

УДК 517.91

УПРАВЛЯЕМАЯ ДИНАМИКА ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ВХОДНОМ ПОТОКЕ ЗАГРЯЗНЕНИЙ

А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов*

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11,
Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910), *sazon-tb@mail.ru*

В работе представлена модель системы биологической очистки осадков сточных вод. Поставлена задача стабилизации процесса биоочистки при кусочно-постоянном входном потоке загрязнений для общего вида трофических функций, описывающих процесс окисления и входные потоки. Модель представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. посредством замены переменных построена более простая для анализа вспомогательная система линейных дифференциальных уравнений. Для нее показано существование периодического решения. На основе данного результата решена задача стабилизации исходной системы биоочистки. Получен вид управлений, обеспечивающих локализацию периодического решения. Показано, что для любых начальных данных происходит синхронизация решений системы.

Ключевые слова: биологическая очистка; динамические системы; стабилизация; периодические решения; синхронизация решений

Для цитирования: Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Управляемая динамика процесса биоочистки сточных вод при переменном входном потоке загрязнений // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 54–60. doi: 10.17076/mat2326

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. N. Kirillov, A. M. Sazonov*. CONTROLLED DYNAMICS OF THE BIOLOGICAL WASTEWATER TREATMENT PROCESS UNDER VARIABLE POLLUTION INPUT FLOW

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), *sazon-tb@mail.ru*

The paper presents a model of the biological wastewater treatment system. The problem of the wastewater treatment process stabilization for the piecewise-constant pollutant inflow for general form trophic functions describing the oxidation process

and the input flow is studied. The model has the form of a system of nonlinear ordinary differential equations (ODEs). By changing variables, we construct an intermediary system of linear ODEs more useful for the analysis. The existence of a periodic solution to the intermediary system is proved. Based on this result, the problem of the stabilization of the original wastewater treatment system is solved. The form of the controls providing localization of the periodic solution is obtained. It is demonstrated that for any initial data, the timing of the system's solutions is synchronized.

Keywords: biological treatment; dynamical systems; stabilization; periodic solution; synchronization of solutions

For citation: Kirillov A. N., Sazonov A. M. Controlled dynamics of the biological wastewater treatment process under variable pollution input flow. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 54–60. doi: 10.17076/mat2326

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование динамики процесса биологической очистки сточных вод на основе применения активного ила является актуальной задачей в области охраны окружающей среды [1–9]. Сложность процесса очистки сточных вод связана с различными аспектами биологического, физико-химического, технологического характера. Попытки учесть в предлагаемых моделях как можно большее число параметров и связей между ними приводят к невозможности их аналитического и качественного исследования.

В данной работе предложена упрощенная качественная модель системы биологической очистки сточных вод. Предложенная модель описывает систему биоочистки, состоящую из аэротенка, отстойника и звена рециркуляции. На вход системы подается субстрат-загрязнитель и окисляющий его активный ил (биомасса). Аэротенк состоит из n последовательно соединенных компартментов, имеющих номера i , $i = 1, \dots, n$, биомасса и субстрат переходят из i -го компартмента в $i + 1$ -й. При этом происходит процесс окисления субстрата биомассой, в результате чего концентрация субстрата уменьшается, а биомассы – растет с увеличением i .

В статье представлено развитие исследований [2] для переменного входного потока субстрата-загрязнителя. Изменение входного потока субстрата можно интерпретировать, например, как различную нагрузку на очистную систему в зависимости от времени суток, поскольку ночью нагрузка меньше, или как увеличение нагрузки вследствие некоторой

нестандартной критической ситуации. Естественно суточные изменения считать периодическими, а критические – однократными.

Доказана теорема о существовании периодического решения для общего вида трофических функций в модели биоочистки, описанной в [2], определен его конкретный вид. На основе доказанной теоремы решена задача стабилизации процесса биоочистки. Поставлена и решена задача управления с целью локализации периодического решения. Показано, что для любых начальных данных решения системы приближаются к периодическому.

ДИНАМИКА ПРОЦЕССА БИООЧИСТКИ

Постановка задачи

Рассмотрим систему, описывающую процесс биологической очистки сточных вод, являющуюся многомерным обобщением модели [4]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = au + f(x_1, s_1) - (u + b)x_1, \\ \dot{s}_1 = R(t) - \frac{1}{Y}f(x_1, s_1) - (u + b)s_1, \\ \dot{x}_i = f(x_i, s_i) + (u + b)x_{i-1} - (u + b)x_i, \\ \dot{s}_i = -\frac{1}{Y}f(x_i, s_i) + (u + b)s_{i-1} - (u + b)s_i, \end{cases} \quad (1)$$

где $s_i(t), x_i(t)$ – концентрации субстрата-загрязнителя и микроорганизмов активного ила в i -м компартменте соответственно, $f(x_i, s_i)$ – трофическая функция, $i = 1, \dots, n$, Y – коэффициент утилизации субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов, a – концентрация микроорганизмов на входе, b, u – скорости субстрата и ила на входе.

При этом входной поток субстратов $R(t)$ полагается кусочно-постоянным:

$$R(t) = \begin{cases} R_1, t \in [2kT, (2k+1)T], \\ R_2, t \in [(2k+1)T, 2(k+1)T], \\ k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

где $0 < R_2 < R_1$ – постоянные, $2T > 0$ – период входного потока. Отметим, что такой вид $R(t)$ отражает суточные изменения входного потока загрязнений: больший поток R_1 наблюдается в дневное время, а меньший R_2 – в ночное.

Управлением является скорость u поступления ила на входе. В силу технических ограничений, присущих процессу биоочистки, полагаем, что $u = u(t)$ кусочно-постоянная функция такая, что $u(t) \in [0, M]$, где $M > 0$ – постоянная. При этом временные промежутки постоянства $u(t)$ совпадают с промежутками постоянства $R(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, t \in [2kT, (2k+1)T], \\ u_2, t \in [(2k+1)T, 2(k+1)T], \\ k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Поставим задачу стабилизации процесса биоочистки, то есть нахождения управления $u(t) \in [0, M]$ такого, что

$$s_n(t, u) \leq c, \quad x_n(t, u) \leq r, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $s_n(t, u), x_n(t, u)$ – концентрации субстрата и микроорганизмов в n -м (последнем) компартменте, соответствующие управлению u , c, r – положительные постоянные. Условия (2) отражают требования к соблюдению допустимых ограничений на потоки субстрата и активного ила на выходе из системы биоочистки, которые определяют постоянные c и r соответственно. Отметим, что по сути это задача об устойчивости по Лагранжу.

Периодическое решение

Обозначим $D = au + YR$ входной поток субстрата-загрязнителя и активного ила. Проведя замену переменных в системе (1) $z_i = x_i + Ys_i$, получим линейную систему вида

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = D - (u + b)z_1 = g_1(z), \\ \dot{z}_i = (u + b)z_{i-1} - (u + b)z_i = g_i(z), \\ i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

В данном параграфе будет показано существование периодического решения у системы с переключениями (3). Наличие периодического решения у системы позволяет говорить о некотором цикле процесса биоочистки, то есть стационарном режиме этого процесса.

Теорема 1. У системы с переключениями (3) существует периодическое решение.

Доказательство. Рассмотрим систему (3) при $n = 2$.

На промежутке $t \in [0, T]$ она имеет следующее решение:

$$\begin{cases} z_1(t) = E_1 + (z_1^0 - E_1)e^{-\gamma_1 t}, \\ z_2(t) = E_1 + ((z_1^0 - E_1)\gamma_1 t + (z_2^0 - E_1))e^{-\gamma_1 t}, \end{cases}$$

а на промежутке $t \in [T, 2T]$:

$$\begin{cases} z_1(t) = E_2 + (z_1^1 - E_2)e^{-\gamma_2(t-T)}, \\ z_2(t) = E_2 + ((z_1^1 - E_2)\gamma_2(t-T) + (z_2^1 - E_2))e^{-\gamma_2(t-T)}, \end{cases}$$

где

$$E_j = \frac{D_j}{u_j + b}, \quad D_j = au_j + YR_j, \quad \gamma_j = u_j + b, \\ z_j^0 = z_j(0), \quad z_j^1 = z_j(T), \quad j = 1, 2.$$

Решение системы с переключениями (3) с начальной точкой $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ будет периодическим с периодом $2T$, если будут выполнены следующие равенства:

$$z_1(0) = z_1(2T), \quad z_2(0) = z_2(2T).$$

Тогда для определения начальной точки получим следующую систему:

$$\begin{cases} z_1^1 = E_1 + (z_1^0 - E_1)e^{-\gamma_1 T}, \\ z_2^1 = E_1 + ((z_1^0 - E_1)\gamma_1 T + (z_2^0 - E_1))e^{-\gamma_1 T}, \\ z_1^0 = E_2 + (z_1^1 - E_2)e^{-\gamma_2 T}, \\ z_2^0 = E_2 + ((z_1^1 - E_2)\gamma_2 T + (z_2^1 - E_2))e^{-\gamma_2 T}. \end{cases} \quad (4)$$

Решая систему (4), получаем

$$z_1^0 = \frac{E_2(1 - e^{-\gamma_2 T}) + E_1 e^{-\gamma_2 T}(1 - e^{-\gamma_1 T})}{1 - e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)T}},$$

$$z_2^0 = \frac{1}{1 - e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)T}}(z_1^0(\gamma_1 + \gamma_2)Te^{-(\gamma_1 + \gamma_2)T} + E_1 e^{-\gamma_2 T}(1 - e^{-\gamma_1 T} + \gamma_2 T - (\gamma_1 + \gamma_2)Te^{-\gamma_1 T}) + E_2(1 - (\gamma_2 T + 1)e^{-\gamma_2 T})). \quad (5)$$

При $T > 0$ имеем $z_1^0 > 0$. Покажем, что $z_2^0 > 0$. Из (5) имеем

$$z_2^0 = \frac{1}{1 - e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)T}}(z_1^0(\gamma_1 + \gamma_2)Te^{-(\gamma_1 + \gamma_2)T} + E_1 e^{-\gamma_2 T}(1 - (\gamma_1 T + 1)e^{-\gamma_1 T} + \gamma_2 T(1 - e^{-\gamma_1 T})) + E_2(1 - (\gamma_2 T + 1)e^{-\gamma_2 T})). \quad (6)$$

Для функции $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ имеем

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = -xe^{-x} < 0 \quad \forall x > 0,$$

поэтому $f(x) < 1, \forall x > 0$. Таким образом, из (6) имеем $z_2^0 > 0$ при $T > 0$.

Для доказательства теоремы в n -мерном случае требуется аналогично повторить данную процедуру, последовательно решая системы относительно $z_i, i = 3, \dots, n$. \square

Согласно теореме 1, если подобрать u_1, u_2 так, что $\max z_n^j = \max(x_n^j + Ys_n^j) \leq L$ на $[0, 2T]$, где $L = \min(c, r)$, если $Y \geq 1$, или $\frac{L}{Y} = \min(c, r)$, если $Y < 1$, то для таких u_1, u_2 будет выполнено (2), то есть решена задача стабилизации.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу локализации периодического решения $z_i^{per}(z^0, t)$, состоящую в определении управлений $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$, обеспечивающих выполнение неравенств:

$$c_1 \leq z_i^{per}(z^0, t) \leq c_2,$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные.

Теорема 2. Пусть $E_1 < E_2$. Приведенные ниже управления u_1, u_2 решают задачу локализации периодического решения, то есть $c_1 \leq z_i^{per}(z^0, t) \leq c_2$.

Если $c_1 < c_2 < a, R_2 < R_1 \leq \frac{c_1 b}{Y}$, то

$$\begin{cases} \frac{YR_1 - c_1 b}{c_1 - a} \leq u_1 < \frac{c_2 b - YR_1}{a - c_2}, \\ \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab} < u_2 \leq \frac{c_2 b - YR_2}{a - c_2}. \end{cases}$$

Если $c_1 < c_2 < a, \frac{c_1 b}{Y} < R_1 < \frac{c_2 b}{Y}, R_2 \leq \frac{c_1 b}{Y}$, то

$$\begin{cases} 0 \leq u_1 < \frac{c_2 b - YR_1}{a - c_2}, \\ \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab} < u_2 \leq \frac{c_2 b - YR_2}{a - c_2}. \end{cases}$$

Если $c_1 < a < c_2, R_2 < R_1 \leq \frac{c_1 b}{Y}$, то

$$\begin{cases} u_1 \geq \frac{YR_1 - c_1 b}{c_1 - a}, \\ u_2 > \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab}. \end{cases}$$

Если $c_1 < a < c_2, \frac{c_1 b}{Y} < R_1 < \frac{ab}{Y}, R_2 \leq \frac{ab}{Y}$, то

$$\begin{cases} u_1 \geq 0, \\ u_2 > \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab}. \end{cases}$$

Если $c_1 < a < c_2, R_1 > \frac{ab}{Y}, \frac{ab}{Y} < R_2 \leq \frac{c_2 b}{Y}$, то

$$\begin{cases} u_1 > \frac{Yb(R_1 - R_2)}{YR_2 - ab}, \\ 0 \leq u_2 < \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab}. \end{cases}$$

Если $c_1 < a < c_2, R_1 > R_2 > \frac{c_2 b}{Y}$, то

$$\begin{cases} u_1 > \frac{c_2 b - YR_1}{a - c_2}, \\ \frac{c_2 b - YR_2}{a - c_2} \leq u_2 < \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab}. \end{cases}$$

Если $a < c_1 < c_2, R_1 > \frac{c_1 b}{Y}, \frac{ab}{Y} < R_2 \leq \frac{c_2 b}{Y}$, то

$$\begin{cases} \frac{Yb(R_1 - R_2)}{YR_2 - ab} < u_1 \leq \frac{YR_1 - c_1 b}{c_1 - a}, \\ 0 \leq u_2 < \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab}. \end{cases}$$

Если $a < c_1 < c_2, R_1 > \frac{c_1 b}{Y}, R_2 > \frac{c_2 b}{Y}$, то

$$\begin{cases} \frac{c_2 b - YR_1}{a - c_2} < u_1 \leq \frac{YR_1 - c_1 b}{c_1 - a}, \\ \frac{c_2 b - YR_2}{a - c_2} \leq u_2 < \frac{(YR_2 - ab)u_1 + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab}. \end{cases}$$

В остальных случаях решение не локализуемо.

Доказательство. Так как по условию $E_1 < E_2$, то имеем

$$(YR_1 - ab)u_2 < YR_2(u_1 + b) - b(au_1 + YR_1). \quad (7)$$

Из (3) очевидно, что множество $\{E_1 \leq z_i \leq E_2\}$ инвариантно для системы (3). Тогда из теоремы 1 имеем, что $E_1 \leq z_i^{per}(z^0, t) \leq E_2$, поскольку периодическая траектория не может покинуть инвариантное множество. Таким образом, чтобы решить задачу локализации периодического решения, требуются u_1, u_2 такие, что $c_1 \leq E_1, E_2 \leq c_2$. Итак, получим

$$\begin{cases} c_1 \leq \frac{au_1 + YR_1}{u_1 + b}, \\ \frac{au_2 + YR_2}{u_2 + b} \leq c_2. \end{cases} \quad (8)$$

Перепишем (8) в виде

$$\begin{cases} (c_1 - a)u_1 \leq YR_1 - c_1 b, \\ (a - c_2)u_2 \leq c_2 b - YR_2. \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим случай $c_1 < c_2 < a$. Из (9)

$$\begin{cases} u_1 \geq \frac{YR_1 - c_1 b}{c_1 - a}, \\ u_2 \leq \frac{c_2 b - YR_2}{a - c_2}. \end{cases} \quad (10)$$

Пусть $R_2 < R_1 \leq \frac{c_1 b}{Y}$. Тогда из (7)

$$u_2 > \frac{u_1(YR_2 - ab) + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab} > 0. \quad (11)$$

Поскольку для выполнения второго неравенства из (10) и неравенства (11) необходимо

$$\frac{u_1(YR_2 - ab) + Yb(R_2 - R_1)}{YR_1 - ab} < \frac{c_2 b - YR_2}{a - c_2},$$

получим ограничение на u_1 :

$$u_1 < \frac{c_2 b - Y R_1}{a - c_2}.$$

Несложно показать, что при указанных условиях в п. 1 теоремы 2

$$0 < \frac{Y R_1 - c_1 b}{c_1 - a} < \frac{c_2 b - Y R_1}{a - c_2}.$$

Таким образом, доказаны ограничения на управления в первом случае.

Пусть $R_1 > \frac{c_1 b}{Y}$. Поскольку $\frac{Y R_1 - c_1 b}{c_1 - a} < 0$, из (10)

$$\begin{cases} u_1 \geq 0, \\ u_2 \leq \frac{c_2 b - Y R_2}{a - c_2}. \end{cases}$$

Учитывая (7),

$$\begin{aligned} \frac{u_1(Y R_2 - ab) + Y b(R_2 - R_1)}{Y R_1 - ab} &< u_2 \\ &\leq \frac{c_2 b - Y R_2}{a - c_2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$u_1 < \frac{c_2 b - Y R_1}{a - c_2}.$$

Можно показать, что при условиях п. 2 теоремы 2 имеют место следующие неравенства:

$$\frac{c_2 b - Y R_i}{a - c_2} > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{u_1(Y R_2 - ab) + Y b(R_2 - R_1)}{Y R_1 - ab} > 0.$$

Следовательно, доказаны соответствующие условия на управления.

В случае $R_1 > \frac{c_1 b}{Y}$, $R_2 > \frac{c_2 b}{Y}$ из (10) имеем $u_2 < 0$, что противоречит условию неотрицательности управления. Случай $R_1 < \frac{c_1 b}{Y}$, $R_2 > \frac{c_2 b}{Y}$ невозможен, поскольку $R_2 < R_1$.

Анализ других случаев $a < c_1 < c_2$, $c_1 < a < c_2$ аналогичен. \square

Замечание. Отметим, что в теореме 1 рассматривается случай $E_1 < E_2$. Анализ случая $E_1 \geq E_2$ полностью аналогичен и с целью избежать громоздких выкладок, ухудшающих восприятие статьи, не приводится в работе.

СИНХРОНИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ

Теорема 3. Для любых начальных точек z^0, \tilde{z}^0 таких, что $\tilde{z}_i^0 = z_i^0 + \delta$, $i = 1, 2$, $\delta > 0$: $|z_i(\tilde{z}^0, T) - z_i(z^0, T)| < \delta$, $i = 1, \dots, n$, где $R(t) = \text{const}$, $t \in [kT, (k+1)T]$, $k = 0, 1, \dots$

Доказательство. Используя выражение для решения, имеем

$$\begin{aligned} |z_1(\tilde{z}^0, T) - z_1(z^0, T)| &= |E_1 + (z_1^0 + \delta - E_1)e^{-(u+b)T} - E_1 - (z_1^0 - E_1)e^{-(u+b)T}| \\ &= \delta e^{-(u+b)T} < \delta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_2(\tilde{z}^0, T) - z_2(z^0, T)| &= |E_1 + ((z_1^0 + \delta - E_1)(u+b)T + (z_2^0 + \delta - E_1))e^{-(u+b)T} - E_1 - ((z_1^0 - E_1)(u+b)T + (z_2^0 - E_1))e^{-(u+b)T}| \\ &= \delta((u+b)T + 1)e^{-(u+b)T}. \end{aligned} \tag{12}$$

Как было показано в доказательстве теоремы 1, справедливо $(x+1)e^{-x} < 1$, $\forall x > 0$. Таким образом, из (12), $|z_2(\tilde{z}^0, T) - z_2(z^0, T)| < \delta$. Для $i = 3, \dots, n$ доказательство аналогично вышеизложенному. \square

Следствие. Если периодическое решение является устойчивым, то происходит стабилизация решения. Таким образом, периодическое решение является притягивающим.

Далее приведен результат численного эксперимента для случая $n = 2$, отражающий утверждение теоремы 3 относительно синхронизации решений. Здесь $a = 1$, $b = 1$, $Y = 1$, $R_1 = 2$, $R_2 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $z^0 = (2, 1)$, $\tilde{z}^0 = (1.4, 1.6)$. Отметим, что решения для данных начальных точек z^0, \tilde{z}^0 не периодические.

Как видно из приведенных численных результатов (рис. 1, 2), решения системы приближаются друг к другу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена модель управления системой биологической очистки осадков сточных вод с трофическими функциями общего вида. Поставлена задача стабилизации процесса биоочистки при кусочно-постоянном входном потоке загрязнений. Показано существование периодического решения для вспомогательной системы, полученной при помощи замены переменных, определен его конкретный вид. Получен вид управлений, позволяющий локализовать периодическое решение. Данный результат свидетельствует о цикличности процесса биоочистки и позволяет решить задачу стабилизации процесса биоочистки для исходной системы. Показано, что для любых начальных данных происходит синхронизация решений системы. Проведен численный эксперимент, подтверждающий этот результат.

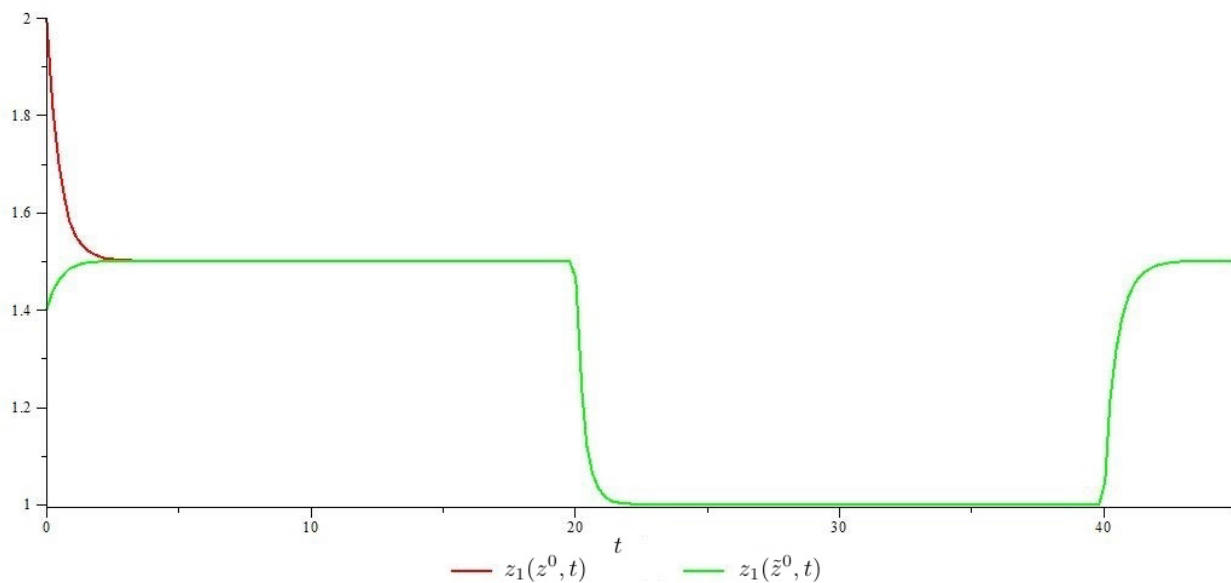


Рис. 1. Приближение компонент решений $z_1(z^0, t)$ и $z_1(\tilde{z}^0, t)$ системы (3)
 Fig. 1. The convergence of solutions components $z_1(z^0, t)$ and $z_1(\tilde{z}^0, t)$ of the system (3)

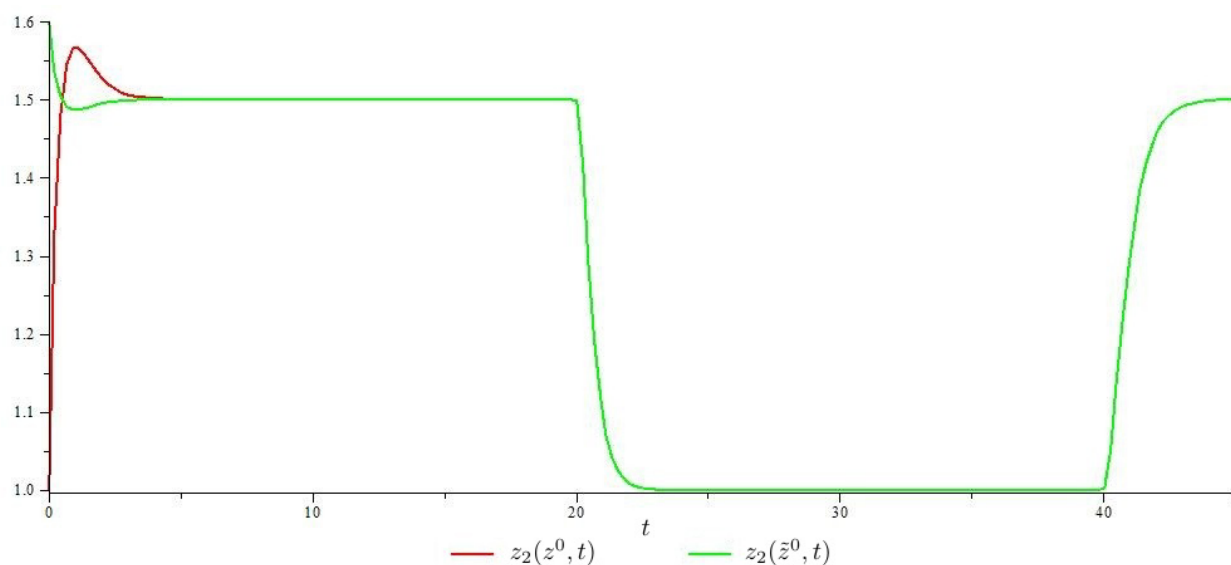


Рис. 2. Приближение компонент решений $z_2(z^0, t)$ и $z_2(\tilde{z}^0, t)$ системы (3)
 Fig. 2. The convergence of solutions components $z_2(z^0, t)$ and $z_2(\tilde{z}^0, t)$ of the system (3)

ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилин В. А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983. 185 с.
2. Кириллов А. Н., Данилова И. В. Динамика процесса биоочистки при переменном входном потоке загрязнений: инвариантные множества и стабилизация // Труды Карельского научного центра РАН. 2020. № 7. С. 65–71. doi: 10.17076/mat1230
3. Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Моделирование процесса биологической очистки сточных

вод на основе шумпетеровской динамики // Труды ИСА РАН. 2020. Т. 70, № 3. С. 24–28. doi: 10.14357/20790279200303

4. Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environmental Technology Letters. 1985. Vol. 6. P. 467–476. doi: 10.1080/09593338509384365

5. Dupont R., Sinkjaer O. Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models // Water Sci. Technol. 1994. Vol. 30. P. 181–190.

6. Grigorieva E. V., Khailov E. N. Minimization of pollution concentration on a given time interval for the wastewater cleaning plant // J. Control Sci. Eng. 2010. Vol. 2010. Art. 712794. doi: 10.1155/2010/712794

7. Henze M., Grady Jr. C.P.L., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T. A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // Water Res. 1987. Vol. 21. P. 505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

8. Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B. A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models // Water Res. 1997. Vol. 31. P. 590–606.

9. Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D. A dynamic model of the clarification-thickening process // Water Res. 1991. Vol. 25. P. 1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

REFERENCES

1. Vavilin V. A. Nonlinear models of the biological wastewater treatment and the processes of the self-purification in rivers. Moscow: Nauka; 1983. 185 p. (In Russ.)

2. Danilova I. V., Kirillov A. N. Dynamics of the biological wastewater treatment process under variable pollution input flow: invariant sets and stabilization. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2020;7:67–71. (In Russ.). doi: 10.17076/mat1230

3. Kirillov A. N., Sazonov A. M. The modeling of the biological wastewater treatment process on the base of the Schumpeterian dynamics. *Trudy ISA RAN = Transactions of the ISA RAS*. 2020;70(3):24–28. (In Russ.). doi: 10.14357/20790279200303

4. Brune D. Optimal control of the complete-mix activated sludge process. *Environmental Technology Letters*. 1985;6:467–476. doi: 10.1080/09593338509384365

5. Dupont R., Sinkjaer O. Optimization of wastewater treatment plants by means of computer models. *Water Sci. Technol*. 1994;30:181–190.

6. Grigorieva E. V., Khailov E. N. Minimization of pollution concentration on a given time interval for the wastewater cleaning plant. *J. Control Sci. Eng*. 2010;2010:712794. P. 1–10. doi: 10.1155/2010/712794

7. Henze M., Grady Jr. C.P.L., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T. A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems. *Water Res*. 1987;21:505–515. doi: 10.1016/0043-1354(87)90058-3

8. Steffens M. A., Lant P. A., Newell R. B. A systematic approach for reducing biological wastewater treatment models. *Water Res*. 1997;31:590–606.

9. Tacacs I., Patry G. G., Nolasco D. A dynamic model of the clarification-thickening process. *Water Res*. 1991;25:1263–1271. doi: 10.1016/0043-1354(91)90066-Y

Поступила в редакцию / received: 11.03.2026; принята к публикации / accepted: 29.05.2026.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Кириллов Александр Николаевич

д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник

e-mail: kirillov@krc.karelia.ru

Сазонов Александр Михайлович

канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник

e-mail: sazon-tb@mail.ru

CONTRIBUTORS:

Kirillov, Alexander

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher

Sazonov, Alexander

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Researcher