Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 47–53
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2026. No. 6. P. 47–53
DOI: 10.17076/mat2282

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 515.12

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ

А. В. Иванов

Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия, 185910)

В работе дано определение топологической размерности $\dim\xi$ максимальных сцепленных систем (м.с.с.) замкнутых подмножеств метризуемого компакта X. По определению $\dim\xi$, есть точная нижняя грань нижних размерностей квантования м.с.с. ξ по всем метрикам, совместимым с топологией X. Предложенное определение $\dim\xi$ мотивировано теоремой Понтрягина – Шнирельмана, характеризующей топологическую размерность метризуемого компакта как инфимум нижних емкостных размерностей этого компакта по всем совместимым метрикам. Для любого метризуемого компакта X и любой м.с.с. ξ выполняется неравенство $\dim\xi \leqslant \dim X$. При этом для конечномерного метризуемого компакта X справедлива следующая теорема о промежуточных значениях размерности $\dim\xi$: для любого целого числа k, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant k \leqslant \dim X$, существует м.с.с. ξ_k такая, что $\dim\xi_k = k$. Доказано, что для всех рассмотренных ранее м.с.с. с известными значениями размерностей квантования размерность $\dim\xi$ является целым числом. В частности, построенные по технологии Е. В. Кашубы м.с.с. $\xi(A, B)$ всегда нульмерны в топологическом смысле.

Ключевые слова: метрический компакт; суперрасширение; размерность квантования; емкостная размерность; теорема Понтрягина – Шнирельмана

Для цитирования: Иванов А. В. О топологической размерности максимальных сцепленных систем // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 47–53. doi: 10.17076/mat2282

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. V. Ivanov. ON THE TOPOLOGICAL DIMENSION OF MAXIMAL LINKED SYSTEMS

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We define the topological dimension $\dim\xi$ of maximal linked systems (m.l.s.) of closed subsets of a metrizable compact space X. By definition, $\dim\xi$ is the greatest lower bound of the lower quantization dimensions of the m.l.s. ξ over all metrics compatible with the topology of X. The proposed definition of $\dim \xi$ is motivated by the Pontryagin – Shnirelman theorem, which characterizes the topological dimension of a metrizable compact space as the infimum of the lower box dimensions of this compactum over all compatible metrics. For any metrizable compact space X and any m.l.s. ξ, the inequality $\dim \xi \leqslant \dim X$ holds. Moreover, for a finite-dimensional metrizable compactum X, the following theorem on intermediate values of the dimension $\dim \xi$ holds: for any integer k satisfying the inequalities $0 \leqslant k \leqslant \dim X$, there exists a m.l.s. ξ_k such that $\dim \xi_k = k$. It is proved that for all previously considered maximal linked systems with known values of the quantization dimensions, the dimension $\dim \xi$ is an integer. In particular, m.l.s. $\xi(A, B)$ constructed using E. V. Kashuba's technology are always zero-dimensional in the topological sense.

Keywords: metric compactum; superextension; quantization dimension; box dimension; Pontryagin – Schnirelmann theorem

For citation: Ivanov A. V. On the topological dimension of maximal linked systems. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2026. No. 6. P. 47–53. doi: 10.17076/mat2282

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

В настоящей работе дано определение топологической размерности максимальных сцепленных систем (м.с.с.) – элементов суперрасширения λX метризуемого компакта X. В основе определения лежит понятие размерности квантования $\dim_\lambda(\xi, \rho)$ м.с.с. ξ метрического компакта (X, ρ), которое впервые было рассмотрено (под названием «порядок метрической аппроксимации») в совместной статье автора и О. В. Фомкиной [5]. Размерность $\dim_\lambda(\xi, \rho)$ является частным случаем общего понятия размерности квантования точек пространств вида $\mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ – полунормальный метризуемый функтор, а X – метрический компакт [3]. В ту же общую функториальную схему укладывается и классическое понятие емкостной размерности $\dim_B F$ замкнутого подмножества F метрического компакта (X, ρ). В такой ситуации естественно предполагать наличие общих свойств у размерностей квантования м.с.с. и емкостных размерностей.

В 1932 году Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман доказали следующую фундаментальную теорему:

Теорема 1 [8]. *Топологическая размерность $\dim X$ метризуемого компакта X совпадает с точной нижней гранью нижних емкостных размерностей этого компакта по всем метрикам, совместимым с топологией X.*

Этот результат мотивирует исследование точной нижней грани (нижних) размерностей квантования точек $\xi \in \lambda X$ по всем совместимым метрикам на X, которую (по аналогии) можно назвать топологической размерностью $\dim \xi$ м.с.с. ξ. При этом оказывается, что всегда $\dim \xi \leqslant \dim X$. В работе доказано (теорема 3), что для любого метризуемого компакта X конечной размерности $\dim X = n$ и любого целого числа k, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant k \leqslant n$, существует м.с.с. $\xi_k \in \lambda X$, для которой $\dim \xi_k = k$.

В статье А. А. Иванова [4] доказана следующая теорема о промежуточных значениях нижней размерности квантования максимальных сцепленных систем:

Теорема 2 [4]. *Для любого метрического компакта (X, ρ) и любого неотрицательного числа b, не превосходящего нижней емкостной размерности X, существует м.с.с. $\xi_b \in \lambda X$, нижняя размерность квантования которой равна b.*

Этот результат был получен путем построения конкретных систем ξ_b с использованием конструкции $\xi(A, B)$, предложенной Е. В. Кашубой [2]. В настоящей работе показано (теорема 4), что топологическая размерность всех м.с.с. вида $\xi(A, B)$ равна нулю. Таким образом, во всех известных ранее примерах и конструкциях, дающих конкретные числовые значения размерностей квантования максимальных сцепленных систем, топологическая размерность м.с.с. оказывается целым числом. Но остается открытым следующий вопрос: верно ли, что $\dim \xi$ есть целое число (или бесконечность) для любой м.с.с. $\xi \in \lambda X$?

В дальнейшем рассматриваются только метризуемые компакты, замыкание множества обозначается квадратными скобками. Система ξ замкнутых подмножеств компакта X называется сцепленной, если любые два ее элемента имеют непустое пересечение. Множество максимальных (по включению) сцепленных систем («суперрасширение X») обозначается через λX и наделяется топологией, открытую предбазу которой образуют множества вида $O(U) = \{\xi$: существует $F \in \xi$ такое, что $F \subset U\}$, где U открыто в X. В каждом элементе $F \in \xi$ содержится минимальный (по включению) элемент ξ. Замыкание объединения всех минимальных элементов ξ называется носителем данной системы и обозначается через $\mathrm{supp}(\xi)$. М.с.с. с одноточечным носителем – это в точности системы вида $\xi_x = \{F = [F] : x \in F\}$, где $x \in X$. Если отождествить каждую точку $x \in X$ с м.с.с. ξ_x, мы получим топологическое вложение X в λX. Множество максимальных сцепленных систем, носитель которых содержит не более n точек, обозначается через $\lambda_n X$ ($n \in \mathbb{N}$). Объединение $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n X$ всегда всюду плотно в λX. Если на X задана совместимая метрика ρ, то продолжение ρ_λ этой метрики на λX (выше отмечено, что X можно считать подмножеством λX) определяется по формуле:

$$\rho_\lambda(\xi, \eta) = \inf\{\varepsilon : B(F, \varepsilon) \in \eta$$

$$\text{для любого } F \in \xi\},$$

где $B(F, \varepsilon) = \{x : \rho(x, F) \leqslant \varepsilon\}$ – замкнутая ε-окрестность F. Доказательство всех указанных выше фактов можно найти в [7, гл. 7].

Пусть (X, ρ) – метрический компакт, $\xi \in \lambda X$ и $\varepsilon > 0$. Определим число $N(\xi, \varepsilon, \rho)$ как наименьшую мощность носителя ε-приближения ξ по метрике ρ_λ:

$$N(\xi, \varepsilon, \rho) = \min\{n : \rho_\lambda(\xi, \lambda_n X) \leqslant \varepsilon\}.$$

Если м.с.с. ξ имеет бесконечный носитель, то $N(\xi, \varepsilon, \rho)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Скорость этого возрастания характеризуют верхняя и нижняя размерности квантования ξ по метрике ρ:

$$\overline{\dim}_\lambda(\xi, \rho) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon, \rho)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_\lambda(\xi, \rho) = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon, \rho)}{-\log \varepsilon}.$$

Очевидно, что всегда $\underline{\dim}_\lambda(\xi, \rho) \leqslant \overline{\dim}_\lambda(\xi, \rho)$. В случае равенства используют обозначение $\dim_\lambda(\xi, \rho)$ и говорят о размерности квантования ξ.

Нам понадобится также понятие емкостной размерности замкнутого подмножества метрического компакта (X, ρ). Пусть множество F замкнуто в X и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $N(F, \varepsilon, \rho)$ наименьшее число точек в ε-сети для F по метрике ρ. Верхняя и нижняя емкостные размерности множества F определяются по формулам:

$$\overline{\dim}_B(F, \rho) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(F, \varepsilon, \rho)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_B(F, \rho) = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(F, \varepsilon, \rho)}{-\log \varepsilon}.$$

Легко проверить, что $N(F, \varepsilon, \rho)$ – это в точности наименьшее число точек в ε-приближении F по метрике Хаусдорфа ρ_H. Таким образом, с точки зрения теории метризуемых полунормальных функторов [3] приведенные выше определения размерностей ξ и F совпадают.

В [5] доказано, что для любой м.с.с. $\xi \in \lambda X$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_\lambda(\xi, \rho) &\leqslant \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi), \rho), \\ \underline{\dim}_\lambda(\xi, \rho) &\leqslant \underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi), \rho). \end{aligned} \tag{1}$$

Как уже было отмечено, согласно теореме Понтрягина – Шнирельмана

$$\dim X = \inf\{\underline{\dim}_B(X, \rho) :$$
$$\rho \text{ – совместимая метрика на } X\},$$

где $\dim X$ – топологическая размерность компакта X.

Определение. Пусть $\xi \in \lambda X$. Топологической размерностью $\dim \xi$ м.с.с. ξ будем называть следующую величину:

$$\dim \xi = \inf\{\underline{\dim}_\lambda(\xi, \rho) :$$
$$\rho \text{ – совместимая метрика на } X\}.$$

В силу неравенства (1), монотонности емкостных размерностей по замкнутым подмножествам [6, гл. 2] и теоремы Понтрягина – Шнирельмана для любого X и любой м.с.с. $\xi \in \lambda X$ имеет место неравенство

$$\dim \xi \leqslant \dim X.$$

Следующая теорема о промежуточных значениях $\dim \xi$ вытекает из результатов работы [5].

Теорема 3. *Пусть X – конечномерный компакт размерности $\dim X = n$. Тогда для любого целого числа k, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant k \leqslant n$, существует м.с.с. $\xi_k \in \lambda X$, для которой $\dim \xi_k = k$.*

Доказательство. Зафиксируем в X собственное замкнутое подмножество F размерности k. Такое подмножество в конечномерном компакте всегда существует [1, гл. 5]. Выберем точку

$x \in X \setminus F$ и рассмотрим следующую сцепленную систему замкнутых подмножеств X:

$$\eta = \{F\} \cup \{\{x, y\} : y \in F\}.$$

Как известно [5], система η содержится в единственной м.с.с., состоящей из надмножеств элементов η, которую (следуя [5]) обозначим через $\xi(x, F)$. При этом в силу предложения 4 из [5] имеет место равенство

$$\underline{\dim}_\lambda(\xi(x, F), \rho) = \underline{\dim}_B(F, \rho) \qquad (2)$$

для любой совместимой метрики ρ на X. Инфимум левой части равенства (2) по определению равен $\dim \xi(x, F)$. Известно, что емкостная размерность F, вычисленная относительно X по метрике ρ, заданной на X, совпадает с емкостной размерностью F относительно метрики $\rho|_F$. В то же время по теореме Хаусдорфа [9] любая совместимая метрика на F продолжается до совместимой метрики на X. Таким образом, согласно теореме Понтрягина – Шнирельмана инфимум правой части (2) равен $\dim F$. Таким образом, $\xi_k = \xi(x, F)$ – искомая система. □

Замечание 1. Если $\dim X = \infty$, мы можем утверждать только, что существует $\xi \in \lambda X$ размерности $\dim \xi = \infty$. Для построения такой системы достаточно взять собственное замкнутое подмножество $F \subset X$ бесконечной размерности, точку $x \in X \setminus F$ и положить $\xi = \xi(x, F)$. Для бесконечномерного X для конечных значений k вопрос о справедливости утверждения теоремы 3 остается открытым. Дело в том, что существуют бесконечномерные метризуемые компакты, в которых любое замкнутое подмножество имеет размерность либо 0, либо бесконечность [1, гл. 9].

В дальнейшем нам понадобится следующая конструкция, предложенная Е. В. Кашубой [2]. Пусть $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ – непересекающиеся последовательности в X, состоящие из попарно различных точек, и $[A] \cap [B] \neq \varnothing$. Для $i \in \mathbb{N}$ положим

$$A_i = \{a_1, \ldots, a_i, b_i\}, \ B_i = \{b_1, \ldots, b_i, a_{i+1}\}.$$

Очевидно, что система

$$\eta(A, B) = \{A_i, B_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{[A], [B]\}$$

является сцепленной. В [2] показано, что $\eta(A, B)$ содержится в единственной м.с.с. $\xi(A, B)$, для которой множества A_i, B_i являются минимальными (по включению) элементами. Если при этом $[A] \cap B = [B] \cap A = \varnothing$, то минимальными элементами м.с.с. $\xi(A, B)$ являются также $[A]$ и $[B]$. Следующая лемма является обобщением леммы 2 из [4].

Лемма 1. *Если для системы $\xi(A, B)$ при некотором $i > 1$ выполняется неравенство $\rho(b_i, \{a_2, \ldots, a_i\}) \leqslant \varepsilon$, то*

$$N(\xi(A, B), \varepsilon, \rho) \leqslant 2i. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим систему $\{A_k : k \leqslant i\} \cup \{B_k : k < i\} \cup \{B_i \setminus \{a_{i+1}\}\}$. Легко проверить, что эта система является сцепленной и содержится в единственной м.с.с. ν, элементы которой являются надмножествами исходной системы. Таким образом, лишь один минимальный элемент м.с.с. ν – множество $B_i \setminus \{a_{i+1}\}$ – не содержится в системе $\xi(A, B)$. Рассмотрим множество $H = B(B_i \setminus \{a_{i+1}\}, \varepsilon)$. В силу неравенства $\rho(b_i, \{a_2, \ldots, a_i\}) \leqslant \varepsilon$ найдется точка a_k $(2 \leqslant k \leqslant i)$, которая содержится в H. И тогда $B_{k-1} \subset H$, откуда следует, что $H \in \xi(A, B)$.

Итак, $B(F, \varepsilon) \in \xi(A, B)$ для любого $F \in \nu$, следовательно, $\rho_\lambda(\xi(A, B), \nu) \leqslant \varepsilon$. Неравенство (3) тем самым доказано, поскольку $|\mathrm{supp}(\nu)| = 2i$. □

Лемма 2. *Пусть X – метризуемый компакт, в котором даны две непересекающиеся последовательности попарно различных точек $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$, имеющие общий предел p. Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$, монотонно сходящейся к нулю, на X существует совместимая с топологией метрика ρ такая, что $\rho(a_i, b_i) \leqslant \varepsilon_i$ для любого i.*

Доказательство. Если разность $X \setminus (A \cup B)$ конечна, то компакт X гомеоморфен сходящейся последовательности, и тогда искомую метрику ρ можно определить следующим образом:
$\rho(x, y) = \varepsilon_1$ при $x \in X \setminus (A \cup B \cup \{p\})$ и $y \neq x$;
$\rho(a_k, b_k) = \varepsilon_k$;
$\rho(a_k, y) = \rho(b_k, y) = \varepsilon_k$ при $y \in \{a_i : i > k\} \cup \{b_i : i > k\} \cup \{p\}$.
Проверка аксиом метрики для ρ и совместимости этой метрики с топологией X не представляет труда.

Пусть теперь $|X \setminus (A \cup B)| \geqslant \omega_0$. Зафиксируем счетную базу $\mathcal{B}$ компакта X. Упорядоченную пару (U, V) элементов $\mathcal{B}$ назовем допустимой, если
1) $[U] \subset V$;
2) $p \in U \cup (X \setminus [V])$.
Для каждой допустимой пары (U, V) выберем непрерывную функцию $f_{(U,V)} : X \to [0, 1]$, удовлетворяющую следующим условиям:
$f_{(U,V)}(x) = 0$ при $x \in [U]$;
$f_{(U,V)}(x) = 1$ при $x \in X \setminus V$.
Обозначим множество таких функций через $\mathcal{D}$. Легко проверить, что для любых двух различных точек $x, y \in X$ существует допустимая

пара (U, V), для которой $x \in U$, $y \in X \setminus V$, и значит, $f_{(U,V)}(x) = 0$, $f_{(U,V)}(y) = 1$. (Другими словами, семейство функций $\mathcal{D}$ разделяет точки X.)

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{D}_k = \{f \in \mathcal{D} : f(a_i) = f(b_i), \quad i \geqslant k\}.$$

Если в допустимой паре (U, V) множество V не пересекается с $A \cup B \cup \{p\}$, то $f_{(U,V)} \in \mathcal{D}_1$. Поскольку разность $X \setminus (A \cup B)$ бесконечна, отсюда следует, что множество $\mathcal{D}_1$ также бесконечно. В силу условия 2) из определения допустимой пары каждая функция $f \in \mathcal{D}$ принимает значение 0 или 1 в некоторой окрестности точки p. Следовательно, любая функция $f \in \mathcal{D}$ попадает в множества $\mathcal{D}_k$ при достаточно больших значениях k.

Итак,

$$|\mathcal{D}_1| = \omega_0; \ \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{D}_k \subset \ldots; \\ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_k = \mathcal{D}.$$

Зафиксируем теперь возрастающую последовательность натуральных чисел n_k такую, что

$$\frac{1}{2^{n_k}} \leqslant \varepsilon_k.$$

Занумеруем элементы $\mathcal{D}$ натуральными числами

$$\mathcal{D} = \{f_i : i \in \mathbb{N}\}$$

так, что $f_i \in \mathcal{D}_k$ для любого $i \leqslant n_k$ и $k \in \mathbb{N}$. При такой нумерации $f_i(a_k) = f_i(b_k)$ при $i \leqslant n_k$.

Рассмотрим теперь диагональное произведение Φ отображений f_i:

$$\Phi = \Delta_{i \in \mathbb{N}} f_i : X \to \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]_i,$$

действующее по формуле $\Phi(x) = (f_i(x) : i \in \mathbb{N})$. Поскольку семейство функций $\mathcal{D}$ разделяет точки X, отображение Φ является топологическим вложением компакта X в гильбертов куб $Q = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0, 1]_i$. Зададим на Q стандартную метрику ρ, определяемую по формуле

$$\rho(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|x_i - y_i|}{2^i},$$

где x_i, y_i – i-е координаты точек $x, y \in Q$.

Покажем, что ρ является искомой метрикой на X, если отождествить точки X с их образами в Q при отображении Φ. В самом деле, как уже было отмечено, $f_i(a_k) = f_i(b_k)$ при $i \leqslant n_k$. Следовательно,

$$\rho(\Phi(a_k), \Phi(b_k)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|f_i(a_k) - f_i(b_k)|}{2^i} \\ \leqslant \sum_{i > n_k} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n_k}} \leqslant \varepsilon_k,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 4. *Топологическая размерность любой м.с.с. вида $\xi(A, B)$ равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ и p – общая предельная точка множеств A и B. Выберем последовательности $A' = \{a_{m_i} : i \in \mathbb{N}\}$ и $B' = \{b_{k_i} : i \in \mathbb{N}\}$, сходящиеся к p[1], так, что выполняются неравенства

$$m_1 > 1 \text{ и } m_i < k_i < m_{i+1} \text{ при } i \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Положим далее

$$\varepsilon_i = \frac{1}{(2k_i)^i}. \tag{5}$$

Согласно лемме 2, примененной к последовательностям точек A', B' и числовой последовательности ε_i, зададим на X метрику ρ, для которой

$$\rho(a_{m_i}, b_{k_i}) \leqslant \varepsilon_i. \tag{6}$$

В силу неравенств (4) и (6) для любого i

$$\rho(b_{k_i}, \{a_2, \ldots, a_{k_i}\}) \leqslant \varepsilon_i.$$

Следовательно, по лемме 1

$$N(\xi(A, B), \varepsilon_i, \rho) \leqslant 2k_i. \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует оценка нижней размерности квантования системы $\xi(A, B)$ по метрике ρ:

$$\underline{\dim}_\lambda(\xi(A, B), \rho) \leqslant \underline{\lim}_{i \to \infty} \frac{\log N(\xi(A, B), \varepsilon_i, \rho)}{-\log \varepsilon_i} \\ \leqslant \underline{\lim}_{i \to \infty} \frac{\log 2k_i}{\log (2k_i)^i} = 0.$$

Таким образом, $\dim \xi(A, B) = 0$.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 3 мы использовали м.с.с. $\xi(x, F)$, для которой $\dim \xi(x, F) = \dim F = k$. При этом множество F было единственным минимальным по

[1]Здесь m_i и k_i – индексы точек множеств A и B, соответствующие исходной нумерации, относительно которой построена м.с.с. $\xi(A, B)$.

включению элементом $\xi(x,F)$ ненулевой размерности. Отмеченный факт позволяет предположить, что в подобной ситуации для любой м.с.с. ξ будет иметь место равенство $\dim\xi = \dim F$, если F – единственный минимальный элемент ξ, размерность которого отлична от нуля. Однако с помощью теоремы 4 нетрудно показать, что это не так. Соответствующий контрпример можно построить в любом n-мерном компакте X для любого $k = \dim F \leqslant n$.

В самом деле, пусть $\dim X = n$ и $k \leqslant n$. В компакте X можно выбрать связное замкнутое подмножество G размерности k [1, гл. 5]. Возьмем две различные точки $x, y \in G$ и их непересекающиеся окрестности U и V. В силу теоремы суммы для размерности dim хотя бы одно из множеств $G \setminus U$ или $G \setminus V$ имеет размерность k. Будем считать, что k-мерно первое множество, и положим

$$F = G \setminus U.$$

Поскольку G связно, граница U содержит точки F, и мы можем выделить последовательность $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ точек U, сходящуюся к некоторой точке $p \in F$. Пусть $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ – счетное всюду плотное подмножество F, не содержащее точку p. Рассмотрим систему $\xi(A,B)$. Очевидно, что $[A] \cap B = [B] \cap A = \varnothing$, следовательно, множество минимальных элементов системы $\xi(A,B)$ совпадает с системой $\eta(A,B)$, а значит, содержит единственный элемент положительной размерности – множество F. При этом в силу теоремы 4 $\dim\xi(A,B) = 0$. Таким образом, система $\xi(A,B)$ – искомый контрпример. $\square$

Напомним, что теорема 3 выше названа теоремой о промежуточных значениях размерности максимальных сцепленных систем в конечномерном компакте. Однако это наименование не совсем корректно. Действительно, для любой м.с.с. $\xi \in \lambda X$ имеет место неравенство $\dim\xi \leqslant \dim X$ и, как установлено в теореме 3, для каждого значения k из промежутка $[0, \dim X]$ существует м.с.с. размерности k. Но в теореме 3 идет речь только о целых значениях. В рассмотренных выше примерах значения $\dim\xi$ также были исключительно целыми, что справедливо (как легко проверить) и для всех м.с.с., рассмотренных в работе [5]. При этом остается открытым следующий важный вопрос:

Верно ли, что размерность $\dim\xi$ *равна целому числу (или бесконечности) для любой м.с.с.* ξ*?*

Литература

1. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1975. 576 с.

2. *Вакулова (Кашуба) Е. В.* О носителях максимальных сцепленных систем // Труды ПГУ. Математика. 2004. Вып. 11. С. 3–8.

3. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер // Труды института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 139–148. doi: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-139-148

4. *Иванов А. А.* О размерности квантования максимальных сцепленных систем // Сиб. матем. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 517–523. doi: 10.33048/smzh.2024.65.306

5. *Иванов А. В., Фомкина О. В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14. doi: 10.17076/mat1034

6. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002. 404 с.

7. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 252 с.

8. *Pontryagin L., Shnirelman L.* On one metric property of dimension // Ann. Math. 1932. Vol. 33. P. 156–162.

9. *Torunczyk H.* A short proof of Hausdorff's theorem on extending metrics // Fundam. Math. 1973. Vol. 77. P. 191–193.

References

1. *Aleksandrov P. S., Pasynkov B. A.* Introduction to dimension theory. Moscow: Nauka; 1975. 576 p. (In Russ.)

2. *Vakulova (Kashuba) Ye. V.* On the supports of maximal linked systems. *Trudy Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika = Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser. Mathematics.* 2004;11:3–8.(In Russ.)

3. *Ivanov A. V.* On intermediate values of quantization dimensions of idempotent measures. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN = Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch RAS.* 2024;30(3):139–148. doi: 10.21538/0134-4889-2024-30-3-139-148

4. *Ivanov A. A.* On the quantization dimension of maximal linked systems. *Siberian Mathematical Journal.* 2024;65(3):575–581. doi: 10.1134/S0037446624030066

5. *Ivanov A. V., Fomkina O. V.* On the order of metric approximation of maximal linked systems and box dimensions. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra*

RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2019;7:5–14. (In Russ.). doi: 10.17076/mat1034

6. *Pesin Y. B.* Dimension theory in dynamical systems. Contemporary views and applications. Chicago: University of Chicago Press; 1997. 304 p.

7. *Fedorchuk V. V., Filippov V. V.* General topology. Basic constructions. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta; 1988. 252 p.

8. *Pontryagin L., Shnirelman L.* On one metric property of dimension. *Ann. Math.* 1932;33:156–162.

9. *Torunczyk H.* A short proof of Hausdorff's theorem on extending metrics. *Fundam. Math.* 1973;77:191–193.

Поступила в редакцию / received: 13.01.2026; принята к публикации / accepted: 17.03.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Иванов Александр Владимирович

д-р физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник

e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Ivanov, Aleksander

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher