

УДК 519.214.4+519.214.8

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЧИСЛА ДЕРЕВЬЕВ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА В ЛЕСЕ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматриваются леса Гальтона–Ватсона, порожденные однородным критическим ветвящимся процессом с N начальными частицами, в котором число прямых потомков каждой частицы является случайной величиной ξ с распределением

$$p_k = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in (2, 3),$$

где $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Предполагается, что число некорневых вершин случайного леса равно n . Пусть μ_r – число деревьев с r вершинами. Доказаны теоремы о скорости сходимости распределений μ_r к нормальному закону при $N, n, r \rightarrow \infty$ и $n/N \leq C < \infty$.

Ключевые слова: лес Гальтона–Ватсона; объем дерева; предельные теоремы; скорость сходимости; число деревьев заданного объема

Для цитирования: Павлов Ю. Л. О скорости сходимости к нормальному закону распределений числа деревьев заданного объема в лесе Гальтона–Ватсона // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 82–88. doi: 10.17076/mat2302

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Yu. L. Pavlov. ON THE RATE OF NORMAL APPROXIMATION FOR THE DISTRIBUTION OF THE NUMBER OF TREES OF A GIVEN SIZE IN A GALTON – WATSON FOREST

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

The article studies Galton–Watson forests formed by a critical branching process starting with N particles. It is assumed that the total number of descendants of the initial particles is n until the process extinction. The number of offspings of each particle has the distribution

$$p_k = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in (2, 3),$$

where the function $h(x)$ is slowly varying at infinity. Let μ_r be the number of trees with r vertices. Theorems are proven for the rate of convergence of μ_r distributions to the normal law if $N, n, r \rightarrow \infty$ and $n/N \leq C < \infty$.

Key words: Galton–Watson forest; tree size; limit theorems; rate of convergence; number of trees of a given size

For citation: Pavlov Yu. L. On the rate of normal approximation for the distribution of the number of trees of a given size in a Galton–Watson forest. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 82–88. doi: 10.17076/mat2302

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ

В статьях [3, 4] рассматривались случайные леса Гальтона–Ватсона с N упорядоченными корневыми деревьями и n некорневыми вершинами. Предполагалось, что такие леса образованы начинающимися с N частиц критическими ветвящимися процессами, в которых случайная величина ξ , равная числу непосредственных потомков любой частицы, имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad (1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, \tau \in (2, 3)$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Пусть G – такой ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона. Генерируемому им случайному лесу соответствует множество траекторий процесса G , в которых число всех потомков начальных частиц равно n , а распределение вероятностей на этом множестве естественным образом индуцируется процессом G . В [4] также кратко сообщается о причинах интереса к ветвящимся процессам вида G и к образуемым ими лесам Гальтона–Ватсона. Там же даны ссылки на литературу, более подробно освещающую это направление исследований.

Поскольку процесс G критический, справедливо равенство

$$\mathbf{E}\xi = 1. \quad (2)$$

Объемом дерева случайного леса называется число его вершин, включая корень. В [4] изучалось предельное поведение случайных величин μ_r , равных числам деревьев леса объема r при всех возможных соотношениях между стремящимися к бесконечности параметрами N и n . При этом рассматривался также и случай $r \rightarrow \infty$. В частности, были найдены предельные распределения μ_r , когда $n/N \leq$

$C < \infty$. Техника доказательств теорем статьи [4] и настоящей статьи в значительной степени опирается на использование свойств сопровождающего G вспомогательного ветвящегося процесса $G(\lambda)$. Для того чтобы описать процесс $G(\lambda)$, введем случайную величину $\xi(\lambda)$, имеющую распределение

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi(\lambda) = k\} = \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $0 < \lambda < 1$ и

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \lambda^k. \quad (4)$$

Введем ветвящийся процесс $G(\lambda)$, отличающийся от G только тем, что число прямых потомков каждой частицы процесса $G(\lambda)$ имеет распределение (3), а не (1), как в G . В качестве значения параметра λ распределения (3) используется единственное решение уравнения

$$m = \mathbf{E}\xi(\lambda) = \frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N+n}. \quad (5)$$

Процесс $G(\lambda)$, как и G , распадается на N независимых начинающихся с одной частицы подпроцессов $G_1(\lambda), \dots, G_N(\lambda)$. Обозначим $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(N)}$ независимые одинаково распределенные случайные величины, равные числам частиц, существовавших в подпроцессах $G_1(\lambda), \dots, G_N(\lambda)$ соответственно до их вырождения. Иногда будет удобнее вместо $\nu^{(1)}$ писать ν без указания верхнего индекса. Пусть $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi(\lambda)$, $a = \mathbf{E}\nu$, $b^2 = \mathbf{D}\nu$. В [4, формулы (2.7)] показано, что

$$a = \frac{1}{1-m}, \quad b^2 = \frac{\sigma^2}{(1-m)^3}. \quad (6)$$

Обозначим

$$q_k = \mathbf{P}\{\nu = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

и пусть

$$\sigma_{rr}^2 = q_r \left(1 - q_r - \frac{(a-r)^2}{b^2} q_r \right). \quad (8)$$

Следующие две теоремы доказаны в [4, теоремы 1, 2]. В них установлена локальная сходимость распределений μ_r к предельным законам в случае $r \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$ и выполнено одно из следующих условий.

1. $n/N \rightarrow 0, \quad n^2/N \rightarrow \infty, \quad Nq_r \rightarrow \infty.$
2. $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty, \quad r = o(\ln N).$

Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Nq_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$ так, что $n/N \leq C_2 < \infty$. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $u_r = (k - Nq_r)/\sqrt{Nq_r}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{k!} (Nq_r)^k \exp\{-Nq_r\} (1 + o(1)).$$

Из теорем 1 и 2 следует, что в некоторых случаях распределения μ_r одновременно сближаются с нормальным и с пуассоновским распределениями. В таких случаях имеет смысл оценить близость распределений μ_r к предельным законам, то есть найти скорость сходимости. Это позволит выяснить, какое из предельных распределений и при каких условиях осуществляет более точную аппроксимацию.

Целью настоящей статьи является оценка скорости локальной сходимости распределений μ_r к нормальному закону в условиях теорем 1 и 2. Статья состоит из четырех разделов. В следующем разделе формулируется основной результат в виде теоремы 3. В третьем разделе приводятся вспомогательные утверждения (леммы 2–6), с помощью которых в последнем разделе доказывается теорема 3. Символы C_1, C_2, \dots означают некоторые положительные постоянные.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Прежде чем сформулировать теорему 3, являющуюся основным результатом статьи, представим несколько соотношений в надежде, что они позволят читателю лучше понять условия и утверждение этой теоремы. Сначала приведем следующую лемму, представляющую собой часть леммы 2 из статьи [4].

Лемма 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$,
то $0 < C_3 \leq \lambda \leq C_4 < 1$.
2. Если $n/N \rightarrow 0$,
то $\lambda = \frac{np_0}{Np_1} (1 + o(1))$.

Из (4), (5) и леммы 1 нетрудно получить, что функция $\lambda/F(\lambda)$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ монотонно возрастает от 0 до 1, поэтому если $n/N \leq C_2 < \infty$, то

$$\frac{\lambda}{F(\lambda)} \leq C_5 < 1. \quad (9)$$

Из (7), формул (5.6), (5.7), (5.15), (5.17) статьи [4] и простейших свойств медленно меняющихся функций вытекает, что при достаточно больших r и сколь угодно малых $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{\tau/(\tau-1)+\delta}} \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^{r-1} &\leq q_r \\ &\leq \frac{1}{r^{\tau/(\tau-1)-\delta}} \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^{r-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) позволяют оценить, при каких соотношениях между стремящимися к бесконечности N, n, r выполнено условие

$$Nq_r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Рассмотрим поведение дисперсии b^2 . Предположим, что $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$. Тогда из (3)–(6) и первого утверждения леммы 1 следует, что

$$0 < C_6 \leq b^2 \leq C_7 < \infty. \quad (12)$$

Пусть теперь $n/N \rightarrow 0$. Тогда из (3)–(6) и второго утверждения леммы 1 находим, что

$$b^2 \asymp \frac{n}{N}. \quad (13)$$

Из (9), (10) очевидным образом следует, что если $r \rightarrow \infty$, то

$$q_r \rightarrow 0, \quad r^2 q_r \rightarrow 0. \quad (14)$$

Отсюда и из (8), (12) находим, что если $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, то при $r \rightarrow \infty$

$$\sigma_{rr}^2 \sim q_r. \quad (15)$$

Пусть $n/N \rightarrow 0$. Из утверждения 2 леммы 1, (10) и (13) видим, что при любом фиксированном $k > 0$ и любом $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \frac{r^k q_r}{b^2} &\leq C_8 r^{k-\tau/(\tau-1)+\delta} \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)} \right)^{r-2} \\ &= C_8 \exp \left\{ (r-2) \ln \left(\frac{\lambda}{F(\lambda)} \right) \right. \\ &\times \left. \left(1 + \left(k - \frac{\tau}{\tau-1} + \delta \right) \frac{\ln r}{(r-2) \ln(\lambda/F(\lambda))} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что последнее выражение стремится к нулю, поэтому

$$\frac{r^k q_r}{b^2} \rightarrow 0 \quad (16)$$

и из (8) опять получаем (15).

Обозначим

$$v_r = \frac{k - Nq_r}{\sqrt{Nq_r}}.$$

Учитывая (15), нетрудно получить, что утверждение теоремы 1 можно изложить следующим образом. Для целых неотрицательных k равномерно относительно v_r в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Nq_r}} e^{-v_r^2/2}.$$

Теперь сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$ так, что $n/N \leq C_2 < \infty$, $n^3/N^2 \rightarrow \infty$ и выполнено условие (11). Пусть также

$$v_r = \frac{k - Nq_r}{\sqrt{Nq_r}} = O(1). \quad (17)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Nq_r}} e^{-v_r^2/2} \\ &\times \left(1 + \frac{3v_r - v_r^3}{6\sqrt{Nq_r}} + \frac{r^2 q_r}{2b^2} (1 - v_r^2) \right. \\ &\left. + O\left(\frac{Nr q_r}{n} + \frac{N}{n^{3/2}} + \frac{1}{Nq_r} \right) \right). \end{aligned}$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем вспомогательные независимые случайные величины $\nu_r^{(1)}, \dots, \nu_r^{(N)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\nu_r^{(i)} = k\} = \mathbf{P}\{\nu^{(i)} = k | \nu^{(i)} \neq r\}, \quad (18)$$

где $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $\nu_N = \nu^{(1)} + \dots + \nu^{(N)}$, $\zeta_S^{(r)} = \nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(S)}$, где $S \leq N$. В основе доказательства теоремы 1 лежит следующая лемма [4, лемма 1].

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} &= \binom{N}{k} q_r^k (1 - q_r)^{N-k} \\ &\times \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = N + n - kr\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}}. \end{aligned}$$

В [4, лемма 3] показано, что распределения сумм $(\nu_N - Na)/(b\sqrt{N})$ слабо сходятся к стандартному нормальному закону. Поскольку, в силу (5), параметр λ распределения (3) зависит от растущих N и n , суммы ν_N образуют схемы серий. В работе [2] найдены условия, при выполнении которых из слабой сходимости распределений серий сумм независимых решетчатых случайных величин к нормальному закону следует локальная сходимость. Поэтому в [4] соответствующее доказательство для ν_N было проведено путем проверки найденных в [2] условий. Задача оценки скорости локальной сходимости к нормальному закону распределений серий сумм решалась в теореме 5 статьи [2]. Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, введем обозначение:

$$H(\nu) = \inf_{1/4 \leq d \leq 1/2} H(\nu, d), \quad (19)$$

где

$$H(\nu, d) = \mathbf{E}\langle \nu^* d \rangle,$$

ν^* означает симметризованную случайную величину ν , $\langle x \rangle$ – расстояние от x до ближайшего целого числа.

Поскольку локальная теорема для ν_N в условиях теоремы 1 доказана [4, лемма 4], из [2, теорема 5 и следствие из нее] вытекает такое уточнение этого результата.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $u = (l - N - n)/(b\sqrt{N})$. Тогда для натуральных l

$$\left| \mathbf{P}\{\nu_N = l\} - \frac{1}{b\sqrt{2\pi N}} e^{-u^2/2} \right| \leq \Delta,$$

где

$$\Delta \leq C_9 \frac{\mathbf{E}\nu^3}{Nb^2 H(\nu)}.$$

В [4, равенство (5.7)] показано, что

$$q_r = \frac{\lambda^{r-1}}{rF^r(\lambda)} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_r = r-1\},$$

где $r = 1, 2, \dots$, а ξ_1, \dots, ξ_r – независимые одинаково распределенные по закону (1) случайные величины. Отсюда, из (5) и леммы 1 следует, что если $n/N \leq C_2 < \infty$, то

$$0 < C_{10} \leq \mathbf{E}\nu^3 \leq C_{11} < \infty. \quad (20)$$

Рассмотрим $H(\nu)$. Согласно лемме 1 из [2],

$$D(\nu, d) \leq H(\nu, d) \leq 4D(\nu, d), \quad (21)$$

где

$$D(\nu, d) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbf{E}\langle(\nu - a)d\rangle^2.$$

Расстояние от $(\nu - a)d$ до ближайшего целого при любых a и d не превосходит единицы. Следовательно,

$$D(\nu, d) \leq 1. \quad (22)$$

В лемме 2 [2] доказано, что при $1/4 \leq d \leq 1/2$

$$D(\nu, d) \geq \frac{d^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \min\{\mathbf{P}\{\nu = k\}, \mathbf{P}\{\nu = k+1\}\}. \quad (23)$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, $u = (l - N - n)/(b\sqrt{N})$, где l – натуральное число. Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu_N = l\} = \frac{1}{b\sqrt{2\pi N}} e^{-u^2/2} + O\left(\frac{N}{n^2}\right).$$

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{P}\{\nu = 1\} = p_0(\lambda), \quad \mathbf{P}\{\nu = 2\} = p_1(\lambda)p_0(\lambda),$$

из (3), (23) и леммы 1 видим, что при $d \geq 1/4$

$$D(\nu, d) \geq \frac{1}{64} p_0(\lambda)p_1(\lambda) > 0. \quad (24)$$

Если $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$, то из (24) следует, что

$$D(\nu, d) \geq C_{12} > 0.$$

Отсюда и из (19), (21), (22), (24)

$$0 < C_{12} \leq H(\nu) \leq 4. \quad (25)$$

Из леммы 3, соотношений (12), (20), (25) следует утверждение леммы 4 при $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$.

Пусть $n/N \rightarrow 0$. Из (3), (21), (24) и второго утверждения леммы 1 получаем, что

$$H(\nu) \geq C_{13} \frac{n}{N}. \quad (26)$$

Отсюда, из леммы 3 и соотношений (13), (20) опять приходим к утверждению леммы 4. \square

Локальная сходимость распределений $\zeta_{N-k}^{(r)}$ при $r \rightarrow \infty$ установлена в [4, лемма 6]. Пусть

$$S = N(1 - q_r)(1 + o(1)). \quad (27)$$

Покажем, что для сумм вида $\zeta_S^{(r)}$ верно утверждение, подобное лемме 4 для ν_N . Обозначим

$$a_r = \mathbf{E}\nu_r^{(1)} = \frac{a - rq_r}{1 - q_r},$$

$$b_r^2 = \mathbf{D}\nu_r^{(1)} = \frac{b^2}{(1 - q_r)^2} \left(1 - q_r - \frac{(a - r)^2}{b^2} q_r\right). \quad (28)$$

Если $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \leq C_2 < \infty$, то, используя (18), для $\mathbf{E}(\nu_r^{(1)})^3$ нетрудно получить оценку, аналогичную (20):

$$0 < C_{14} \leq \mathbf{E}(\nu_r^{(1)})^3 \leq C_{15} < \infty. \quad (29)$$

Из (14), (16) и (28) видим, что если $r \rightarrow \infty$, то $b_r^2 \sim b^2$. Но нам потребуется более точное соотношение между этими дисперсиями. Пусть $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$. Тогда, используя (1)–(6) и первое утверждение леммы 1, нетрудно обнаружить, что

$$0 < C_{16} \leq a, b^2 \leq C_{17} < \infty. \quad (30)$$

Из (28), (30) теперь находим, что

$$b_r^2 = b^2 \left(1 - \frac{r^2}{b^2} q_r + O\left(rq_r \frac{N}{n}\right)\right). \quad (31)$$

Если $n/N \rightarrow 0$, то из (5), (6) и второго утверждения леммы 1 следует, что $a \rightarrow 1$, и из (13), (28) опять приходим к (31).

Следуя идее получения оценок (25), (26), нетрудно проверить, что они остаются в силе и для $\nu_r^{(1)}$. Это значит, что в случае $0 < C_1 \leq n/N \leq C_2 < \infty$

$$0 < C_{18} \leq H(\nu_r^{(1)}) \leq 4, \quad (32)$$

а если $n/N \rightarrow 0$, то

$$H(\nu_r^{(1)}) \geq C_{19} \frac{n}{N}. \quad (33)$$

Учитывая (27), (29), (32), (33) и заменяя в лемме 3 N на S , a на a_r и b^2 на b_r^2 , приходим к следующему результату.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 3, условие (27) и $w_r = (l - Sa_r)/(b_r\sqrt{S})$, где l – натуральное число. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = l\} = \frac{1}{b_r\sqrt{2\pi S}}e^{-w_r^2/2} + O\left(\frac{S}{n^2}\right).$$

Для доказательства теоремы 3 нам требуется теорема 1 из [1, глава II, §5], в которой дана оценка скорости сближения биномиальных вероятностей с нормальным законом.

Лемма 6. Если $N \rightarrow \infty$, $(1 + v^6)/(Npq) \rightarrow 0$, где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $v = (k - Nq)/\sqrt{Npq}$, то

$$\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}e^{-v^2/2} \times \left(1 + \frac{p-q}{6\sqrt{Npq}}(3v - v^3) + O\left(\frac{1+v^6}{Npq}\right)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Доказательство теоремы 3 опирается на использование леммы 2. Полагая $l = N + n$ в лемме 4, получаем, что

$$\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\} = \frac{1}{b\sqrt{2\pi N}} + O\left(\frac{N}{n^2}\right). \quad (34)$$

Из (17) следует, что

$$k = Nq_r + v_r\sqrt{Nq_r}, \quad (35)$$

поэтому

$$N - k = N(1 - q_r) \left(1 - \frac{v_r}{1 - q_r}\sqrt{\frac{q_r}{N}}\right). \quad (36)$$

Из (14) и (36) видим, что выполнены условия леммы 5. Полагая в ней $l = N + n - kr$, $S = N - k$ и используя (6), (28), (31), (35), (36), прямыми вычислениями устанавливаем, что

$$w_r^2 = \frac{v_r^2 r^2 q_r}{b^2} + O\left(rq_r \frac{N}{n}\right). \quad (37)$$

Отсюда и из (16), (17)

$$e^{-w_r^2/2} = 1 - \frac{v_r^2 r^2 q_r}{2b^2} + O\left(rq_r \frac{N}{n}\right). \quad (38)$$

Таким образом, из (37), (38) и леммы 5 вытекает, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = N + n - kr\} = \frac{1}{b_r\sqrt{2\pi(N-k)}}$$

$$\times \left(1 - \frac{v_r^2 r^2 q_r}{2b^2} + O\left(rq_r \frac{N}{n}\right)\right) + O\left(\frac{N}{n^2}\right). \quad (39)$$

Используя (13), (16), (31), (34), (39), не очень сложно обнаружить, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = N + n - kr\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}} = 1 + \frac{r^2 q_r}{2b^2}(1 - v_r^2) + O\left(rq_r \frac{N}{n} + \frac{N}{n^{3/2}}\right). \quad (40)$$

Теперь обратимся к лемме 6. Полагая в ней $q = q_r$ и учитывая (14), (17), приходим к равенству

$$\binom{N}{k}q_r^k(1-q_r)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Nq_r(1-q_r)}}e^{-v^2/2} \times \left(1 + \frac{1-2q_r}{6\sqrt{Nq_r(1-q_r)}}(3v - v^3) + O\left(\frac{1}{Nq_r}\right)\right), \quad (41)$$

при этом

$$v = v_r \left(1 + \frac{q_r}{2} + O(q_r^2)\right). \quad (42)$$

С помощью (17), (42) находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi Nq_r(1-q_r)}}e^{-v^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Nq_r}}e^{-v_r^2/2} \times \left(1 + \frac{1-v_r^2}{2}q_r + O(q_r^2)\right), \quad (43)$$

$$1 + \frac{1-2q_r}{6\sqrt{Nq_r(1-q_r)}}(3v - v^3) + O\left(\frac{1}{Nq_r}\right) = 1 + \frac{3v_r - v_r^3}{6\sqrt{Nq_r}} + O\left(\sqrt{\frac{q_r}{N}} + \frac{1}{Nq_r}\right). \quad (44)$$

Из (41)–(44) следует равенство

$$\binom{N}{k}q_r^k(1-q_r)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Nq_r}}e^{-v_r^2/2} \times \left(1 + \frac{3v_r - v_r^3}{6\sqrt{Nq_r}} + \frac{1 - v_r^2}{2}q_r + O\left(q_r^2 + \sqrt{\frac{q_r}{N}} + \frac{1}{Nq_r}\right)\right).$$

Отсюда, из (16), (40) и леммы 2 нетрудно получить утверждение теоремы 3.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за выявленные ошибки и полезные рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.
2. Мухин А. В. Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36, вып. 4. С. 660–674.
3. Павлов Ю. Л. Об объемах деревьев леса Гальтона–Ватсона с бесконечной дисперсией в критическом случае // Дискретная математика. 2024. Т. 36, вып. 2. С. 33–49. doi: 10.4213/dm1813
4. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Объемы деревьев случайного леса и конфигурационные графы // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2022. Т. 316. С. 298–315. doi: 10.4213/tm4216

Поступила в редакцию / received: 31.01.2026; принята к публикации / accepted: 26.05.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович

д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Kolchin V. F., Sevastianov B. A., Chistiakov V. P. Random allocations. New York: Wiley; 1978. 262 p.
2. Mukhin A. B. Local limit theorems for lattice random variables. *Theory of Probability and its Applications*. 1992;36(4):698–713. doi: 10.1137/1136086
3. Pavlov Yu. L. On the sizes of trees in a Galton–Watson forest with infinite variance in the critical case. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2024;36(2):33–49. (In Russ.). doi: 10.4213/dm1813
4. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Sizes of trees in a random forest and configuration graphs. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2022;316:280–297. doi: 10.1134/S0081543822010205

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury

Dr. Sci. (Phis.-Math.), Professor, Chief Researcher