Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 139–147
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2026. No. 6. P. 139–147
DOI: 10.17076/mat2272

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ С ЗАДАННЫМ МАКСИМАЛЬНЫМ УРОВНЕМ ЗАПОЛНЕНИЯ ЯЧЕЕК

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

Рассматриваемый класс схем размещения частиц по ячейкам характеризуется введением верхнего ограничения уровней заполнения ячеек с его обязательным достижением хотя бы в одной ячейке каждого исхода каждой схемы. Схемы различаются между собой парными качествами составляющих их элементов (ячеек и частиц) по их различимостям. Из направлений исследования схем выделяются представляющие наибольший интерес по нестандартным приемам доасимптотического анализа и получению новых результатов – это нумерованные бесповторные перечисления исходов схем и нахождение их чисел.

Ключевые слова: размещение частиц; максимальный уровень заполнения ячеек; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схем размещения частиц с заданным максимальным уровнем заполнения ячеек // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 139–147. doi: 10.17076/mat2272

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF PARTICLE ALLOCATION SCHEMES WITH A GIVEN MAXIMUM CELL FILLING LEVEL

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

The class of particle cell arrangements under consideration is characterized by the introduction of an upper limit on the filling levels of the cells, which must be achieved in at least one cell of each outcome of each arrangement. The circuits are distinguished by the paired qualities of their constituent elements (cells and particles) according to their differences. Of the areas of study of schemes, those of greatest interest in non-standard methods of presymptotic analysis and obtaining new results are identified, these are numbered lists of the outcomes of schemes and finding their numbers.

Keywords: placement of particles; maximal filling level of cells; numbering task; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of particle allocation schemes with a given maximum cell filling level. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2026. No. 6. P. 139–147. doi: 10.17076/mat2272

Введение

В работах [1–4] проводился асимптотический анализ вероятностного поведения максимальных уровней заполнения ячеек в схемах равновероятного размещения различимых частиц по различимым ячейкам. Здесь представлено доасимптотическое исследование решения обратной экстремальной задачи исследования исходов в классе схем с заданным максимальным уровнем k заполнения ячеек при равновероятном размещении частиц по n ячейкам при всех парных качествах ячеек и частиц по их различимости. (Для сравнения: при прямой постановке задачи исследуются экстремальные значения характеристик размещения частиц по их возможным исходам.)

Анализ схем проводится авторским перечислительным методом (ПМ) [5]. В его основе – построение итерационного случайного процесса прямого бесповторного нумерованного перечисления его исходов в доасимптотической области изменения параметров.

Прием исследования схем состоит в непосредственном учете специфики их исходов в одной (начальной) схеме данного класса схем с дальнейшим пересчетом результатов ее анализа в остальных схемах с разными качествами по различимости составляющих их элементов. Выбор начальной схемы и порядков пересчета результатов схем определяется возможностью его проведения.

Рассматриваются 4 схемы размещения r частиц по n ячейкам во всех вариантах их качеств по различимости с заданным максимальным уровнем их заполнения k, причем $r \leqslant kn$:

схема A – частицы и ячейки различимы;

схема B – частицы различимы, ячейки неразличимы;

схема C – частицы неразличимы, ячейки различимы;

схема D – частицы неразличимы, ячейки неразличимы.

Специфика схем состоит в том, что число частиц в каждой ячейке должно быть не только не более k, но и с обязательным достижением этого уровня заполнения в каждом исходе каждой схемы, т. е. хотя бы в одной ячейке каждого ее исхода. Используя обсуждаемые здесь связи между исходами схем, будем строить процедуры их бесповторных перечислений и на этой основе проводить их комбинаторный анализ в наиболее рациональном (с нашей точки зрения) порядке, а именно, начиная со схемы с наиболее легко интерпретируемыми для других схем исходами, как этапа их изучения.

Доасимптотический анализ схем A–D проводился в нескольких авторских работах [5, п. 2.1, 2.12] и [6]. Но в п. 2.1 рассматривалась другая задача нахождения чисел исходов схем при фиксации диапазонов допустимых уровней заполнения для каждой ячейки; в п. 2.12 изучался только случай размещения неразличимых частиц по различимым ячейкам для разных диапазонов значений r – чисел частиц, для которых не было найдено единого решения для числа исходов схем, а в [6] для схем A–D решалась задача нахождения вероятностного распределения исходов схемы при фиксированном максимальном уровне заполнения ячеек.

Постановка задачи. Провести доасимптотический анализ схем A–D по направлениям ПМ: бесповторному перечислению их исходов и определению их численностей путем прямого вычисления в одной схеме и их пересчету для остальных схем.

Актуальность исследований комбинаторных схем размещения частиц по ячейкам с различными ограничениями связана как с их широкими приложениями, так и с перспективным конструированием анализа новых все усложняющихся комбинаторных схем, содержащих данные схемы в нейросетях. Примерами таких схем могут быть случайное размещение единиц продукции по контейнерам определенного объема для отправки до обязательного данного уровня заполнения хотя бы одного из них или распределение продукции (или кадров специалистов) по объектам без превышения данного количественного максимума при его достижении.

1. Методология и новизна приема анализа схем

Основной используемый здесь метод доасимптотического анализа схем – перечислительный метод ПМ. Он состоит в перечислении и формировании их исходов [5].

Предлагается проводить исследование в одной из схем с учетом общей специфики их исходов, т. е. с уровнями заполнения ячеек, не превышающими заданный максимум с обязательным его достижением хотя бы в одной ячейке исхода. Выбор начальной схемы определяется возможностью ее непосредственного прямого анализа. А для остальных рассматриваемых схем строятся процедуры последовательных пересчетов их результатов из результатов ранее исследованных схем. Порядок таких пересчетов наиболее просто осуществляется для *близких схем* (с различиями в различимости для одного элемента), где их пары составляются по возможности таких пересчетов с сохранением учтенной в начальной схеме общей специфики их исходов.

В качестве начальной в классе изучаемых схем предлагается схема C, для которой решим задачу бесповторного перечисления и определения числа исходов сначала только с учетом первого условия – данного ограничения ($\leqslant k$) уровней заполнения всех ячеек. Для учета второго ограничения, проводя отбраковку исходов без достижения данного максимума уровня хотя бы в одной ячейке, получим все исходы схемы C. Бесповторное перечисление ее исходов с учетом всех ограничений в одной из данного класса схем дают основу для пересчета аналогичных результатов остальных схем A–D с уже учтенной спецификой исходов.

Дальнейшее исследование данного класса схем проводим без непосредственного прямого исследования каждой, реализуемой последовательными пересчетами результатов перечисления их исходов парами схем с учетом условий размещения в них от бесповторного перечисления их исходов до вычисления их численностей. Заключительные алгоритмические действия определения численностей исходов схем в результате этих пересчетов в разных вариантах начальных схем в парах приводим как утверждения теорем. Они сводятся к их *классификации, упорядочиванию и отбраковке повторов.* Под *классификацией* элементов совокупности понимается их объединение по группам совпадения определенного признака с определением размеров этих групп. При пересчете перечисления исходов схемы в других схемах результатом классификации является совокупность объединений элементов в группы, а для пересчета чисел исходов – размеры этих групп.

В наших исследованиях под элементами классифицируемой совокупности будут рассматриваться как исходы схем, так и ячейки их исходов.

Выделение исследуемых направлений анализа по ПМ вызвано возможностью получения их результатов пересчетом соответствующих результатов начальной схемы. Это связано с приемом использования групповых соответствий исходов в парах *близких схем* в схемах с большей дифференциацией исходов с исходами схем своих пар.

2. Виды исходов схем A, B, C, D

Исходы схем A–D записываются соответственно в терминах:

для схемы A: $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ – состав номеров частиц в n ячейках в порядке ячеек;

для схемы B: $\bar{m}^* = (m_1^*, \ldots, m_n^*)$ – состав номеров частиц в n ячейках в порядке возрастания уровней заполнения ячеек, а при совпадающих уровнях заполнения ячеек – в порядке возрастания минимальных номеров в них;

для схемы C: $\bar{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ – набор уровней заполнения ячеек в порядке ячеек;

для схемы D: $\bar{\eta}^* = (\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*)$ – набор уровней заполнения ячеек в неубывающем порядке (или частоты разных полученных уровней заполнения ячеек).

3. Бесповторное перечисление исходов схем A, B, C, D и числа их исходов N_A, N_B, N_C, N_D

На исходы каждой схемы A–D наложено два ограничения:

1) в каждой ячейке $\leqslant k$ частиц;

2) заданный максимальный уровень заполнения должен достигаться в каждом исходе хотя бы в одной ячейке.

Выбор порядка проведения анализа схем начиная со схемы C обусловлен возможностью непосредственного учета данных ограничений в ней с сохранением их при последовательном попарном пересчете результатов для остальных схем. Здесь для примера рассматривается пересчет результатов шире, чем только парами близких схем, т. е. D из C, A из C или D и B из D или A с отличием качеств различимости в одном (близкие схемы) или двух из составляющих схемы элементов (ячеек и частиц) в этих парах.

Схема C

Схема C представляет собой схему сочетаний с повторением [5, п. 1.1.1.5] с данными выше ограничениями. В бесповторном перечислении исходов схемы C будем сначала учитывать только первое ограничение (учет второго ограничения произведем позже отбраковкой исходов с максимальным уровнем заполнения ячеек $< k$). Это значит, что исходы схемы C должны представлять собой перечисление в порядке ячеек уровней их заполнения $\leqslant k$ при $r \leqslant nk$. В процессе организации исходов схемы такого вида сначала будем их записывать в другом виде: последовательностей r нулей и $(n-1)$ единиц на $m = n+r-1$ местах, где подряд стоящими нулями (сериями нулей) обозначены частицы каждой ячейки, а единицами –

перегородки $\{t_i\}$, $i = \overline{1, n-1}$ между n ячейками. Здесь длины упорядоченных серий (подряд стоящих) нулей есть уровни заполнения соответствующих ячеек. Тогда среди m мест номера мест единиц определяют исход схемы, т. к. уровни заполнения ячеек в порядке ячеек $\{\bar{h}\} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ вычисляются из значений $\{t_i\}$, а места единиц должны быть выбраны так, чтобы все ячейки содержали не более k частиц.

Перечисление исходов схемы здесь состоит в последовательных действиях выбора допустимых мест расстановок внутренних перегородок между ячейками от t_1 до t_{n-1}. Доопределим $t_0 = 0$, $t_n = n + r$.

Число исходов схемы $N(k)$ вычисляется суммой размеров пучков предпоследней итерации, т. е. диапазонов варьирования значений мест для последней t_{n-1}-й внутренней перегородки.

Выбор мест этих перегородок $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ по первому ограничению определен теоремой:

Теорема 1. *Диапазоны варьирования возможных вариантов последовательной установки мест внутренних перегородок t_i определяются при $r \leqslant nk$ для всех $i = \overline{1, n-1}$, начиная с $i = 1$ из рекуррентного соотношения*

$$
\begin{aligned}
l_i = max(t_{i-1} + 1, r + i - k(n-i)) \leqslant t_i \\
\leqslant min(t_{i-1} + k + 1, r + i) = L_i.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Доказательство. Для нахождения мест внутренних перегородок $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ должен выполняться ряд требований:

1. разности между местами границ должны быть $\leqslant (k+1)$, откуда
$$t_i \leqslant t_{i-1} + k + 1; \tag{2}$$
2. правее значения t_i среди m мест поместятся остальные $n-1-i$ границ, откуда
$$t_i \leqslant m - (n-1-i) = r + i; \tag{3}$$
3. значение следующего элемента больше предыдущего, откуда
$$t_i \geqslant t_{i-1} + 1; \tag{4}$$
4. правее значения t_i среди m мест окажется мест не более, чем для $n-1-i$ остальных границ и $k(n-i)$ максимально допустимого в остальных ячейках схемы A числа частиц, откуда
$$
\begin{aligned}
t_i \geqslant m - (n-1-i) - k(n-i) \\
= r + i - k(n-i).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Теперь, объединяя соотношения (2) и (3) в верхнюю границу для t_i, а (4) и (5) – в нижнюю границу для t_i, получаем при $i = \overline{1, n-1}$ формулу (1) диапазона изменения значений для t_i. Теорема 1 доказана.

Приведем пояснительный пример использования теоремы 1.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $r = 5$, $k = 3$. Отсюда $m = 7$. Перечислим все исходы схемы, вычисляя пределы варьирования их элементов в указанных в (1) диапазонах и их размеры – размеры пучков по шагам (итерациям) перечисления исходов:

1-й шаг:

$l_1 = max(1, 0) \leqslant t_1 \leqslant min(4, 6)$, откуда $1 \leqslant t_1 \leqslant 4$, размер пучка равен 4;

2-й шаг:

$l_2 = max(t_1 + 1, 4) \leqslant t_2 \leqslant min(t_1 + 4, 6)$, откуда при

$t_1 = 1$ получаем $4 \leqslant t_2 \leqslant 5$, размер 1-го пучка равен 2;

$t_1 = 2$ получаем $4 \leqslant t_2 \leqslant 6$, размер 2-го пучка равен 3;

$t_1 = 3$ получаем $4 \leqslant t_2 \leqslant 7$, размер 3-го пучка равен 4;

$t_1 = 4$ получаем $5 \leqslant t_2 \leqslant 7$, размер 4-го пучка равен 3.

Отсюда число исходов схемы $N(k) = 2+3+4+3 = 12$.

Замечание 1. Это утверждение фактически доказано в [5, п. 2.13], но не сформулировано и не акцентировано там в виде теоремы, поэтому здесь оно оформлено и доказано полностью как теорема 1.

Число $N(k)$ исходов схемы теоремы 1 в графе их перечисления определяется итерационным процессом варьирования значений мест последовательной расстановки перегородок между ячейками среди лежащих в ряд частиц. Размеры пучков итераций задаются их полученными в теореме 1 диапазонами – например, для диапазона места перегородки $t_i \in [a, b]$ размер пучка в графе перечисления исходов схемы C равен $b - a + 1$.

Тогда число $N(k)$ вычисляется суммой размеров пучков предпоследней итерации, равной сумме размеров диапазонов варьирования мест t_{n-1} перегородки. $N(k) = \sum_j d_j$, где d_j – размер j-го пучка предпоследней $(n-1)$-й итерации.

В терминах наборов уровней заполнения ячеек по выбранным местам этих внутренних перегородок получим их через последовательные уровни заполнения ячеек $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)$

в их заданном в схеме порядке по нижеприведенной формуле

$$i = \overline{1, n}, \quad h_i = t_i - t_{i-1} - 1. \tag{6}$$

Например, если при $t_0 = 0$ получаем $t_1 = 4$, то это значит, что в первой ячейке уровень заполнения $h_1 = 4 - 0 - 1 = 3$ – в ней 3 частицы.

Замечание 2. По сути, итерационное варьирование места каждой перегородки от начала своего диапазона означает добавление частицы в предыдущую от этой перегородки ячейку, что следует из формулы (6).

Замечание 3. Число N_C исходов схемы C определяем из $N(k)$ подсчетом оставшихся исходов схемы из теоремы 1 после их отбраковки по второму ограничению, которое можно записать формулами двух видов, фильтрующих исходы схемы в теореме 1 от исходов с недостижением заданного максимального уровня заполнения хотя бы в одной ячейке: через а) индикаторные функции, б) разность исходов по теореме 1 с верхними ограничениями уровней заполнения ячеек k и $(k-1)$.

Теорема 2. *Число N_C исходов схемы C определяется формулой*

а)

$$N_C = \sum_{(\{\bar{h}\})} I_2 \left(\sum_{i=1}^{n} I_1(k - h_i) \right), \tag{7}$$

где первая сумма производится по перечислению исходов указанного под знаком суммы множества исходов $\bar{h}$ схемы из теоремы 1 и где индикаторные функции заданы следующим образом: $I_1(Z_1) = 0$ при $Z_1 > 0$ и $I_1(Z_1) = 1$ при $Z_1 = 0$; $I_2(Z_2) = 0$ при $Z_2 = 0$ и $I_2(Z_2) = 1$ при $Z_2 > 0$, или

б)

$$N_C = N(k) - N(k-1). \tag{8}$$

Доказательство. а) Число исходов схемы $N(k)$ можно записать формулой через индикаторные функции $I_1(Z)$ и $I_2(Z)$ в виде суммы по перечислению исходов схемы $\bar{h}$ в теореме 1 в терминах уровней заполнения ячеек в доказываемой формуле (7), т. к. всегда $Z_1 = k - h_i \geqslant 0$ (по замечанию 3) как разность максимального уровня и уровня заполнения ячейки в исходах схемы теоремы 1, $I_1(Z_1) = I_1(k - h_i)$ – индикатор достижения в i-й ячейке заданного максимального уровня заполнения k, $I_2(Z_2) = I_2\left(\sum_{i=1}^{n} I_1(k - h_i)\right)$ – индикатор достижения хотя бы по одной компоненте фиксированного исхода из $\{\bar{h}\}$ заданного максимального уровня заполнения k. Тогда $\sum_{(\{\bar{h}\})} I_2(Z_2)$ – число исходов схемы C, т. к. в них выполняются оба ограничения, что приводит к (7).

б) Доказательство формулы (8) следует из того, что $N(k)$ учитывает первое ограничение в числе исходов схемы C из теоремы 1, а вычитание из него $N(k-1)$ (числа исходов с уровнями заполнения ячеек $\leqslant (k-1)$) – и второе ограничение в них.

Замечание 4. В связи с тем, что перечисление и анализ исходов остальных схем будет производиться на основе перечисления исходов схемы C (т. е. при полученном наборе уровней заполнения ячеек схемы C), то их исходы будут удовлетворять первому и второму ограничениям.

Схема D

В исходах схемы D, получаемых из схемы C, нужно учесть неразличимость ячеек. Для этого упорядочиваем уровни заполнения ячеек в исходах схемы C, например, в неубывающем порядке с последующей отбраковкой повторов исходов. Так получаем перечисление исходов схемы D, а их число N_D определяем по теореме 3 на основании классификации исходов схемы C по совпадению составов уровней заполнения ячеек.

Теорема 3. *Число N_D исходов схемы определяется формулой из исходов схемы C*

$$N_D = \sum_{(\{\bar{\mu}\})} I_3(\mu_j), \tag{9}$$

где суммирование производится по перечислению исходов указанного под знаком суммы множества при $j = \overline{1, s}$, индикаторная функция $I_3(Z) = 1$ при $Z > 0$ и $I_3(Z) = 0$ при $Z = 0$, а $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_j, \ldots, \mu_s)$ – размеры групп классификации исходов $\{\bar{\eta}\}$ по совпадениям их составов уровней заполнения ячеек, μ_j – j-й из размеров групп разных составов уровней заполнения ячеек схемы C, а s – число их разных составов.

Доказательство. Исходы схемы D получаем из исходов $\{\bar{\eta}\}$ схемы C (после их упорядочивания) в виде $\{\bar{\eta}^*\}$ в результате отбраковки повторов в $\{\bar{\eta}^*\}$. Тогда числом N_D является размерность совокупности $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_j, \ldots, \mu_s)$ размеров групп классификации по совпадениям их составов уровней заполнения ячеек. Получение этой размерности реализуется по (9), т. к. $I_3(\mu_j) = 1$ при $\mu_j > 0$, а $\mu_j > 0$ по всем разным исходам из $\{\bar{\eta}^*\}$, что и дает размерность $\bar{\mu}$.

Замечание 5. Формула (9) приведена для единообразия представления чисел исходов схем в виде вычисляемых формул.

Приведем пояснительный пример применения теоремы 3.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 $n = 3$, $r = 5$, $k = 3$. Тогда в терминах уровней заполнения ячеек по (6) из результатов примера 1 после отбраковки по второму ограничению исходов $(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$ в порядке их получения выпишем все 9 исходов схемы C: $(0, 2, 3), (0, 3, 2), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (2, 0, 3), (2, 3, 0), (3, 0, 2), (3, 1, 1), (3, 2, 0)$;

упорядочим уровни заполнения ячеек в неубывающем порядке, получим $(0, 2, 3), (0, 2, 3), (1, 1, 3), (1, 1, 3), (0, 2, 3), (0, 2, 3)$,(0,2,3), $(1, 1, 3), (0, 2, 3)$;

классифицируем исходы по их совпадению (это значит, что после j-го следующего исхода вычеркиваем ее повторы, считая их общее число со сравниваемым μ_j), получим $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2) = (6, 3)$ с размерностью, равной 2; отсюда по (9) $N_D = 2$.

Схема A

В исходах схемы A, получаемых а) из схемы C, нужно учесть различимость частиц, или б) из схемы D – различимость и частиц, и ячеек. Поэтому для перечисления исходов схемы A совершаем последовательность действий по разным схемам: а) бесповторно перечисляем все исходы схемы C и при каждом производим перечисление исходов соответствующей схемы перестановок с повторением [5, п. 1.7]), учитывающей все возможные составы частиц в ячейках, или б) бесповторно перечисляем все исходы схемы D и при каждом производим перечисление исходов, соответствующих двум последовательным действиям – перестановок с повторением, учитывающим все возможные порядки наборов уровней заполнения ячеек, и при каждом из них перечисляем все соответствующие им составы частиц с числами разных исходов N_A, определяемых соответственно формулами по следующему утверждению.

Теорема 4. *Число N_A исходов схемы определяется формулой*

а) из исходов схемы C

$$N_A = \sum_{(\{\bar{\eta}\})} \frac{r!}{\prod_{i=1}^{n} \eta_i!} \tag{10}$$

или

б) из исходов схемы D

$$N_A = \sum_{(\{\bar{\eta}^*\})} \frac{r!}{\prod_{i=1}^{n} \eta_i^*!} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{s} \mu_j!}. \tag{11}$$

Суммы в (10) и (11) производятся по перечислению исходов указанных под знаками сумм множеств, где μ_j – размеры групп классификации среди n ячеек исхода по совпадению их уровней заполнения, откуда $s \leqslant n$.

Доказательство. Все исходы схемы A должны учитывать все составы частиц в ячейках с уровнями заполнения схемы C во всех их порядках.

Формула (10) представляет собой сумму по перечислению исходов схемы C со слагаемыми всех разных составов частиц в ячейках, определяемых по схеме перестановок с повторением [5, п. 1.7].

Формула (11) представляет собой сумму по перечислению исходов схемы D (разных составов уровней заполнения ячеек) со слагаемыми – всех разных составов частиц в ячейках во всех порядках составов уровней заполнения ячеек, определяемых по двум последовательным схемам перестановок с повторением [5, п. 1.7 и 1.12].

Схема B

В исходах схемы B, получаемых а) из схемы D, нужно учесть различимость частиц, или б) из схемы A – неразличимость ячеек. Для этого будем приводить исходы этих схем к виду исходов схемы B.

В схеме D будем по известным составам возрастающих уровней заполнения ячеек $\{\bar{\eta}^*\}$ размещать по ним различимые частицы, а в схеме A – упорядочивать ячейки (например, в порядке роста в них уровней заполнения, а ячейки с совпадающими уровнями заполнений в порядке роста номеров частиц ячеек с минимальным номером) с отбраковкой повторов. Поэтому для перечисления исходов схемы B совершаем действия:

а) перечисляем все исходы схемы D с заменой уровней заполнения ячеек на составы частиц в ячейках по схеме перестановок с повторением [5, п. 1.7] с их перечислением в ячейках с совпадающими уровнями заполнений в заранее определенном порядке (например, роста номеров частиц ячеек с минимальным номером) или

б) перечисляем все исходы схемы A, например, в порядке неубывания уровней заполнения ячеек, а среди ячеек с совпадающими уровнями – в порядке роста номеров частиц ячеек с минимальным номером с отбраковкой повторов.

Тогда по этим алгоритмическим действиям число N_B определяется соответственно формулам по следующему утверждению.

Теорема 5. *Число N_B исходов схемы определяется формулой* *а) из исходов схемы D*

$$N_B = \sum_{(\bar{\eta}^*)} \frac{r!}{\prod_{i=1}^{n} \eta_i^*! \prod_{j=1}^{s} \mu_j!}, \qquad (12)$$

где $j = \overline{1, s} \leqslant n$, μ_j – j-й размер группы классификации n ячеек каждого исхода схемы D – η^* из $\{\bar{\eta}^*\}$ по совпадениям их уровней заполнения, а суммирование проводится по указанному под ней множеству,

или

б) из исходов схемы A

$$N_B = \sum_{(\{\bar{M}\})} I_3(M_j), \qquad (13)$$

где $\bar{M} = (M_1, \ldots, M_j, \ldots, M_S)$ – размеры групп классификации исходов схемы A из $\{\bar{m}\}$ по совпадениям составов их частиц по ячейкам, S – число разных групп – порядков ячеек каждого состава частиц схемы A, суммирование проводится по указанному под знаком суммы множеству, а функция $I_3(Z)$ определена в теореме 3.

Доказательство. Все исходы схемы B должны учитывать все составы частиц в ячейках с уровнями заполнения схемы C без учета их порядка, т. е. в одном заранее установленном порядке, что соответствует неразличимости ячеек в схеме B.

Формула (12) представляет собой сумму данного вида слагаемых по перечислению исходов схемы D со слагаемыми всех разных составов частиц в ячейках.

Формула (13) представляет собой сумму данного вида слагаемых по перечислению размеров групп классификации исходов схемы по совпадениям их составов частиц в ячейках.

В соответствии с предложенными выше процедурами бесповторного перечисления исходов схемы B число ее исходов N_B определяется:

а) из перечисления исходов схемы D по формуле (12) с суммой, учитывающей все разные составы уровней заполнения ячеек в указанном в схеме D порядке ячеек в количествах исходов схемы перестановок с повторением [5, п. 1.7], деленных на числа всех порядков ячеек с совпадающими уровнями их заполнений (с учетом неразличимых порядков ячеек в схеме B) в количествах произведений факториалов количеств совпадения размеров уровней заполнения ячеек; $s \leqslant n$, т. к. это размерность упорядоченных чисел исходов совпадений составов n ячеек после отбраковки возможных повторов;

или

б) из перечисления исходов схемы A – по формуле (13), получаемой как сумма чисел групп классификации исходов схемы A с совпадающими составами частиц в ячейках; тогда N_B получаем как размерность вектора $\bar{M}$ классификации исходов схемы A с совпадающими составами частиц в любом или в одном заранее заданном порядке, например, с упорядочением всех составов частиц в ячейках в схеме A (в порядке роста уровней заполнения, а для ячеек с совпадающими размерами уровней заполнения – в порядке роста содержащихся в них минимальных номеров частиц) как число таких разных исходов, т. е. число разных количеств по совпадениям исходов $\{m^*\}$.

Тогда по этим перечислительным действиям число N_B определяется соответственно формулами по данному утверждению.

Замечание 6. Число исходов схемы B из исходов схемы A есть число разных составов частиц в ячейках схемы A и определяется

1) числом упорядоченных составов частиц в ячейках исходов схемы A с отбраковкой повторов или

2) размерностью количеств исходов схемы A по совпадению составов частиц в ячейках, что соответствует вычислению N_D по (13) и приведено для единообразия представления чисел исходов схем в виде вычисляемых формул.

Теоремы 2–5 являются новыми и ранее не публиковались.

Вычисления и пересчеты чисел исходов схем A, B, C, D на числовом примере

Схема C

Пример 3. Пусть, как в примерах 1 и 2, $n = 3$, $r = 5$, $k = 3$. Отсюда $m = 7$. В связи с этим частично исходы примеров 2 и 3 совпадают, но для наглядности разбора примера 3 будут здесь повторены. Вычислим число исходов нашей схемы разными способами: непосредственно с использованием теоремы 1 и по формулам (7) и (8) теоремы 2.

По результату примера 1 из всех $N(k) = 12$ исходов перечислим исходы схемы сочетаний с повторением с максимальным уровнем $k = 3$ заполнения ячеек в терминах мест внутренних перегородок $\{(t_1, t_2)\} = (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,5), (4,6), (4,7)$. По (6) переведем эти исходы в принятый для схемы C вид наборов уровней заполнения ячеек в порядке ячеек – соответственно получим исходы: $(0, 2, 3)$, (0,3,2), (1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,0,3), (2,1,2), (2,2,1), (2,3,0), (3,0,2), (3,1,1), (3,2,0), из которых отбраковываются 3 исхода: (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), где заданный максимальный уровень $k = 3$ не достигнут; остальные исходы – все $N_C = 9$ исходов схемы C.

По удалении из перечисления исходов схемы теоремы 1 $\{\bar{h}\}$ недопустимых исходов для схемы C по второму ограничению в терминах мест внутренних перегородок ячеек (2,5), (3,5), (3,6) получаем скорректированную пучковую структуру второй итерации итогового графа перечисления исходов схемы C: 2,2,2,3, откуда число исходов как их сумма $N_C = 2 + 2 + 2 + 3 = 9$, что совпадает с ранее полученным результатом.

По (7) $N_C = 6I_2(1) + 3I_2(1) = 6 + 3 = 9$, где первое слагаемое соответствует количеству исходов с уровнями заполнения ячеек (0,2,3) во всех порядках, а второе – с уровнями заполнения ячеек (1,1,3) во всех порядках.

Для вычисления N_C по (8) аналогично расчету $N(3)$ вычисляем $N(2)$, где получаем $2 \leqslant t_1 \leqslant 3$, размер пучка равен 2; при

$t_1 = 2$ получаем $5 \leqslant t_2 \leqslant 5$, размер 1-го пучка равен 1,

$t_1 = 3$ получаем $5 \leqslant t_2 \leqslant 6$, размер 2-го пучка равен 2.

Отсюда число исходов $N(k) = N(2) = 1 + 2 = 3$. Теперь по (8) находим $N_C = 12 - 3 = 9$.

Схема D

Для пересчета исходов схемы D из исходов схемы C достаточно их упорядочить по возрастанию уровней заполнения с отбраковкой повторов. В условиях примера 3 это даст $N_D = 2$ исхода (0,2,3) и (1,1,3).

По (9) $N_D = I_3(6) + I_3(3) = 1 + 1 = 2$.

Схема A

В условиях примера 3 получаем по (10)

$$N_A = 6\frac{5!}{0!2!3!} + 3\frac{5!}{1!1!3!} = 120,$$

где среди исходов схемы C уровни заполнений (0,2,3) встречаются в $3!/1!1!1!/ = 6$ порядках, а уровни заполнения (1,1,3) – в $3!/2!1! = 3$ порядках. Это значит, что в сумме формулы (10) количества слагаемых видов $5!/0!2!3!$ и $5!/1!1!3!$ равны соответственно 6 и 3.

В условиях примера 3 получаем по (11)

$$N_A = \frac{5!}{0!2!3!}\frac{3!}{1!1!1!} + \frac{5!}{1!1!3!}\frac{3!}{2!1!} = 60 + 60 = 120.$$

Схема B

В условиях примера 3 в случае а) пересчета N_B из схемы D получаем по (12)

$$N_B = \frac{5!}{0!2!3!1!1!1!} + \frac{5!}{1!1!3!2!1!} = 20.$$

В условиях примера 3 в случае б) пересчета N_B из схемы A получаем по (13) число всех исходов схемы B после описанного упорядочивания исходов схемы A. А это есть число всех разных групп классификации упорядоченных исходов схемы A по совпадению в них составов частиц в ячейках, откуда и из определения функции I_3 следует формула (13), записывающая отбраковку повторов после упорядочивания в исходах схемы A.

Для наглядности перечислим эти 20 исходов с допустимыми уровнями заполнения (0,2,3) и (1,1,3), заключая в скобки составы ячеек с более чем одной частицей:

$(0,(1,2),(3,4,5)), (0,(1,3),(2,4,5)),$
$(0,(1,4),(2,3,5)), (0,(1,5),(2,3,4)),$
$(0,(2,3),(1,4,5)), (0,(2,4),(1,3,5)),$
$(0,(2,5),(1,4,5)), (0,(3,4),(1,2,5)),$
$(0,(3,5),(1,2,4)), (0,(4,5),(1,2,3)),$
$(1,2,(3,4,5)), (1,3,(2,4,5)),$
$(1,4,(2,3,5)), (1,5,(2,3,4)),$
$(2,3,(1,4,5)), (2,4,(1,3,5)),$
$(2,5,(1,3,4)), (3,4,(1,2,5)),$
$(3,5,(1,2,4)), (4,5,(1,2,3)).$

Полученный результат для числа исходов схемы B совпадает с непосредственным пересчетом из числа исходов схемы A.

Приведение к виду исходов схемы B исходов схемы A в результате данного их упорядочения с отбраковкой повторов означает, что в результате этого в исходах схемы B каждая группа совпадающих в любом порядке составов уровней заполнения ячеек схемы A уменьшается в число разных порядков этих составов и в произведение факториалов количеств совпадающих уровней заполнения в группе.

Отсюда получаем для составов уровней заполнения ячеек (0,2,3) и (1,1,3) соответственно из 60 и 60 исходов схемы A в схеме B – $60/(6 \cdot 1!1!1!) = 10$ и $60/((3 \cdot 2!1!) = 10$, т. е. всего $N_B = 20$.

Выводы

1. Предложен подход к исследованию данного класса схем, состоящий в последовательном пересчете непосредственно полученных результатов начальной схемы с учетом данных в классе ограничений с их сохранением для остальных схем.

2. При выборе начальной схемы по возможности проведения ее наиболее простого прямого анализа предложены парные порядки пересчета результатов в остальных схемах с отличием различимости в составляющих их элементах.

Литература

1. *Викторова И. И.* Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме // Математические заметки. 1969. Т. 3, № 3. С. 305–316.

2. *Колчин В. Ф.* О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме // Теория вероятностей и ее применения. 1969. Т. 14, № 3. С. 476–487.

3. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.

4. *Хакимуллин Е. Р.* О предельном поведении максимального заполнения в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // Математические заметки. 1981. Т. 30, № 2. С. 277–289.

5. *Энатская Н. Ю.* Доасимптотический анализ комбинаторных схем. М.: URSS, 2023. 536 с.

6. *Энатская Н. Ю.* Вероятностный анализ максимальных заполнений в моделях размещения частиц по ячейкам // Труды Карельского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 49–54. doi: 10.17076/mat1856

References

1. *Viktorova I. I.* Asymptotic behavior of maximum of an equiprobable polynomial scheme. *Mathematical Notes.* 1969;5(3):184–191. doi: 10.1007/BF01388624

2. *Kolchin V. F.* On the limiting behavior of extreme order statistics in a polynomial scheme. *Theory of Probability and its Applications.* 1969;14(3):458–469. doi: 10.1137/1114058

3. *Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P.* Random allocations. Moscow: Nauka; 1976. 223 p. (In Russ.)

4. *Khakimullin E. R.* Asymptotic behavior of the maximum occupancy in an equiprobable scheme of allocation of particles by complexes. *Mathematical Notes.* 1981;30(2):626–633. doi: 10.1007/BF01708846

5. *Enatskaya N. Yu.* Pre-asymptotic analysis of combinatorial schemes. Moscow: URSS; 2023. 536 p. (In Russ.)

6. *Enatskaya N. Yu.* Probability analysis of maximum occupation in models of particle placement to cells. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2024;4:49–54. (In Russ.). doi: 10.17076/mat1856

Поступила в редакцию / received: 14.12.2025; принята к публикации / accepted: 25.05.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна

канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor