

УДК 519.21

О СХОДИМОСТИ ЧИСЕЛ ЯЧЕЕК ЗАДАННОГО ОБЪЕМА К ЭМПИРИЧЕСКОМУ ПРОЦЕССУ

А. Н. Чупрунов*, К. Н. Яковлев

*Факультет прикладной математики, физики и информационных технологий,
Чувашский государственный университет (ул. Университетская, 38,
Чебоксары, Чувашская Республика, Россия, 428034), *achuprunov@mail.ru*

Пусть r, r_1 – целые неотрицательные числа, $r < r_1$, η_1, \dots, η_N – обобщенная схема размещения $(r_1 - r)n + rN$ частиц по N ячейкам, определенная независимыми случайными величинами ξ_1, \dots, ξ_N , которые имеют распределение степенного ряда, определенное рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \beta^k}{k!}$, случайный процесс $X_{n,N}^{\{r_1\}}(t) = \sum_{i=1}^{[tN]} I_{\{\eta_i=r_1\}}$, $0 \leq t \leq 1$, F_n – эмпирический процесс с параметром n . Показано, что если n, r, r_1 – фиксированные числа и выполнено условие $Ar(r_1)$: $b_k = 0, k < r, b_r > 0, b_k = 0, r < k < r_1, b_{r_1} > 0$, то при $N \rightarrow \infty$ случайные процессы $X_{n,N}^{\{r_1\}}$ сходятся по распределению в пространстве Скорохода к случайному процессу nF_n .

Ключевые слова: обобщенная схема размещения; функциональная предельная теорема; пространство Скорохода; броуновский мост; эмпирический процесс

Для цитирования: Чупрунов А. Н., Яковлев К. Н. О сходимости чисел ячеек заданного объема к эмпирическому процессу // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 127–131. doi: 10.17076/mat2285

Финансирование. Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания Чувашского государственного университета.

A. N. Chuprunov*, K. N. Iakovlev. ON THE CONVERGENCE OF GIVEN VALUE CELLS NUMBERS TO AN EMPIRICAL PROCESS

*Faculty of Applied Mathematics, Physics and Information Technologies, Chuvash State University (38 Universitetskaya St., 428034 Cheboksary, Chuvash Republic, Russia), *achuprunov@mail.ru*

Let r, r_1 be integer nonnegative numbers such that $r < r_1$. Let η_1, \dots, η_N be a general allocation scheme of $(r_1 - r)n + rN$ particles by N cells, defined by independent random variables ξ_1, \dots, ξ_N which have power series distribution defined by the series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \beta^k}{k!}$. Denote: the random process $X_{n,N}^{\{r_1\}}(t) = \sum_{i=1}^{[tN]} I_{\{\eta_i=r_1\}}$, $0 \leq t \leq 1$, F_n is an empirical process with the parameter n . It proved that if n, r and r_1 are fixed numbers and the condition $Ar(r_1)$: $b_k = 0, k < r, b_r > 0, b_k = 0, r < k < r_1, b_{r_1} > 0$, is valid, then as $N \rightarrow \infty$ the random processes $X_{n,N}^{\{r_1\}}$ converge in distribution in Skorokhod space to nF_n .

Key words: general allocation scheme; functional limit theorem; Skorokhod space; Brounian bridge; empirical process

For citation: Chuprunov A. N., Iakovlev K. N. On the convergence of given value cells numbers to an empirical process. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2026. No. 6. P. 127–131. doi: 10.17076/mat2285

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Chuvash State University.

ВВЕДЕНИЕ

Мы будем использовать понятие обобщенной схемы размещения, введенное В. Ф. Колчиным в [5]. Неотрицательные целочисленные случайные величины η_1, \dots, η_N образуют обобщенную схему размещения n частиц по N ячейкам, если существуют такие независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, что их совместное распределение имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\}, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, \dots, k_N – такие неотрицательные целые числа, что $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$.

Различные схемы дискретной теории вероятностей, такие как случайные леса, случайные перестановки, случайные размещения, урновые схемы, являются частными случаями обобщенной схемы размещения [6, 7].

Пространством Скорохода $D[0, 1]$ называется множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, имеющих пределы слева и непрерывных справа, наделенное метрикой

$$\rho(x, y) = \inf_{\lambda} \max \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |x(\lambda(t)) - y(t)|, \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| \right\}, \quad x, y \in D[0, 1].$$

Здесь инфимум берется по всем строго возрастающим непрерывным отображениям отрезка $[0, 1]$ на $[0, 1]$ (см. [1, 2]).

Будем использовать следующие обозначения: \xrightarrow{D} – сходимость по распределению в пространстве Скорохода, W_0 – броуновский мост, \mathbf{N}_0 – множество неотрицательных целых чисел.

Пусть

$$B(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \beta^k, \quad \beta \in (0, R), \quad (1)$$

ряд с неотрицательными коэффициентами, хотя бы один из которых не равен нулю, имеющий радиус сходимости $R > 0$. Случайные величины $\xi_i = \xi_i(\beta)$, $1 \leq i \leq N$, имеют распределение степенного ряда, если их распределение имеет вид

$$p_k = p_k(\beta) = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} = \frac{b_k \beta^k}{k! B(\beta)}, \quad k \in \mathbf{N}_0, \quad (2)$$

где число $\beta \in (0, R)$. В [3, 4] изучалась сходимость сумм $S_N = S_N(\beta) = \sum_{i=1}^N \xi_i(\beta)$, $N \in \mathbf{N}$.

Пусть r, r_1 – целые неотрицательные числа такие, что $r < r_1$. Для последовательности коэффициентов ряда (1) мы будем использовать свойство $Ar(r_1)$:

$$b_0 = 0, \dots, b_{r-1} = 0, b_r > 0,$$

$$b_{r+1} = 0, \dots, b_{r_1-1} = 0, b_{r_1} > 0.$$

Свойство $A0(r_1)$ введено В. Ф. Колчиным и А. В. Колчиным в [4].

Случайные величины $\xi_i = \xi_i(\beta)$, $1 \leq i \leq N$, имеющие распределение степенного ряда, не являются константами тогда и только тогда, когда для некоторых $r < r_1$ выполнено свойство $Ar(r_1)$. И, рассматривая случайные величины с распределением степенного ряда, мы будем предполагать, что для некоторых $r < r_1$ выполнено свойство $Ar(r_1)$.

Замечание. Пусть η_1, \dots, η_N – обобщенная схема размещения n частиц по N ячейкам со случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, имеющими распределение степенного ряда. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^N \frac{b_{k_i}}{(k_i)!}}{\sum_{\{k'_i \in \mathbf{N}_0, 1 \leq i \leq N, k'_1 + k'_2 + \dots + k'_N = n\}} \prod_{i=1}^N \frac{b_{k'_i}}{(k'_i)!}}, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, \dots, k_N – такие неотрицательные целые числа, что $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$. Поэтому в действительности распределение схемы η_1, \dots, η_N не зависит от β .

Случайный процесс

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{\zeta_i < t\}}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где ζ_i , $1 \leq i \leq n$ – независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на интервале $[0, 1]$, называется эмпирическим процессом.

Пусть r – целое неотрицательное число. В работе мы будем изучать сходимость по распределению в пространстве Скорохода случайных процессов

$$X_{n,N}^{\{r\}}(t) = \sum_{i=1}^{[tN]} I_{\{\eta_i=r\}}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

к эмпирическому процессу, где обобщенная схема размещения η_1, \dots, η_N определяется случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, имеющими распределение степенного ряда. Заметим, что случайная величина $X_{n,N}^{\{r\}}(t)$ – число ячеек среди первых $[tN]$ ячеек, содержащих r частиц, в обобщенной схеме размещения n частиц по N ячейкам.

В работе [8] изучалась сходимость по распределению случайных процессов

$$X_{n,N}(t) = \sum_{i=1}^{[tN]} \eta_i, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

В частности, в [8] доказана теорема.

Теорема А. Пусть η_1, \dots, η_N – обобщенная схема размещения rn частиц по N ячейкам, где r – фиксированное натуральное число, со случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, имеющими распределение степенного ряда со свойством $A0(r)$. Если n фиксировано, а $N \rightarrow \infty$, то

$$\frac{X_{n,N}}{r} \xrightarrow{D} nF_n. \quad (3)$$

В настоящей работе получены аналоги теоремы А для случайных процессов $X_{n,N}^{\{r\}}$. Их доказательства основаны на доказательстве близости в пространстве Скорохода распределений случайных процессов $rX_{n,N}^{\{r\}}$ и $X_{n,N}$, что дает возможность использовать теорему А.

В следующем примере приведен случай, когда случайные процессы $rX_{n,N}^{\{r\}}$ и $X_{n,N}$ совпадают.

Пример. Рассмотрим обобщенную схему размещения rn частиц по N ячейкам со случайными величинами $\xi_i = rI_{A_i}$, $1 \leq i \leq N$, где I_{A_i} – индикаторы независимых равновероятных событий A_i таких, что $0 < \mathbf{P}(A_i) < 1$. Случайные величины ξ_i имеют распределение

степенного ряда, определенное функцией $B(\beta) = b_0 + \frac{b_1}{r} \beta^r$. Вероятность $\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = rn\} = 0$ при $n > N$. Поэтому формула (1) не имеет смысла. При $n = N$ $\eta_i = r$, $1 \leq i \leq N$. Таким образом, этот случай также не представляет интереса. Пусть $n < N$. Тогда каждая ячейка содержит 0 или r частиц и $rX_{n,N}^{\{r\}}(t)$ – количество частиц, содержащихся в первых $[tN]$ ячейках. То есть случайные процессы $rX_{n,N}^{\{r\}}$ и $X_{n,N}$ совпадают. Поэтому, по теореме 7 из [8], если n фиксировано, а $N \rightarrow \infty$, то

$$X_{n,N}^{\{r\}} \xrightarrow{D} nF_n.$$

Будем считать β таким, что $\mathbf{E}\xi_i(\beta) = \frac{rn}{N}$, т. е. $rp_r(\beta) = \frac{rn}{N}$. Так как $\frac{n}{N} < 1$, это уравнение имеет решение, и оно единственно. Тогда дисперсия случайной величины $\xi_i(\beta)$ равна $\sigma^2(\beta) = r^2 \frac{n}{N} (1 - \frac{n}{N})$. Рассмотрим случайные процессы

$$Y_{n,N}^{\{r\}}(t) = \frac{X_{n,N}^{\{r\}}(t) - [tN] \frac{rn}{N}}{\sqrt{n(1 - \frac{n}{N})}}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и

$$Y_{n,N}(t) = \frac{X_{n,N}(t) - [tN] \mathbf{E}\xi_i(\beta)}{\sqrt{N} \sigma(\beta)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда

$$Y_{n,N}^{\{r\}}(t) = \frac{rX_{n,N}^{\{r\}}(t) - [tN] \frac{rn}{N}}{\sqrt{Nr^2 \frac{n}{N} (1 - \frac{n}{N})}} = Y_{n,N}(t),$$

где $0 \leq t \leq 1$. То есть случайные процессы $Y_{n,N}^{\{r\}}$ и $Y_{n,N}$ совпадают. Поэтому, по теореме 4 из [8], если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n(1 - \frac{n}{N}) \rightarrow \infty$, то

$$Y_{n,N}^{\{r\}} \xrightarrow{D} W_0.$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть случайные величины η_1, \dots, η_N образуют обобщенную схему размещения rn частиц по N ячейкам, где r, n – фиксированные натуральные числа, со случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, имеющими распределение степенного ряда со свойством $A0(r)$. Тогда

$$X_{n,N}^{\{r\}} \xrightarrow{D} nF_n \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Справедливо следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. Пусть случайные величины η_1, \dots, η_N образуют обобщенную схему размещения $(r_1 - r)n + rN$ частиц по N ячейкам, где n, r и r_1 – фиксированные натуральные числа, со случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, имеющими распределение степенного ряда со свойством $Ar(r_1)$. Тогда

$$X_{n,N}^{\{r_1\}} \xrightarrow{D} nF_n \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Мы будем рассматривать случайные процессы

$$X_{n,N}^c(t) = X_{n,N}(t) - r[Nt], \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Справедливо следующее обобщение теоремы А.

Теорема А'. Пусть случайные величины η_1, \dots, η_N образуют обобщенную схему размещения $(r_1 - r)n + rN$ частиц по N ячейкам, где n, r и r_1 – фиксированные натуральные числа, со случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, имеющими распределение степенного ряда со свойством $Ar(r_1)$. Тогда

$$\frac{X_{n,N}^c}{r_1 - r} \xrightarrow{D} nF_n \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Доказательства

При доказательстве теоремы 1 мы будем использовать следующую лемму.

Лемма. Пусть $0 < C < R, C < 1, 0 < \lambda < \infty, k$ – неотрицательное целое число. Пусть условие $A0(r)$ выполнено для некоторого $r \in \mathbf{N}, \beta = \beta(N)$ такое, что $Np_r(\beta) = \lambda$. Тогда при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S_N = rk\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + Q_N,$$

где

$$|Q_N| \leq C_1 N \beta^{r+1}, \quad \beta < C, \\ C_1 = \left(\frac{b_r}{r!b_0}\right)^2 C^{r-1} + \frac{1}{b_0} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{b_n C^{n-r+1}}{n!}.$$

Лемма является следствием леммы 2.4 из [9].

Доказательство теоремы 1. Пусть $\beta = \beta_N$ такое, что $Np_r(\beta) = 1, N \in \mathbf{N}$. Тогда по лемме получаем

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = rn\} = \frac{e^{-1}}{n!} (1 + o(1)).$$

Учитывая, что $\beta = O\left(\frac{1}{N^{1/r}}\right)$, из (2) заключаем, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i > r\} = O\left(\frac{1}{N^{\frac{r+1}{r}}}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} |X_{n,N}(t) - rX_{n,N}^{\{r\}}(t)| > 0\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} \sum_{i=1}^{[tN]} \eta_i I_{\{\eta_i > r\}} > 0\right\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} \sum_{i=1}^{[tN]} \xi_i I_{\{\xi_i > r\}} > 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = rn\right\}}{\mathbf{P}\{\sum_{i=1}^N \xi_i = rn\}} \\ &\leq (1 + o(1)) en! \sum_{i=1}^N \mathbf{P}\{\xi_i > r\} \\ &= (1 + o(1)) en! N \mathbf{P}\{\xi_i > r\} \\ &= (1 + o(1)) en! N O\left(\frac{1}{N^{\frac{r+1}{r}}}\right) = o(1). \quad (7) \end{aligned}$$

Так как

$$\rho(x, y) \leq \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in D[0, 1],$$

то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\rho(X_{n,N}, rX_{n,N}^{\{r\}}) < \varepsilon\right\} \\ &> \mathbf{P}\left\{\sup_{t \in [0,1]} |X_{n,N}(t) - rX_{n,N}^{\{r\}}(t)| < \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7) находим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\rho(X_{n,N}, rX_{n,N}^{\{r\}}) < \varepsilon\right\} \rightarrow 1 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Из (8) и (3) следует (4). \square

Доказательство теоремы 2. Заметим, что распределения случайных величин $\xi'_i = \xi_i - r, 1 \leq i \leq N$, удовлетворяют свойству $A0(r_1 - r)$. Рассмотрим η'_1, \dots, η'_N – обобщенную схему размещения $(r_1 - r)n$ частиц по N ячейкам, определенную случайными величинами $\xi'_i = \xi_i - r, 1 \leq i \leq N$. Обозначим случайные векторы:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N), \quad \boldsymbol{\xi}' = (\xi'_1, \dots, \xi'_N),$$

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N), \quad \mathbf{r} = (r, \dots, r).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta'_1 = k_1, \dots, \eta'_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{k} \left| \sum_{i=1}^N \xi'_i = (r_1 - r)n\right.\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\boldsymbol{\xi} - \mathbf{r} = \mathbf{k} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i = (r_1 - r)n + rN\right.\right\} \\ &= \mathbf{P}\{\eta_1 - r = k_1, \dots, \eta_N - r = k_N\}, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, \dots, k_N – такие неотрицательные целые числа, что $k_1 + k_2 + \dots + k_N = (r_1 - r)n$. Итак, распределения случайных векторов

$$(\eta'_1, \dots, \eta'_N), (\eta_1 - r, \dots, \eta_N - r)$$

совпадают. Следовательно, совпадают распределения случайных процессов $X_{n,N}^{\{r_1\}}$ и $X_{n,N}^{\{rr_1\}} = \sum_{i=1}^{[Nt]} I_{\{\eta'_i=r_1-r\}}$, $t \in [0, 1]$. По теореме 1

$$X_{n,N}^{\{rr_1\}} \xrightarrow{D} nF_n \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Поэтому справедливо (5). □

Доказательство теоремы А'. Из совпадения распределений случайных векторов $(\eta'_1, \dots, \eta'_N), (\eta_1 - r, \dots, \eta_N - r)$ следует, что распределения случайных процессов $X_{n,N}^c$ и $X'_{n,N} = \sum_{i=1}^{[Nt]} \eta'_i$, $t \in [0, 1]$, совпадают. По теореме А

$$\frac{X'_{n,N}}{r_1 - r} \xrightarrow{D} nF_n \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Поэтому справедливо (6). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афанасьев В. И.* Случайные блуждания и ветвящиеся процессы. М.: МИАН, 2007. 188 с.
2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Физматлит, 1977. 352 с.
3. *Колчин А. В.* Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2003. Т. 18, вып. 4. С. 148–157. doi: 10.4213/dm224
4. *Колчин А. В., Колчин В. Ф.* О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика. 2006. Т. 18, вып. 4. С. 113–127. doi: 10.4213/dm76
5. *Колчин В. Ф.* Один класс предельных теорем для условных распределений // Литовский математический сборник. 1968. Т. 8, вып. 1. С. 53–63. doi: 10.15388/LMJ.1968.20181
6. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

Поступила в редакцию / received: 16.01.2026; принята к публикации / accepted: 27.04.2026.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Чупрунов Алексей Николаевич

д-р физ.-мат. наук, профессор
e-mail: achuprunov@mail.ru

Яковлев Кирилл Николаевич

студент
e-mail: ktq0x@yandex.ru

7. *Павлов Ю. Л.* Случайные леса. Петрозаводск: Карел. науч. центр РАН, 1996. 259 с.

8. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Принцип инвариантности для чисел частиц в ячейках обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 3. С. 81–99. doi: 10.4213/dm1738

9. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* Poisson limit theorems for the generalized allocation scheme // Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2019. Vol. 49. P. 77–96.

REFERENCES

1. *Afanasyev V. I.* Random walks and branching processes. Moscow: MIAN; 2007. 158 p. (In Russ.)
2. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. New York: John Wiley & Sons; 1968. 253 p. doi: 10.1002/9780470316962
3. *Kolchin A. V.* On limit theorems for the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2003;13(6):627–636. doi: 10.1515/156939203322733336
4. *Kolchin A. V., Kolchin V. F.* On transition of distributions of sums of independent identically distributed random variables from one lattice to another in the generalised allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2006;16(6):527–540. doi: 10.1515/156939206779218023
5. *Kolchin V. F.* A certain class of limit theorems for conditional distributions. *Litovskii matematicheskii sbornik = Lithuanian Mathematical Journal.* 1968;8(1):53–63. (In Russ.). doi: 10.15388/LMJ.1968.20181
6. *Kolchin V. F.* Random Graphs. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342
7. *Pavlov Yu. L.* Random Forests. Utrecht: VSP; 2000. 122 p. doi: 10.1515/9783110941975
8. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* Invariance principle for numbers of particles in cells of a general allocation scheme. *Discrete Math. Appl.* 2023;35(3):81–99. (In Russ.). doi: 10.4213/dm1738
9. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* Poisson limit theorems for the generalized allocation scheme. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* 2019;49:77–96.

CONTRIBUTORS:

Chuprunov, Aleksey

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor

Iakovlev, Kirill

Student