

УДК 519.248

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ И ДОПРЕДЕЛЬНЫЙ РЕЖИМЫ МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

О. В. Лукашенко¹, С. Н. Астафьев¹, В. А. Иголкин², А. С. Румянцев^{1*}

¹ Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910), *ar0@krc.karelia.ru

² Институт математики и информационных технологий, Петрозаводский
государственный университет (пр. Ленина, 33, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)

В работе предложен подход к исследованию характеристик гетерогенных вычислительных сетей большого масштаба с помощью гауссовских случайных процессов, обладающих свойствами долгой памяти. Представлены перспективные направления развития указанного подхода.

Ключевые слова: процессы с долгой памятью; системы распределенных вычислений; асимптотический анализ; распределения с тяжелым хвостом

Для цитирования: Лукашенко О. В., Астафьев С. Н., Иголкин В. А., Румянцев А. С. Асимптотический и допредельный режимы модели гетерогенной вычислительной сети // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 34–43. doi: 10.17076/mat2100

O. V. Lukashenko¹, S. N. Astafiev¹, V. A. Igolkin², A. S. Rumyantsev^{1*}. ASYMPTOTIC AND PRE-LIMIT REGIMES OF A MODEL OF A HETEROGENEOUS COMPUTING NETWORK

¹ Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia), *ar0@krc.karelia.ru

² Institute of Mathematics and Information Technologies, Petrozavodsk State University (33 Lenin St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

Gaussian long-range-dependence processes are suggested as a model for the performance analysis of large-scale heterogeneous computing networks. Possible directions for developing this promising approach further are suggested.

Key words: long-range dependence; distributed computing systems; asymptotic analysis; heavy-tailed distributions

For citation: Lukashenko O. V., Astafiev S. N., Igolkin V. A., Rumyantsev A. S. Asymptotic and pre-limit regimes of a model of a heterogeneous computing network. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2025. No. 4. P. 34–43. doi: 10.17076/mat2100

ВВЕДЕНИЕ

Развитие беспроводных технологий сопровождается развитием вычислительных и коммуникационных возможностей цифровых систем. Высокий вычислительный потенциал современных цифровых устройств реализуется с развитием систем (сетей) распределенных и повсеместных вычислений, которые позволяют объединить разнородные вычислительные ресурсы для решения различных задач, от вспомогательных (таких, как управление умным домом [17]) до вычислительных [4]. При этом значительные вычислительные возможности таких систем сопровождаются низкой надежностью, высокой степенью разнородности используемых устройств (с точки зрения архитектуры, вычислительной мощности, скорости работы, надежности, используемого питания), трудностью координации вычислений из-за отсутствия централизованного управления и большого числа устройств в сети.

Анализ эффективности [3] и прогнозирование нагрузки [14] вычислительных сетей являются предметом интенсивных исследований. В анализе таких систем широко применяются стохастические модели, однако при исследовании систем большого масштаба целесообразно использовать асимптотические результаты, позволяющие перейти от индивидуальных особенностей отдельных вычислительных узлов к свойствам системы в целом. Следует отметить, что некоторые особенности отдельных процессов, такие, например, как *долгая память* (выражающаяся в расхождении ряда автоковариаций процесса), существенно затрудняют прогноз искомым характеристикам (например, оценки времени завершения проекта в распределенной вычислительной сети [14]). В данной работе основное внимание уделено предельным результатам для моделей вычислительных сетей с большим числом узлов, а именно, развивается подход, предложенный ранее в [14], где рассматривалась гауссовская аппроксимация процесса выполнения работы распределенной вычислительной сетью. В настоящей работе с помощью статистического моделирования проводится исследование корреляционных свойств допредельного процесса при относительно большом числе неоднородных вычислительных узлов.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В данном разделе приведен краткий обзор источников по математическим проблемам в области моделирования распределенных вычислительных сетей.

Среди распределенных вычислительных сетей, в которых ресурсы предоставляются добровольцами (систем добровольных вычислений), можно выделить подклассы вычислительных сетей из персональных компьютеров (desktop grid), облачных систем из персональных компьютеров (ОСПК, desktop clouds), систем мобильных добровольных вычислений (СМДВ, mobile volunteer computing) и систем добровольных параллельных вычислений (parallel volunteer computing) [12]. К особенностям всех указанных типов можно отнести высокую степень гетерогенности вычислительных ресурсов и низкую надежность узлов сети, что требует исследования алгоритмов оптимизации распределения ресурсов и назначения заданий. При этом в каждом подклассе систем цели оптимизации могут различаться: в частности, для СМДВ помимо равномерности распределения нагрузки важны минимизация энергопотребления узлов [9] (что, впрочем, актуально в целом для систем распределенных вычислений [6]), учет ограничений на занимаемую память, минимизация сетевого взаимодействия [10].

Традиционной задачей в области систем распределенных вычислений является разделение ресурсов. При этом важно находить баланс между уровнем избыточности (при котором одна и та же задача может решаться различными узлами для обеспечения надежности) и доступной степенью параллелизма [16]. При решении задач разделения ресурсов в ОСПК учитывается возможность выхода узлов из строя [1]. Для нахождения оптимальных способов разделения ресурсов применяются эвристические методы [5], сравнительный анализ имитационных моделей [8]. К передовым направлениям исследований можно отнести также управление ресурсами с использованием искусственного интеллекта [7].

В качестве математических моделей распределенных систем часто рассматриваются системы типа разветвления–соединения (fork–join), анализ которых классическими методами затруднен в связи с тем, что исследуемый (марковский) процесс является бесконечномерным [22]. В этой связи исследование таких систем ведется в различных предельных режимах: анализ насыщенной системы [11], исследование асимптотик хвоста распределения [18], нахождение стохастических границ для исследуемых характеристик [2, 13, 19] или их аппроксимация [15], исследование предельных процессов [14]. Наконец, отметим также применение машинного обучения для исследования производительности таких систем [23].

КУМУЛЯТИВНАЯ РАБОТА В ГЕТЕРОГЕННОЙ СЕТИ

В данном разделе рассматривается модель распределенной вычислительной сети, динамика которой описывается так называемым процессом кумулятивной работы $\{A(t), t \geq 0\}$, то есть суммарным объемом работы, выполненной вычислительной сетью за промежуток времени $[0, t]$.

Предположим, что вычислительная система состоит из M неоднородных вычислительных узлов, динамика которых описывается в терминах так называемых *on-off процессов*. Все вычислительные узлы относятся к одному из n типов ($n \leq M$), характеризующихся различными скоростями выполнения работы. Обозначим далее через M_i число узлов типа i , т. е. $\sum_{i=1}^n M_i = M$, а через R_i – объем работы, выполненный в единицу времени узлом типа i . Определим далее on-off процесс как случайный процесс $\{I^{(i)}(t), t \geq 0\}$, описывающий активность вычислительного узла типа i следующим образом:

$$I^{(i)}(t) = \begin{cases} R_i, & t \in \text{on-периоду}, \\ 0, & t \in \text{off-периоду}. \end{cases}$$

Дополнительно предполагается, что периоды активности (on) и периоды простоя (off) образуют последовательности независимых случайных величин, а также независимы между собой. Периоды активности и простоя чередуются попеременно. Индекс $i = 1, \dots, n$ соответствует типу узла, при этом для выбора конкретного узла данного типа будем использовать нижний индекс $k = 1, \dots, M_i$.

Отметим, что модели на основе *on-off процессов* рассматривались в приложениях теории массового обслуживания. Основное отличие состоит в том, что наряду с периодами длительности фаз работы и простоя вводятся дополнительные параметры R_i , характеризующие скорость выполнения работы.

Обозначим $A_i(t)$ суммарную работу, выполненную вычислительными узлами типа i :

$$A_i(t) = \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{M_i} I_k^{(i)}(u) \right) du.$$

Тогда *кумулятивная работа (агрегированная)*, выполненная всеми узлами за время $[0, t]$, равна

$$A(t) = \sum_{i=1}^n A_i(t) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{M_i} I_k^{(i)}(u) \right) du. \quad (1)$$

Распределение процесса $A(t)$ фактически будет определяться функциями распределений $F_{on}^{(i)}$ и $F_{off}^{(i)}$ длительностей on и off периодов вычислительных узлов. Для каждого типа $i = 1, \dots, n$ обозначим

$$\mu_{on}^{(i)}, \sigma_{on}^{(i)}, \mu_{off}^{(i)}, \sigma_{off}^{(i)}$$

математическое ожидание и стандартное отклонение длительностей on и off периодов соответственно.

Далее в статье полагается, что каждое из распределений on- (off-) периодов удовлетворяет одному из двух условий (условия для распределений on и off периодов могут отличаться):

1. Хвост распределения, $\bar{F}_j^{(i)}$, $j \in \{on, off\}$, является *правильно меняющейся функцией* на бесконечности, т. е. при $x \rightarrow \infty$:

$$\bar{F}_j^{(i)} := 1 - F_j^{(i)}(x) \sim x^{-\alpha_j^{(i)}} L_j^{(i)}(x), \quad (2)$$

где $\alpha_j^{(i)} \in (1, 2)$, $f \sim g$ означает, что $f/g \rightarrow 1$, а функция $L_j^{(i)}$ медленно меняется на бесконечности, т. е. для произвольного $t > 0$ выполнено

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L_j^{(i)}(tx)}{L_j^{(i)}(x)} = 1.$$

Отметим, что в этом случае дисперсии соответствующих on- (off-) периодов будут бесконечными.

2. Дисперсия периодов конечна, $\sigma_j^{(i)} < \infty$. В этом случае для унификации обозначений положим формально $\alpha_j^{(i)} = 2$.

Дальнейший интерес представляет изучение свойств распределения случайного процесса $A(t)$, в частности, распределение следующей случайной величины

$$\tau_D = \min\{t \geq 0 : A(t) \geq D\},$$

которая интерпретируется как время, необходимое для решения вычислительной задачи трудоемкости D .

Найти требуемые распределения в явном виде не представляется возможным. Следовательно, приходится полагаться либо на имитационное моделирование, либо на асимптотические методы теории случайных процессов.

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КУМУЛЯТИВНОЙ РАБОТЫ

Как уже отмечалось выше, *on-off процессы* активно использовались в области моделирования коммуникационных систем в качестве моделей порождения сетевого трафика. Для агрегированных случайных процессов вида (1) были доказаны асимптотики [21], а именно функциональные предельные теоремы, утверждающие, что соответствующим образом нормированный кумулятивный процесс сходится (при некотором предельном режиме) к гауссовскому процессу с соответствующей корреляционной структурой.

В рамках рассматриваемой модели системы распределенных вычислений данные асимптотические результаты доказаны для случая, когда $R_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Интуитивно ясно, что более общий случай, когда скорости R_i принимают произвольные значения, не должен радикальным образом сказываться на доказательстве предельных теорем. В действительности данные параметры скажутся только на нормировке процесса.

Теперь приведем основной предельный результат для процессов кумулятивной работы $A_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, доказанный в работе [21]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{M_i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(A_i(tT) - R_i M_i p_{on}^{(i)} t T)}{T^{H_i} \sqrt{L_i(T) M_i}} \right\}_{t \geq 0} \quad (3)$$

$$=_d \{c_i B_{H_i}(t)\}_{t \geq 0},$$

где $=_d$ означает равенство по распределению, константы $c_i > 0$ определяются параметрами on/off процесса; $p_{on}^{(i)}$ имеет вид

$$p_{on}^{(i)} = \frac{\mu_{on}^{(i)}}{\mu_{on}^{(i)} + \mu_{off}^{(i)}};$$

$\{B_H(t), t \geq 0\}$ – дробное броуновское движение (ДБД) с параметром $H \in (0, 1)$ (так называемый параметр Хёрста), центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$\text{Cov}(B_H(t), B_H(s)) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H});$$

параметр Хёрста H_i , $i = 1, \dots, n$, предельного ДБД выражается через параметры on/off процессов по следующей формуле:

$$H_i = \frac{3 - \min\{\alpha_{on}^{(i)}, \alpha_{off}^{(i)}\}}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \quad (4)$$

Доказательство результата (3) приводится в работе [21] для случая $R_i = 1$, однако для произвольных положительных скоростей оно повторяется почти дословно.

Неформально данный предельный результат означает, что при достаточно больших значениях M_i и T_i распределение кумулятивной работы A_i , выполненной узлами типа i , сближается с распределением процесса

$$\{R_i M_i p_{on}^{(i)} t T + T^{H_i} \sqrt{L_i(T) M_i} c_i B_{H_i}(t)\}_{t \geq 0}. \quad (5)$$

В гетерогенном случае справедливо следующее обобщение результата (5) (также адаптированное к исследуемой задаче).

Теорема [21, Теорема 2]. Пусть выполнены два условия.

1. Число узлов согласованно растет, т. е. при $M \rightarrow \infty$ выполнено

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M_i/M =: w_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Параметр шкалирования по времени растет, т. е. $T \rightarrow \infty$.

Тогда агрегированный процесс $A(tT)$, при соответствующем центрировании и нормировании, сходится в смысле сходимости конечномерных распределений к суперпозиции независимых ДБД, т. е. для больших значений M_i , $i = 1, \dots, n$, и большого T ,

$$A(tT) \approx CtT + \sum_{i=1}^n T^{H_i} \sqrt{L_i(T) M_i} c_i B_{H_i}(t), \quad (6)$$

где L_i – медленно меняющиеся на бесконечности функции (выраженные в терминах исходных параметров), B_{H_i} – независимые ДБД с параметрами Хёрста H_i , а параметр C имеет вид

$$C = \sum_{i=1}^n R_i M_i p_{on}^{(i)}.$$

Асимптотический результат (6) дает теоретическую мотивировку рассматривать сумму независимых ДБД с линейным сносом в качестве модели процесса вычислений в гетерогенной вычислительной сети. При этом заметим, что если у хотя бы одного из n классов вычислительных узлов распределение длительности периода активности или периода простоя имеет вид (2), то в силу (4) соответствующее данному классу значение параметра Хёрста будет строго больше $1/2$, а значит, процесс будет обладать свойством долговременной зависимости [20].

Для простоты изложения далее положим $R_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Аппроксимация (6) может использоваться при достаточно большом числе узлов и на большом масштабе времени, однако ее практическое применение требует дополнительных исследований. В этой связи особую важность имеет исследование локальных (по времени) свойств модели вычислительной сети, и в частности, доступной вычислительной мощности. Нестрого говоря, в работе [21] показано, что ковариационные свойства процесса (6) являются следствием степенного характера убывания автоковариации процесса $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, описывающего (центрированную и нормированную) доступную вычислительную мощность в момент t при большом числе источников,

$$\{G(t)\}_{t \geq 0} =_d \lim_{M \rightarrow \infty} \{G_M(t)\}_{t \geq 0}, \quad (7)$$

где соответствующий допределный процесс имеет вид

$$\begin{aligned} G_M(t) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{M_i} \left(I_k^{(i)}(t) - \mathbb{E} I_k^{(i)}(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{M_i}{M}} G_{M_i}^{(i)}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

при этом процессы $\{G_{M_i}^{(i)}(t)\}_{t \geq 0}$ описывают (центрированную и нормированную) доступную вычислительную мощность узлов класса i ,

$$G_{M_i}^{(i)}(t) = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \sum_{k=1}^{M_i} \left(I_k^{(i)}(t) - \mathbb{E} I_k^{(i)}(t) \right).$$

Из (7) и (8) следует, что

$$G(t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{w_i} G^{(i)}(t),$$

где $\{G^{(i)}(t)\}_{t \geq 0}$ есть предельные процессы для $i = 1, \dots, n$,

$$\{G^{(i)}(t)\}_{t \geq 0} =_d \lim_{M_i \rightarrow \infty} \{G_{M_i}^{(i)}\}_{t \geq 0}.$$

Обозначим γ_M автоковариационную функцию процесса (7),

$$\gamma_M(u) = \text{Cov}(G_M(0), G_M(u)). \quad (9)$$

С учетом результатов, представленных в работе [21], можно показать, что при больших u и больших M справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \gamma_M(u) &\approx \gamma(u) = \text{Cov}(G(0), G(u)) \\ &\approx \sum_{i=1}^n d_i w_i u^{2H_i-2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где d_i есть некоторые константы, а параметры H_i имеют вид (4). Это означает, что при (хотя бы одном) $H_i > 1/2$ имеет место расходимость ряда автоковариаций процесса. Таким образом, при достаточно большом числе узлов M автоковариационная функция γ_M должна проявлять степенной характер убывания.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для иллюстрации указанных теоретических результатов проведены численные эксперименты. В качестве распределения для on- и off-периодов источника типа $i = 1, \dots, n$ здесь и далее используется распределение Парето первого типа, хвост которого имеет вид

$$\bar{F}_j^{(i)}(x) = x^{-\alpha_j^{(i)}}, \quad x > 1, j \in \{on, off\}.$$

Отметим, что такой хвост распределения относится к классу правильно меняющихся функций, при этом соответствующая медленно меняющаяся функция тождественно равна 1. С учетом (10) целесообразно ожидать, что при больших M имеет место асимптотически линейное убывание автоковариации в двойных логарифмических координатах,

$$\log \gamma_M(u) \approx \beta_M \log u + c_M,$$

где c_M – некоторая константа, $\beta_M \approx 2H - 2$,

$$H = \max_{i=1, \dots, n} H_i.$$

С учетом (4) и (10)

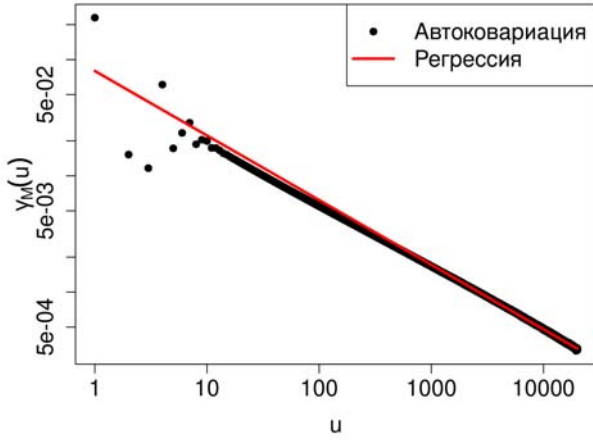
$$\beta_M \approx 1 - \min_{i=1, \dots, n} \min \left\{ \alpha_{on}^{(i)}, \alpha_{off}^{(i)} \right\}. \quad (11)$$

Величину β_M можно оценить с помощью построения наклона линии регрессии для выборочной автоковариации, однако в неоднородном случае такой наклон необходимо строить для достаточно больших значений u и, соответственно, при достаточной длине траекторий.

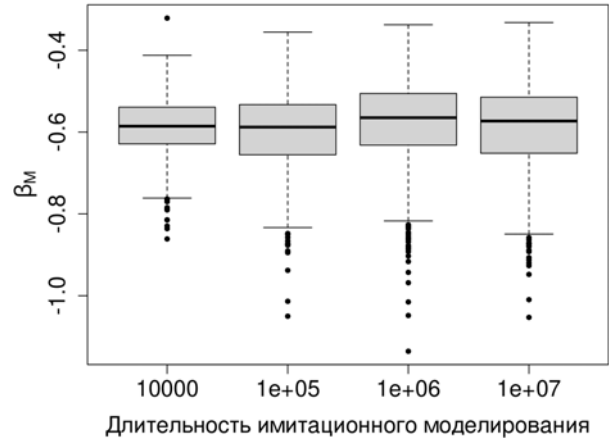
В первом эксперименте рассмотрен однородный случай, т. е. предполагается, что в системе один класс узлов (для упрощения обозначений опустим соответствующие верхние индексы и сохраним обозначение γ_M для *выборочной* автоковариации). Выборочная автоковариация $\gamma_M(u)$ для $M = 10^3$ и $M = 10^4$ узлов при $u = 1, \dots, 20000$ (с шагом, равным 1) вычислена по 988 и 1104 траекториям процесса длиной 10^7 и 10^6 единиц времени соответственно. Использовались следующие значения параметров узлов: $\alpha_{on} = 1,5$ (что соответствует условию (2)), $\alpha_{off} = 2,5$ (т. е. дисперсия off-периода конечна). Тогда из (4) и (11) следует,

что $H = 0,75$, $\beta_M = -0,5$. График автоковариационной функции (9) построен при заранее выбранном M в логарифмических координатах по обеим осям. Из (11) следует, что при больших u , M график должен соответствовать

прямой линии с наклоном $-0,5$. В качестве оценки β_M брался наклон линии регрессии по значениям $\gamma_M(u)$ для $u = 10^3, \dots, 2 \cdot 10^4$. Как видно на рис. 1 (а) и 2 (а), график соответствует ожидаемому.



(а)



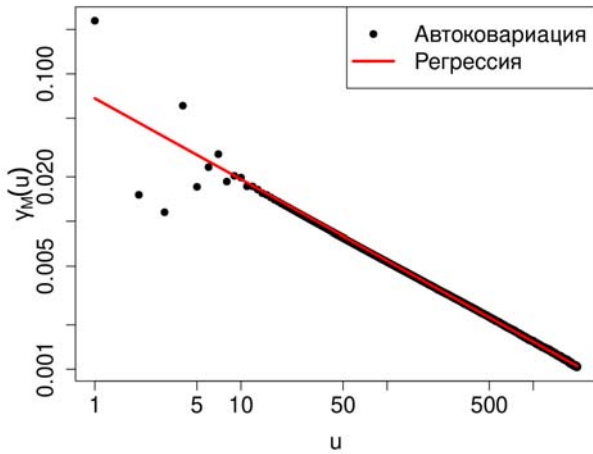
(б)

Рис. 1. Результаты экспериментов с узлами одного типа, $M = 10^3$:

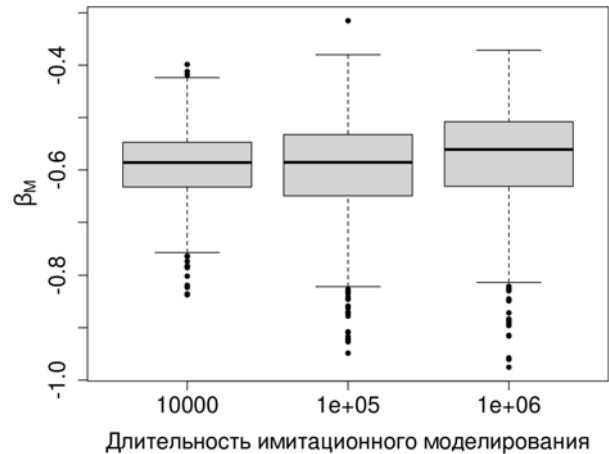
(а) – среднее (по числу траекторий) значение автоковариации. Наклон линии регрессии $\beta_M \approx -0,56$;
(б) – оценка распределения β_M в зависимости от длины траектории $\tau_j = 10^j$, для $j = 4, \dots, 7$, построенная по интервалу параметра $u \in [\tau_j \cdot 10^{-4}, \tau_j \cdot 2 \cdot 10^{-3}]$

Fig. 1. Experimental results for single-type nodes, $M = 10^3$:

(а) – average (trajectorywise) autocovariance value. The slope of regression line $\beta_M \approx -0,56$;
(б) – distribution estimate for β_M vs. trajectory length $\tau_j = 10^j$, for $j = 4, \dots, 7$, for the parameter value $u \in [\tau_j \cdot 10^{-4}, \tau_j \cdot 2 \cdot 10^{-3}]$



(а)



(б)

Рис. 2. Результаты экспериментов с узлами одного типа, $M = 10^4$:

(а) – среднее (по числу траекторий) значение автоковариации. Наклон линии регрессии $\beta_M \approx -0,55$;
(б) – оценка распределения β_M в зависимости от длины траектории $\tau_j = 10^j$, для $j = 4, 5, 6$, построенная по интервалу параметра $u \in [\tau_j \cdot 10^{-4}, \tau_j \cdot 2 \cdot 10^{-3}]$

Fig. 2. Experimental results for single-type nodes, $M = 10^4$:

(а) – average (trajectorywise) autocovariance value. The slope of regression line $\beta_M \approx -0,55$;
(б) – distribution estimate for β_M vs. trajectory length $\tau_j = 10^j$, for $j = 4, 5, 6$, for the parameter value $u \in [\tau_j \cdot 10^{-4}, \tau_j \cdot 2 \cdot 10^{-3}]$

Поведение системы при нескольких типах узлов отличается от случая с одним типом узла. Во втором эксперименте рассмотрена неоднородная система с двумя типами узлов. С помощью имитационного моделирования построены 4886 независимых траекторий процесса $G_M(t)$, каждая длиной 10^7 единиц времени, при следующих значениях параметров: $M = 10^3$, $\alpha_{on}^{(1)} = 1,1$, $\alpha_{on}^{(2)} = 1,9$, $\alpha_{off}^{(1)} = 2,1$, $\alpha_{off}^{(2)} = 2,56$, $w_1 = 0,1$, $w_2 = 0,9$. Парамет-

ры системы подобраны таким образом, чтобы средние значения длительности on и off периодов для агрегированного процесса соответствовали первому эксперименту. Затем для исследования чувствительности оценки β_M к максимальному лагу автоковариации выполнено усечение траекторий до общей длины $\tau_j = 10^j$, а оценка построена для значений $u \in [\tau_j \cdot 10^{-4}, \tau_j \cdot 2 \cdot 10^{-3}]$, $j = 4, \dots, 7$. Результаты представлены на рис. 3.

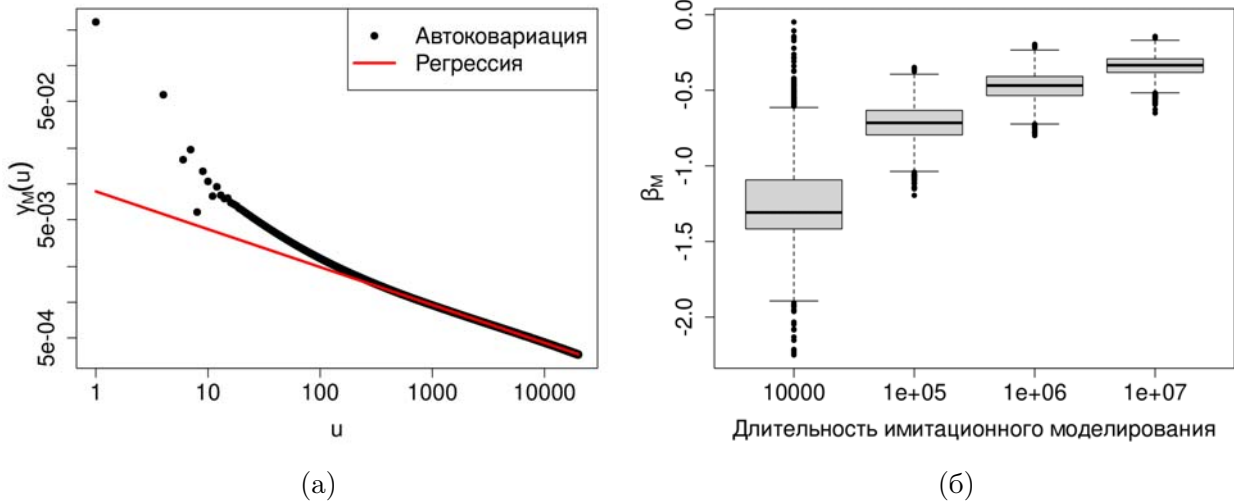


Рис. 3. Результаты численных экспериментов для сети с узлами двух типов, $H_i > 0,5$:

(а) – среднее (по числу траекторий) значение автоковариации. Наклон линии регрессии $\beta_M \approx -0,32$;
(б) – оценка распределения β_M в зависимости от длины траектории $\tau_j = 10^j$, для $j = 4, \dots, 7$, построенная по интервалу параметра $u \in [\tau_j \cdot 10^{-4}, \tau_j \cdot 2 \cdot 10^{-3}]$;

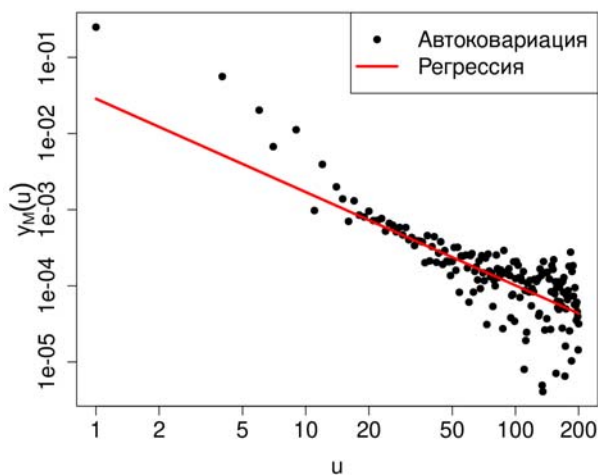
Fig. 3. Numerical results for a network with two types of nodes, $H_i > 0.5$:

(a) – average (trajectorywise) autocovariance value. The slope of regression line $\beta_M \approx -0.32$;
(b) – distribution estimate for β_M vs. trajectory length $\tau_j = 10^j$, for $j = 4, \dots, 7$, for the parameter value $u \in [\tau_j \cdot 10^{-4}, \tau_j \cdot 2 \cdot 10^{-3}]$

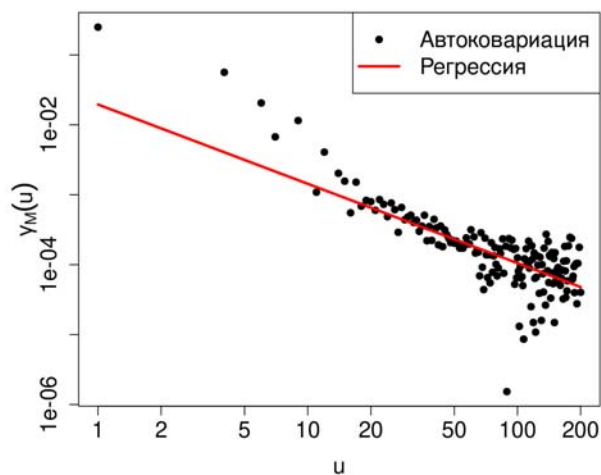
На рис. 3(а) хорошо видно отклонение усредненной (по траекториям) оценки автоковариации для небольших u от прямой линии (линии регрессии), однако, как и ожидается, для больших u график оценки в двойных логарифмических координатах приблизительно соответствует прямой линии. В отличие от первого эксперимента из рис. 3(б) видно, что абсолютное значение оценки и дисперсия оценки β_M уменьшаются с увеличением времени имитационного моделирования τ_j и, соответственно, увеличением диапазона значений u . При этом на рис. 3(б) межквартильный размах для оценки при $j = 6, 7$ примерно соответствует размаху на рис. 1(б) и 2(б). Из (11) ожидается, что $\beta_M \approx -0,1$, что примерно соответствует оценке, представленной на рис. 3(а). Отметим, однако, что теоретическое значение не

достигается, но точность с увеличением максимального значения лага увеличивается. Можно предположить, что для получения более точной оценки требуется построение автоковариации для более высоких значений лага (что потребует увеличения длительности имитационного моделирования).

На рис. 4 представлены результаты третьего эксперимента с параметрами $\alpha_{on}^{(1)} = 2,1$, $\alpha_{on}^{(2)} = 2,9$, $\alpha_{off}^{(1)} = 2,3$, $\alpha_{off}^{(2)} = 2,56$, $w_1 = 0,1$, $w_2 = 0,9$ при общей длине траекторий 10^5 . При таких параметрах $H_i = 0,5$, $i = 1, 2$, т. е. отсутствует долговременная зависимость и процесс $G_M(t)$ аппроксимируется винеровским процессом. Теоретический наклон прямой в этом случае составляет -1 , что соответствует экспериментальным результатам.



$$M = 10^3, \beta_M = -1,22$$



$$M = 10^4, \beta_M = -1,13$$

Рис. 4. Результаты экспериментов с узлами двух разных типов, $H_i = 0,5$. Для каждого графика использовалось 100 независимых траекторий

Fig. 4. Numerical results for a network with two types of nodes, $H_i = 0.5$. 100 independent trajectories were used for each graph

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен анализ допредельного процесса кумулятивной работы в гетерогенной вычислительной сети большого масштаба с помощью статистического моделирования. Отметим, что на практике асимптотическое равенство (6) позволяет исследовать свойства таких сетей без детализации характеристик отдельных узлов.

С учетом известных аналитических результатов, а также задач, поставленных в данной статье, целесообразно предложить следующие направления дальнейших исследований:

- исследование процесса кумулятивной работы в гетерогенной системе в допредельном режиме (при относительно небольшом числе узлов);
- анализ скорости сходимости к дробному броуновскому движению процесса выполненной кумулятивной работы;
- анализ чувствительности ключевых характеристик вычислительных сетей (время выполнения фиксированного объема работы) к макро- (параметр Хёрста) и микро- (параметры ф.р. интервалов on-off процессов, скорости серверов) параметрам исследуемых систем;
- исследование статистических моделей соответствующих процессов, учитывающих эффект долгой памяти (например, в классе моделей FARIMA).

Отметим, что некоторые из указанных исследований могут быть выполнены с использованием имитационного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alwabel A., Walters R. J., Wills G. B. A resource allocation model for desktop clouds // Web Services: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications, IGI Global. 2019. P. 258–279. doi: 10.4018/978-1-5225-7501-6.ch016
2. Baccelli F., Makowski A. M., Shwartz A. The Fork-Join queue and related systems with synchronization constraints: stochastic ordering and computable bounds // Adv. Appl. Probab. 1989. Vol. 21, no. 3. P. 629–660. doi: 10.2307/1427640
3. Chakravarthy S. R., Rumyantsev A. S. Efficient redundancy techniques in cloud and desktop grid systems using MAP/G/c-type queues // Open Eng. 2018. Vol. 1, no. 8. P. 17–31. doi: 10.1515/eng-2018-0004
4. Chernov I. A., Nikitina N. N., Ivashko E. E. Task scheduling in desktop grids: Open problems // Open Eng. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 343–351. doi: 10.1515/eng-2017-0038
5. Han B., Zhang R. Stochastic matrix modelling and scheduling algorithm of distributed intelligent computing system // Math. Probl. Eng. 2022. Iss. 1. Art. 3730738. doi: 10.1155/2022/3730738
6. Hu B., Cao Z., Zhou M. Energy-minimized scheduling of real-time parallel workflows on heterogeneous distributed computing systems // IEEE Transactions on Services Computing. 2022. Vol. 15, no. 5. P. 2766–2779. doi: 10.1109/TSC.2021.3054754

7. Ilager S., Muralidhar R., Buyya R. Artificial Intelligence (AI)-centric management of resources in modern distributed computing systems // 2020 IEEE Cloud Summit. Harrisburg, USA, 2020. P. 1–10. doi: 10.1109/IEEECloudSummit48914.2020.00007

8. Kurochkin I., Kondrashov N. Comparison of various algorithms for scheduling tasks in a desktop grid system using a ComBos simulator // Communications in Computer and Information Science. 2020. Vol. 1304. P. 29–40. doi: 10.1007/978-3-030-66895-2_3

9. Lin Z., Yang J., Wu C., Chen P. Energy-efficient task offloading for distributed edge computing in vehicular networks // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2024. Vol. 73, iss. 9. P. 14056–14061. doi: 10.1109/TVT.2024.3395893

10. Ma P., Garg S., Barika M. Research allocation in mobile volunteer computing system: Taxonomy, challenges and future work // Future Gener. Comput. Syst. 2024. Vol. 154. P. 251–265. doi: 10.1016/j.future.2024.01.015

11. Marin A., Rossi S., Sottana M. Dynamic resource allocation in Fork-Join queues // ACM Transactions on Modeling and Performance Evaluation of Computing Systems. 2020. Vol. 5, no. 1. Art. 3. doi: 10.1145/3372376

12. Mengistu T. M., Che D. Survey and taxonomy of volunteer computing // ACM Computing Survey. 2020. Vol. 52, no. 3. P. 1–35. doi: 10.1145/3320073

13. Mohanty M., Gautam G., Aggarwal V., Parag P. Analysis of Fork-Join scheduling on heterogeneous parallel servers // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2024. Vol. 32, iss. 6. P. 4798–4809. doi: 10.1109/TNET.2024.3432183

14. Morozov E. V., Lukashenko O. V., Rumyantsev A. S., Ivashko E. E. A Gaussian approximation of runtime estimation in a desktop grid project // 2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2017. P. 107–111. doi: 10.1109/ICUMT.2017.8255158

15. Osman R., Harrison P. G. Approximating closed Fork-Join queueing networks using product-form stochastic Petri-nets // J. Syst. Softw. 2015. Vol. 110. P. 264–278. doi: 10.1016/j.jss.2015.08.036

16. Peng P., Soljanin E., Whiting P. Diversity vs. parallelism in distributed computing with redundancy // 2020 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Los Angeles, USA, 2020. P. 257–262. doi: 10.1109/ISIT44484.2020.9174030

17. Pokhrel S. R., Vu H. L., Cricenti A. L. Adaptive admission control for IoT applications in home WiFi networks // IEEE Transactions on Mobile Computing. 2020. Vol. 19, no. 12. P. 2731–2742. doi: 10.1109/TMC.2019.2935719

18. Raaijmakers Y., Borst S., Bozma O. Fork-Join and redundancy systems with heavy-tailed job

sizes // Queueing Syst. 2023. Vol. 103. P. 131–159. doi: 10.1007/s11134-022-09856-6

19. Rizk A., Poloczek F., Ciucu F. Stochastic bounds in Fork-Join queueing systems under full and partial mapping // Queueing Syst. 2016. Vol. 83. P. 261–291. doi: 10.1007/s11134-016-9486-x

20. Samorodnitsky G. Long range dependence // Foundations and trends in stochastic systems. 2006. Vol. 1, no. 3. P. 163–257. doi: 10.1561/09000000004

21. Taqqu M. S., Willinger W., Sherman R. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling // Comput. Commun. Rev. 1997. Vol. 27. P. 5–23. doi: 10.1145/263876.263879

22. Thomasian A. Analysis of Fork/Join and related queueing systems // ACM Computing Surveys. 2014. Vol. 47, no. 2. P. 1–71. doi: 10.1145/2628913

23. Vishnevsky V. M., Klimenok V. I., Sokolov A. M., Larionov A. A. Investigation of the Fork-Join system with Markovian arrival process arrivals and phase-type service time distribution using machine learning methods // Mathematics. 2024. Vol. 12. P. 659. doi: 10.3390/math12050659

REFERENCES

1. Alwabel A., Walters R. J., Wills G. B. A resource allocation model for desktop clouds. *Web Services: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications, IGI Global*. 2019. P. 258–279. doi: 10.4018/978-1-5225-7501-6.ch016

2. Baccelli F., Makowski A. M., Shwartz A. The Fork-Join queue and related systems with synchronization constraints: stochastic ordering and computable bounds. *Adv. Appl. Probab.* 1989;21(3):629–660. doi: 10.2307/1427640

3. Chakravarthy S. R., Rumyantsev A. S. Efficient redundancy techniques in cloud and desktop grid systems using MAP/G/c-type queues. *Open Eng.* 2018;1(8):17–31. doi: 10.1515/eng-2018-0004

4. Chernov I. A., Nikitina N. N., Ivashko E. E. Task scheduling in desktop grids: Open problems. *Open Eng.* 2017;7(1):343–351. doi: 10.1515/eng-2017-0038

5. Han B., Zhang R. Stochastic matrix modelling and scheduling algorithm of distributed intelligent computing system. *Math. Probl. Eng.* 2022;1:3730738. doi: 10.1155/2022/3730738

6. Hu B., Cao Z., Zhou M. Energy-minimized scheduling of real-time parallel workflows on heterogeneous distributed computing systems. *IEEE Transactions on Services Computing.* 2022; 15(5):2766–2779. doi: 10.1109/TSC.2021.3054754

7. Ilager S., Muralidhar R., Buyya R. Artificial Intelligence (AI)-centric management of resources in modern distributed computing systems. *2020 IEEE Cloud Summit*. Harrisburg, USA; 2020. P. 1–10. doi: 10.1109/IEEECloudSummit48914.2020.00007

8. Kurochkin I., Kondrashov N. Comparison of various algorithms for scheduling tasks in a desktop grid system using a ComBos simulator. *Communications in Computer and Information Science*. 2020;1304:29–40. doi: 10.1007/978-3-030-66895-2_3

9. Lin Z., Yang J., Wu C., Chen P. Energy-efficient task offloading for distributed edge computing in vehicular networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 2024;73(9):14056–14061. doi: 10.1109/TVT.2024.3395893

10. Ma P., Garg S., Barika M. Research allocation in mobile volunteer computing system: Taxonomy, challenges and future work. *Future Gener. Comput. Syst.* 2024;154:251–265. doi: 10.1016/j.future.2024.01.015

11. Marin A., Rossi S., Sottana M. Dynamic resource allocation in Fork-Join queues. *ACM Transactions on Modeling and Performance Evaluation of Computing Systems*. 2020;5(1):3. doi: 10.1145/3372376

12. Mengistu T. M., Che D. Survey and taxonomy of volunteer computing. *ACM Computing Survey*. 2020;52(3):1–35. doi: 10.1145/3320073

13. Mohanty M., Gautam G., Aggarwal V., Parag P. Analysis of Fork-Join scheduling on heterogeneous parallel servers. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2024;32(6):4798–4809. doi: 10.1109/TNET.2024.3432183

14. Morozov E. V., Lukashenko O. V., Rumyantsev A. S., Ivashko E. E. A Gaussian approximation of runtime estimation in a desktop grid project. *2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*. 2017. P. 107–111. doi: 10.1109/ICUMT.2017.8255158

15. Osman R., Harrison P. G. Approximating closed Fork-Join queueing networks using product-form

stochastic Petri-nets. *J. Syst. Softw.* 2015;110:264–278. doi: 10.1016/j.jss.2015.08.036

16. Peng P., Soljanin E., Whiting P. Diversity vs. parallelism in distributed computing with redundancy. *2020 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*. Los Angeles, USA; 2020. P. 257–262. doi: 10.1109/ISIT44484.2020.9174030

17. Pokhrel S. R., Vu H. L., Cricenti A. L. Adaptive admission control for IoT applications in home WiFi networks. *IEEE Transactions on Mobile Computing*. 2020;19(12):2731–2742. doi: 10.1109/TMC.2019.2935719

18. Raaijmakers Y., Borst S., Bozma O. Fork-Join and redundancy systems with heavy-tailed job sizes. *Queueing Syst.* 2023;103:131–159. doi: 10.1007/s11134-022-09856-6

19. Rizk A., Poloczek F., Ciucu F. Stochastic bounds in Fork-Join queueing systems under full and partial mapping. *Queueing Syst.* 2016;83:261–291. doi: 10.1007/s11134-016-9486-x

20. Samorodnitsky G. Long range dependence. *Foundations and trends in stochastic systems*. 2006;1(3):163–257. doi: 10.1561/09000000004

21. Taqqu M. S., Willinger W., Sherman R. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling. *Comput. Commun. Rev.* 1997;27:5–23. doi: 10.1145/263876.263879

22. Thomasian A. Analysis of Fork/Join and related queueing systems. *ACM Computing Surveys*. 2014;47(2):1–71. doi: 10.1145/2628913

23. Vishnevsky V. M., Klimenok V. I., Sokolov A. M., Larionov A. A. Investigation of the Fork-Join system with Markovian arrival process arrivals and phase-type service time distribution using machine learning methods. *Mathematics*. 2024;12:659. doi: 10.3390/math12050659

Поступила в редакцию / received: 05.05.2025; принята к публикации / accepted: 10.06.2025.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Лукашенко Олег Викторович

канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

e-mail: lukashenko@krc.karelia.ru

Астафьев Сергей Николаевич

аспирант, младший научный сотрудник

e-mail: seryugmail@mail.ru

Иголкин Владислав Александрович

преподаватель

e-mail: easyufbln@gmail.com

Румянцев Александр Сергеевич

д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник

e-mail: ar0@krc.karelia.ru

CONTRIBUTORS:

Lukashenko, Oleg

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher

Astafiev, Sergey

Doctoral Student, Junior Researcher

Igolkin, Vladislav

Lecturer

Rumyantsev, Alexander

Dr. Sci. (Phis.-Math.), Leading Researcher