

УДК 339.5:519.17

ПРИМЕНЕНИЕ ИНДЕКСА ДРУЖБЫ И ФИЛЬТРА ДИСПАРИТЕТА ДЛЯ АНАЛИЗА МИРОВОЙ ТОРГОВОЙ СЕТИ

А. А. Печников

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Ориентированные графы и сети, имеющие небольшой масштаб, высокую плотность и распределение весов дуг с тяжелым хвостом, являются интересными объектами исследований в силу указанных особенностей. Одним из ярких примеров таких сетей является Всемирная торговая сеть экспортно-импортных торговых потоков между странами, плотность которой превышает 90%. При анализе сети, как правило, используются базовые характеристики, традиционно применяемые в теории графов и сетевом анализе. В работе предлагается подход, основанный на совмещении «парадокса дружбы», используемого для оценки локальной значимости участников сети, и функции диспаритета, применяемого для отсеивания слабых связей на основе статистической значимости. Полученные результаты и их содержательная интерпретация позволяют глубже понять сложную структуру, скрытую за малой размерностью таких сетей.

Ключевые слова: модели экспорта и импорта; теория графов; сетевой анализ; индекс дружбы; функция диспаритета

Для цитирования: Печников А. А. Применение индекса дружбы и фильтра диспаритета для анализа мировой торговой сети // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 89–99. doi: 10.17076/mat2312

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. A. Pechnikov. ANALYSIS OF THE WORLD TRADE NETWORK USING THE FRIENDSHIP INDEX AND DISPARITY FILTER

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

Directed graphs and networks that have a small scale, high density, and a heavy-tailed distribution of edge weights are interesting research objects due to these specified characteristics. A prominent example of such networks is the World Trade Network of export-import flows between countries, whose density exceeds 90%. When analyzing a network, researchers typically rely on basic

characteristics traditionally used in graph theory and network analysis. This paper proposes an approach based on combining the “friendship paradox”, used to assess the local significance of network participants, with the disparity filter, applied to discard weak ties based on statistical significance. The obtained results and their substantive interpretation allow for a deeper understanding of the complex structure hidden behind the small dimensionality of such networks.

Keywords: export-import models; graph theory; network analysis; friendship index; disparity filter

For citation: Pechnikov A. A. Analysis of the world trade network using the friendship index and disparity filter. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 89–99. doi: 10.17076/mat2312

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ

Экспортно-импортные торговые потоки являются одними из ключевых объектов анализа в эмпирических исследованиях международной торговли, позволяющих количественно оценивать интенсивность двусторонних отношений и структурные свойства глобальной торговой системы в целом. Сетевой анализ и теория графов прочно вошли в инструментарий экономических исследований в России и за рубежом. Поскольку ключевые вопросы международной торговли, такие как экспорт и импорт, являются основным объектом анализа в данной статье, представим краткий обзор современных публикаций, посвященных применению этих методов.

Классической работой в области применения сетевого анализа и теории графов по изучению международной торговли считается статья [5]. Эта статья заложила методологическую основу для нового направления в экономических исследованиях, продемонстрировав силу сетевого подхода для понимания глобальных торговых взаимосвязей, их устойчивости и эволюции, что подтверждается ее активным цитированием в последующих работах.

В частности, в ней сформулировано определение Всемирной торговой сети (International Trade Network, ВТС) как композиции двух составляющих. Первая составляющая — это граф $G = G(V, L)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество вершин (стран), а L — множество дуг, то есть ориентированных связей (торговых потоков) между парами вершин, идущих от страны-экспортера i к стране-импортеру j в случае наличия такой экспортно-импортной операции. Вторая составляющая — это пара (W, P) , включающая дополнительную информацию о соответствующих характеристиках

вершин и связей между ними. Положительные элементы $w_{ij} \in W$ выступают в качестве диадных весов на G , модифицируя его исходную бинарную структуру и преобразуя простой направленный граф во взвешенный, где w_{ij} указывает на силу связи между страной i и страной j (например, объемы экспорта). Элементы $p_i \in P$, в свою очередь, включают специфические для страны значения (например, доход, население, географическое местоположение).

При анализе сети используются базовые характеристики, традиционно применяемые в теории графов и сетевом анализе: степень вершины, полустепени захода/исхода, коэффициент кластеризации, плотность графа. Для оценки положения вершины относительно ее окрестности или всей сети используются меры центральности по степени, близости и по посредничеству. Сетевой анализ применяется в сочетании с гравитационной моделью международной торговли [4], основанной на предположении, что величина взаимодействия участников пропорциональна произведению показателей их значимости (например, объему ВВП) и обратно пропорциональна расстоянию между ними. Результаты показывают, что глобальный уровень торговой интеграции продолжает расти, за исключением некоторых регионов, существует сильная неоднородность в выборе странами торговых партнеров, а члены Всемирной торговой организации связаны между собой теснее, чем остальной мир.

В работе [8] исследованы взаимосвязи между первыми 50 странами мира по объему экспорта с помощью программы для анализа социальных сетей Gephi. Сеть построена по данным Всемирного банка об экспортных потоках между странами за период 2010–2020 годов, что позволяет оценить долгосрочные тренды. Применены стандартные метрики сетево-

го анализа – центральность по степени, степени близости и посредничества, а также анализ модулярности для выявления сообществ. Исследование подтверждает, что глобальная торговая система остается высоко неоднородной и иерархической, но ее центр тяжести смещается в Азию.

В работе российских авторов с использованием сетевых методов проводится анализ структуры экспорта и импорта на примере рынка агропромышленных товаров для определения факторов, влияющих на торговые потоки между государствами, поскольку, как говорится в статье, «... статистический анализ мировых торговых отношений не всегда позволяет выявить все существенные аспекты сотрудничества» [1, с. 421]. В исследовании используются упомянутые ранее стандартные показатели с акцентом на определение важности вершин посредством центральностей. По данным Всемирного банка был построен и проанализирован граф для 10 наиболее крупных мировых экспортеров/импортеров сельскохозяйственной продукции и их 20 крупнейших партнеров по рынку агропромышленных товаров. Полученные характеристики центральности этого графа затем используются в регрессионной модели импорта. Подтверждено предположение о значимости показателя центральности по собственному вектору, демонстрирующего положение страны в мировой торговой сети.

Несколько иной подход с использованием теоретико-графовой модели международной торговли, рассмотренный в работе [2], позволяет решить задачу о том, каковы должны быть соотношения госбюджетов торгующих между собой стран, чтобы не было существенного дефицита торгового баланса каждой из стран-участниц. Определяется понятие структурной матрицы торговли A , где ее элементы a_{ij} – часть госбюджета, которую j -я страна тратит на закупки товаров i -й страны. С применением теории графов сформулирована и доказана теорема, позволяющая определить существование и единственность точного сбалансированного решения для общего случая неотрицательной структурной матрицы торговли (под сбалансированностью международной торговли понимается бездефицитность торгового бюджета каждого участника). Результат демонстрируется на условном примере для шести участников.

Сети международной торговли, вне зависимости от количества участников и принципов их объединения в одно исследуемое множество, имеют достаточно небольшие разме-

ры, хотя и могут обладать чертами сложных сетей (например, гетерогенностью) [13]. В данном случае содержательно гетерогенность сети подчеркивает как неравномерное распределение торговых партнеров, так и неравномерное распределение суммарных объемов экспорта и импорта по странам, что означает наличие большого количества слабых связей.

Для отсеивания слабых связей на основе статистической значимости, а не просто по абсолютному или относительному порогу, может быть использован фильтр диспаратета (disparity filter). Метод был предложен в работе [15], и в ней же получил название «фильтр диспаратета». Несколько ранее этими же авторами данный метод, еще не получивший своего названия, был применен в исследовании вопросов международной торговли [16], чтобы отсеять статистически незначимые связи и оставить только «каркас» (backbone) – наиболее важные для глобальной архитектуры торговые потоки. Основной вывод заключается в том, что глобальная торговая система, несмотря на свою кажущуюся плотность, на самом деле держится на небольшом количестве стратегически важных «магистралей» (highways), которые и образуют ее устойчивую архитектуру, а фильтр диспаратета – это инструмент, который позволяет объективно выявить указанные магистрали. В нашем исследовании мы будем использовать этот подход для удаления слабых связей при сохранении сильной связности сети.

Анализ публикаций показывает, что в современных исследованиях международных торговых сетей для определения важности вершин-участников преимущественно используются взвешенные расширения классических показателей центральности (влиятельность, близость, степень посредничества). Возможно, это связано с некоей «стандартизацией» – результаты сравнимы между разными исследованиями.

В нашем исследовании предлагается иной подход, основанный на так называемом парадоксе дружбы. Парадокс дружбы (англ. friendship paradox) – это явление, которое в 1991 году обнаружил социолог Scott L. Feld, изучая социальные сети, и которое состоит в том, что, как правило, у большинства людей друзей меньше, чем в среднем у их друзей [7]. Заметим, что это было еще до появления Facebook, ВКонтакте и им подобных, и поэтому термин «социальные сети» имел точное социологическое определение как устойчивая структура социальных отношений между отдельными индивидами или группами [3]. Ло-

кальным сетевым показателем, количественно оценивающим выполнение парадокса дружбы для отдельной вершины, является индекс дружбы (friendship index) как мера зависимости вершины от смежных с ней вершин. Применение индекса дружбы позволяет, с одной стороны, проверить выполнение парадокса дружбы для узлов сети, а с другой – интерпретировать его значение как характеристику относительной значимости вершины.

Материалы, изложенные в статье, представляют собой результаты решения двух задач с использованием реальных данных по экспорту-импорту – определения значимости вершин графа ВТС с использованием индекса дружбы и определения сообществ графа ВТС с применением фильтра диспаритета – с проведением сравнения с традиционными методами и содержательной интерпретацией результатов. Полученные результаты предлагают еще один подход к пониманию взаимосвязей в торговых сетях, что позволяет глубже изучить их сложную структуру, скрытую за малой размерностью таких сетей.

ГРАФ ВСЕМИРНОЙ ТОРГОВОЙ СЕТИ

Приведем описание используемой далее теоретико-графовой модели ВТС, в основном следуя работе [5] с адаптацией к нашим задачам.

Граф ВТС – это граф $G = (V, E, W)$, где

- V – множество вершин, соответствующих участникам внешнеторговых операций, $|V| = n$, идентификаторами вершин являются англоязычные названия участников в стандарте UN Comtrade [18] (USA, Russian Federation, Côte d'Ivoire, Türkiye),
- E – множество дуг (v_i, v_j) , то есть ориентированных связей (торговых потоков) между парами вершин, идущими от экспортера v_i к импортеру v_j в случае наличия такой экспортно-импортной операции, $|E| = m$,
- W – множество весов дуг, $w_{ij} \in W$ указывает на силу связи между v_i и v_j как объема экспорта.

Реальные данные получены с использованием базы данных Comtrade Организации Объединенных Наций (UN Comtrade Database, [18]), содержащей подробную глобальную годовую и ежемесячную статистику торговли в мире. За 2020 год найдено 236 участников экспортно-импортных торговых операций по всем категориям товаров (материальным продуктам), без учета услуг.

Выбор 2020 года в качестве анализируемого достаточно условен. Дополнительным фактором такого выбора является пандемия COVID-19, позволяющая посмотреть на адаптацию взвешенной ориентированной сети к экстремальному внешнему воздействию.

Заметим, что в UN Comtrade Database объектом статистики является «таможенная территория» (customs area), что для нашего исследования не имеет принципиального значения, поэтому мы для простоты будем говорить «страна». Результаты запросов к базе данных были сведены в таблицу, содержащую построчную информацию по экспорту за 2020 год в следующей форме:

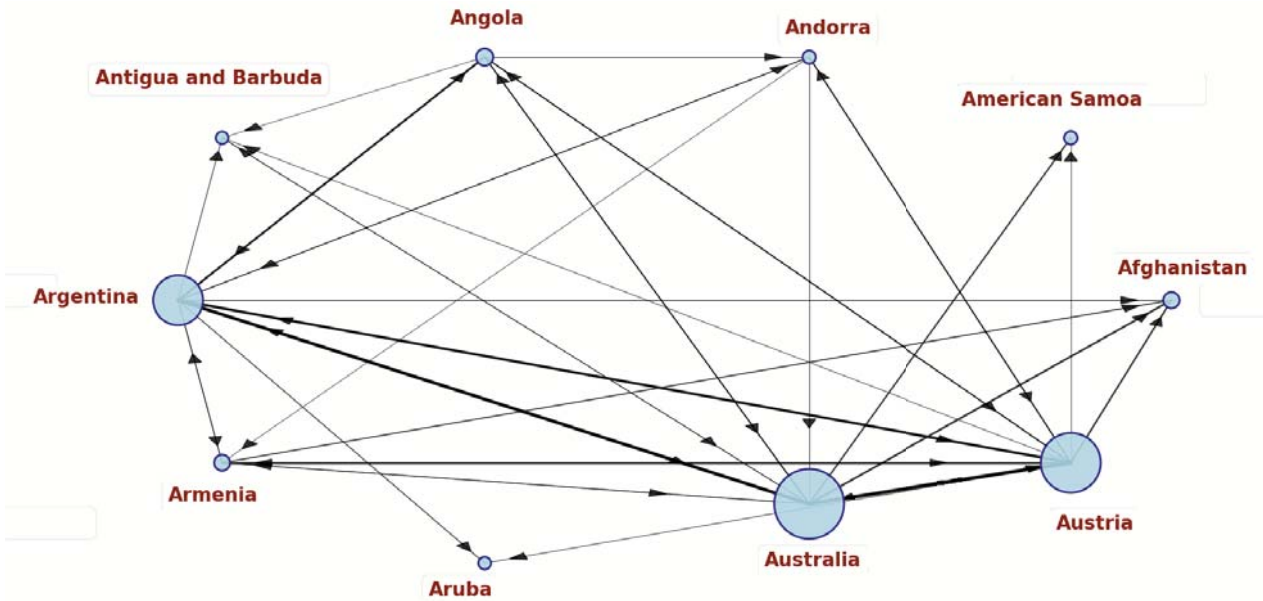
<страна-экспортер><страна-импортер><экспорт в млн US\$>

Граф ВТС, построенный по этим данным, содержит 236 вершин и 22 868 дуг. Он состоит из одной компоненты (слабой) связности и при этом содержит 70 «висячих» вершин, соответствующих 70 странам, которые только импортируют товары. Небольшой фрагмент графа для 10 первых по алфавиту стран из множества вершин V приведен на рисунке; здесь даже при наличии таких экзотических участников, как Антигуа и Барбуда и Аруба, обнаруживается высокая плотность 0,422.

Далее будет рассматриваться ориентированная версия парадокса дружбы, для которой требуется сильно связный граф, в котором каждая вершина имеет входящие и исходящие дуги [9], поэтому «висячие» вершины были удалены из графа G . Удаление 70 «висячих» вершин порождает граф $G_{166} = (V, E, W)$, у которого 166 вершин и 18 877 дуг. Граф обладает сильной связностью и высокой плотностью, равной 0,689, и является базовым объектом исследований.

ИНДЕКС ДРУЖБЫ И ФУНКЦИЯ ДИСПАРИТЕТА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ГРАФУ ВТС

Подход, основанный на использовании индекса дружбы и фильтра диспаритета, применительно к графам ВТС в кратком виде можно описать так. Индекс дружбы в данном случае рассматривается как показатель «значимости» вершин графа, дополняющий классические показатели (показатели центральности, Page Rank) и добавляющий к анализу структуры анализ качества связей. Фильтр диспаритета для графов, как уже было сказано, – это статистический метод для выделения значимого каркаса графа за счет отбрасывания несущественных связей. Совместное при-



Фрагмент графа, соответствующий реальной ВТС за 2020 год
 A fragment of the graph corresponding to the actual ITN for 2020

менение индекса дружбы и фильтра диспаритета позволяет выявлять наиболее значимые вершины не только на исходном графе, но и на его каркасе, выявляя, таким образом, устойчивое ядро, не зависящее от слабых связей.

В терминологии теории графов парадокс дружбы в своей первоначальной постановке утверждает, что в простом связном неориентированном графе средняя степень вершин, смежных с данной, не меньше, чем степень самой вершины. Равенство достигается только в случае, если в графе степени всех вершин равны [6]. Количественным показателем для измерения парадокса дружбы является индекс дружбы.

Процесс развития исследований парадокса дружбы от базовой постановки к его более общим формам, учитывающим веса ребер, ориентацию и произвольные атрибуты вершин, систематизирован в [6].

В работе [9] вместо термина «индекс дружбы» с учетом более общей постановки используется термин «отклонение дружбы» (friendship bias) $\Delta_i^{(r)}$, определяемое для вершины i и произвольного показателя центральности r как

$$\Delta_i^{(r)} = (1/d_i) \sum_{j \sim i} r_j - r_i, \quad (1)$$

где

- d_i – это исходящая степень вершины i ,
- $j \sim i$ – множество всех вершин j , смежных с вершиной i ,
- r_i – показатель центральности вершины i .

Используем формулу (1) как основу для вычисления индекса дружбы вершин графа ВТС с учетом того, что граф ВТС является взвешенным ориентированным графом, следовательно, надо учесть, какой индекс дружбы рассматривается – по импорту или по экспорту. Важным фактором является выбор показателя, используемого в качестве атрибутов вершин. В этой работе мы остановимся на взвешенной степени (weighted degree), которую принято включать в семейство показателей центральности, в особенности когда это касается ориентированных графов [14]. Учтем также, что этот показатель очень легко интерпретируется содержательно: исходящая степень – это суммарный экспорт страны, а входящая степень – ее суммарный импорт.

Введем следующие обозначения для формулы индекса дружбы по экспорту для графа $G = (V, E, W)$:

$\{1, 2, \dots, n\}$ – множество индексов (порядковых номеров), соответствующих странам множества V ,

Δ_i^{exp} – индекс дружбы по экспорту для i -й вершины,

\mathbb{W} – матрица смежности графа G , построенная по множеству весов дуг W ,

$w_{ij} \geq 0$ – вес дуги (i, j) (объем экспорта из страны i в страну j),

d_i^{out} – исходящая степень вершины i , вычисляемая по матрице E ,

$N^{out}(i)$ – множество конечных вершин для дуг, у которых начальной вершиной является i .

Тогда $r_i = \sum_{j \neq i} w_{ij}$ и формулу индекса дружбы по экспорту можно записать следующим образом:

$$\Delta_i^{exp} = 1/d_i^{out} \sum_{j \in N^{out}(i)} r_j - r_i.$$

Случай, когда $\Delta_i^{exp} < 0$, означает, что экспортная привлекательность страны i выше, чем средняя экспортная привлекательность стран, которые являются импортерами для i , и напротив, когда $\Delta_i^{exp} > 0$, страны, в которые она экспортирует, в среднем более привлекательны.

Формула для Δ_i^{exp} может быть записана по аналогии с учетом того, что рассматривается входящая степень d_i^{in} , суммарный импорт в качестве r_i и подмножество $N^{in}(i)$. Интерпретация в этом случае аналогична случаю с экспортом: отрицательное значение Δ_i^{imp} означает большую привлекательность страны i по импорту, и наоборот.

На примере графа G_{166} и его фрагмента можно было убедиться в такой особенности графа ВТС, как его высокая плотность. При этом распределение весов дуг крайне асимметрично с тяжелым хвостом: от наибольшего значения 452492,9 до минимального 0,000001 (в миллионах US\$).

Для того чтобы «проредить» очень плотные взвешенные ориентированные графы, естественным кажется задание некоего порога с последующим удалением всех дуг, веса которых ниже этого порога. Очевидным недостатком такого подхода является игнорирование относительной значимости дуги в контексте ее локального окружения, возможное удаление критически важных дуг для вершин малой инцидентности, а значит, потенциального разрушения иерархической организации графа.

Подход, основанный на фильтре диспаритета [15], для каждой вершины графа проверяет статистическую гипотезу о том, что веса ее инцидентных дуг распределены случайным образом. Нулевая гипотеза предполагает, что после выделения минимального ненулевого веса на каждую существующую дугу оставшийся суммарный вес вершины распределяется равномерно между всеми ее дугами. Для каждой дуги вычисляется р-значение – вероятность получить в рамках этой нулевой гипотезы вес, больший или равный наблюдаемому, по формуле

$$pvalue(i, j) = (1 - w_{ij}/s_i)^{k_i - 1},$$

где

- w_{ij} – вес дуги из вершины i в вершину j ,
- s_i – суммарный вес всех дуг, инцидентных вершине i (сила вершины),

- k_i – степень вершины i (количество инцидентных дуг).

Дуги со значением $pvalue$ выше заданного порога α считаются статистически незначимыми и удаляются. Выбор порога α во многом зависит от целей исследования: выделение ядра графа, очистка от явного «шума», сравнение структуры графа при разных значениях порога.

Фильтр диспаритета в работе [15] рассматривается применительно к неориентированным графам, а его расширение на ориентированные графы описано в приложении [17]. Здесь предлагается формировать каркас графа путем сохранения всех входящих и исходящих связей, которые превосходят порог значимости хотя бы для одной из двух вершин на концах дуг, с отбрасыванием остальных. Более жесткий критерий заключается в том, что порог значимости должен быть превзойден для обеих вершин.

Отличие мягкого и жесткого критериев заключается, в частности, в том, что в первом случае сохраняется ориентированная архитектура графа, а во втором сохраняются только взаимно значимые дуги, что сильно снижает асимметрию. В данной работе далее будет использоваться мягкий критерий, как сохраняющий связность при меньшем количестве дуг. При этом порог значимости задается пользователем из содержательных соображений и, по сути, представляет собой «порог фильтрации».

Опишем работу фильтра диспаритета в виде алгоритма в соответствии с подходом, изложенным в [17], использующего мягкий критерий сохранения дуг.

Исходные данные

1. Взвешенная матрица смежности ориентированного графа A размерности $n \times n$, где a_{ij} – вес дуги, $a_{ij} = 0$ означает отсутствие дуги, $a_{ii} = 0$ по определению.
2. Задаваемый пользователем порог фильтрации α ($0 < \alpha < 1$).

Шаг 1: Предварительный расчет локальных характеристик всех вершин

1. k_i^{out} – исходящая степень узла i ,
 $k_i^{out} := |\{j : a_{ij} > 0\}|$,
2. s_i^{out} – исходящая сила узла i , $s_i^{out} := \sum_{j=1}^n a_{ij}$,
3. k_i^{in} – входящая степень узла i ,
 $k_i^{in} := |\{j : a_{ji} > 0\}|$,
4. s_i^{in} – входящая сила узла i ,
 $s_i^{in} := \sum_{j=1}^n a_{ji}$.

Шаг 2: Расчет р-значений для каждой дуги

1. p_{ij}^{out} – значимость дуги со стороны вершины-источника i .

Если $k_i^{out} \leq 1$ или $s_i^{out} = 0$, то $p_{ij}^{out} := 1$,

иначе $p_{ij}^{out} := (1 - a_{ij}/s_i^{out})^{(k_i^{out}-1)}$.

2. p_{ij}^{in} – значимость дуги со стороны вершины-приемника j .

Если $k_j^{in} \leq 1$ или $s_j^{in} = 0$, то $p_{ij}^{in} := 1$,

иначе $p_{ij}^{in} := (1 - a_{ij}/s_j^{in})^{(k_j^{in}-1)}$.

Шаг 3: Применение мягкого критерия и сравнение с порогом α

Для каждой дуги (i, j) вычисляется p_{ij}^{gentle} по формуле $p_{ij}^{gentle} := \min(p_{ij}^{out}, p_{ij}^{in})$.

Для каждой дуги (i, j) : если $p_{ij}^{gentle} < \alpha$, то a_{ij} в матрице A сохраняется, иначе $a_{ij} := 0$.

Результат

По матрице A построена матрица $A^{backbone}$, являющаяся взвешенной матрицей смежности графа-каркаса исходного графа.

Алгоритмы вычисления индекса дружбы, фильтра диспаратета и использующихся далее классических мер центральности реализованы на языке Python (версия 3.8.2).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И АНАЛИЗ

В этом разделе приведен ряд характерных результатов более широкого исследования, де-

монстрирующих возможности применения индекса дружбы и функции диспаратета на примере графа ВТС.

Как говорилось ранее, базовым объектом исследования является граф $G_{166} = (V, E, W)$. Напомним некоторые его характеристики: 166 вершин, 18 877 дуг, крайне асимметричное распределение с тяжелым хвостом весов множества дуг, сильная связность, высокая плотность 0,689.

Для графа G_{166} были вычислены значения Page Rank, степени близости (closeness centrality) и индексов дружбы по экспорту и по импорту. В результате 32 вершины имеют значения Δ_i^{exp} и Δ_i^{imp} меньше нуля (причем это один и тот же список вершин, как для экспорта, так и для импорта). Это означает сильную иерархию торговой сети и соответствует выводу о том, что Всемирная торговая сеть — «... это сильно неоднородная структура, где небольшое число стран занимают центральное положение, тогда как подавляющее большинство стран остаются на периферии» [5, p. 1417].

В таблице для графа G_{166} приведены первые 15 наиболее значимых стран по каждому из показателей (названия стран в колонках PageRank и Closeness упорядочены по убыванию показателя, а в колонках Δ_{exp} и Δ_{imp} — по возрастанию).

Значения показателей важности для 15 стран
Importance indicator values for 15 countries

PageRank	Closeness	Δ_{exp}	Δ_{imp}
USA	China	China	China
China	Hong Kong SAR	USA	USA
Germany	Germany	Germany	Germany
United Kingdom	USA	Japan	Japan
France	Japan	Netherlands	Netherlands
Netherlands	Rep. of Korea	Hong Kong SAR	Hong Kong SAR
Canada	Mexico	Rep. of Korea	Italy
Italy	Canada	Italy	Rep. of Korea
Japan	Australia	France	France
Hong Kong SAR	Netherlands	Canada	Mexico
Mexico	Brazil	United Kingdom	Canada
Belgium	Switzerland	Mexico	United Kingdom
Switzerland	France	Singapore	Singapore
India	Poland	Russian Federation	Russian Federation
Spain	Italy	Switzerland	Switzerland

Один из первых моментов в таблице, бросающихся в глаза читателю, не посвященному глубоко в проблемы мировой торговли, заключается в наличии такого субъекта, как

Hong Kong SAR (Специальный административный район Гонконг). Изучение публикаций подтверждает правильность результата: Гонконг является, говоря по-простому, перевалоч-

ным хабом для Китая [10], 90 % экспорта Гонконга – это реэкспорт, а не то, что производится здесь. Заметим также, что Гонконг стоит в рейтинге Closeness выше, чем США, и возможное объяснение этому факту заключается как в связях с Китаем, так и в географии – это центр Восточной Азии, быстрорастущего региона.

Три страны – Китай, США и Германия – находятся в первой четверке по всем четырем показателям. В терминах случайного блуждания по сети высокий рейтинг Page Rank можно интерпретировать как указание на страны, «где деньги оседают», степень близости показывает, насколько сложно или легко стране проводить экспортно-импортные операции в рамках торговой сети, а индексы дружбы показывают относительное положение среди ближайших соседей по этим операциям. Следовательно, можно сделать вывод о том, что Китай, США и Германия – глобальные лидеры, которые доминируют и локально, что соответствует [19, p. 58].

Как уже сказано, Всемирная торговая сеть – это очень неоднородная структура. Поэтому на следующем шаге исследования было сформировано множество, содержащее 71 страну, каждая из которых имеет суммарный внешнеторговый оборот за 2020 год больше 30 млрд \$. На долю этих стран приходится 94 % глобального экспорта и импорта, образуя, таким образом, ядро мировой торговой сети. Граф G_{71} , построенный из графа G_{166} путем удаления остальных 95 вершин, не вошедших в ядро, и смежных с ними дуг, содержит 4917 дуг, состоит из одной компоненты сильной связности и имеет очень высокую плотность 0,989.

Для графа G_{71} также были вычислены показатели PageRank, Closeness и индексов дружбы по экспорту и по импорту. Теперь в графе G_{71} уже только 22 вершины имеют значения Δ_i^{exp} и Δ_i^{imp} меньше нуля (опять-таки это один и тот же список вершин как для экспорта, так и для импорта).

Если построить таблицу, аналогичную представленной в этой работе, то самое существенное изменение, которое произошло, заключается в том, что Германия по Closeness, Δ_{exp} и Δ_{imp} поднялась на вторые позиции, оставшись на третьей по PageRank. Позиции по PageRank понятны – уход небольших по экспорту/импорту стран не повлиял на глобальную привлекательность. Рост показателя близости говорит о том, что в G_{71} у Германии исчезли длинные цепочки связей, а на рост показателей индексов дружбы повлиял уход

небольших по экспорту/импорту стран, которые тянули средний показатель вниз.

Несмотря на то что страны, вошедшие в качестве вершин в граф G_{71} , имеют значительные показатели суммарного экспортно-импортного оборота, это не избавило граф от очень большой разницы в весах дуг: от наибольшего значения 452492,9 (как и ранее) до минимального 0,00028 (в миллионах \$). Минимальное значение по сравнению с графом G_{166} выросло в 280 раз, но остается в миллиарды раз меньше максимального.

Применим функцию диспаратета к графу G_{71} в попытке оставить только те дуги, которые действительно важны для функционирования системы. Вначале было найдено минимальное пороговое значение $\alpha = 0,00018$, сохраняющее сильную связность графа. Такое низкое значение α говорит о том, что сохранившиеся дуги должны быть доминирующими для одного из своих концов, то есть это связи, через которые проходит почти весь экспорт (или импорт) для этой вершины. Граф, полученный при этом значении α , назовем каркасом графа G_{71} и обозначим $G_{71}^{backbone}$.

В графе $G_{71}^{backbone}$ при 71 вершине и сохранении сильной связности осталось всего 227 дуг (плотность 0,046). Вычисление показателей PageRank, Closeness, Δ_{exp} и Δ_{imp} оставляет трех прежних лидеров – Китай, США и Германию – по всем показателям, кроме близости. По показателю Closeness Китай остался безусловным лидером, в то время как Германия опустилась на 7-е место, а США на 12-е.

Вполне возможно, что такой результат может быть объяснен объективной экономической остановкой, вызванной пандемией: Китай остался лидером, потому что он был единственным крупным игроком, который в 2020 году работал «как обычно», в отличие от США и Германии (но это утверждение требует дополнительных исследований).

Задачи нахождения сообществ в ориентированных графах с очень высокой плотностью, как в случае с графом ВТС, имеют большое значение для выявления блоков наиболее интенсивно торгующих стран. Известный алгоритм Лихта–Ньюмана (Leicht–Newman) нахождения сообществ в ориентированном графе [11] как обобщение на взвешенные графы реализован в библиотеке Python в виде функции nx.modularity [12], которую мы используем далее. Здесь для оценки качества разбиения на сообщества используется мера модулярности Q , учитывающая общую сумму весов в графе и каждом сообществе.

Считается, что $0,2 \leq Q \leq 0,3$ означает приемлемое значение для выявления сообществ, а $0,3 < Q \leq 0,5$ – выявление значимой структуры сообществ.

Известно, что в очень плотных графах выделение сообществ часто не дает содержательных результатов, поскольку модулярность таких графов невысока. Поэтому мы провели эксперимент с уже известными нам сильно связными графами G_{71} и $G_{71}^{backbone}$, то есть с очень плотным графом и графом с очень низкой плотностью, полученным из первого с использованием функции диспаритета.

В первом случае Q равно 0,283, а во втором 0,443, то есть в графе $G_{71}^{backbone}$ выявлена значимая структура сообществ. Некоторые результаты и их возможная содержательная интерпретация показывают перспективность такого подхода.

В графе G_{71} получены пять сообществ; перечислим их, присвоив каждому достаточно условное название:

«Европейское торговое ядро с расширением» (ЕТЯР, 28 стран): 22 страны ЕС (Австрия, Бельгия, Болгария, Хорватия, Чехия, Дания, Финляндия, Франция, Германия, Греция, Венгрия, Ирландия, Италия, Люксембург, Нидерланды, Польша, Португалия, Румыния, Словакия, Словения, Испания, Швеция), 2 страны – кандидаты в ЕС (Турция, Сербия), 3 европейских страны не ЕС (Норвегия, Швейцария, Великобритания) и Марокко;

«Азиатско-Тихоокеанское ядро с расширением» (АТЯР, 24 страны): Азия, 16 стран (Камбоджа, Китай, Гонконг, Индия, Индонезия, Иран, Япония, Малайзия, Мьянма, Пакистан, Филиппины, Катар, Корея, Сингапур, Таиланд, Вьетнам), Латинская Америка, 4 страны (Аргентина, Бразилия, Чили, Перу), Океания, 2 страны (Австралия, Новая Зеландия), Африка, 2 страны (Нигерия, ЮАР);

«Постсоветское пространство» (7 стран): Беларусь, Казахстан, Латвия, Литва, Россия, Украина и Эстония;

«Американский континент и Израиль» (7 стран): Израиль, Канада, Колумбия, Мексика, Панама, США и Эквадор;

«Страны Аравийского полуострова и Египет» (5 стран): Египет, Кувейт, ОАЭ, Оман, Саудовская Аравия.

В графе $G_{71}^{backbone}$ шесть сообществ (26, 25, 9, 5, 4 и 2 участника), их условные названия сохранились с некоторыми количественными изменениями и добавилось сообщество «Балтия» из двух стран, о чем речь пойдет ниже.

В графе $G_{71}^{backbone}$ из 28 стран ЕТЯР Ирландия и Великобритания ушли в «Американский

континент и Израиль». Марокко же устойчиво присутствует в обоих вариантах ЕТЯР – ее связи с Европой сильны настолько, что не зависят от порога отсека.

В графе $G_{71}^{backbone}$ к АТЯР добавился Египет, из чего следует, что сообщества при удалении слабых связей могут и прирастать, а не только сжиматься. Возможно, Египет – пример страны, реальная торговая ориентация которой на Азию и БРИКС была скрыта за формальными слабыми связями с арабским миром и Европой.

Приведем пример уменьшения сообщества. Сообщество «Постсоветское пространство» в графе G_{71} показывает, что торговые связи разрушить сложнее, чем политические, а география и инфраструктура все еще работали в 2020 году.

Но в графе $G_{71}^{backbone}$ происходит разделение на два сообщества: Латвию и Литву («Балтия») и Беларусь, Казахстан, Россию, Украину и Эстонию в «Постсоветском пространстве». Возможное объяснение: Латвия и Литва имеют сильные торговые связи между собой, превосходящие связи с Европой и Россией, в то время как у Эстонии в 2020 году осталось больше «сильных» постсоветских связей благодаря транзиту и логистике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ориентированные графы и сети, имеющие небольшой масштаб, высокую плотность и распределение весов дуг с тяжелым хвостом, являются интересными объектами исследований в силу указанных особенностей. В статье предлагается подход для исследования таких сетей, основанный на совмещении индекса дружбы, используемого для оценки локальной значимости участников сети, и функции диспаритета, применяемой для отсеивания слабых связей. Подход демонстрируется на примере Всемирной торговой сети экспортно-импортных потоков между странами в 2020 году, для которой построены несколько графов.

Начальный граф с 236 участниками экспортно-импортных операций построен по данным базы данных Comtrade Организации Объединенных Наций и содержит 22 868 дуг. Граф является связным, но не сильно связным, поскольку содержит 70 «висячих» вершин, соответствующих странам, которые только импортируют товары.

Удаление 70 «висячих» вершин порождает граф, у которого 166 вершин и 18 877 дуг, обладающий сильной связностью и высокой плотностью, равной 0,689.

Далее в базовом графе были оставлены только те вершины (и связывающие их дуги), у которых суммарный годовой торговый оборот был больше 30 млрд\$. В этом графе содержится 71 вершина и 4917 дуг, он сильно связанный с плотностью 0,989.

Применение функции диспаратета с целью «очистки» графа от «слабых» дуг при сохранении его сильной связности порождает граф-каркас, содержащий 71 вершину и 227 дуг (плотность 0,046).

Далее для трех графов (графов с 166 и 71 вершинами и графа-каркаса) были вычислены показатели значимости: PageRank, Closeness centrality и индексы дружбы по экспорту и по импорту.

Ожидаемый результат заключается в том, что для первых двух графов Китай, США и Германия являются глобальными лидерами (по PageRank, Closeness centrality), которые доминируют и локально (по индексам дружбы) во всех трех случаях. Менее ожидаемый результат – очень высокие места Гонконга, в некоторых случаях обходящего Германию, что находит содержательное объяснение. При этом Германия по индексам дружбы во втором графе поднимается на вторые позиции в мире. В графе-каркасе по индексам дружбы сохраняется лидерство Китая, США и Германии, а вот по показателю близости Германия и США значительно теряют позиции.

Таким образом, индексы дружбы представляют собой устойчивые показатели значимости стран-вершин, стабильные для лидеров во всех трех графах.

Кроме того, для графа с 71 вершиной и его графа-каркаса были построены разбиения на сообщества и проведен их сравнительный анализ с попытками содержательной интерпретации. В статье в качестве характерных примеров приведены три сообщества («Европейское торговое ядро с расширением», «Азиатско-Тихоокеанское ядро с расширением» и «Постсоветское пространство»). Один из значимых результатов заключается в том, что при уменьшении плотности графа с сохранением «сильных» дуг сообщества могут не только уменьшаться, но и увеличиваться. Интересны также варианты переходов стран из одних крупных сообществ в другие и сохранение экономических связей при разрушении политических.

Полученные результаты и их содержательная интерпретация позволяют глубже понять сложную структуру, скрытую за малой размерностью таких сетей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапинова С. А., Анчикина А. И., Ошарин А. М. Анализ структур экспорта и импорта с использованием сетевых методов (на примере рынка агропромышленных товаров) // Вестник Санкт-Петербургского университета. Экономика. 2020. Т. 36, вып. 3. С. 421–454. doi: 10.21638/spbu05.2020.304
2. Медведева Т. А. Алгоритмы теории графов в модели международной торговли // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2010. Т. 10, № 6. С. 838–843.
3. Сушко В. А. Метод социометрии и анализ социальных сетей. М.: ИД КДУ, 2017. 310 с.
4. Anderson J. E., van Wincoop E. Gravity with Gravitas: a solution to the border puzzle // Am. Econ. Rev. 2003. Vol. 93, no. 1. P. 170–192. doi: 10.1257/00028280321455214
5. De Benedictis L., Tajoli L. The World Trade Network // The World Economy. 2011. Vol. 34, iss. 8. P. 1417–1454. doi: 10.1111/j.1467-9701.2011.01360.x
6. Evtushenko A., Kleinberg J. A comprehensive generalization of the Friendship Paradox to weights and attributes // Sci. Rep. 2024. Vol. 14. Art. 13730. doi: 10.1038/s41598-024-63167-9
7. Feld S. L. Why your friends have more friends than you do // Am. J. Sociol. 1991. Vol. 96, no. 6. P. 1464–1477.
8. Gönçer-Demiral D., İnce-Yenilmez M. Network analysis of international export pattern // Social Network Analysis and Mining. 2022. Vol. 12, iss. 1. Art. 156. doi: 10.21203/rs.3.rs-1538734/v1
9. Hazra R. S., Verbitskiy E. The generalized Friendship Paradox for spectral centralities. arXiv preprint. 2026. URL: <https://arXiv:2507.13059> (дата обращения: 02.02.2026).
10. Hong Kong SAR Ranks 10th Globally in Terms of Connectedness. URL: <https://www.dhl.com/hken/home/press/press-archive/2024/hong-kong-sar-ranks-10th-globally-in-terms-of-connectedness-reveals-dhl-global-connectedness-report-2024.html> (дата обращения: 02.02.2026).
11. Leicht E. A., Newman M. E. J. Community structure in directed networks // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100, no. 11. Art. 118703. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.118703
12. Modularity. URL: <https://networkx.org/documentation/networkx-2.8.4/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.community.quality.modularity.html> (дата обращения: 16.02.2026).
13. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks // SIAM Rev. 2003. Vol. 45, iss. 2. P. 167–256. doi: 10.1137/S003614450342480
14. Savić M., Ivanović M., Jain L. C. Complex networks in software, knowledge, and social systems. Cham, Switzerland: Springer, 2019. 331 p. doi: 10.1007/978-3-319-91196-0

15. Serrano M. Á., Boguñá M., Vespignani A. Extracting the multiscale backbone of complex weighted networks // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2009. Vol. 106, no. 16. P. 6483–6488. doi: 10.1073/pnas.0808904106

16. Serrano M. Á., Boguñá M., Vespignani A. Patterns of dominant flows in the world trade web // J. Econ. Interact. Coord. 2007. Vol. 2. P. 111–124. doi: 10.1007/s11403-007-0026-y

17. Serrano M. Á., Boguñá M., Vespignani A. Supporting information. URL: http://www.pnas.org/cgi/data/0808904106/DCSupplemental/SI_Appendix (дата обращения: 06.02.2026).

18. Trade Data. URL: <https://comtradeplus.un.org/TradeFlow> (дата обращения: 02.02.2026)

19. World Trade Statistical Review 2021. URL: https://www.wto.org/english/res_e/statis_e/wts2021_e/wts2021_e.pdf (дата обращения: 02.02.2026).

REFERENCES

1. Lapinova S. A., Anikina A. I., Osharin A. M. Analysis of export and import structures using network methods (using the example of the agro-industrial goods market). *Vestnik Sankt-Petersburgskogo Universiteta. Ekonomika = St. Petersburg University Journal of Economic Studies*. 2020;36(3):421–454. doi: 10.21638/spbu05.2020.304 (In Russ.)

2. Medvedeva T. A. Graph theory algorithms in the International Trade model. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2010;10(6):838–843. (In Russ.)

3. Sushko V. A. Sociometry method and social network analysis. Moscow: KDU Publ. House; 2017. 310 p. (In Russ.)

4. Anderson J. E., van Wincoop E. Gravity with Gravitas: a solution to the border puzzle. *Am. Econ. Rev.* 2003;93(1):170–192. doi: 10.1257/000282803321455214

5. De Benedictis L., Tajoli L. The World Trade Network. *The World Economy*. 2011;34(8):1417–1454. doi: 10.1111/j.1467-9701.2011.01360.x

6. Evtushenko A., Kleinberg J. A comprehensive generalization of the Friendship Paradox to weights and attributes. *Sci. Rep.* 2024;14:13730. doi: 10.1038/s41598-024-63167-9

7. Feld S. L. Why your friends have more friends than you do. *Am. J. Sociol.* 1991;96(6):1464–1477.

8. Gönçer-Demiral D., İnce-Yenilmez M. Network analysis of international export pattern. *Social Network Analysis and Mining*. 2022;12(1):156. doi: 10.21203/rs.3.rs-1538734/v1

9. Hazra R. S., Verbitskiy E. The generalized Friendship Paradox for spectral centralities. arXiv preprint. 2026. URL: <https://arXiv:2507.13059> (accessed: 02.02.2026).

10. Hong Kong SAR Ranks 10th Globally in Terms of Connectedness. URL: <https://www.dhl.com/hk-en/home/press/press-archive/2024/hong-kong-sar-ranks-10th-globally-in-terms-of-connectedness-reveals-dhl-global-connectedness-report-2024.html> (accessed: 02.02.2026).

11. Leicht E. A., Newman M. E. J. Community structure in directed networks. *Phys. Rev. Lett.* 2008;100(11):118703. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.118703

12. Modularity. URL: <https://networkx.org/documentation/networkx-2.8.4/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.community.quality.modularity.html> (accessed: 16.02.2026).

13. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev.* 2003;45(2):167–256. doi: 10.1137/S003614450342480

14. Savić M., Ivanović M., Jain L. C. Complex networks in software, knowledge, and social systems. Cham, Switzerland: Springer; 2019. 331 p. doi: 10.1007/978-3-319-91196-0

15. Serrano M. Á., Boguñá M., Vespignani A. Extracting the multiscale backbone of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2009;106(16):6483–6488. doi: 10.1073/pnas.0808904106

16. Serrano M. Á., Boguñá M., Vespignani A. Patterns of dominant flows in the world trade web. *J. Econ. Interact. Coord.* 2007;2:111–124. doi: 10.1007/s11403-007-0026-y

17. Serrano M. Á., Boguñá M., Vespignani A. Supporting information. URL: http://www.pnas.org/cgi/data/0808904106/DCSupplemental/SI_Appendix (accessed: 06.02.2026).

18. TradeData. URL: <https://comtradeplus.un.org/TradeFlow> (accessed: 02.02.2026)

19. World Trade Statistical Review 2021. URL: https://www.wto.org/english/res_e/statis_e/wts2021_e/wts2021_e.pdf (accessed: 02.02.2026).

Поступила в редакцию / received: 18.02.2026; принята к публикации / accepted: 18.05.2026.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Печников Андрей Анатольевич

д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник
e-mail: pechnikov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Pechnikov, Andrey

Dr. Sci. (Tech.), Leading Researcher