

УДК 519.179.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛА ВЕРШИН ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ В УСЛОВНОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ГРАФЕ

И. А. Чеплюкова

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, распределение которых удовлетворяет следующему условию: при $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{h(k)}{k^g}, \quad 2 < g < 3,$$

где $h(k)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Изучаются случайные графы при условии, что сумма степеней всех вершин равна n . Найдены предельные распределения числа вершин заданной степени в таком условном графе при $N, n \rightarrow \infty$ так, что $h(N)n^2N^{(4-3g)/(g-1)} \geq C > 0$.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степень вершины; предельное распределение

Для цитирования: Чеплюкова И. А. Предельные теоремы для числа вершин заданной степени в условном конфигурационном графе // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 114–126. doi: 10.17076/mat2327

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

I. A. Cheplyukova. LIMIT THEOREMS FOR THE NUMBER OF VERTICES WITH A GIVEN DEGREE IN A CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPH

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We consider configuration graphs with N vertices. The vertex degrees are independent equally distributed random variables whose distribution satisfies the following condition: as $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{h(k)}{k^g}, \quad 2 < g < 3,$$

where $h(k)$ is a slowly varying function. We study the random graphs under the

conditions that the sum of vertex degrees is n . The limit distributions of the number of vertices with a given degree in the conditional graph are obtained as $N, n \rightarrow \infty$ and $h(N)n^2N^{(4-3g)/(g-1)} \geq C > 0$ are obtained.

Key words: configuration graph; vertex degree; limit distribution

For citation: Cheplyukova I. A. Limit theorems for the number of vertices with a given degree in a conditional configuration graph. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 114–126. doi: 10.17076/mat2327

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Объектом исследования в данной работе являются конфигурационные графы. Случайные графы широко используются при моделировании различных сложных сетей коммуникаций, таких как социальные, биологические, транспортные сети и Интернет [13, 15, 16]. Наблюдения за реальными сетями [11, 14] показали, что все они обладают некоторыми общими свойствами, и эти свойства должны быть отражены в их моделях. Например, степени вершин можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, при этом число вершин степени, не меньшей чем k , при достаточно больших k пропорционально $1/k^{\tau-1}$, где $\tau > 1$. Это значит, что распределение случайной величины η , равной степени любой вершины, при больших значениях k можно определить равенством

$$\mathbf{P}\{\eta \geq k\} = \frac{h(k)}{k^{\tau-1}}, \quad \tau > 1,$$

где $h(k)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Впервые конфигурационные графы были введены в работе [12]. Опишем процесс построения этих графов. Обозначим через N число вершин конфигурационного графа, степени вершин которого являются независимыми случайными величинами. Значения этих случайных величин равны числу полуребер, инцидентных данной вершине, т. е. ребер, для которых смежные вершины еще не определены [17]. Все полуребра считаются различными и, соединяясь друг с другом попарно и равновероятно, образуют ребра. Поскольку сумма степеней вершин графа должна быть четной, при необходимости вводится вспомогательная вершина единичной степени. В [17] замечено, что эта дополнительная вершина не влияет на асимптотические свойства графа при $N \rightarrow \infty$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать степени только основных вершин.

Нетрудно понять, что такая конструкция допускает появление и петель, и кратных ребер.

Исследованию структуры конфигурационных графов посвящено большое число работ (например, [13, 15, 16]). Есть ряд статей, в которых изучается предельное поведение числовых характеристик конфигурационных графов при условии ограничения на число ребер [2, 4–7, 9]. Например, в статье [7] впервые рассматривались такие конфигурационные графы при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна n . В [4] и [6] изучались конфигурационные графы при более естественном предположении ограничения числа ребер сверху. Исследование таких условий графов представляет определенный интерес, поскольку на практике иногда удается оценить число связей в реальных сетях.

В [2–7, 9] главное внимание уделяется предельному поведению таких важных числовых характеристик степенной структуры условных графов, как максимальная степень и число вершин заданной степени. В частности, в статье [9] изучались конфигурационные графы, распределение степеней вершин которых имеет вид:

$$p_k = \frac{h(k)}{k^g \Sigma(1, g)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad g > 1,$$

где

$$\Sigma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \frac{h(k)}{k^y},$$

при условии, что число ребер известно и равно n и найдены предельные распределения указанных характеристик в случаях, когда $n, N \rightarrow \infty$, $1 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \mathbf{E}\eta$. (Здесь и далее C, C_1, C_2, \dots обозначают некоторые положительные постоянные.) А в [3] решена аналогичная задача для конфигурационных графов при достаточно слабых ограничениях на хвост распределения степени вершины:

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h}, \quad d > 0, \quad g > 1, \quad h \geq 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

В [2] изучены конфигурационные графы, распределение степеней вершин которых имеет вид:

$$p_k = \frac{h(k)}{k^g}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad g > 3,$$

при условии, что число ребер ограничено сверху и найдены предельные распределения для максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени. В основе доказательств этих результатов лежит обобщенная схема размещения частиц по ячейкам, введенная и изученная В. Ф. Колчиным [1], или ее аналог [10].

Пусть далее η обозначает целочисленную положительную случайную величину, распределение которой удовлетворяет условию: при $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\eta = k\} \sim \frac{h(k)}{k^g}, \quad 2 < g < 3. \quad (1)$$

Рассмотрим конфигурационный граф с N вершинами, степени вершин которого являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с таким же распределением, как у случайной величины η . В данном исследовании значение параметра g принадлежит интервалу $(2, 3)$, выбор таких значений параметра обусловлен тем, что, как показывают многочисленные наблюдения, такие значения параметра g являются наиболее подходящими для большого числа реальных сетей. Из (1) следует, что при $2 < g < 3$ распределение степеней вершин имеет конечное математическое ожидание и бесконечную дисперсию. В настоящей работе исследуется указанный случайный граф при условии, что сумма степеней всех вершин известна и равна n , для таких конфигурационных графов мы получили предельные теоремы для числа вершин заданной степени при $n, N \rightarrow \infty$ так, что $h(N)n^2N^{(4-3g)/(g-1)} \geq C > 0$. В статье [8] уже рассматривались такие условные конфигурационные графы и была доказана предельная теорема для максимальной степени вершины в вышеописанной области изменения параметров n, N, g . Сформулируем основные результаты настоящей работы. Для этого введем необходимые обозначения. Пусть $F(x)$ обозначает функцию распределения целочисленной случайной величины η , значения которой положительны и удовлетворяют условию (1). Положим для $x > 0$

$$\varkappa(x) = 1 - F(x) + F(-x)$$

и определим нормирующие постоянные B_N как нижнюю границу тех x , для которых

$$\varkappa(x - 0) \geq (N)^{-1} \geq \varkappa(x + 0).$$

Через μ_r обозначим случайную величину, равную числу вершин графа степени r . Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$, $h(N)n^2N^{(4-3g)/(g-1)} \geq C > 0$, $Nh(r)r^{-g} \rightarrow \infty$. Тогда равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $u_r = \frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r(1-p_r)}}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} e^{-u_r^2/2}.$$

Теорема 2. Пусть $n, N, r \rightarrow \infty$, $h(N)n^2N^{(4-3g)/(g-1)} \geq C > 0$ и выполнено одно из условий:

$$1. \quad r\sqrt{N}/B_N \rightarrow 0;$$

$$2. \quad r\sqrt{N}/B_N \geq C_1, \quad Nh(r)/r^g \rightarrow 0.$$

Тогда равномерно относительно целых неотрицательных k таких, что $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1)).$$

Замечание. В замечании 1 к теореме 1 статьи [8] показано, что при $N \rightarrow \infty$ верно

$$\frac{Nh(B_N)}{(g-1)B_N^{g-1}} \rightarrow 1 \quad (2)$$

и для достаточно большого N и любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$C_2 N^{1/(g-1+\varepsilon)} < B_N < C_3 N^{1/(g-1-\varepsilon)}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ И ТЕОРЕМ

Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ случайные величины, равные степеням вершин графа с номерами $1, 2, \dots, N$ соответственно. Пусть η_1, \dots, η_N — независимые одинаково распределенные случайные величины, которые распределены так же, как и случайная величина η . Тогда, используя (1), для целых k_1, \dots, k_N таких, что $k_1 + \dots + k_N = n$, выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N | \eta_1 + \dots + \eta_N = n\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, для двух наборов случайных величин (ξ_1, \dots, ξ_N) и (η_1, \dots, η_N) выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [1].

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$, распределение которых имеет вид:

$$\mathbf{P}\{\eta_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_i = k | \eta_i \neq r\}, \quad (5)$$

где $k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, N$. Пусть

$$\zeta_N = \eta_1 + \dots + \eta_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \dots + \eta_N^{(r)}.$$

В [1] доказано, что для случайной величины μ_r следствием из равенства (4) является следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\mu_r = k\} \\ &= \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \end{aligned}$$

Согласно утверждению леммы 1, для получения предельных результатов для μ_r нам необходимо знать предельные поведения сумм независимых случайных величин $\zeta_{N-k}^{(r)}$, ζ_N и асимптотику биномиальной вероятности. Для суммы ζ_N можно использовать лемму 2 [8]. Сформулируем ее ниже в виде леммы 2.

Лемма 2. *Пусть $N, n \rightarrow \infty, 2 < g < 3, (n - MN)/B_N \rightarrow \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \sim \frac{Nh(n - MN)}{(n - MN)^g},$$

где $M = \mathbf{E}\eta$.

Докажем, что для суммы $\zeta_N^{(r)}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $N, n \rightarrow \infty, h(N)n^2N^{(4-3g)/(g-1)} \geq C > 0$ и выполнено одно из условий:*

1. $r\sqrt{N}/B_N \rightarrow 0$;
2. $r\sqrt{N}/B_N \geq C_1, Nh(r)/r^g \rightarrow 0$.

Тогда при $S = N(1 - p_r)(1 + o(1))$ равномерно относительно целых неотрицательных k , для которых $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\} = \frac{h(n)N(1 + o(1))}{n^g}.$$

Доказательство. Величина r может принимать и фиксированные значения, и стремиться к бесконечности. Будем одновременно рассматривать эти два случая, учитывая, что при $r \rightarrow \infty$ случайные величины $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$ образуют схему серий. Из (5) нетрудно получить, что

$$m_r = \mathbf{E}\eta_1^{(r)} = \frac{M - rp_r}{1 - p_r}. \quad (6)$$

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины

$$\xi_j^{(r)} = \eta_j^{(r)} - m_r, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

и их сумму $\tilde{\zeta}_S^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_S^{(r)} = \zeta_S^{(r)} - Sm_r$. Обозначим $l = n - kr - Sm_r$ и

$$\gamma = \left(\frac{S^{1/(g-1)}h(S)}{l} \right)^{1/3}. \quad (8)$$

Согласно условиям леммы нетрудно видеть, что $\gamma \rightarrow 0$. Тогда вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = n - kr\} &= \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l\} \\ &= P_1(l) + SP_2(l) + P_3(l), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(l) &= \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leq \gamma l, j = 1, \dots, S\}, \\ P_2(l) &= \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \xi_j^{(r)} \leq \gamma l, j = 1, \dots, S - 1, \\ & \quad \xi_S^{(r)} > \gamma l\}, \\ P_3(l) &= \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_S^{(r)} = l, \bigcup_{i \neq j} \{\xi_i^{(r)} > \gamma l, \xi_j^{(r)} > \gamma l\}\}. \end{aligned}$$

Ниже мы покажем, что основной вклад в сумму, стоящую в правой части соотношения (9), дает второе слагаемое.

Оценим первое слагаемое $P_1(l)$. Положим

$$R(\omega) \quad (10)$$

$$= \sum_{j \leq \gamma l + m_r} \exp\{(j - m_r)\omega\} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = j - m_r\}.$$

Введем вспомогательные независимые случайные величины $\xi_i^{(r)}(\gamma), i = 1, \dots, S$, такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)}(\gamma) = j - m_r\} \quad (11)$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = j - m_r\} \exp\{(j - m_r)/(\gamma l)\}}{R(1/(\gamma l))},$$

где $1 \leq j \leq \gamma l + m_r$. Тогда $P_1(l)$ можно представить в виде

$$P_1(l) = R^S \left(\frac{1}{\gamma l} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \right\} \mathbf{P} \{ \zeta_S^{(r)}(\gamma) = l \}, \quad (12)$$

где $\zeta_S^{(r)}(\gamma) = \xi_1^{(r)}(\gamma) + \dots + \xi_S^{(r)}(\gamma)$.

Рассмотрим вероятность $\mathbf{P} \{ \zeta_S^{(r)}(\gamma) = l \}$. Обозначим через $\varphi(t)$, $\varphi_1^{(r)}(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$ и $\varphi_\gamma(t)$ характеристические функции случайных величин η_1 , $\eta_1^{(r)}$, $\xi_1^{(r)}$ и $\xi_1^{(r)}(\gamma)$ соответственно. Используя (10) и (11), нетрудно получить, что

$$\varphi_\gamma(t) = R \left(it + \frac{1}{\gamma l} \right) / R \left(\frac{1}{\gamma l} \right). \quad (13)$$

Согласно формуле обращения, для вероятности $\mathbf{P} \{ \zeta_S^{(r)}(\gamma) = l \}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P} \{ \zeta_S^{(r)}(\gamma) = l \} \leq \frac{C_4}{B_S} \int_{-\pi B_S}^{\pi B_S} \left| \varphi_\gamma^S \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| dt. \quad (14)$$

Используя (12), (13) и (14), нетрудно показать, что при $0 < \varepsilon < 1$

$$P_1(l) \leq \frac{C_4}{B_S} e^{-1/\gamma} \left(\int_{|t| \leq \varepsilon B_S} \left| R \left(\frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S dt + \int_{\varepsilon B_S < |t| \leq \pi B_S} \left| R \left(\frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S dt \right). \quad (15)$$

Покажем, что интегралы правой части (15) ограничены. Учитывая, что при $0 \leq y \leq 1$ справедливы соотношения

$$e^y = 1 + y + \delta(y), \quad e^{-y} = 1 - y + \delta(y), \quad (16)$$

где $\delta(y) \leq y^2$, из (7), (10) и (16) находим, что

$$\begin{aligned} & \left| R \left(it + \frac{1}{\gamma l} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} \exp \left\{ (j - m_r) \left(it + \frac{1}{\gamma l} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} = j - m_r \} \right| \\ &\leq \left| \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} \exp \{ itj \} \exp \left\{ \frac{j - m_r}{\gamma l} \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} = j - m_r \} \\ &\leq \left| \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} \exp \{ itj \} \left(1 + \frac{j - m_r}{\gamma l} + \left(\frac{j - m_r}{\gamma l} \right)^2 \right) \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} = j - m_r \} \right| \\ &\leq \left| \sum_{j \geq 1} \exp \{ itj \} \mathbf{P} \{ \eta_1^{(r)} = j \} - \sum_{j > \gamma l + m_r} \exp \{ itj \} \mathbf{P} \{ \eta_1^{(r)} = j \} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} \exp \{ itj \} \frac{j - m_r}{\gamma l} \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} = j - m_r \} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(\gamma l)^2} \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} (j - m_r)^2 \mathbf{P} \{ \eta_1^{(r)} = j \} \right. \\ & \quad \leq \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| + \sum_{j > \gamma l + m_r} \mathbf{P} \{ \eta_1^{(r)} = j \} \\ & \quad + \frac{1}{\gamma l} \sum_{j > \gamma l + m_r} (j - m_r) \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} = j - m_r \} \\ & \quad \left. + \frac{1}{(\gamma l)^2} \sum_{1 \leq j \leq \gamma l + m_r} (j - m_r)^2 \mathbf{P} \{ \eta_1^{(r)} = j \} \right|. \quad (17) \end{aligned}$$

Используя свойства медленно меняющейся функции: для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)x^{-\varepsilon} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)x^\varepsilon = \infty, \quad (18)$$

из (1) нетрудно получить, что при достаточно больших k и любом достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i > k} p_i &\leq C_5 k^{-g+1+\varepsilon}, \\ \sum_{i > k} (i - M)p_i &\leq C_6 k^{-g+2+\varepsilon}, \\ \sum_{i \leq k} (i - M)^2 p_i &\leq C_7 k^{-g+3+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда нетрудно видеть, что справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{j > l\gamma} \mathbf{P} \{ \eta_1^{(r)} = j \} = \frac{1}{1 - p_r} \sum_{j > l\gamma} \mathbf{P} \{ \eta_1 = j, \eta_1 \neq r \}$$

$$\leq C_8 \sum_{j>l\gamma} p_k \leq C_9 (l\gamma)^{-g+1+\varepsilon}, \quad (20)$$

$$\sum_{j>\gamma l+m_r} (j-m_r) \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = j-m_r\} \leq C_{10} (l\gamma)^{-g+2+\varepsilon} \quad (21)$$

и

$$\sum_{j<l\gamma} (j-m_r)^2 \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = j\} \leq C_{11} (l\gamma)^{-g+3+\varepsilon}. \quad (22)$$

Тогда из (17), (20)–(22) вытекает, что

$$\left| R \left(it + \frac{1}{\gamma l} \right) \right| \leq \left| \varphi_1^{(r)}(t) \right| + C_{12} (l\gamma)^{-g+1+\varepsilon}, \quad (23)$$

где

$$\varphi_1^{(r)}(t) = \frac{\varphi(t) - p_r e^{itr}}{1 - p_r}. \quad (24)$$

Согласно условиям леммы и (8) выполняется соотношение

$$\frac{\gamma l}{S} = h^{1/3} (S) l^{2/3} S^{(4-3g)/(3(g-1))} \geq C_{13} > 0, \quad (25)$$

тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $N \rightarrow \infty$

$$(\gamma l)^{-g+1+\varepsilon} = o(1/S). \quad (26)$$

В статье [8] (см. соотношение (2.30)) показано, что в окрестности нуля логарифм характеристической функции $\eta_1 - M$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{\eta_1 - M}(t) &= \Gamma(2-g) \cos \frac{\pi(g-1)}{2} \frac{h(1/|t|)}{g-1} |t|^{g-1} \\ &\times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(g-1)}{2} \right) \\ &= \Gamma(1-g) h \left(\frac{1}{|t|} \right) |t|^{g-1} \\ &\times \cos \frac{\pi(g-1)}{2} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(g-1)}{2} \right), \quad (27) \end{aligned}$$

где $\Gamma(z)$ – значение гамма-функции в точке z , а $\varphi_{\eta_1 - M}(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\eta_1 - M$. Отсюда и (24) нетрудно показать, что при $rt \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(r)}(t) &= \frac{1}{1-p_r} (\varphi(t) - p_r e^{itr}) \\ &= 1 + \frac{it}{1-p_r} (M - rp_r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\Gamma(1-g)}{1-p_r} h \left(\frac{1}{|t|} \right) |t|^{g-1} \cos \frac{\pi(g-1)}{2} \\ &\times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(g-1)}{2} \right) + O((rt)^2). \quad (28) \end{aligned}$$

Из (2), (6) и (28) следует, что для любого фиксированного t , $N \rightarrow \infty$ и $r\sqrt{S}/B_S \leq C_{14}$

$$\begin{aligned} \ln \left(\varphi_1^{(r)} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right)^S &= itm_r S / B_S \\ &+ \frac{S\Gamma(1-g)}{1-p_r} h \left(\frac{B_S}{|t|} \right) \cos \frac{\pi(g-1)}{2} \frac{|t|^{g-1}}{B_S^{g-1}} \\ &\times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(g-1)}{2} \right) + O \left(\frac{r^2 S}{B_S^2} \right) \\ &= itm_r S / B_S \\ &- \frac{\Gamma(2-g)}{1-p_r} |t|^{g-1} \cos \frac{\pi(g-1)}{2} \\ &\times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(g-1)}{2} \right) + O \left(\frac{r^2 S}{B_S^2} \right) \quad (29) \end{aligned}$$

(здесь рассматривается та ветвь логарифмической функции, для которой $\ln 1 = 0$). Тогда из (3), (23), (26) и (29), используя свойства характеристических функций, находим, что при любом фиксированном t и $r\sqrt{S}/B_S \leq C_{14}$

$$\begin{aligned} \left| R \left(\frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S &\leq C_{15} \left| \varphi_1^{(r)} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right|^S \\ &\times (1 + C_{16} (\gamma l)^{-g+1+\varepsilon})^S \leq C_{17} \exp\{-C_{18} |t|^{g-1}\}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $N \rightarrow \infty$, $r\sqrt{S}/B_S \leq C_{14}$ первый интеграл в правой части (15) ограничен.

Рассмотрим первый интеграл правой части (15) при $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow \infty$. Согласно условию леммы в этом случае выполняется соотношение

$$Sh(r)/r^g \rightarrow 0. \quad (30)$$

Покажем, что и в этом случае интеграл также будет ограничен. Если $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow \infty$, тогда из (3) следует, что $r \rightarrow \infty$. Из (24) получаем, что

$$\begin{aligned} \left(\varphi_1^{(r)} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right)^S &= \varphi^S \left(\frac{t}{B_S} \right) (1-p_r)^{-S} \\ &\times \left(1 - p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right)^S. \quad (31) \end{aligned}$$

Из (1) нетрудно видеть, что при достаточно больших N

$$S \ln(1 - p_r) = O(Nh(r)/r^g). \quad (32)$$

Покажем, что при любых фиксированных t , $N \rightarrow \infty$ справедливо

$$\begin{aligned} S \ln \left(1 - p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right) \\ = O(Sh(r)/r^g). \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая, что при $r \rightarrow \infty$

$$\left| p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| \leq C_{18} p_r,$$

и раскладывая логарифмическую функцию в окрестности точки 0 в ряд Тейлора, получим, что при любых фиксированных t и $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right) \\ = -p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \\ - \left(p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right)^2 / 2 + \dots \quad (34) \\ = -p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \\ \times \left(1 + \left(p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right) / 2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} \left| -p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| \\ \times \left(1 + \left(p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right) / 2 + \dots \right) \\ \leq p_r \left| \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| \left(1 + p_r \left| \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| \right. \\ \left. + \left(p_r \left| \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| \right)^2 + \dots \right) \\ = p_r \left| \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| / \left| 1 - p_r \left| \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| \right|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3), (34) следует, что при любых фиксированных t и $N \rightarrow \infty$

$$\ln \left(1 - p_r \exp \left\{ \frac{itr}{B_S} \right\} \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} = O \left(p_r \left| \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| / \left| 1 - p_r \left| \varphi^{-1} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| \right| \right) \\ = O(p_r), \end{aligned}$$

тогда отсюда и из (1) вытекает справедливость равенства (33). Тогда из (23), (26), (30)–(33) и используя свойства характеристических функций, находим, что при любом фиксированном t

$$\begin{aligned} \left| R \left(\frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S \leq \left| \varphi_1^{(r)} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right|^S \\ \times (1 + C_{19}(\gamma l)^{-g+1+\varepsilon})^S \leq C_{20} \left| \varphi \left(\frac{t}{B_S} \right) \right|^S. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (2) и (27) получаем, что при любом фиксированном t и $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{\eta_1-M}^S(t/B_S) = -\Gamma(2-g)|t|^{g-1} \cos \frac{\pi(g-1)}{2} \\ \times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(g-1)}{2} \right) + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (35) находим, что при выполнении условий леммы в случае, когда $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow \infty$ и любом фиксированном t

$$\left| R \left(\frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S \leq C_{21} \exp \{-C_{22}|t|^{g-1}\},$$

откуда и вытекает, что при $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow \infty$ первый интеграл в (15) тоже ограничен.

Для оценки второго интеграла в (15) можно использовать известное свойство характеристических функций решетчатых распределений с единичным максимальным шагом, согласно которому при $\varepsilon < |t| \leq \pi$ справедливо неравенство

$$|\varphi_1^{(r)}(t)| \leq e^{-C_{23}}.$$

Отсюда и из (8), (23), (26) получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon B_S < |t| \leq \pi B_S} \left| R \left(\frac{it}{B_S} + \frac{1}{\gamma l} \right) \right|^S dt \\ \leq \int_{\varepsilon B_S < |t| \leq \pi B_S} \left(\left| \varphi_1^{(r)} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right| + C_{24}(\gamma l)^{-g+1+\varepsilon} \right)^S dt \\ \leq C_{25} \int_{\varepsilon B_S < |t| \leq \pi B_S} e^{-C_{26}S} dt. \end{aligned}$$

Следовательно, второй интеграл в (15) стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$. Учитывая, что оба интеграла в равенстве (15) ограничены, находим, что

$$P_1(l) \leq C_{27} B_S^{-1} e^{-1/\gamma}. \quad (36)$$

Покажем, что

$$P_1(l) = o\left(\frac{Sh(l)}{l^g}\right). \quad (37)$$

Используя (3), получаем, что для достаточно большого N и достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} C_{28} S^{\varepsilon(g-2-\varepsilon)/(g-1+\varepsilon)} &> \left(\frac{S}{B_S}\right)^\varepsilon \\ &> C_{29} S^{\varepsilon(g-2+\varepsilon)/(g-1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Следовательно, по свойствам медленно меняющейся функции для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{S \rightarrow \infty} S^\varepsilon h(B_S) = \infty. \quad (38)$$

Согласно (2) справедливо соотношение $B_S \asymp S^{1/(g-1)} h^{1/(g-1)}(B_S)$, где запись $f_1(x) \asymp f_2(x)$ означает, что $f_1(x) = O(f_2(x))$ и $f_2(x) = O(f_1(x))$ для положительных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Отсюда и из (8) нетрудно получить, что для достаточно малого положительного ε

$$\frac{\exp\{-1/\gamma\} n^g}{B_S Sh(l)} \quad (39)$$

$$\asymp \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\right\} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{3(g+\varepsilon)} \frac{h^{g+\varepsilon}(S) S^{\varepsilon/(g-1)}}{h^{1/(g-1)}(B_S) h(l) l^\varepsilon}.$$

Поскольку $n/N \rightarrow \infty$ при выполнении условий леммы, из (2), (8), (18), (38), (39) можно показать, что при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\exp\{-1/\gamma\} l^g}{B_S Sh(l)} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (36), учитывая условия леммы, вытекает равенство (37).

Рассмотрим $P_2(l)$. Нетрудно видеть, что $P_2(l)$ можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} P_2(l) &= \sum_{j > \gamma l + m_r} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j - m_r\} \\ &\times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(r)} = l - j + m_r, \xi_i^{(r)} \leq \gamma l, \\ &\quad i = 1, \dots, S-1\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Введем вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_{i,\gamma l}^{(r)}$, $i = 1, \dots, S-1$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} = k\}$$

$$= \mathbf{P}\{\eta_1 = k - m_r \mid \eta_1 \neq r, \eta_1 \leq \gamma l\}, \quad (41)$$

и их сумму $\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = \xi_{1,\gamma l}^{(r)} + \dots + \xi_{S-1,\gamma l}^{(r)}$. Из (5), (7), (20), (25), (26) и (41) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-1}^{(r)} = l - j + m_r, \xi_i^{(r)} \leq \gamma l, i = 1, \dots, S-1\} \\ &= \left(\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} \leq \gamma l\}\right)^{S-1} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\} \\ &= \left(1 - \sum_{k > \gamma l} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\}\right)^{S-1} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\} \\ &= \left(1 - \sum_{k > \gamma l} \mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = k + m_r\}\right)^{S-1} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\} \\ &= \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j + m_r\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая, что случайные величины $\xi_{1,\gamma l}^{(r)}, \dots, \xi_{S-1,\gamma l}^{(r)}$ могут принимать отрицательные значения, из (40) получаем, что $P_2(l)$ можно представить в виде:

$$P_2(l) = \sum_{i=1}^3 R_i(l) (1 + o(1)), \quad (42)$$

где

$$R_i(l) = \sum_{J_i} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j\} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} = l - j\},$$

$$J_1 = \{j : \gamma l < j < \gamma^{1/2} l\};$$

$$J_2 = \{j : \gamma^{1/2} l \leq j < l - \gamma^{1-\Delta} l\};$$

$$J_3 = \{j : l - \gamma^{1-\Delta} l \leq j \leq l + m_r(S-1)\}$$

при достаточно малом положительном Δ .

Покажем, что основной вклад в $P_2(l)$ дает $R_3(l)$. Из (1), (5) и (7) при выполнении условий леммы находим, что при $j \in J_3$

$$\mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = j\} = h(l) (1 + o(1)) / ((1 - p_r) l^g).$$

Отсюда и из (42) получаем, что

$$R_3(l) = \frac{h(l)(1 + o(1))}{(1 - p_r)l^g} \quad (43)$$

$$\times \mathbf{P} \left\{ -m_r(S - 1) \leq \zeta_{S-1, \gamma l}^{(r)} \leq \gamma^{1-\Delta} l \right\}.$$

Пусть $g(x)$ обозначает плотность устойчивого закона с показателем $g - 1$ и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -\Gamma(2 - g) \cos(\pi(g - 1)/2) |t|^{g-1} \right. \\ \left. \times \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg}(\pi(g - 1)/2) \right) \right\}. \quad (44)$$

Через $\varphi_{\gamma l, r}(t)$ обозначим характеристическую функцию случайных величин $\xi_{1, \gamma l}^{(r)}$. Из (1), (5), (20), (26) и (41) нетрудно видеть, что в окрестности нуля (при $t \rightarrow 0$) при достаточно большом N и достаточно малом положительном ε

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma l, r}(t) &= \sum_k e^{itk} \mathbf{P} \{ \xi_{1, \gamma l}^{(r)} = k \} \\ &= \frac{\tilde{\varphi}(t) - \sum_{k > \gamma l} e^{itk} \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} = k \}}{1 - \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} > \gamma l \}} \\ &= \frac{\tilde{\varphi}(t) - \sum_{k > \gamma l} e^{itk} \mathbf{P} \{ \xi_1^{(r)} = k \}}{1 - \mathbf{P} \{ \eta_1^{(r)} > \gamma l + m_r \}} \\ &= \tilde{\varphi}(t) (1 + O((\gamma l)^{1-g+\varepsilon})) \\ &= e^{-itm_r} \varphi_1^{(r)}(t) (1 + O((\gamma l)^{1-g+\varepsilon})) \\ &= e^{-itm_r} \varphi_1^{(r)}(t) (1 + o(1/S)). \end{aligned} \quad (45)$$

Рассмотрим случай, когда $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow 0$. Используя равенство (28), нетрудно показать, что для любого фиксированного t

$$\begin{aligned} &\ln \left(\varphi_1^{(r)} \left(\frac{t(1 - p_r)^{1/(g-1)}}{B_S} \right) \right)^S \\ &= itm_r S \frac{(1 - p_r)^{1/(g-1)}}{B_S} - \Gamma(2 - g) \cos \frac{\pi(g - 1)}{2} \\ &\times |t|^{g-1} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi(g - 1)}{2} \right) + O \left(\frac{r^2 S}{B_S^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (45) следует, что при $S \rightarrow \infty$ и $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow 0$ распределение случайной величины

$$\frac{\zeta_{S, \gamma l}^{(r)} - m_r S}{B_S / (1 - p_r)^{1/(g-1)}}$$

слабо сходится к устойчивому закону с показателем $g - 1$ и характеристической функцией (44). Значит, при $S \rightarrow \infty$ и $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow 0$ справедливо

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \{ -m_r(S - 1) \leq \zeta_{S-1, \gamma l}^{(r)} \leq \gamma^{1-\Delta} l \} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{-2m_r(S - 1)}{B_{S-1} / (1 - p_r)^{1/(g-1)}} \right. \\ &\leq \left. \frac{\zeta_{S-1, \gamma l}^{(r)} - m_r(S - 1)}{B_{S-1} / (1 - p_r)^{1/(g-1)}} \leq \frac{\gamma^{1-\Delta} l - m_r(S - 1)}{B_{S-1} / (1 - p_r)^{1/(g-1)}} \right\} \\ &\sim \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1, \end{aligned} \quad (46)$$

где $g(x)$ обозначает плотность устойчивого закона с показателем $g - 1$ и характеристической функцией (44). Из (3), (43) и (46) находим, что при $S, l \rightarrow \infty$ и $r\sqrt{S}/B_S \rightarrow 0$

$$R_3(l) \sim \frac{h(l)}{(1 - p_r)l^g}. \quad (47)$$

Рассмотрим $R_3(l)$ при $r\sqrt{S}/B_S \geq C_{14} > 0$. Учитывая, что в этом случае $r \rightarrow \infty$, нетрудно проверить, что соотношения (31), (32), (33) выполняются. Из условия леммы (30) и соотношений (31), (32), (33) получаем, что при $S \rightarrow \infty$

$$\left(\varphi_1^{(r)} \left(\frac{t}{B_S} \right) \right)^S = \varphi^S \left(\frac{t}{B_S} \right) (1 + o(1)).$$

Отсюда и из (2), (3), (27), (45) следует, что при $S \rightarrow \infty$ и $r\sqrt{S}/B_S \geq C_{14} > 0$ распределение случайной величины

$$\frac{\zeta_{S, \gamma l}^{(r)} - m_r S}{B_S}$$

слабо сходится к устойчивому закону с показателем $g - 1$ и характеристической функцией (44). Значит, и для случая, когда $r/B_S \geq C_{15} > 0$, соотношение (47) сохраняет свою силу.

Рассмотрим $R_1(l)$. Из (1), (5), (7) и (42) находим, что

$$R_1(l) \leq \frac{C_{30} h(\gamma l)}{(\gamma l)^g} \mathbf{P} \{ \zeta_{S-1, \gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2} \}. \quad (48)$$

Для оценки вероятности $\mathbf{P} \{ \zeta_{S-1, \gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2} \}$ будем использовать неравенство Чебышева.

Сделаем оценку первого и второго момента случайной величины $\xi_{1,\gamma l}^{(r)}$. Из (1), (5), (7), (21), (22), (41), учитывая, что $\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = 0$, получаем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}\xi_{1,\gamma l}^{(r)} \right| &= \left| \sum_{k \leq \gamma l} k \frac{\mathbf{P}\{\eta_1^{(r)} = k - m_r\}}{1 - (1 - p_r)^{-1} \sum_{k > \gamma l} p_k} \right| \\ &\leq \left| \sum_{1 - m_r \leq k \leq \gamma l} k \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \right| (1 + C_{31}(\gamma l)^{-g+1+\varepsilon}) \\ &= \sum_{k > \gamma l} k \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} (1 + C_{31}(\gamma l)^{-g+1+\varepsilon}) \\ &\leq C_{32} \sum_{k > \gamma l} (k - m_r) p_k \leq C_{33}(\gamma l)^{2+\varepsilon-g}. \quad (49) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\xi_{1,\gamma l}^{(r)} \right)^2 &= \sum_{1 - m_r \leq k} k^2 \mathbf{P}\{\xi_{1,\gamma l}^{(r)} = k\} \\ &\leq C_{34} \sum_{1 - m_r \leq k \leq \gamma l} k^2 \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} \\ &\leq C_{35} \sum_{1 - m_r \leq k \leq \gamma l} (k - m_r)^2 p_k \\ &\leq C_{36}(\gamma l)^{3+\varepsilon-g}. \quad (50) \end{aligned}$$

Применяя неравенство Чебышева, из (49) и (50) находим, что при достаточно больших l

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2}\} \\ &\leq \frac{C_{37}}{l^2} \mathbf{E} \left(\xi_{1,\gamma l}^{(r)} + \dots + \xi_{S-1,\gamma l}^{(r)} \right)^2 \\ &\leq \frac{C_{38}}{l^2} ((S-1)(l\gamma)^{3+\varepsilon-g} \\ &\quad + (S-1)(S-2)(\gamma l)^{-2g+4+2\varepsilon}) \\ &\leq C_{39} S \gamma^{-g+3+\varepsilon} l^{-g+1+\varepsilon}. \quad (51) \end{aligned}$$

Из (8), (48) и (51) получаем, что при $S \rightarrow \infty$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} R_1(l) &= O \left(\frac{h(\gamma l)}{(\gamma l)^g} S l^{-g+1+\varepsilon} \gamma^{-g+3+\varepsilon} \right) \\ &= O \left(\frac{h(l)}{l^g} \frac{h(\gamma l)}{h(l)} S^A l^B h^D(S) \right), \quad (52) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\varepsilon + 1}{g - 1} \right), \quad B = -\frac{1}{3}g + \frac{2}{3}\varepsilon, \\ D &= -\frac{2}{3}g + 1 + \frac{1}{3}\varepsilon. \end{aligned}$$

Используя (53), можно показать, что $-B - A > 0$ при $2 < g < 3$. Тогда из (18) и (25) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{h(\gamma l)}{h(l)} S^A l^B h^D(S) \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (52) получаем, что

$$R_1(l) = o \left(\frac{h(l)}{l^g} \right). \quad (53)$$

Рассмотрим $R_2(l)$. Из (1), (5), (7), (8) и (42) следует, что

$$\begin{aligned} R_2(l) &\leq \frac{C_{40} h(\gamma^{1/2} l)}{(\gamma^{1/2} l)^g} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > \gamma^{1-\Delta} l\} \\ &\leq \frac{C_{41} h(\gamma^{1/2} l)}{(\gamma^{1/2} l)^g} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > \gamma l\}. \quad (54) \end{aligned}$$

Оценка вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > \gamma l\}$ осуществляется аналогично тому, как получена оценка для вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > l - l\gamma^{1/2}\}$. Применяя неравенство Чебышева, из (49) и (50) находим, что при $S \rightarrow \infty$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > \gamma l\} &\leq \frac{C_{42}}{(\gamma l)^2} S (l\gamma)^{3+\varepsilon-g} \\ &\leq C_{43} S (\gamma l)^{-g+1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (18), (54) получаем, что для достаточно больших S, l и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} R_2(l) &\leq C_{44} \left(\gamma^{1/2} l \right)^{-g+\varepsilon} \mathbf{P}\{\zeta_{S-1,\gamma l}^{(r)} > \gamma l\} \\ &\leq C_{45} \frac{S(\gamma l)^{-g+1+\varepsilon}}{(\gamma^{1/2} l)^{g-\varepsilon}} \\ &= C_{45} \frac{h(l)}{l^g} \left(\frac{1}{h(l)} S l^{1-g+2\varepsilon} \gamma^{1-3g/2+3\varepsilon/2} \right). \quad (55) \end{aligned}$$

Покажем, что при $S \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{h(l)} S l^{1-g+2\varepsilon} \gamma^{1-3g/2+3\varepsilon/2} \rightarrow 0. \quad (56)$$

Из (8) находим, что

$$\frac{1}{h(l)} S l^{1-g+2\varepsilon} \gamma^{1-3g/2+3\varepsilon/2} = \frac{1}{h(l)} l^A S^B h^D(S),$$

где

$$A = 2/3 - g/2 + 3\varepsilon/2, \quad B = \frac{3g/2 - 2 + 3\varepsilon/2}{3(g-1)},$$

$$D = \frac{1 - 3g/2 + 3\varepsilon/2}{3}.$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемой области изменения параметра g значение $-A - B > 0$. Тогда, согласно свойствам медленно меняющейся функции, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h(l)} S l^{1-g+2\varepsilon} \gamma^{1-3g/2+3\varepsilon/2} \\ &= \frac{1}{h(l) n^{(-A-B)/2}} \left(\frac{l}{S}\right)^B \frac{h^D(S)}{l^{(-A-B)/2}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

значит, соотношение (56) верно. Из (55) и (56) вытекает, что

$$R_2(l) = o\left(\frac{h(l)}{lg}\right). \quad (57)$$

Из (42), (47), (53) и (57) находим, что

$$P_2(l) = \frac{h(l)(1 + o(l))}{(1 - p_r)l^g}. \quad (58)$$

Осталось рассмотреть $P_3(l)$. Из (9) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} P_3(l) &= \binom{S}{2} \sum_{k > 2(\gamma l + m_r)} \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = k - 2m_r, \\ & \quad \xi_i^{(r)} > \gamma l, i = S-1, S\} \\ & \quad \times \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-2}^{(r)} = l - k + 2m_r\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Из (5), (7), (19) получаем, что при достаточно большом N и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} + \xi_S^{(r)} = k - 2m_r, \xi_i^{(r)} > \gamma l, i = S-1, S\} \\ &= \sum_J \mathbf{P}\{\xi_{S-1}^{(r)} = j - m_r\} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} = k - m_r - j\} \\ & \leq C_{46} \frac{h(\gamma l)}{(\gamma l)^g} \mathbf{P}\{\xi_S^{(r)} > \gamma l\} \\ & \leq C_{47} h(\gamma l) (\gamma l)^{-2g+1+\varepsilon}, \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$J = \{j : \gamma l + m_r < j < k - \gamma l - m_r\}.$$

Из соотношений (59) и (60) вытекает, что

$$\begin{aligned} P_3(l) &\leq C_{48} S^2 h(\gamma l) (\gamma l)^{-2g+1+\varepsilon} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{S-2}^{(r)} > l - 2l\gamma\} \\ &\leq C_{49} S^2 h(\gamma l) (\gamma l)^{-2g+1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (61)$$

Используя (8), несложно показать, что

$$\begin{aligned} & \frac{S^2 h(\gamma l)}{(\gamma l)^{2g-1-\varepsilon}} = \frac{Sh(l)}{lg} \\ & \times \left(\frac{h(\gamma l)}{h(l) h^{(2g-1-\varepsilon)/3}(S)} \left(\frac{S}{l}\right)^{\frac{g-2+\varepsilon}{3g-3}} \frac{1}{l^\omega} \right), \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\omega = \frac{1}{3(g-1)} ((g-2)^2 - \varepsilon(2g+1)).$$

Учитывая, что $l/S \rightarrow \infty$ и $\omega > 0$, из (18), (61) и (62) получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$P_3(l) = o\left(\frac{Sh(l)}{lg}\right). \quad (63)$$

Тогда утверждение леммы следует из соотношений (9), (37), (58), (63) и условий леммы 3. \square

Теперь можно перейти к доказательству основных теорем. Учитывая, что $N - k = N(1 - p_r)(1 + o(1))$, из лемм 2 и 3 находим, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \rightarrow 1. \quad (64)$$

Согласно нормальному приближению биномиального распределения, при $Nh(r)/r^g \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r (1 - p_r)}} \exp\left\{-\frac{(k - N p_r)^2}{N p_r (1 - p_r)}\right\}. \end{aligned}$$

Тогда утверждение теоремы 1 следует из (64) и леммы 1.

Применяя пуассоновское приближение биномиального распределения при $p_r \rightarrow 0$, лемму 1 и равенство (64), получаем теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
2. Павлов Ю. Л. О структуре условных конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 54–59. doi: 10.17076/mat2041
3. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832
4. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512
5. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Об асимптотике степенной структуры конфигурационных графов с ограничениями на число ребер // Дискретная математика. 2018. Т. 30, № 1. С. 77–94. doi: 10.4213/dm1445
6. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, № 3. С. 468–486. doi: 10.4213/tvp5332
7. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008
8. Чеплюкова И. А. О максимальной степени вершины условного конфигурационного графа // Теория вероятностей и ее применения. 2026. Т. 71, № 1. С. 78–94. doi: 10.4213/tvp5776
9. Чеплюкова И. А. О предельных распределениях степеней вершин конфигурационного графа // Труды Карельского научного центра РАН. 2015. № 10. С. 123–130. doi: 10.17076/mat138
10. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178
11. Barabasi L. A., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. No. 286. P. 509–512. doi: 10.1126/science.286.5439.509
12. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // European J. Combin. 1980. Vol. 1, no. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S01195-6698(80)80030-8
13. Durrett R. Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. 233 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594
14. Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M. On power-law relationship of the Internet topology

// Comput. Commun. Rev. 1999. No. 29. P. 251–262. doi: 10.1145/316194.316229

15. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
16. Newman M. E. J. Networks. An introduction. Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. 772 p.
17. Reittu Y., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Perform. Eval. 2004. Vol. 55, no. 1–2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

REFERENCES

1. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1999. 256 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342
2. Pavlov Yu. L. On the structure of conditional configuration graphs with a bounded number of edges. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2025;4:54–59. (In Russ.). doi: 10.17076/mat2041
3. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *Sbornik: Mathematics.* 2018;209(2):258–275. doi: 10.1070/SM8832
4. Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V. On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *Sbornik: Mathematics.* 2016;207(3):400–417. doi: 10.4213/sm8512
5. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. On the asymptotics of degree structure of configuration graphs with bounded number of edges. *Discrete Math. Appl.* 2019;29(4):219–132. doi: 10.1515/dma-2019-0020
6. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Limit distributions of the number of vertices of a given degree in a configuration graph with bounded number of edges. *Theory of Probability and its Applications.* 2021;66(3):376–390. doi: 10.1137/S0040585X97T990460
7. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2008;18(5):447–463. doi: 10.1515/DMA.2008.033
8. Cheplyukova I. A. On the maximum vertex degree of a conditional configuration graph. *Theory of Probability and its Applications.* 2026;71(1):78–94. (In Russ.). doi: 10.4213/tvp5776
9. Cheplyukova I. A. On limit distributions of vertex degrees in a configuration graph. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2015;10:123–130. (In Russ.). doi: 10.17076/mat138
10. Chuprunov A. N., Fazekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of

particles. *Discrete Math. Appl.* 2012;22(1):101–122. doi: 10.1515/dma-2012-008

11. *Barabasi L. A., Albert R.* Emergence of scaling in random networks. *Science.* 1999;286:509–512. doi: 10.1126/science.286.5439.509

12. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combin.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S01195-6698(80)80030-8

13. *Durrett R.* Random graph dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2007. 221 p. doi: 10.1017/CBO9780511546594

14. *Faloutsos C., Faloutsos P., Faloutsos M.* On power-law relationship of the Internet topology. *Comput. Commun. Rev.* 1999;29:251–262. doi: 10.1145/316194.316229

15. *Hofstad R.* Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

16. *Newman M. E. J.* Networks. An introduction. Oxford: Oxford Univ. Press; 2010. 772 p.

17. *Reittu Y., Norros I.* On the power-law random graph model of massive data networks. *Perform. Eval.* 2004;55(1–2):3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию / received: 13.03.2026; принята к публикации / accepted: 22.05.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Чеплюкова Ирина Александровна

канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

e-mail: chia@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Cheplyukova, Irina

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher