Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 132–138
Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2026. No. 6. P. 132–138
DOI: 10.17076/mat2271

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

УДК 519.115:519.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПО ЯЧЕЙКАМ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ

Н. Ю. Энатская

Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)

В схемах S размещения r частиц по n различимым ячейкам изучаются их размещения в выделенных m ячейках – схем S^*, для которых проводится анализ новым перечислительным методом (ПМ) по расширенным направлениям перечислительной комбинаторики: нахождения числа исходов и на основе построения модели их бесповторного нумерованного перечисления – решения для них задачи нумерации в прямой и обратной постановках по установлению взаимнооднозначного соответствия между их видами и номерами и введения управляемого вероятностного распределения на множестве исходов схемы.

Ключевые слова: выделенные ячейки; случайное число частиц

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Вероятностные модели размещения по ячейкам случайного числа частиц // Труды Карельского научного центра РАН. 2026. № 6. С. 132–138. doi: 10.17076/mat2271

N. Yu. Enatskaya. PROBABILISTIC RANDOM NUMBER OF PARTICLES CELL PLACEMENT MODELS

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

In schemes S for placing r particles in n distinguishable cells, their placement in selected m cells – schemes S^* is studied, for which the analysis is carried out by a new enumerative method (EM) in extended areas of enumerative combinatorics: finding the number of outcomes and, based on the construction of a model of their non-repetitive numbered enumeration, solving the numbering problem for them in direct and inverse statements to establish a one-to-one correspondence between their types and numbers, and introducing a controlled probabilistic distribution on the set of outcomes of the scheme.

Keywords: selected cells; random number of particles

For citation: Enatskaya N. Yu. Probabilistic random number of particles cell placement models. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2026. No. 6. P. 132–138. doi: 10.17076/mat2271

Введение

В [2] проведен асимптотический анализ классической схемы равновероятного размещения различимых частиц по различимым ячейкам. В [1] проводится асимптотический анализ поведения числа ячеек с фиксированными количествами частиц при размещениях заданного или случайного чисел различимых частиц по ячейкам.

Здесь в доасимптотической области значений параметров строятся вероятностные модели с другой интерпретацией случайного числа частиц при разных их качествах по различимости и условиям их размещения. Рассматривается схема S^* заполнения m выделенных ячеек среди n различимых ячеек начальной схемы S размещения по ним r различимых частиц, все результаты анализа для которой считаем известными [3].

При варьировании качества частиц по их различимости и введении ограничения на уровни заполнения ячеек в начальных схемах S наряду с непосредственным анализом с учетом специфики схем S^* предлагается общий алгоритмический прием пересчета результатов анализа схем S в соответствующих схемах S^* для перечисления исходов схем, решения задачи нумерации и нахождения вероятностных распределений их исходов. В частности, в условиях равновероятных исходов каждой начальной схемы S определяется вероятностное распределение исходов в соответствующих схемах S^* с просчетом на числовых примерах. Результаты проведенного анализа представлены алгоритмическими процедурами и аналитическими формулами.

Перечислим схемы S^* с указанием их различий и видов их исходов в условиях размещений по различимым ячейкам в схемах A–D:

A – схема сочетаний – частицы неразличимы и ячейка вмещает одну частицу, $r \leqslant n$; вид исхода – набор номеров непустых ячеек в порядке ячеек;

B – схема сочетаний с повторением – частицы неразличимы и ячейка вмещает все частицы; вид исхода – уровни заполнения ячеек в порядке ячеек;

C – схема размещений – частицы различимы и ячейка вмещает одну частицу, $r \leqslant n$; вид исхода – набор номеров частиц в ячейках в порядке ячеек;

D – схема размещений с повторением – частицы различимы и ячейка вмещает все частицы; вид исхода – наборы номеров частиц в ячейках в порядке ячеек.

Схема S^* в условиях размещения схемы A была рассмотрена в [3, п. 2.23], а здесь приводится в связи с изучением остальных ранее не рассматриваемых по аналогичным направлениям схем размещения частиц по части ячеек и для полноты изложения, т. е. для логической завершенности рассмотрения данного класса схем и установления аналогии их анализа.

Цель статьи – в дополнении к анализу схемы S^* в условиях размещения частиц схемы A доказательства теорем 2–4 для остальных схем в условиях B–D класса S^* о численностях и вероятностях их исходов.

Каждый исход нашей изучаемой схемы S^* соответствует группе исходов схемы S с совпадающими с ее исходом частями исходов в первых m ячейках. Будем называть общий алгоритмический прием пересчета результатов анализа схемы S для схемы S^* методом группированных исходов (МГИ), рассмотрением которого предварим получение конкретных результатов по всем приведенным условиям схем A–D размещения частиц с учетом их специфик.

ПМ – перечислительный метод – основной используемый здесь метод доасимптотического исследования моделей по приведенным в аннотации направлениям (подробно изложен в [3]); он состоит в построении вероятностных моделей на формирующих исходы их итерационных случайных процессов.

Основная конструкция комбинаторных схем – это обобщенная схема последовательных действий (ОПД); исследована в [3, п. 1.9] и предлагается здесь для перечисления исходов и решения задачи нумерации (ЗН). При использовании результатов других ранее изученных схем ограничимся ссылками на источники с доказанными результатами: схема сочетаний и сводящаяся к ней схема сочетаний с повторением [3, пп. 1.3 и 1.1.1.5]; схема размещений [3, п. 1.4]; схема размещений с повторением [3, пп. 1.1 и 2.16].

Постановка задачи. Провести доасимптотический анализ схем B–D по ПМ в дополнение к анализу ранее изученной [3, п. 2.23] схемы A класса схем S^* по установлению численностей и вероятностей их исходов.

Актуальность исследований комбинаторных схем размещения частиц по ячейкам с различными ограничениями связана как с их широкими приложениями, так и с перспективным конструированием анализа новых все усложняющихся, включая изучаемые здесь, комбинаторных схем в нейросетях. В нашей постановке задачи анализ схем A–D дает получение результатов ПМ для размещения частиц в фиксированной части ячеек по решению аналогичных задач для их размещения по всем ячейкам.

1. МГИ – общий прием пересчета результатов анализа схемы S для схемы S^*

МГИ – метод группированных данных – метод пересчета результатов анализа начальной схемы для схемы с исходами, соответствующими ее группированным исходам, является новым и рассматривается здесь.

Считаем схему S изученной по всем направлениям ПМ.

1.1. Перечисление и число исходов схемы S^*

Для перечисления исходов схемы S^* выписываем части (результаты заполнения первых m ячеек) исходов схемы S в порядке их перечисления с отбраковкой повторов. Тогда N_{S^*} – число исходов схемы S^* находится как число групп исходов схемы S с разными заполнениями первых m ячеек. Нумерацию исходов схемы S^* производим в порядке их появления.

1.2. Задача нумерации в схеме S^*

Решение ЗН состоит из решения двух задач: **ПЗН** – прямой задачи нумерации нахождения вида исхода схемы по его номеру и **ОЗН** – обратной задачи нумерации нахождения номера исхода схемы по его виду [3, п. 1.1].

Среди исходов схемы S в порядке их нумерации зафиксируем номера первых исходов групп совпадающих заполнений первых m ячеек, т. е. номера всех разных исходов схемы S^*. Пусть это будут номера $\bar{A} = (A_1, \ldots, A_{N_{S^*}})$.

Порядок решения ПЗН

Пусть дан номер N^* исхода схемы S^*. Требуется найти его вид R^*.

1) Среди $\bar{A} = (A_1, \ldots, A_{N_{S^*}})$ находим соответствующий данному номеру N^* номер исхода схемы S – это номер A_{N^*};

2) по решенной ПЗН в схеме S по номеру исхода A_{N^*} определяем его вид R;

3) из R выписываем по результату заполнения первых m ячеек соответствующий вид искомого исхода схемы S^*.

Порядок решения ОЗН

Пусть дан вид R^* исхода схемы S^*. Требуется найти его номер N^*.

1) По решенной ОЗН в схеме S по последовательным номерам ее исходов $\bar{A}$ определяем их виды;

2) исход схемы S^* данного вида R^* последовательно сравниваем с видами исходов шага 1) по заполнению первых m ячеек схемы S с номерами $\bar{A} = (A_1, \ldots, A_{N_{S^*}})$ до совпадения – тогда порядковый номер первого такого совпадения есть искомый номер N^* исхода схемы S^*.

2. Прямой анализ моделей схем S^* в условиях размещения схем A–D

Число исходов каждой из схем S^* в условиях размещения в схемах A–D определяется значениями случайных чисел частиц схем S в первых m ячейках и вычисляется числом групп исходов схемы S с совпадающими заполнениями этих m ячеек суммированием по всем возможным значениям количеств частиц в первых m ячейках всех способов их размещения в условиях каждой конкретной схемы S.

Для анализа схем проводятся изучения конструкции графов перечисления их исходов. Они описываются в терминах их пучковых структур [3, п. 1.1], где

итерация – шаг перехода в графе перечисления исходов схемы к следующему этапу (шагу) их перечисления;

пучок в графе процесса – совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;

размер пучка на каждой итерации – число переходов из каждого исхода итерации;

пучковая структура итерации – перечисление размеров пучков итерации;

пучковая структура графа – перечисление размеров пучков всех итераций.

Процедуры перечисления исходов схем S^* в каждой из схем A–D представлены двумя итерациям (действиями): 1) фиксацией варьируемого допустимого значения $k = \overline{t,T}$ числа частиц в первых m ячейках в условиях схем A–D и 2) перечислением $N_{S^*}(k)$ исходов с k частицами среди выделенных m ячеек, т. е. с заменой параметров схем S – чисел частиц r и ячеек n на зафиксированное число k частиц и m ячеек схем S^*. Таким образом, пучковая структура графа перечисления исходов на первой итерации есть размер одного пучка значений $k = \overline{t,T}$, равный $\bar{d}^{(0)} = (T - t + 1)$, а на второй итерации – $(T - t + 1)$ пучков размерами $\bar{d}^{(1)}$ по $N_{S^*}(k)$, зависящими от k, откуда следует, что эта схема представляет собой схему ОПД с известной из [3, п. 1.9] по данной пучковой структуре процедурой перечисления исходов и решения ЗН.

ЗН для исходов схем S^* в каждой из схем A–D решается по схеме ОПД [3, п. 1.9], для чего требуется информация о пучковой структуре графа перечисления исходов схемы в соответствии с описанными итерациями их перечисления.

Вероятностные распределения исходов схем S^* определяются условиями размещения частиц в схемах A–D и будут изучаться отдельно.

Приведем анализ схем S^* в условиях схем A–D при равновероятных исходах начальных схем S (в отличие от их любых распределений в алгоритмическом подходе к анализу схем S^* по МГИ в п. 1).

2.1. Анализ схемы S^* в условиях схемы $S = A$

Число исходов схемы $A : N_A = C_n^r$. Пусть X – случайное число частиц в выделенных m ячейках. При равновероятном распределении исходов начальной схемы A – схемы сочетаний вероятность каждого исхода $p_A = 1/C_n^r$.

Теорема 1. *В схеме S^* в условиях схемы $S = A$ число исходов*

$$N_{S^*} = \sum_{k=t}^{T} N_{S^*}(k) = \sum_{k=t}^{T} C_m^k, \tag{1}$$

где $N_{S^*}(k)$ – число исходов схемы S^* при фиксированном значении k, $t = max(0, r - n + m) \leqslant k \leqslant min(r, m) = T$, с вероятностью исходов при каждом k

$$p(k) = C_{n-m}^{r-k}/C_n^r. \tag{2}$$

Доказательство. В условиях схемы $S = A$ число ее исходов $N_A = C_n^r$ может быть представлено в виде суммы чисел $N_A(k)$ вариантов размещения частиц со всеми возможными значениями их количеств $X = k$ среди первых m ячеек: $N_A = C_n^r = \sum_{k=t}^{T} N_A(k) = \sum_{k=t}^{T} C_m^k C_{n-m}^{r-k}$, где допустимые из значений $X = k$ определяются из условий $t = max(0, r-n+m) \leqslant k \leqslant min(r, m) = T$, каждое слагаемое $N_A(k) = C_m^k C_{n-m}^{r-k}$ – число исходов схемы A при $X = k$, а исходы схемы $S = A$ при каждом значении $X = k$ представляют собой группы ее исходов, не меняющих исходы схемы S^*, численностями C_{n-m}^{r-k}. Отсюда получаем для числа N_{S^*} таких групп формулу (1).

В схеме A разные исходы определяются разными наборами непустых ячеек среди n ячеек в их порядке, а в схеме S^* – среди первых m ячеек. Тогда в схеме S^* вероятности ее исходов будут получаться сложением вероятностей исходов соответствующих групп размерами по C_{n-m}^{r-k} равновероятных исходов схемы A, что приводит к результату (2).

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы S^* в виде последовательностей размеров пучков i-й итерации ($i = \overline{0,1}$) при $i = 0$ это $\bar{d}^{(0)} = (T - t + 1)$, при $i = 1$ это $\bar{d}^{(1)} = (C_m^t, \ldots, C_m^T)$.

Проверка на распределение вероятностей исходов схем A и S^* дает результаты – для схемы A : $C_n^r p_A = \sum_{k=t}^{T} C_m^k C_{n-m}^{r-k} p_A = 1$, а для схемы S^* : $\sum_{k=t}^{T} C_m^k p(k) = \sum_{k=t}^{T} C_m^k (C_{n-m}^{r-k}/C_n^r) = 1$. $\square$

Пример 1. Пусть $n = 10$, $m = 5$, $r = 7$. Тогда $2 \leqslant k \leqslant 5$, $N_A = C_{10}^7 = 120$ или через $N_A(k)$ при $N_A(k) = C_5^k C_5^{7-k}$ получаем $N_A = C_5^2 C_5^5 + C_5^3 C_5^4 + C_5^4 C_5^3 + C_5^5 C_5^2 = 10 + 50 + 50 + 10 = 120$, $N_{S^*} = C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 26$; $\bar{d}^{(0)} = (4)$, $\bar{d}^{(1)} = (C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5) = (10, 10, 5, 1)$;
распределение вероятностей в схеме A:
$\bar{p} = (1/120, \ldots, 1/120)$;
распределение вероятностей по (2) $\{p_j(k)\}$ в схеме S^* с числами ее исходов совпадающих вероятностей по C_m^k, т. е. соответственно:
$C_5^2 = 10, C_5^3 = 10, C_5^4 = 5, C_5^5 = 1$,
и по (2):
$p_1(2) = \ldots = p_{10}(2) = C_5^5/C_{10}^7 = 1/120$;
$p_{11}(3) = \ldots = p_{20}(3) = C_5^4/C_{10}^7 = 5/120$;
$p_{21}(4) = \ldots = p_{25}(4) = C_5^3/C_{10}^7 = 10/120$;
$p_{26}(5) = C_5^5/C_{10}^7 = 1/120$,
откуда проверка на распределение дает верный результат
$(1/120) \cdot 10 + (5/120) \cdot 10 + (10/120) \cdot 5 + (10/120) \cdot 1 = 1$.

Замечание. Элементы приведенного здесь доказательства теоремы 1 содержатся в [3, пп. 2.23.2 и 2.23.3], но теорема 1 в данном здесь виде не формулировалась.

2.2. Анализ схемы S^* в условиях схемы $S = B$

Число исходов схемы B : $N_B = C_{n+r-1}^{n-1}$. Пусть X – случайное число частиц в выделенных m ячейках. При равновероятном распределении исходов начальной схемы B – схемы сочетаний вероятность каждого исхода $p_B = 1/C_{n+r-1}^{n-1}$.

Теорема 2. *В схеме S^* в условиях схемы $S = B$ число исходов*

$$N_{S^*} = \sum_{k=0}^{r} N_{S^*}(k) = \sum_{k=0}^{r} C_{m+k-1}^{m-1}, \tag{3}$$

где $N_{S^*}(k)$ – число исходов схемы S^* при фиксированном значении k, $0 \leqslant k \leqslant r$, с вероятностью исходов при каждом k

$$p(k) = C_{n-m+r-k-1}^{n-m-1}/C_{n+r-1}^{n-1}. \tag{4}$$

Доказательство. В условиях схемы $S = B$ число ее исходов $N_B = C_{n+r-1}^{n-1}$ может быть представлено в виде суммы чисел $N_B(k)$ вариантов размещения частиц со всеми возможными значениями их количеств $X = k$ среди первых m ячеек: $N_B = C_{n+r-1}^{n-1} = \sum_{k=0}^{r} N_B(k) = \sum_{k=0}^{r} C_{m+k-1}^{m-1} C_{n-m+r-k-1}^{n-m-1}$, где все указанные в сумме значения $X = k$ допустимы, каждое слагаемое $N_B(k) = C_{m+k-1}^{m-1}$ – число исходов схемы B при $X = k$, а исходы схемы $S = B$ при каждом значении $X = k$ представляют собой группы ее исходов, не меняющих исходы схемы S^*, численностями $C_{n-m+r-k-1}^{n-m-1}$. Отсюда получаем для числа N_{S^*} таких групп формулу (3).

В схеме B разные исходы определяются разными наборами уровней заполнения ячеек среди n ячеек в их порядке, а в схеме S^* – среди первых m ячеек. Тогда в схеме S^* вероятности ее исходов будут получаться сложением вероятностей исходов соответствующих групп размерами по $C_{n-m+r-k-1}^{n-m-1}$ равновероятных исходов схемы B, что приводит к результату (4).

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы S^* в виде последовательностей размеров пучков i-й итерации ($i = \overline{0,1}$) при $i = 0$ это $\bar{d}^{(0)} = (r + 1)$, при $i = 1$ это $\bar{d}^{(1)} = (C_{m-1}^{m-1}, \ldots, C_{m+r-1}^{m-1})$.

Проверка на распределение вероятностей исходов схем B и S^* дает результаты – для схемы B: $C_{n+r-1}^{n-1} p_B = \sum_{k=0}^{r} C_{m+k-1}^{m-1} C_{n-m+r-k-1}^{n-m-1} p_B = 1$, а для схемы S^*: $\sum_{k=0}^{r} C_{m+k-1}^{m-1} p(k) = \sum_{k=0}^{r} C_{m+k-1}^{m-1} C_{n-m+r-k-1}^{n-m-1} / C_{n+r-1}^{n-1} = 1$. □

Пример 2. Пусть $n = 5,\ m = 2,\ r = 3$. Тогда $0 \leqslant k \leqslant 3,\ N_B = C_7^4 = 35$ или через $N_B(k)$ при $N_B(k) = C_{1+k}^1 C_{5-k}^2$ получаем

$N_B = C_1^1 C_5^2 + C_2^1 C_4^2 + C_3^1 C_3^2 + C_4^1 C_2^2 = 35$;

$N_{S^*} = C_{2+0-1}^{2-1} + C_{2+1-1}^{2-1} + C_{2+2-1}^{2-1} + C_{2+3-1}^{2-1} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$,

$\bar{d}^{(0)} = (r + 1) = (4)$,

$\bar{d}^{(1)} = (C_1^1, C_2^1, C_3^1, C_4^1) = (1, 2, 3, 4)$;

распределение вероятностей в схеме B:

$\bar{p} = (1/35, \ldots, 1/35)$;

распределение вероятностей по (4) $\{p_j(k)\}$ в схеме S^* с числами ее исходов совпадающих вероятностей по C_{m+k-1}^{m-1}, т. е. соответственно: $C_1^1 = 1, C_2^1 = 2, C_3^1 = 3, C_4^1 = 4$, и по (4):

$p_1(0) = C_5^2/35 = 10/35$;

$p_2(1) = p_3(1) = C_4^2/35 = 6/35$;

$p_4(2) = p_5(2) = p_6(2) = C_3^2/35 = 3/35$;

$p_7(3) = p_8(3) = p_9(3) = p_{10}(3) = 4/35$,

откуда проверка на распределение дает верный результат

$(10/35) \cdot 1 + (6/35) \cdot 2 + (3/35) \cdot 3 + (1/35) \cdot 4 = 1$.

2.3. Анализ схемы S^* в условиях схемы $S = C$

Число исходов схемы $C : N_C = A_n^r$. Пусть X – случайное число частиц в выделенных m ячейках. При равновероятном распределении исходов начальной схемы C – схемы размещений вероятность каждого исхода $p_C = 1/A_n^r$.

Теорема 3. *В схеме S^* в условиях схемы $S = C$ число исходов*

$$N_{S^*} = \sum_{k=t}^{T} N_{S^*}(k) = \sum_{k=t}^{T} A_m^k C_r^k, \qquad (5)$$

где $N_{S^*}(k)$ – число исходов схемы S^* при фиксированном значении k, $t = max(0, r - n + m) \leqslant k \leqslant min(r, m) = T$, с вероятностью исходов при каждом k

$$p(k) = A_{n-m}^{r-k} / A_n^r, \qquad (6)$$

где $A_n^r = n(n-1) \cdots (n-r+1)$ – число исходов схемы размещений из n элементов по r.

Доказательство. В условиях схемы $S = C$ число ее исходов $N_C = A_n^r$ может быть представлено в виде суммы чисел $N_C(k)$ вариантов размещения частиц со всеми возможными значениями их количеств $X = k$ среди первых m ячеек: $N_C = \sum_{k=t}^{T} N_C(k) = \sum_{k=t}^{T} C_r^k A_m^k A_{n-m}^{r-k}$, где допустимые из значений $X = k$ определяются из условий $t = max(0, r - n + m) \leqslant k \leqslant min(r, m) = T$, каждое слагаемое $N_C(k) = C_r^k A_m^k A_{n-m}^{r-k}$ – число исходов схемы C при $X = k$, а исходы схемы $S = C$ при каждом значении $X = k$ представляют собой группы ее исходов, не меняющих исходы схемы S^*, численностями A_{n-m}^{r-k}. Отсюда получаем для числа N_{S^*} таких групп формулу (5).

В схеме C разные исходы определяются разными номерам частиц в непустых ячейках среди n ячеек в их порядке, а в схеме S^* – среди первых m ячеек. Тогда в схеме S^* вероятности ее исходов будут получаться сложением вероятностей исходов соответствующих групп размерами по A_{n-m}^{r-k} равновероятных исходов схемы C, что приводит к результату (6).

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы S^* в виде последовательностей размеров пучков i-й итерации ($i = \overline{0,1}$) при $i = 0$ это $\bar{d}^{(0)} = (T - t + 1)$, при $i = 1$ это $\bar{d}^{(1)} = (A_m^t C_r^t, \ldots, A_m^T C_r^T)$.

Проверка на распределение вероятностей исходов схем C и S^* дает результаты – для схемы C: $A_n^r p_C = \sum_{k=t}^{T} C_r^k A_m^k A_{n-m}^{r-k} p_C = 1$, а для схемы S^*: $\sum_{k=t}^{T} C_r^k A_m^k p(k) = \sum_{k=t}^{T} C_r^k A_m^k A_{n-m}^{r-k} / A_n^r = A_n^r p = 1$. □

Пример 3. Пусть $n = 5,\ m = 2,\ r = 3$. Тогда $0 \leqslant k \leqslant 2$, $N_C = A_5^3 = 60$, или через $N_C(k) = C_3^k A_2^k A_3^{3-k}$ получаем
$N_C = C_3^0 A_2^0 A_3^3 + C_3^1 A_2^1 A_3^2 + C_3^2 A_2^2 A_3^1 = 6 + 36 + 18 = 60$,
$N_{S^*} = A_2^0 C_3^0 + A_2^1 C_3^1 + A_2^2 C_3^2 = 1 + 6 + 6 = 13$,
$\bar{d}^{(0)} = (r + 1) = (3)$,
$\bar{d}^{(1)} = (A_3^0 C_2^0, A_3^1 C_2^1, A_3^2 C_2^2) = (1, 6, 6)$;
распределение вероятностей в схеме $C : \bar{p} = (1/60, \dots, 1/60)$;
распределение вероятностей по (6) $\{p_j(k)\}$ в схеме S^* с числами ее исходов совпадающих вероятностей по $A_m^k C_r^k$, т. е. соответственно: $A_2^0 C_3^0 = 1, A_2^1 C_3^1 = 6, A_2^2 C_3^2 = 6$, и по (6):

$p_1(0) = A_3^3/60 = 6/60$;

$p_2(1) = \dots = p_7(1) = A_3^2/60 = 6/60$;

$p_8(2) = \dots = p_{13}(2) = A_3^1/60 = 3/60$,

откуда проверка на распределение дает верный результат
$(6/60) \cdot 1 + (6/60) \cdot 6 + (3/60) \cdot 6 = 1$.

2.4. Анализ схемы S^* в условиях схемы $S = D$

Число исходов схемы $D : N_D = n^r$. Пусть X – случайное число частиц в выделенных m ячейках. При равновероятном распределении исходов начальной схемы D – схемы размещений с повторением вероятность каждого исхода $p_D = 1/n^r$.

Теорема 4. *В схеме S^* в условиях схемы $S = D$ число исходов*

$$N_{S^*} = \sum_{k=0}^{r} N_{S^*}(k) = \sum_{k=0}^{r} C_r^k m^k, \qquad (7)$$

где $N_{S^*}(k)$ – число исходов схемы S^* при фиксированном значении k, $0 \leqslant k \leqslant r$, с вероятностью исходов при каждом k

$$p_j(k) = (n - m)^{r-k}/n^r, \quad j = \overline{1, N_{S^*}}. \qquad (8)$$

Доказательство. В условиях схемы $S = D$ число ее исходов $N_D = n^r$ может быть представлено в виде суммы чисел $N_D(k)$ вариантов размещения частиц со всеми возможными значениями их количеств $X = k$ среди первых m ячеек: $N_D = n^r = \sum_{k=0}^{r} N_D(k) = \sum_{k=0}^{r} C_r^k m^k (n - m)^{r-k}$, где все указанные в сумме значения $X = k$ допустимы, каждое слагаемое $N_D(k) = C_r^k m^k (n - m)^{r-k}$ – число исходов схемы D при $X = k$, а исходы схемы $S = D$ при каждом значении $X = k$ представляют собой группы ее исходов, не меняющих исходы схемы S^*, численностями $(n - m)^{r-k}$. Отсюда получаем для числа N_{S^*} таких групп формулу (7).

В схеме D разные исходы определяются разными составами номеров частиц в ячейках среди n ячеек в их порядке, а в схеме S^* – среди первых m ячеек. Тогда в схеме S^* вероятности ее исходов будут получаться сложением вероятностей исходов соответствующих групп размерами по $(n - m)^{r-k}$ равновероятных исходов схемы D, что приводит к результату (8).

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы S^* в виде последовательностей размеров пучков i-й итерации ($i = \overline{0, 1}$) при $i = 0$ это $\bar{d}^{(0)} = (r + 1)$, при $i = 1$ это $\bar{d}^{(1)} = (C_r^0 m^0, \dots, C_r^r m^r)$.

Проверка на распределение вероятностей исходов схем D и S^* дает результаты – для схемы D: $n^r p_D = \sum_{k=0}^{r} C_r^k m^k (n-m)^{r-k}$, а для схемы S^*: $\sum_{k=0}^{r} C_r^k m^k p(k) = \sum_{k=0}^{r} C_r^k m^k (n - m)^{r-k}/n^r = 1$. □

Пример 4. Пусть $n = 4,\ m = 2,\ r = 3$. Тогда $0 \leqslant k \leqslant 3$, $N_D = 4^3 = 64$ или через $N_D(k)$ при $N_D(k) = C_3^k 2^k 2^{3-k}$ получаем $N_D = C_3^0 2^0 2^3 + C_3^1 2^1 2^2 + C_3^2 2^2 2^1 + C_3^3 2^3 2^0 = 64$, $\bar{d}^{(0)} = (4)$, $\bar{d}^{(1)} = (C_3^0 2^0, C_3^1 2^1, C_3^2 2^2, C_3^3 2^3) = (1, 6, 12, 8)$, $N_{S^*} = C_3^0 2^0 + C_3^1 2^1 + C_3^2 2^2 + C_3^3 2^3 = 1 + 6 + 12 + 8 = 27$; распределение вероятностей исходов в схеме $D : \bar{p} = (1/64, \dots, 1/64)$; распределение вероятностей по (8) $\{p_j(k)\}$ в схеме S^*, с числами ее исходов совпадающих вероятностей по $C_r^k m^k$, т. е. соответственно равными $C_3^0 2^0 = 1$, $C_3^1 2^1 = 6$, $C_3^2 2^2 = 12$, $C_3^3 2^3 = 8$, и по (8):

$p_1(0) = 2^3/64 = 8/64$;

$p_2(1) = \ldots = p_7(1) = 2^2/64 = 4/64$;

$p_8(2) = \ldots = p_{19}(2) = 2^1/64 = 2/64$;

$p_{20}(3) = \ldots = p_{27}(3) = 2^0/64 = 1/64$, откуда проверка на распределение дает верный результат $(8/64) \cdot 1 + (4/64) \cdot 6 + (2/64) \cdot 12 + (1/64) \cdot 8 = 1$.

Заключение

1. Перечислительным методом (ПМ) по выбранным из указанных в аннотации направлениям предложены процедуры проведения доасимптотического анализа класса схем S^* в условиях схем A–D.

2. Построен метод (МГИ) пересчета результатов анализа схем S для схем S^*.

3. В результате доказательства теорем 1–4 (при равновероятности исходов схемы S) получены новые аналитические результаты численностей исходов схем S^* и их вероятностных распределений в условиях схем B–D с просчетом численных примеров (условия схемы A изучались в [3, п. 2.23], а условия схем B–D рассмотрены впервые).

Литература

1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Севастьянов Б. А.* Размещение случайного числа частиц по ячейкам // Математические заметки. 1967. Т. 1, № 5. С. 549–554.

2. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.

3. *Энатская Н. Ю.* Доасимптотический анализ комбинаторных схем. М.: URSS, 2023. 536 с.

References

1. *Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I., Sevastyanov B. A.* Arrangement of a random number of particles in cells. *Matemeticheskie zametki = Mathematical notes.* 1967;1(5):549–554. (In Russ.)

2. *Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P.* Random allocations. Moscow: Nauka; 1976. 223 p. (In Russ.)

3. *Enatskaya N. Yu.* Pre-asymptotic analysis of combinatorial schemes. Moscow: URSS; 2023. 536 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 14.12.2025; принята к публикации / accepted: 29.04.2026.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor