

УДК 519.214.4+519.214.8

ЕЩЕ РАЗ ОБ ОБЪЕМАХ ДЕРЕВЬЕВ ЛЕСА ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматриваются леса Гальтона – Ватсона с N корневыми деревьями и n некорневыми вершинами. Предполагается, что такие леса образуются критическим ветвящимся процессом, в котором число прямых потомков каждой частицы имеет распределение

$$p_k = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in (2, 3),$$

где $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Найдены предельные распределения числа деревьев заданного объема, если $N, n \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: лес Гальтона – Ватсона; объем дерева; предельные теоремы; число деревьев заданного объема

Для цитирования: Павлов Ю. Л. Еще раз об объемах деревьев леса Гальтона – Ватсона // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 73–81. doi: 10.17076/mat2296

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Yu. L. Pavlov. MORE ON THE SIZES OF TREES IN THE GALTON – WATSON FOREST

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

Galton – Watson forests with N rooted trees and n nonroot vertices are considered. It is assumed that such forests are formed by a critical branching process in which the number of offsprings for each particle has the distribution

$$p_k = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in (2, 3),$$

where the function $h(x)$ is slowly varying at infinity. Some limit distributions of the number of trees of a given size are found if $N, n \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \infty$.

Key words: Galton–Watson forest; tree size; limit theorems; number of trees of a given size

For citation: Pavlov Yu. L. Once again on the sizes of trees in the Galton–Watson forest. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 73–81. doi: 10.17076/mat2296

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В статьях [3, 5] рассматривался лес Гальтона–Ватсона $\mathfrak{F}_{N,n}$, состоящий из N упорядоченных корневых деревьев и содержащий $N + n$ вершин. Предполагалось, что такой лес образован начинающимся с N частиц критическим ветвящимся процессом G , а случайная величина ξ , равная числу прямых потомков каждой частицы, имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k+1)}{(k+1)^\tau}, \quad (1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $\tau \in (2, 3)$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Поскольку процесс G критический, распределение (1) удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}\xi = 1. \quad (2)$$

Кроме того, из (1) следует, что дисперсия ξ бесконечна. Далее будем считать, что для случайной величины ξ верно равенство (2).

Случайный лес $\mathfrak{F}_{N,n}$ состоит из множества траекторий процесса G таких, что общее число частиц, существовавших до вырождения процесса, равно $N + n$. Распределение вероятностей на этом множестве естественным образом генерируется процессом G . Объемом дерева называется число его вершин, включая корень.

Обозначим μ_r случайную величину, равную числу деревьев объема r в $\mathfrak{F}_{N,n}$. В [5] были впервые доказаны теоремы о предельном поведении μ_r при различном характере стремления N и n к бесконечности, в том числе при фиксированных или стремящихся к бесконечности r . Заметим, что в случае $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, предельные распределения μ_r удалось получить только при весьма медленном росте отношения n/N . В дальнейшем, в статье [3], была предпринята попытка существенно расширить область применения полученных в [5] результатов. Это удалось сделать, но условия, при которых верны доказанные в [3] теоремы, по-прежнему не были оптимальными.

Для того чтобы сформулировать один из полученных в [3] результатов, введем необходимые понятия и обозначения. Техника доказательств теорем статей [3, 5] и настоящей статьи в значительной степени опирается на использование свойств сопровождающего G вспомогательного ветвящегося процесса $G(\lambda)$. Для того чтобы описать процесс $G(\lambda)$, введем случайную величину $\xi(\lambda)$, имеющую распределение

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\xi(\lambda) = k\} = \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)}, \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \lambda < 1$ и

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k. \quad (4)$$

Введем случайный процесс $G(\lambda)$, отличающийся от G только тем, что число непосредственных потомков каждой частицы имеет распределение (3), а не (1). Обозначим $m = \mathbf{E}\xi(\lambda)$. В качестве значения параметра λ распределения (3) далее будем использовать единственное решение уравнения $m = n/(N + n)$. Тогда из (4) следует, что

$$m = \frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N + n}. \quad (5)$$

Очевидно, что процесс $G(\lambda)$, как и процесс G , состоит из N независимых начинающихся с одной частицы подпроцессов $G_1(\lambda), \dots, G_N(\lambda)$. Обозначим $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(N)}$ независимые случайные величины, равные числам частиц, существовавших в подпроцессах $G_1(\lambda), \dots, G_N(\lambda)$ соответственно до их вырождения.

Пусть $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi(\lambda)$, $a = \mathbf{E}\nu^{(1)}$, $b^2 = \mathbf{D}\nu^{(1)}$. В [6, формулы (2.7)] показано, что

$$a = \frac{1}{1 - m}, \quad b^2 = \frac{\sigma^2}{(1 - m)^3}, \quad (6)$$

где m определено в (5). Обозначим

$$q_k = \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

и пусть

$$\sigma_{rr}^2 = q_r \left(1 - q_r - \frac{(a-r)^2}{b^2} q_r \right). \quad (8)$$

Для случая $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$, в [5, теорема 1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть r – фиксированное натуральное число, а $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$ и существуют такие положительные числа Δ, v , где $v < 1/2$, что

$$\left(\frac{n}{N} \right)^2 = O(N^v (1 - \lambda)^{1+\Delta}). \quad (9)$$

Тогда для целых положительных k равномерно относительно $u_r = (k - Nq_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2}.$$

Это утверждение остается справедливым и при $r \rightarrow \infty$, если

$$r = O\left(\frac{n}{N}\right).$$

В [3, с. 106] отмечается, что если $N, n \rightarrow \infty$, то $\lambda \uparrow 1$ и условие (9) может быть выполнено, только если $n = O(N^{7/6})$. Это значит, что теорема 1 справедлива, если отношение n/N стремится к бесконечности очень медленно. Более точно необходимую скорость можно себе представить, если разность $1 - \lambda$ в (9) оценить, используя лемму 4 из [3], согласно которой

$$1 - \lambda \sim \left(-\frac{N}{n\Gamma(2-\tau)h(1/(1-\lambda))} \right)^{1/(\tau-2)}, \quad (10)$$

где $\Gamma(2-\tau)$ – значение гамма-функции в точке $2-\tau$. Заметим также, что в конкретных ситуациях проверка условия (9) не всегда является легкой задачей.

В статье [3] была предпринята попытка получить результат, аналогичный теореме 1, но при более простых условиях. Вместо условия (9) предполагалось, что $N, n \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \infty$ и

$$\frac{n}{N^{\tau-1}} \rightarrow 0. \quad (11)$$

Кроме того, в [3] медленно меняющаяся функция $h(x)$ из распределения (1) подчинялась условию

$$h(x) \rightarrow D, \quad (12)$$

где $D > 0$ – некоторая постоянная. В [3] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть r – фиксированное натуральное число, а $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (11), (12). Тогда для целых положительных k равномерно относительно $v_r = (k - Nq_r)/\sqrt{Nq_r(1 - q_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Nq_r(1 - q_r)}} e^{-v_r^2/2}.$$

Это утверждение остается справедливым и при $r \rightarrow \infty$, если

$$r = O\left(\left(\frac{n}{N}\right)^{(\tau-1)/(\tau-2)}\right).$$

Основным результатом настоящей статьи является доказанная ниже теорема 3 о предельном поведении случайных величин μ_r без условия (12). В теореме 3 предполагается, что r – фиксированное число. Доказать подобный результат при $r \rightarrow \infty$ пока не удалось, и автор надеется, что эта задача в дальнейшем будет решена.

Теорема 3. Пусть r – фиксированное натуральное число, а $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$ и существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\frac{n}{N^{\tau-1-\gamma}} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Тогда для целых положительных k равномерно относительно $w_r = (k - Nq_r)/\sqrt{Nq_r(1 - q_r)}$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Nq_r(1 - q_r)}} e^{-w_r^2/2}.$$

Статья состоит из трех разделов. В следующем разделе получены вспомогательные утверждения (леммы 1–6), с помощью которых в третьем разделе доказывается теорема 3.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приводимые ниже леммы формулируются и доказываются подобно вспомогательным результатам статьи [3]. Поэтому в некоторых местах мы ограничимся ссылками на полученные в [3, 5] промежуточные выражения, подробно описывая только выкладки, в которых новое условие (13) заменяет (11) и (12).

Метод доказательства теоремы 3 в значительной степени опирается на использование так называемой обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, введенной и подробно изученной В. Ф. Колчиным [2]. Обозначим $\nu_1(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$ случайные величины, равные объемам деревьев рассматриваемого

леса Гальтона–Ватсона, имеющих корни с номерами $1, \dots, N$ соответственно. Пусть ν_N означает число частиц, существовавших в процессе $G(\lambda)$ за все время его эволюции, следовательно, $\nu_N = \nu^{(1)} + \dots + \nu^{(N)}$. Известно [5, равенство (3.1)], что для двух наборов случайных величин $\nu_1(\mathfrak{F}), \dots, \nu_N(\mathfrak{F})$ и $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(N)}$ выполнены условия обобщенной схемы размещения и верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\nu_1(\mathfrak{F}) = k_1, \dots, \nu_N(\mathfrak{F}) = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\nu^{(1)} = k_1, \dots, \nu^{(N)} = k_N | \nu_N = N + n\}. \end{aligned}$$

Заметим, что, как это обычно встречается при использовании обобщенной схемы для решения различных комбинаторных задач, утверждение леммы 1 справедливо при любых значениях параметра $\lambda, 0 < \lambda \leq 1$. Поэтому при исследовании случайных лесов в ряде случаев целесообразно использовать ветвящийся процесс $G(\lambda)$, выбирая значение λ , наиболее удобное для проведения необходимых вычислений.

Пусть $\nu_r^{(1)}, \dots, \nu_r^{(N)}$ означают независимые случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\nu_r^{(i)} = k\} = \mathbf{P}\{\nu^{(i)} = k | \nu^{(i)} \neq r\}, \quad (14)$$

где $k = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, N$. Обозначим $\zeta_S^{(r)} = \nu_r^{(1)} + \dots + \nu_r^{(S)}$, где $S \leq N$. В [2, гл. I, §2, лемма 1] показано, что из леммы 1 и (14) следует такой результат.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu = k\} &= \binom{N}{k} q_r^k (1 - q_r)^{N-k} \\ &\times \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = N + n - kr\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}}. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим предельное поведение суммы ν_N . Обозначим $\psi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\nu_N - aN)/(b\sqrt{N})$.

Лемма 3. *Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow \infty$ и выполнено условие (13). Тогда $\psi_N(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ при любом фиксированном t .*

Доказательство. Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\nu^{(1)}$. В [5, формула (4.3)] показано, что

$$\ln \psi_N(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6b^3\sqrt{N}} Q\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right), \quad (15)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|s| \leq |t|} |(\ln \varphi(s))_s''|. \quad (16)$$

Из (15) видим, что для доказательства леммы достаточно установить соотношение

$$\frac{t^3}{6b^3\sqrt{N}} Q\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \rightarrow 0. \quad (17)$$

Используя (3), (5), (6) и применяя тауберову теорему [6, гл. XIII, §5, теорема 5], находим, что

$$b^2 \asymp \left(\frac{n}{N}\right)^3 (1 - \lambda)^{\tau-3} h \left(\frac{1}{1 - \lambda}\right). \quad (18)$$

В [5, формула (4.8)] был найден явный вид выражения $(\ln \varphi(t))_t'''$. Поскольку это выражение весьма громоздко, здесь оно не приводится. Кроме того, там найдена и оценка модуля этого выражения [5, формула (4.9)]. Эту оценку нетрудно уточнить, если к содержащимся в [5, формула (4.8)] производным производящей функции распределения (3) опять, как и при получении (18), применить тауберову теорему. Тогда

$$|(\ln \varphi(t))_t'''| \asymp \left(\frac{n}{N}\right)^5 (1 - \lambda)^{2\tau-6} h \left(\frac{1}{1 - \lambda}\right). \quad (19)$$

Отсюда и из (10), (16), (18) находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b^3\sqrt{N}} Q\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \\ &= O\left(\left(\frac{n}{N^{\tau-1}} h^{5-2\tau} \left(\frac{1}{1 - \lambda}\right)\right)^{1/(2\tau-4)}\right) \end{aligned}$$

и из (13) следует (17), что и завершает доказательство леммы 3. $\square$

В следующей лемме доказывается, что на самом деле имеет место локальная сходимость распределений сумм ν_N к нормальному закону.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для натуральных l равномерно относительно $u = (l - N - n)/(b\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\nu_N = l\} = \frac{1 + o(1)}{b\sqrt{2\pi N}} e^{-u^2/2}.$$

Доказательство. Следуя стандартной схеме доказательства локальных предельных теорем (например, [1, теорема 4.2.1]), представим вероятность $\mathbf{P}\{\nu_N = k\}$ по формуле обращения в виде интеграла

$$\mathbf{P}\{\nu_N = k\} = (2\pi b\sqrt{N})^{-1} \int_{-\pi b\sqrt{N}}^{\pi b\sqrt{N}} e^{-iut} \psi_N(t) dt. \quad (20)$$

Поскольку

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iut - t^2/2\} dt, \quad (21)$$

используя (20), (21), представим разность

$$R = 2\pi(b\sqrt{N}\mathbf{P}\{\nu_N = l\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2})$$

в виде суммы $R = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-iut} (\psi_N(t) - e^{-t^2/2}) dt, \\ I_2 &= \int_{A < |t| \leq \varepsilon L} e^{-iut} \psi_N(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon L < |t| \leq \varepsilon b\sqrt{N}} e^{-iut} \psi_N(t) dt, \\ I_4 &= \int_{\varepsilon b\sqrt{N} < |t| \leq \pi b\sqrt{N}} e^{-iut} \psi_N(t) dt, \\ I_5 &= - \int_{A < |t|} \exp\{-iut - t^2/2\} dt, \end{aligned} \quad (22)$$

$$L = \left| b^3 \sqrt{N} Q^{-1} \left(\frac{1}{b\sqrt{N}} \right) \right|, \quad (23)$$

а положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Очевидно, что лемма 4 справедлива, если $R \rightarrow 0$. Для доказательства этого соотношения рассмотрим отдельно каждый из перечисленных в (22) интегралов. Из леммы 3 следует, что $I_1 \rightarrow 0$ при любом фиксированном A . Понятно, что I_5 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A . Хорошо известно, что в области интегрирования I_4 справедливо неравенство

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{b\sqrt{N}} \right) \right| \leq e^{-C_1},$$

здесь и далее символы $C_1, C_2, \dots$ означают некоторые положительные постоянные. Отсюда

$$|\psi_N(t)| \leq e^{-C_1 N}$$

и из (10), (13), (18) находим, что $I_4 \rightarrow 0$. Из разложения (15) и из (23) следует, что при достаточно малом ε в области интегрирования I_2

$$|\psi_N(t)| \leq e^{-C_3 t^2},$$

следовательно, интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Осталось рассмотреть I_3 . Для получения необходимой оценки будем следовать доказательству леммы 4 из [2, гл. II, §4]. Обозначим $U(z)$ и $F_\lambda(z)$ производящие функции случайных величин $\nu^{(1)}$ и $\xi(\lambda)$ соответственно. Хорошо известно [2, гл. II, §4, лемма 1], что

$$U(z) = z F_\lambda(U(z)).$$

Поскольку $\lambda < 1$, функция $F_\lambda(z)$ имеет все производные и при $|z| \leq 1$ она может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} F_\lambda(z) &= 1 + F'_\lambda(1)(z - 1) \\ &+ \frac{F''_\lambda(1)(1 + \gamma(z))}{2} (z - 1)^2, \end{aligned}$$

где

$$F'_\lambda(1) = \frac{n}{N + n},$$

а $\gamma(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 1$. Отсюда и из предыдущего равенства

$$\begin{aligned} U(z) &= z \left(1 + F'_\lambda(1)(U(z) - 1) \right. \\ &\left. + \frac{F''_\lambda(1)(1 + \gamma(z))}{2} (U(z) - 1)^2 \right). \end{aligned}$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно $U(z)$ и выбирая ветвь корня из условия $0 \leq U(z) \leq 1$ для действительных z , $0 \leq z \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} U(z) &= 1 - A(N, n)(1 + o(1)) \\ &- \sqrt{A^2(N, n) - \frac{2(z - 1)(1 + o(1))}{z F''_\lambda(1)}} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$A(N, n) = \frac{z - 1}{z F''_\lambda(1)} - \frac{N}{(N + n) F''_\lambda(1)}.$$

Положим

$$z = \exp \left\{ \frac{it}{b\sqrt{N}} \right\} = \cos \left(\frac{t}{b\sqrt{N}} \right) + i \sin \left(\frac{t}{b\sqrt{N}} \right). \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что интеграл I_3 можно представить в виде суммы $I_3 = I'_3 + I''_3$, где в области интегрирования I'_3 верно соотношение $z - 1 = o(N/n)$ и $N/n = O(z - 1)$ в области интегрирования I''_3 .

Рассмотрим I'_3 . Из (24)

$$U(z) = 1 + \frac{N(1+o(1))}{(N+n)F''_\lambda(1)} \left(1 - \frac{n}{N}(z-1) - \sqrt{1 - 2 \left(\frac{N+n}{N}\right)^2 F''_\lambda(1)(z-1)(1+o(1))}\right). \quad (26)$$

Обозначим для краткости

$$B = B(N, n) = 2 \left(\frac{N+n}{N}\right)^2 F''_\lambda(1)(1+o(1)).$$

Используя (3), (4) и опять применяя тауберову теорему, находим, что

$$F''_\lambda(1) \sim \frac{\Gamma(3-\tau)}{(1-\lambda)^{3-\tau}} h\left(\frac{1}{1-\lambda}\right). \quad (27)$$

Ясно, что

$$\sqrt{1-B(z-1)} = \sqrt{1+B\left(1-\cos\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right)\right)-iB\sin\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right)}.$$

Отсюда

$$= R^{1/2} \left(\cos\left(\frac{\alpha+2\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha+2\pi k}{2}\right) \right), \quad (28)$$

где $k = 0, 1$.

$$R = \left| 1 + B \left(1 - \cos\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right) - iB \sin\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right| = \left| 1 + 2B(1+B) \left(1 - \cos\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right) \right|^{1/2},$$

$$\alpha = \arctg \frac{\operatorname{Im}(W)}{1 + \operatorname{Re}(W)},$$

$$W = B \left(1 - \cos\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right) - iB \sin\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right).$$

Обозначим

$$D = D(N, n) = \frac{N}{(N+n)F''_\lambda(1)}.$$

Тогда из (26), (28)

$$\varphi\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) = 1 - D(1+o(1)) \times \left(R^{1/2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \pi k\right) - 1 \right)$$

$$+ \frac{n}{N} \left(\cos\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) - 1 \right) - iD(1+o(1)) \left(R^{1/2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \pi k\right) + \frac{n}{N} \sin\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right).$$

Далее, для того чтобы с помощью этого равенства оценить $|\varphi(t/(b\sqrt{N}))|$, соберем вместе (10), (16), (18), (19), (23), (26), (27), (28). Учтывая, что $|t/(b\sqrt{N})| > \varepsilon L$, $t/(b\sqrt{N}) \rightarrow 0$ и проводя непосредственные вычисления, хотя и громоздкие, но элементарные, получаем, что $D \rightarrow 0$ и существует $C_3 > 0$ такое, что

$$R^{1/2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \pi k\right) > 1 + C_3 h^\rho \left(\frac{1}{1-\lambda} \right),$$

где $\rho = 2$, если функция $h(x)$ ограничена, и $\rho = 1/2$, если $h(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$\left| \varphi\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right|^2 < 1 - C_4 D h^\rho \left(\frac{1}{1-\lambda} \right),$$

следовательно,

$$\left| \varphi\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right| \leq \exp \left\{ -C_5 \frac{N}{nF''_\lambda(1)} h^\rho \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \right\}. \quad (29)$$

Поэтому

$$|I'_3| \leq 2b\sqrt{N} \exp \left\{ -C_5 \frac{N^2}{nF''_\lambda(1)} h^\rho \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \right\}.$$

Из этого неравенства, (10), (13), (18) и (27) следует, что $I'_3 \rightarrow 0$.

Пусть теперь $N/n = O(z-1)$ и рассмотрим I''_3 . Из (24) получаем, что

$$U(z) = 1 - \sqrt{-\frac{2(z-1)}{F''_\lambda(1)}} (1+o(1)).$$

Отсюда и из (25)

$$U(z) = 1 - \sqrt{-\frac{2it}{b\sqrt{N}F''_\lambda(1)}} (1+o(1)) = 1 - \sqrt{\frac{|t|}{b\sqrt{N}F''_\lambda(1)}} \left(1 - i \frac{t}{|t|} \right) (1+o(1)).$$

Это значит, что

$$\left| \varphi\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) \right| \leq \exp \left\{ -C_6 \sqrt{\frac{|t|}{b\sqrt{N}F''_\lambda(1)}} \right\}.$$

Из этого неравенства и из (10), (16), (18), (23), (27) следует, что в области интегрирования I_3'' для любых $\delta > 0$

$$\left| \varphi \left(\frac{t}{b\sqrt{N}} \right) \right| \leq \exp \left\{ -C_7 \left(\frac{N}{n} \right)^{(1+\delta)/(\tau-2)} \right\}. \quad (30)$$

Тогда

$$|I_3''| \leq 2\varepsilon b\sqrt{N} \times \exp \left\{ -C_7 \left(\frac{N^{\tau-1+\delta}}{n^{1+\delta}} \right)^{1/(\tau-2)} \right\}.$$

Отсюда и из (13), (18) находим, что $I_3'' \rightarrow 0$ при достаточно малых $\delta > 0$. $\square$

Для того чтобы описать предельное поведение $\zeta_S^{(r)}$, введем обозначения

$$a_r = \mathbf{E}\nu_r^{(1)} = \frac{a - rq_r}{1 - q_r},$$

$$b_r^2 = \mathbf{D}\nu_r^{(1)} = \frac{b^2}{(1 - q_r)^2} \left(1 - q_r - \frac{(a - r)^2}{b^2} q_r \right), \quad (31)$$

где a и b определены в (6). Пусть $\psi_S^{(r)}(t)$ означает характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_S^{(r)} - Sa_r)/(b_r\sqrt{S})$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 3 и

$$S = N(1 - q_r)(1 + o(1)). \quad (32)$$

Тогда $\psi_S^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ при любом фиксированном t .

Доказательство. Обозначим $\varphi_r(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\nu_r^{(1)}(t)$. Как и в доказательстве леммы 7 из [3],

$$\ln \psi_S^{(r)}(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6b^3\sqrt{S}} Q_r \left(\frac{t}{b_r\sqrt{S}} \right), \quad (33)$$

где

$$|Q_r(t)| \leq 2 \max_{|s| \leq |t|} |(\ln \varphi_r(s))_s'''|. \quad (34)$$

Согласно (33), достаточно показать, что

$$\frac{t^3}{6b^3\sqrt{S}} Q_r \left(\frac{t}{b_r\sqrt{S}} \right) \rightarrow 0. \quad (35)$$

Понятно, что

$$\varphi_r(t) = \frac{\varphi(t) - q_r e^{itr}}{1 - q_r}, \quad (36)$$

где q_r определено в (7). В [4, гл. 2, §3, формула (3) и гл. 3, §2, формула (3)] были найдены

явные выражения для $(\ln \varphi(t))_t'''$ и $(\ln \varphi_r(t))_t'''$ соответственно. Указанные формулы здесь не приводятся, поскольку они весьма громоздки. С помощью этих формул путем проведения необходимых вычислений можно показать (см. также [5, формула (5.23)]), что

$$|(\ln \varphi_r(t))_y'''| \asymp |(\ln \varphi(t))_t'''| + r^3 q_r. \quad (37)$$

В [5, формула (5.9)] установлено, что для фиксированных r

$$0 < C_8 \leq q_r \leq C_9 < 1. \quad (38)$$

Теперь покажем, что

$$b_r^2 \asymp b^2. \quad (39)$$

Из (31) следует, что для доказательства (39) достаточно установить, что

$$\frac{(a - r)^2}{b^2} q_r \rightarrow 0. \quad (40)$$

Используя (5) и (18), находим, что

$$\frac{a^2}{b^2} \leq C_{10}(1 - \lambda)^{3-\tau-\varepsilon} \frac{N}{n} \times \left(\left(\frac{1}{1 - \lambda} \right)^\varepsilon h \left(\frac{1}{1 - \lambda} \right) \right)^{-1}.$$

Отсюда, учитывая свойства медленно меняющихся на бесконечности функций и выбирая, например, $\varepsilon = (3 - \tau)/2$, при $n/N \rightarrow \infty$ и $\lambda \uparrow 1$ получим

$$\frac{a^2}{b^2} q_r \rightarrow 0. \quad (41)$$

Это соотношение, вместе с (38), показывает, что (40), а вместе с ним и (39), верно при фиксированных r . Тогда из (17), (18), (34), (37), (39) следует (35). $\square$

Замечание. Из (8), (40) и (41) следует, что $\sigma_{rr}^2 \sim q_r(1 - q_r)$. Это значит, что утверждения теорем 1 и 3 эквивалентны.

Теперь покажем, что для $\zeta_S^{(r)}$ имеет место и локальная сходимость.

Лемма 6. Пусть верно (32) и выполнены условия теоремы 3. Тогда для натуральных l равномерно относительно $y_r = (l - Sa_r)/(b_r\sqrt{S})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = l\} = \frac{1 + o(1)}{b_r\sqrt{2\pi S}} e^{-y_r^2/2}.$$

Доказательство. Следуя доказательству леммы 5 из [3], представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = l\}$ по формуле обращения в виде интеграла

$$\mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = l\} = \frac{1}{2\pi b_r \sqrt{S}} \int_{-\pi b_r \sqrt{S}}^{\pi b_r \sqrt{S}} e^{-iy_r t} \psi_S^{(r)}(t) dt.$$

Используя это равенство и (21), представим разность

$$R_r = 2\pi(b_r \sqrt{S} \mathbf{P}\{\zeta_S^{(r)} = l\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-y_r^2/2})$$

в виде суммы пяти интегралов

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-A}^A e^{-iy_r t} (\psi_S^{(r)}(t) - e^{-t^2/2}) dt, \\ I_2 &= \int_{A < |t| \leq \varepsilon \varepsilon L_r} e^{-iy_r t} \psi_S^{(r)}(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon L_r < |t| \leq \varepsilon b_r \sqrt{S}} e^{-iy_r t} \psi_S^{(r)}(t) dt, \\ I_4 &= \int_{\varepsilon b_r \sqrt{S} < |t| \leq \pi b_r \sqrt{S}} e^{-iy_r t} \psi_S^{(r)}(t) dt, \\ I_5 &= - \int_{A < |t|} \exp\{-iy_r t - t^2/2\} dt, \end{aligned} \quad (42)$$

$$L_r = b_r^3 \sqrt{S} Q_r^{-1} \left(\frac{1}{b_r \sqrt{S}} \right), \quad (43)$$

а положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Понятно, что если $R_r \rightarrow 0$, то лемма 6 верна. В силу леммы 5 при любом фиксированном A верно соотношение $I_1 \rightarrow 0$. Нетрудно проверить, собирая (16), (18), (19), (23), (37), (42), (43), что интегралы I_2, I_4, I_5 оцениваются так же, как и одноименные интегралы в доказательстве леммы 4.

Рассмотрим I_3 . Из (36) следует, что

$$|\varphi_r(t)| = |\varphi(t)| \left| \frac{1 - \varphi^{-1}(t) q_r e^{itr}}{1 - q_r} \right|. \quad (44)$$

В области интегрирования I_3 при фиксированных r величину $tr/(b_r \sqrt{S})$ можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно малого ε . Используя это и равенство (27), несложно показать, что

$$\left| 1 - \varphi^{-1} \left(\frac{t}{b_r \sqrt{S}} \right) q_r \exp \left\{ \frac{itr}{b_r \sqrt{S}} \right\} \right| \leq 1 - q_r.$$

Отсюда и из (44)

$$\left| \varphi_r \left(\frac{t}{b_r \sqrt{S}} \right) \right| \leq \left| \varphi \left(\frac{t}{b_r \sqrt{S}} \right) \right|$$

и I_3 с помощью (29), (30) оценивается так же, как одноименный интеграл в доказательстве леммы 4. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В условиях теоремы 3

$$k = Nq_r + w_r \sqrt{Nq_r(1 - q_r)} \quad (45)$$

и

$$N - k = N(1 - q_r)(1 + o(1)). \quad (46)$$

Из леммы 4

$$\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\} \sim (b\sqrt{2\pi N})^{-1}. \quad (47)$$

В утверждении леммы 6 положим $l = N + n - kr$ и $S = N - k$. Тогда, учитывая (18), (39), (45), (46), находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = N + n - kr\} \sim (b\sqrt{2\pi N})^{-1}.$$

Отсюда и из (47)

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = N + n - kr\}}{\mathbf{P}\{\nu_N = N + n\}} \rightarrow 1. \quad (48)$$

Известно, что если $Nq_r(1 - q_r) \rightarrow \infty$, то для биномиальных вероятностей справедливо нормальное приближение:

$$\begin{aligned} &\binom{N}{k} q_r^k (1 - q_r)^{N-k} \\ &= \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Nq_r(1 - q_r)}} \exp \left\{ -\frac{(k - Nq_r)^2}{2Nq_r(1 - q_r)} \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

равномерно относительно

$$\frac{k - Nq_r}{\sqrt{Nq_r(1 - q_r)}}$$

в любом фиксированном конечном интервале. Из (38) следует, что в условиях теоремы 3 $Nq_r(1 - q_r) \rightarrow \infty$. Поэтому из леммы 2, (48) и (49) получаем утверждение теоремы 3.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за очень полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984. 208 с.

3. Павлов Ю. Л. Замечание об объемах деревьев леса Гальтона–Ватсона // Дискретная математика. 2025. Т. 37, вып. 4. С. 102–117. doi: 10.4213/dm1872

4. Павлов Ю. Л. Случайные леса. Петрозаводск: Карел. науч. центр РАН, 1996. 259 с.

5. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Объемы деревьев случайного леса и конфигурационные графы // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2022. Т. 316. С. 298–315. doi: 10.4213/tm4216

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

REFERENCES

1. Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Independent and stationary sequences of random variables. Groningen:

Wolters-Noordho; 1971. 438 p.

2. Kolchin V. F. Random mappings. New York: Springer; 1986. 206 p.

3. Pavlov Yu. L. A remark on the Galton-Watson forest tree sizes. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2025;37(4):102–117. (In Russ.). doi: 10.4213/dm1872

4. Pavlov Yu. L. Random forests. Utrecht: VSP; 2000. 122 p. doi: 10.1515/9783110941975

5. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Sizes of trees in a random forest and configuration graphs. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2022;316:280–297. doi: 10.1134/S0081543822010205

6. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. II. New York: John Wiley; 1971. 704 p.

Поступила в редакцию / received: 26.01.2026; принята к публикации / accepted: 08.06.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович

д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury

Dr. Sci. (Phis.-Math.), Professor, Chief Researcher