics*. 2022. Vol. 2. P. 175–186. doi: 10.3390/dynamics2020009
10. *Drazin P. G., Riley N.* The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 p.
11. *Ershkov S., Burmasheva N., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu.* Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows // *Symmetry*. 2023. Vol. 15, no. 9. Art. 1730. doi: 10.3390/sym15091730

12. Feng X., Lu X., He Y. Difference finite element method for the 3D steady Navier–Stokes equations // *SIAM J. Numer. Anal.* 2023. Vol. 61, no. 1. P. 167–193. doi: 10.1137/21M1450872

13. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier–Stokes equations with general slip boundary conditions in Holder spaces // *J. Math. Fluid Mech.* 2003. Vol. 5. P. 275–301. doi: 10.1007/s00021-003-0074-6

14. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1957. Vol. 1. P. 391–395. doi: 10.1007/BF00298016

15. Neto C., Evans D. R., Bonaccorso E., Butt H.-J., Craig V. S. J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // *Rep. Progr. Phys.* 2005. Vol. 68. P. 2859–2897. doi: 10.1088/0034-4885/68/12/R05

16. Shtern V. Counterflows. Paradoxical fluid mechanics phenomena. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. 470 p. doi: 10.1017/CBO9781139226516

17. Temam R. Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland, 2001. 500 p.

18. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1991. Vol. 23. P. 159–177. doi: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111

19. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // *Appl. Mech. Rev.* 1989. Vol. 42, no. 11S. P. 269–282. doi: 10.1115/1.3152400

REFERENCES

1. Aristov S. N., Shvarts K. G. Vortical flows of advective nature in a rotating fluid layer. Perm: Perm State University; 2006. 155 p. (In Russ.)

2. Aristov S. N., Shvarts K. G. Evolution of wind circulation in a non-isothermal ocean. *Okeanologiya = Oceanology*. 1990;30(4):562–566. (In Russ.)

3. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Analytical solution of the Navier–Stokes equations for describing an inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile in a layer with permeable boundaries. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2026;26(1):22–42. (In Russ.). doi: 10.23947/2687-1653-2026-26-1-2242

4. Polyanin A. D., Zhurov A. I. Separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics. Moscow: IPMekh RAN; 2020. 384 p. (In Russ.)

5. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred = Computational Continuum Mechanics*. 2019;12(2):230–242. (In Russ.). doi: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20

6. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2009;43(5):642–662. doi: 10.1134/S0040579509050066

7. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dyn.* 2016;51(2):148–154. doi: 10.1134/S0015462816020034

8. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Phys. Fluids*. 2022;34:083108. doi: 10.1063/5.0101870

9. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*. 2022;2:175–186. doi: 10.3390/dynamics2020009

10. Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2006. 196 p.

11. Ershkov S., Burmasheva N., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*. 2023;15(9):1730. doi: 10.3390/sym15091730

12. Feng X., Lu X., He Y. Difference finite element method for the 3D steady Navier–Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 2023;61(1):167–193. doi: 10.1137/21M1450872

13. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier–Stokes equations with general slip boundary conditions in Holder spaces. *J. Math. Fluid Mech.* 2003;5:275–301. doi: 10.1007/s00021-003-0074-6

14. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1957;1:391–395. doi: 10.1007/BF00298016

15. Neto C., Evans D. R., Bonaccorso E., Butt H.-J., Craig V. S. J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Rep. Progr. Phys.* 2005;68:2859–2897. doi: 10.1088/0034-4885/68/12/R05

16. Shtern V. Counterflows. Paradoxical fluid mechanics phenomena. Cambridge: Cambridge University Press; 2012. 470 p. doi: 10.1017/CBO9781139226516

17. Temam R. Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis. Amsterdam: North-Holland; 2001. 500 p.

18. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1991;23:159–177. doi: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111

19. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.* 1989;42(11S):269–282. doi: 10.1115/1.3152400

Поступила в редакцию / received: 25.03.2026; принята к публикации / accepted: 29.04.2026.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Губарева Кристина Владимировна

канд. техн. наук, доцент кафедры «Промышленная теплоэнергетика»

e-mail: r.kristina2017@mail.ru

Просвирыков Евгений Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Информационные технологии и системы управления» УрФУ; заведующий сектором нелинейной вихревой гидродинамики ИМАШ

e-mail: evgen_pros@mail.ru

Еремин Антон Владимирович

д-р техн. наук, доцент, проректор по научной работе, заведующий кафедрой «Промышленная теплоэнергетика»

e-mail: a.v.eremin@list.ru

CONTRIBUTORS:

Gubareva, Kristina

Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor

Prosviryakov, Evgenii

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, UrFU; Sector Head, IES UB RAS

Eremin, Anton

Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, Vice-Rector for Science, Head of Department