УДК 519.179.4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ДЕРЕВА В ЛЕСЕ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН

Е. В. Хворостянская

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматривается случайный лес, образованный траекториями однородного ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с N начальными частицами, в котором число прямых потомков каждой частицы имеет распределение $p_k = (k+1)^{-\tau} - (k+2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Для леса Гальтона–Ватсона, общее число вершин которого не превосходит n , получены предельные распределения максимального объема дерева при $N, n \rightarrow \infty$ и различных значениях параметра τ , соответствующих критическому или докритическому ветвящемуся процессу.

Ключевые слова: лес Гальтона – Ватсона; максимальный объем дерева; предельное распределение

Для цитирования: Хворостянская Е. В. Предельные теоремы для максимального объема дерева в лесе Гальтона–Ватсона с ограниченным числом вершин // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 65–73. doi: 10.17076/mat2097

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

E. V. Khvorostyanskaya. LIMIT THEOREMS FOR THE MAXIMUM TREE SIZE IN THE GALTON – WATSON FOREST WITH A BOUNDED NUMBER OF VERTICES

*Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian
Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)*

We consider a random forest formed by trajectories of a homogeneous Galton–Watson branching process starting with N particles, where the number of immediate offspring of each particle has the distribution $p_k = (k+1)^{-\tau} - (k+2)^{-\tau}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. For the Galton–Watson forest containing at most n vertices, we find limit distributions of the maximum tree size as $N, n \rightarrow \infty$ for different values of the parameter τ corresponding to a critical or subcritical branching process.

Key words: Galton–Watson forest; maximum tree size; limit distribution

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ

В [3–7, 10] рассматривались леса Гальтона–Ватсона $\mathcal{F}_{N,n}$, сгенерированные однородным критическим ветвящимся процессом G_N , распределение числа прямых потомков каждой частицы которого является случайной величиной ξ с распределением вида

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{L(k+1)}{(k+1)^{\tau+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\tau \in (1, 2)$, $L(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция, принимающая только положительные значения при $x \geq 1$. Предполагалось, что число некорневых вершин случайного леса известно и равно n . Нетрудно видеть, что для значений параметра $\tau \in (1, 2)$ распределение (1) имеет бесконечную дисперсию. Были доказаны предельные теоремы для максимального объема дерева и числа деревьев заданного объема при $N, n \rightarrow \infty$, при этом значение параметра τ распределения (1) в указанных работах определялось условием $\mathbf{E}\xi = 1$. Задача изучения характеристик случайных лесов, порожденных ветвящимися процессами с бесконечным вторым моментом распределения числа прямых потомков, возникла в связи с возможностью применения таких результатов при исследовании структуры и динамики конфигурационных графов, предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций [17, 18]. Полученные ранее результаты о лесах Гальтона–Ватсона предполагают существование конечной дисперсии распределения случайной величины ξ [1, 8].

Пусть далее G_N – однородный ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с N начальными частицами, занумерованными числами $1, \dots, N$. Распределение числа прямых потомков каждой частицы процесса G_N задается равенствами

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{(k+1)^\tau} - \frac{1}{(k+2)^\tau}, \quad (2)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$. Характеристики случайного леса $\mathcal{F}_{N,n}$ с n некорневыми вершинами, порожденного критическим ветвящимся процес-

сом G_N , изучались в [12, 14]. Нетрудно видеть, что распределение (2) является частным случаем распределения (1), при этом $L(x) = x(1 - (x/(x+1))^\tau)$. Учитывая (2), несложно показать, что

$$m = \mathbf{E}\xi = \zeta(\tau, 2),$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}\xi = 2\zeta(\tau-1, 2) - 3\zeta(\tau, 2) - \zeta^2(\tau, 2), \quad \tau > 2,$$

где $\zeta(s, v) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+v)^{-s}$ – обобщенная дзета-функция. Пусть τ_0 определяется равенством $\zeta(\tau_0, 2) = 1$, тогда $\tau_0 \approx 1,728$. Будем считать далее, что значения параметра τ распределения (2) находятся в интервале $\tau_0 \leq \tau \leq C < \infty$, то есть ветвящийся процесс G_N является критическим при $\tau = \tau_0$ или докритическим при $\tau > \tau_0$. Здесь и далее $C, C_1, C_2, \dots$ – некоторые положительные постоянные, не всегда различные. Заметим, что для $\tau_0 \leq \tau \leq 2$ распределение (2) не имеет конечной дисперсии.

Выделим подмножество $F_{N,n}$ траекторий процесса G_N , каждая из которых содержит не более n вершин. Ветвящийся процесс G_N индуцирует на $F_{N,n}$ распределение вероятностей при условии, что общее число вершин не превосходит n . Построенный таким образом лес Гальтона–Ватсона, состоящий из N деревьев и содержащий не более n вершин, обозначим через $\mathcal{F}'_{N,n}$. В [13] получены предельные распределения числа деревьев заданного объема такого леса. В настоящей работе изучается предельное поведение случайной величины $\eta_{(N)}$, равной максимальному объему дерева в лесе $\mathcal{F}'_{N,n}$ при различном характере стремления N, n к бесконечности, при этом значения параметра τ могут быть как фиксированными, так и изменяющимися вместе с N : $\tau = \tau(N)$.

Заметим, что подобная задача рассматривалась в работах [9, 11], где были доказаны предельные теоремы для характеристик леса Гальтона–Ватсона с ограниченным числом вершин, порожденного ветвящимся процессом с пуассоновским распределением числа прямых потомков каждой частицы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Легко видеть, что процесс G_N состоит из N независимых подпроцессов $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(N)}$, каждый из которых начинается с одной частицы. Пусть $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(N)}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, равные числу частиц, существовавших за все время эволюции в подпроцессах $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(N)}$. Введем обозначения:

$$q_k = \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$a = \mathbf{E}\nu^{(1)}, \quad \tau \neq \tau_0, \quad b^2 = \mathbf{D}\nu^{(1)}, \quad \tau > 2.$$

Известно [8, п. 2.3, (2)], что

$$a = \frac{1}{1-m}, \quad b^2 = a^3 \sigma^2,$$

при этом $a \rightarrow \infty$ при $\tau = \tau(N) \rightarrow \tau_0$.

Определим последовательность $B_N(a)$ следующим образом:

$$B_N(a) = \begin{cases} \sqrt{a^3 N \ln N} & \text{при} \\ \tau = 2 \text{ или } (\tau-2) \ln N \rightarrow 0; \\ \sqrt{a^3 N \ln N (1 - e^{-\alpha}) / \alpha} & \text{при} \\ (\tau - 2) \ln N \rightarrow 2\alpha, \quad \alpha \neq 0; \\ \sqrt{2a^3 N / (\tau - 2)} & \text{при} \\ (\tau - 2) \ln N \rightarrow +\infty; \\ (2a^3 N / |\tau - 2|)^{1/\tau} & \text{при} \\ (\tau - 2) \ln N \rightarrow -\infty; \end{cases} \quad (3)$$

и пусть

$$B_{a,N} = (a^{\tau+1} N)^{1/\tau}.$$

Обозначим через $g(x)$ плотность устойчивого распределения с параметром τ , $1 < \tau < 2$, и характеристической функцией

$$f(t) = \exp \left\{ -\Gamma(1-\tau) |t|^\tau e^{-i\pi\tau t / (2|t|)} \right\}, \quad (4)$$

и пусть $p(x)$ – плотность устойчивого распределения с параметром $1/\tau$ и характеристической функцией

$$h(t) = \exp \left\{ -\left(\frac{|t|}{-\Gamma(1-\tau)} \right)^{1/\tau} e^{-i\pi t / (2\tau|t|)} \right\}. \quad (5)$$

Положим

$$C(\tau) = \frac{1}{\tau\Gamma(1-1/\tau) (-\Gamma(1-\tau))^{1/\tau}}.$$

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1, & u/v \geq 1, \\ 0, & u/v < 1. \end{cases}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty, n \geq N, \tau \geq 2$ фиксировано или $\tau = \tau(N) \rightarrow 2 \pm 0$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(N)}{B_{a,N}} \leq z \right\} \rightarrow e^{-z^{-\tau}}.$$

Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty, n \geq N, N^{\tau-1}/a \rightarrow \infty, \tau_0 < \tau \leq C_1 < 2$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(N)}{B_{a,N}} \leq z \right\} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} \int_{-\infty}^{v_N} \widehat{I}_k(z, x) dx}{\int_{-\infty}^{v_N} g(x) dx} + o(1),$$

где $v_N = (n - aN)/B_{a,N}$, при $k = 1, 2, \dots$

$$\widehat{I}_k(u, v) = \int_{x_1, \dots, x_k \geq u} \frac{g(v - x_1 - \dots - x_k)}{(x_1 \dots x_k)^{\tau+1}} dx_1 \dots dx_k. \quad (6)$$

Теорема 3. Пусть $N \rightarrow \infty, n \geq N, \tau = \tau_0, n/N^\tau \rightarrow \gamma$, где γ – некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(N)}{N^\tau} \leq z \right\}$$

$$= 1 + \frac{\sum_{k=1}^{[\gamma/z]} \frac{(-C(\tau))^k}{k!} \int_{kz}^{\gamma} I_k(z, x) dx}{\int_0^{\gamma} p(x) dx} \delta(\gamma, z) + o(1),$$

где при $k = 1, 2, \dots$

$$I_k(u, v) = \int_{X_k(u, v)} \frac{p(v - x_1 - \dots - x_k)}{(x_1 \dots x_k)^{1+1/\tau}} dx_1 \dots dx_k, \quad (7)$$

$$X_k(u, v) = \{x_i \geq u, i=1, \dots, k, x_1 + \dots + x_k \leq v\}.$$

Теорема 4. Пусть $N \rightarrow \infty, n \geq N, \tau = \tau_0, n/N^\tau \rightarrow \infty$. Тогда для любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(N)}{N^\tau} \leq z \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-C(\tau))^k}{k!} \int_{kz}^{\infty} I_k(z, x) dx + o(1),$$

где $I_k(u, v)$ определено в (7).

Заметим, что в теореме 2 и далее запись $\tau_0 < \tau \leq C_1 < 2$ означает, что $\tau \rightarrow \tau_0 + 0$ или $\tau_0 < C_2 \leq \tau \leq C_1 < 2$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть ν_N – случайная величина, равная общему числу частиц, существовавших в процессе G_N до его вырождения:

$$\nu_N = \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \dots + \nu^{(N)}.$$

Введем случайные величины $\nu_1(\mathcal{F}'), \dots, \nu_N(\mathcal{F}')$, равные объемам деревьев леса $\mathcal{F}'_{N,n}$ с корнями $1, 2, \dots, N$ соответственно. Очевидно, что эти случайные величины зависимы и для натуральных $k_1, \dots, k_N$ таких, что $k_1 + \dots + k_N \leq n$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \nu_1(\mathcal{F}') = k_1, \dots, \nu_N(\mathcal{F}') = k_N \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} = k_1, \dots, \nu^{(N)} = k_N \mid \nu_N \leq n \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для двух наборов случайных величин $\nu_1(\mathcal{F}'), \dots, \nu_N(\mathcal{F}')$ и $\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(N)}$ выполнены условия аналога обобщенной схемы размещения не более чем n частиц по N ячейкам [15, 16]. Обобщенная схема размещения была введена и подробно изучена В. Ф. Колчиным (см., например, [2]), в ней предполагалось, что число размещаемых частиц равно n .

Введем независимые случайные величины $\nu_1^{(\leq r)}, \dots, \nu_N^{(\leq r)}$, распределение которых задается равенствами

$$\mathbf{P} \left\{ \nu_i^{(\leq r)} = k \right\} = \mathbf{P} \left\{ \nu^{(i)} = k \mid \nu^{(i)} \leq r \right\},$$

где $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$. Согласно теореме 1 из [15], из (8) следует равенство

$$\mathbf{P} \left\{ \eta_{(N)} = k \right\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P} \left\{ \zeta_N^{(\leq r)} \leq n \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \nu_N \leq n \right\}}, \quad (9)$$

где

$$P_r = \mathbf{P} \left\{ \nu^{(1)} > r \right\}, \quad \zeta_N^{(\leq r)} = \nu_1^{(\leq r)} + \dots + \nu_N^{(\leq r)}.$$

Таким образом, для получения предельного распределения случайной величины $\eta_{(N)}$ достаточно знать асимптотику вероятностей P_r , $\mathbf{P} \left\{ \zeta_N^{(\leq r)} \leq n \right\}$, $\mathbf{P} \left\{ \nu_N \leq n \right\}$.

Следующие утверждения (леммы 1–4) получены в [13, п. 2.2].

Лемма 1. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n \geq N$, $\tau > 2$ фиксировано. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \nu_N \leq n \right\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_N} e^{-x^2/2} dx, \quad z_N = \frac{n - aN}{b\sqrt{N}}.$$

Лемма 2. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n \geq N$, $\tau = 2$ или $\tau = \tau(N) \rightarrow 2 \pm 0$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \nu_N \leq n \right\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_N} e^{-x^2/2} dx, \quad y_N = \frac{n - aN}{B_N(a)}.$$

Лемма 3. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n \geq N$, $\tau_0 < \tau \leq C_3 < 2$, $N^{\tau-1}/a \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \nu_N \leq n \right\} = \int_{-\infty}^{v_N} g(x) dx (1 + o(1)), \quad v_N = \frac{n - aN}{B_{a,N}}.$$

Лемма 4. При $N \rightarrow \infty$, $n \geq N$, $\tau = \tau_0$ справедливо равенство

$$\mathbf{P} \left\{ \nu_N \leq n \right\} = \int_0^{n/N^{\tau}} p(x) dx (1 + o(1)).$$

Введем обозначения:

$$E(u, v) = C(\tau) \int_v^{\infty} e^{iuy} y^{-1-1/\tau} dy, \quad (10)$$

$$\widehat{E}(u, v) = \tau \int_v^{\infty} e^{iuy} y^{-1-\tau} dy.$$

Согласно лемме 3 из [12] справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Если $N \rightarrow \infty$, $\tau = \tau_0$, $r = zN^{\tau} + O(1)$, где z – некоторая положительная постоянная, то $NP_r \rightarrow E(0, z) = \tau C(\tau) z^{-1/\tau}$.

Ниже в лемме 6 получена асимптотика P_r при $\tau > \tau_0$.

Лемма 6. Если $N \rightarrow \infty$, $\tau > \tau_0$, $N^{\tau-1}/a \rightarrow \infty$, $r = zB_{a,N} + O(1)$, где z – некоторая положительная постоянная, то $NP_r \rightarrow \widehat{E}(0, z) = z^{-\tau}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что при условии $N^{\tau-1}/a \rightarrow \infty$ для заданных значений r выполнено соотношение $r^{1-1/\tau}/a \rightarrow \infty$. В [13] показано, что если $k \rightarrow \infty$ и $\tau_0 < C_4 \leq \tau \leq C_5 < \infty$ или $\tau \rightarrow \tau_0$ так, что $k^{1-1/\tau}/a \rightarrow \infty$, то справедливо равенство

$$q_k = \tau \left(\frac{a}{k} \right)^{\tau+1} (1 + o(1)). \quad (11)$$

Используя (11) и заменяя суммирование интегрированием, несложно показать, что

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{\tau(1+o(1))}{NB_{a,N}} \sum_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{k}{B_{a,N}}\right)^{-\tau-1} \\ &= \frac{\tau}{N}(1+o(1)) \int_z^{\infty} y^{-\tau-1} dy \\ &= \frac{\widehat{E}(0, z)}{N}(1+o(1)) = \frac{z^{-\tau}}{N}(1+o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Найдем асимптотику вероятностей $\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(\leq r)} \leq n\right\}$ при $N \rightarrow \infty$ и различных значениях τ .

Лемма 7. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n \geq N$, $\tau > 2$ фиксировано, $r = zB_{a,N} + O(1)$, где z – некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(\leq r)} \leq n\right\} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_N} e^{-x^2/2} dx, \quad z_N = \frac{n-aN}{b\sqrt{N}}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $\nu^{(1)}$. В [13, формула (44)] показано, что при $u \rightarrow 0$

$$\varphi(u) = 1 + iau - (b^2 + a^2)u^2/2 + o(u^2).$$

С помощью этого равенства находим, что для характеристической функции $\psi_r^{(1)}(u)$ случайной величины $\nu_1^{(\leq r)}$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \psi_r^{(1)}(u) &= 1 + iau - (b^2 + a^2)u^2/2 \\ &\quad + o(u^2) + O(uP_r) + S_r(u), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$S_r(u) = \sum_{k=r+1}^{\infty} (1 - e^{iuk}) q_k. \quad (13)$$

Несложно показать, что $|1 - e^{ix}| \leq C_6|x|$ для любого x . Учитывая (11), получаем оценку

$$|S_r(u)| \leq C_7|u| \sum_{k=r+1}^{\infty} k^{-\tau} \leq C_8|u|N^{-1+1/\tau}. \quad (14)$$

Из (12), (14) и леммы 6 следует, что при $N \rightarrow \infty$ и любом фиксированном t

$$\psi_r^{(1)}\left(\frac{t}{b\sqrt{N}}\right) = 1 + \frac{iat}{b\sqrt{N}} - \frac{b^2 + a^2}{2b^2N}t^2 + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Используя это равенство, для характеристической функции $\psi_{r,N}(t)$ случайной величины $(\zeta_N^{(\leq r)} - aN) / (b\sqrt{N})$ выводим соотношение

$$\psi_{r,N}(t) = e^{-t^2/2}(1 + o(1)).$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 8. Пусть $N \rightarrow \infty$, $n \geq N$, $\tau = 2$ или $\tau = \tau(N) \rightarrow 2 \pm 0$, $r = zB_{a,N} + O(1)$, где z – некоторая положительная постоянная. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(\leq r)} \leq n\right\} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_N} e^{-x^2/2} dx, \quad y_N = \frac{n-aN}{B_N(a)}.$$

Доказательство. Пусть $\tau = 2$ или $\tau \rightarrow 2$ так, что $(\tau - 2) \ln N \rightarrow 0$. В [13, формула (17)] при $u \rightarrow 0$ доказано равенство

$$\varphi(u) = 1 + iau + a^3u^2 \ln |u| + o(u^2 \ln |u|).$$

С помощью этого соотношения, аналогично (12), находим, что для характеристической функции $\psi_r^{(1)}(u)$ случайной величины $\nu_1^{(\leq r)}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \psi_r^{(1)}(u) &= 1 + iau + a^3u^2 \ln |u| \\ &\quad + o(u^2 \ln |u|) + O(uP_r) + S_r(u), \end{aligned} \quad (15)$$

где $S_r(u)$ определено в (13). Легко видеть, что выполнено (14).

Обозначим через $\widetilde{\psi}_{r,N}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(\leq r)} - aN) / B_N(a)$:

$$\widetilde{\psi}_{r,N}(t) = \exp\left\{-\frac{iaNt}{B_N(a)}\right\} \left(\psi_r^{(1)}\left(\frac{t}{B_N(a)}\right)\right)^N. \quad (16)$$

Используя (3), (14)–(16), лемму 6 и формулу Тейлора, несложно показать, что при любом фиксированном t

$$\widetilde{\psi}_{r,N}(t) = \exp\left\{-\frac{iaNt}{B_N(a)}\right\} \quad (17)$$

$$+ N \ln\left(1 + \frac{iat}{B_N(a)} - \frac{t^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) = e^{-t^2/2} + o(1).$$

Пусть $\tau \rightarrow 2$ так, что $(\tau - 2) \ln N \rightarrow 2\alpha$, $\alpha \neq 0$. В [13, формула (24)] показано, что при $u \rightarrow 0$

$$\varphi(u) = 1 + iau + \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} a^3u^2 \ln |u| + o(u^2 \ln |u|).$$

С помощью этого равенства, (3), (14), (16), леммы 6 и формулы Тейлора несложно проверить, что при любом фиксированном t справедливо (17).

Пусть $\tau \rightarrow 2$ так, что $(\tau - 2) \ln N \rightarrow +\infty$. Согласно формуле (25) из [13] для характеристической функции $\varphi(u)$ при $u \rightarrow 0$ выполнено соотношение

$$\varphi(u) = 1 + iau - \frac{a^3 u^2}{\tau - 2} (1 + o(1)).$$

Используя это равенство, (13), (14) и лемму 6, находим, что

$$\psi_r^{(1)}(u) = 1 + iau - \frac{a^3 u^2}{\tau - 2} (1 + o(1)) + O\left(\frac{u}{N^{1-1/\tau}}\right).$$

Отсюда и из (16) при любом фиксированном t и $B_N(a) = \sqrt{2a^3 N / (\tau - 2)}$ выводим (17).

Пусть $\tau \rightarrow 2$ так, что $(\tau - 2) \ln N \rightarrow -\infty$. В [13, формула (26)] доказано, что

$$\varphi(u) = 1 + iau + \frac{a^3 |u|^\tau}{\tau - 2} (1 + o(1)).$$

С помощью этого соотношения, (3), (13), (14), (16) и леммы 6 получаем (17).

Из равенства (17) следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 9. Пусть $N \rightarrow \infty$, $\tau_0 < \tau \leq C_9 < 2$, $N^{\tau-1}/a \rightarrow \infty$, $r = zB_{a,N} + O(1)$, где z – некоторая положительная постоянная. Тогда распределение случайной величины $(\zeta_N^{(\leq r)} - Na) / B_{a,N}$ слабо сходится к распределению с плотностью

$$\hat{\omega}(x) = e^{z^{-\tau}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} \hat{I}_k(z, x),$$

где $\hat{I}_0(u, v) = g(v)$, $\hat{I}_k(u, v)$ при $k = 1, 2, \dots$ определены в (6).

Доказательство. Аналогично [13, формула (14)] можно показать, что если $u \rightarrow 0$ так, что $a^\tau |u|^{\tau-1} \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= 1 + iau \\ &- \Gamma(1-\tau) a^{\tau+1} |u|^\tau e^{-i\pi\tau u/(2|u|)} + o(a^{\tau+1} u^\tau). \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим через $\rho_{r,N}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(\leq r)} - aN) / B_{a,N}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \rho_{r,N}(t) &= \exp\left\{-\frac{iaNt}{B_{a,N}}\right\} \varphi^N\left(\frac{t}{Ba, N}\right) \\ &\times \left(\frac{1 - \hat{Q}_r(t)}{1 - P_r}\right)^N, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\hat{Q}_r(t) = (1 + o(1)) \sum_{k=r+1}^{\infty} e^{itk/B_{a,N}} q_k.$$

При выполнении условий леммы $r^{1-1/\tau}/a \rightarrow \infty$ и справедливо соотношение (11). Учитывая (11) и переходя от суммирования к интегрированию, находим, что

$$\begin{aligned} \hat{Q}_r(t) &= \frac{\tau}{N} (1 + o(1)) \int_z^{\infty} e^{ity} y^{-\tau-1} dy \\ &= \frac{\hat{E}(t, z)}{N} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\hat{E}(t, z)$ определено в (10). Отсюда, из (18), (19) и леммы 6 получаем, что при любом фиксированном t

$$\begin{aligned} \rho_{r,N}(t) &= \exp\left\{z^{-\tau} - \hat{E}(t, z) \right. \\ &\left. - \Gamma(1-\tau) |t|^\tau e^{-i\pi\tau t/(2|t|)} + O\left(\frac{a^2 N}{B_{a,N}^2}\right) + o(1)\right\}, \end{aligned}$$

и поскольку $a^2 N / B_{a,N}^2 \rightarrow 0$, выполнено равенство

$$\rho_{r,N}(t) = \exp\left\{z^{-\tau} - \hat{E}(t, z)\right\} f(t) (1 + o(1)),$$

где $f(t)$ задано формулой (4).

Нетрудно видеть, что функция $\hat{l}(t) = \hat{E}(u, v) / \hat{E}(0, v)$ является характеристической функцией распределения с плотностью

$$\theta(x) = \frac{\tau x^{-\tau-1}}{\hat{E}(0, v)}, \quad x \geq v.$$

Раскладывая $e^{-\hat{E}(t,z)}$ в ряд по степеням $\hat{E}(t, z)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \rho_{r,N}(t) &= e^{z^{-\tau}} f(t) (1 + o(1)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \hat{E}^k(t, z) \\ &= e^{z^{-\tau}} (1 + o(1)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \hat{E}^k(0, z)}{k!} f(t) \hat{l}^k(t). \end{aligned}$$

Произведение характеристических функций $f(t) \hat{l}^k(t)$ при $k = 1, 2, \dots$ является характеристической функцией суммы независимых случайных величин, плотность $\hat{p}_k(v)$ распределе-

ния такой суммы является сверткой плотностей:

$$\widehat{p}_k(v) = \int_{x_1, \dots, x_k \geq z} g(v - x_1 - \dots - x_k) \times \theta(x_1) \dots \theta(x_k) dx_1 \dots dx_k = \frac{\tau^k \widehat{I}_k(z, v)}{\widehat{E}^k(0, z)}.$$

Заметим, что $\widehat{p}_0(v) = g(v)$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{r,N}(t) &= e^{z^{-\tau}} (1 + o(1)) \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \widehat{E}^k(0, z)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \widehat{p}_k(x) dx \\ &= e^{z^{-\tau}} (1 + o(1)) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} \widehat{I}_k(z, x) \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 10. Пусть $N \rightarrow \infty$, $\tau = \tau_0$, $r/N^\tau \rightarrow z$, где z – некоторая положительная постоянная. Тогда распределение случайной величины $\zeta_N^{(\leq r)}/N^\tau$ слабо сходится к распределению с плотностью

$$\omega(x) = e^{E(0,z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-C(\tau))^k}{k!} I_k(z, x),$$

где $I_0(u, v) = p(v)$, $I_k(u, v)$ при $k = 1, 2, \dots$ определены в (7).

Доказательство. Обозначим через $\varphi_{r,N}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\zeta_N^{(\leq r)}/N^\tau$. При любом фиксированном t справедливо равенство

$$\varphi_{r,N}(t) = \varphi^N \left(\frac{t}{N^\tau} \right) \left(\frac{1 - Q_r(t)}{1 - P_r} \right)^N,$$

где

$$Q_r(t) = (1 + o(1)) \sum_{k=r+1}^{\infty} e^{itk/N^\tau} q_k.$$

В [14, формула (16)] показано, что при $k \rightarrow \infty$

$$q_k = \frac{C(\tau)}{k^{1+1/\tau}} (1 + o(1)).$$

Следуя доказательству равенства (20) в [12], находим, что при любом фиксированном t

$$\begin{aligned} \varphi_{r,N}(t) &= e^{E(0,z) - E(t,z)} \varphi^N \left(\frac{t}{N^\tau} \right) (1 + o(1)) \\ &= e^{E(0,z) - E(t,z)} h(t) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $h(t)$ определено в (5). Аналогично доказательству леммы 9 несложно показать, что

$$\varphi_{r,N}(t) = e^{E(0,z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k E^k(0, z)}{k!} l_k(t) (1 + o(1)),$$

где $l_0(t) = h(t)$, а при $k = 1, 2, \dots$ функция $l_k(t) = h(t) (E(t, z) / E(0, z))^k$ является характеристической функцией суммы независимых случайных величин, при этом плотность $p_k(v)$ распределения такой суммы имеет вид $p_k(v) = (C(\tau) / E(0, z))^k I_k(z, v)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{r,N}(t) &= e^{E(0,z)} (1 + o(1)) \\ &\times \int_0^{\infty} e^{itx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-C(\tau))^k}{k!} I_k(z, x) \right) dx, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1–4

Легко видеть, что утверждение теоремы 1 при фиксированных $\tau > 2$ следует из равенства (9) и лемм 1, 6, 7, а при $\tau = 2$ или $\tau = \tau(N) \rightarrow 2 \pm 0$ – из формулы (9) и лемм 2, 6, 8.

Пусть выполнены условия теоремы 2. С помощью леммы 9 при $r = zB_{a,N} + O(1)$ выводим соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \zeta_N^{(\leq r)} \leq n \right\} &= e^{z^{-\tau}} (1 + o(1)) \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{v_N} g(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^k}{k!} \int_{-\infty}^{v_N} \widehat{I}_k(z, x) dx \right). \end{aligned}$$

Отсюда, из равенства (9) и лемм 3, 6 нетрудно получить утверждение теоремы 2.

При выполнении условий теоремы 3 из леммы 10 находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \zeta_N^{(\leq r)} \leq n \right\} &= e^{E(0,z)} (1 + o(1)) \int_0^{n/N^\tau} p(x) dx \\ &+ e^{E(0,z)} (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-C(\tau))^k}{k!} \int_{kz}^{n/N^\tau} I_k(z, x) dx \\ &= e^{E(0,z)} (1 + o(1)) \int_0^\gamma p(x) dx + e^{E(0,z)} (1 + o(1)) \\ &\times \delta(\gamma, z) \sum_{k=1}^{[\gamma/z]} \frac{(-C(\tau))^k}{k!} \int_{kz}^\gamma I_k(z, x) dx. \end{aligned}$$

Из этого равенства, (9) и лемм 4, 5 следует утверждение теоремы 3.

Аналогично теореме 3 доказывается теорема 4, учитывая, что $n/N^T \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л. Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 1. С. 47–59. doi: 10.4213/dm320

2. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 208 с.

3. Павлов Ю. Л. Максимальное дерево случайного леса в конфигурационном графе // Математический сборник. 2021. Т. 212, вып. 9. С. 146–163. doi: 10.4213/sm9481

4. Павлов Ю. Л. Об объемах деревьев леса Гальтона–Ватсона в промежуточном случае // Дискретная математика. 2025. Т. 37, вып. 1. С. 39–51. doi: 10.4213/dm1860

5. Павлов Ю. Л. Об объемах деревьев леса Гальтона–Ватсона с бесконечной дисперсией в критическом случае // Дискретная математика. 2024. Т. 36, вып. 2. С. 33–49. doi: 10.4213/dm1813

6. Павлов Ю. Л. О максимальном дереве леса Гальтона–Ватсона с бесконечной дисперсией распределения числа потомков // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 2. С. 78–92. doi: 10.4213/dm1765

7. Павлов Ю. Л. О максимальном объеме дерева случайного леса // Дискретная математика. 2022. Т. 34, вып. 4. С. 69–83. doi: 10.4213/dm1729

8. Павлов Ю. Л. Случайные леса. Петрозаводск: Карел. науч. центр РАН, 1996. 259 с.

9. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. О максимальном объеме дерева в лесе Гальтона–Ватсона с ограниченным числом вершин // Дискретная математика. 2014. Т. 26, вып. 3. С. 90–100. doi: 10.4213/dm1293

10. Павлов Ю. Л., Челюкова И. А. Объемы деревьев случайного леса и конфигурационные графы // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2022. Т. 316. С. 298–315. doi: 10.4213/tm4216

11. Хворостянская Е. В. Предельные распределения числа деревьев заданного объема в лесе Гальтона–Ватсона с ограниченным числом вершин // Ученые записки ПетрГУ. Серия: Естественные и технические науки. 2014. № 8(145). Т. 1. С. 115–118.

12. Хворостянская Е. В. Предельные теоремы для максимального объема дерева леса Гальтона–Ватсона в критическом случае // Дискретная математика. 2022. Т. 34, вып. 2. С. 120–136. doi: 10.4213/dm1703

13. Хворостянская Е. В. Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема леса Галь-

тона–Ватсона с ограниченным числом вершин // Дискретная математика. 2025. Т. 37, вып. 2. С. 120–136. doi: 10.4213/dm1855

14. Хворостянская Е. В. О числе деревьев заданного объема в лесе Гальтона–Ватсона в критическом случае // Теория вероятностей и ее применения. 2023. Т. 68, вып. 1. С. 75–92. doi: 10.4213/tvp5573

15. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

16. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

17. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

18. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2024. 498 p. doi: 10.1017/9781316795552

REFERENCES

1. Kazimirov N. I., Pavlov Yu. L. A remark on Galton–Watson forests. *Discrete Mathematics and Applications*. 2000;10(1):49–62. doi: 10.4213/dm320

2. Kolchin V. F. Random mappings. New York: Springer; 1986. 206 p.

3. Pavlov Yu. L. The maximum tree of a random forest in the configuration graph. *Sbornik: Mathematics*. 2021;212(9):1329–1346. doi: 10.1070/SM9481

4. Pavlov Yu. L. On the sizes of trees in a Galton–Watson forest in the intermediate case. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2025;37(1):39–51. (In Russ.). doi: 10.4213/dm1860

5. Pavlov Yu. L. On the sizes of trees in a Galton–Watson forest with infinite variance in the critical case. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2024;36(2):33–49. (In Russ.). doi: 10.4213/dm1813

6. Pavlov Yu. L. On the maximal Galton–Watson forest tree with infinite variance of the offspring. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2023;35(2):78–92. (In Russ.). doi: 10.4213/dm1765

7. Pavlov Yu. L. On the maximal size of tree in a random forest. *Discrete Mathematics and Applications*. 2024;34(4):221–232. doi: 10.1515/dma-2024-0019

8. Pavlov Yu. L. Random Forests. Utrecht: VSP; 2000. 122 p. doi: 10.1515/9783110941975

9. Pavlov Yu. L., Hovorostyanskaya E. V. On the maximum size of a tree in the Galton–Watson forest with a bounded number of vertices. *Discrete Mathematics and Applications*. 2014;24(6):363–371. doi: 10.1515/dma-2014-0032
10. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Sizes of trees in a random forest and configuration graphs. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2022;316:280–297. doi: 10.1134/S0081543822010205
11. Khvorostyanskaya E. V. Limit distribution of given size trees' number in Galton–Watson forest with limited number of vertices. *Uchenye zapiski PetrGU. Serya: Estestvennye i tehnicheckie nauki = Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser.: Natural & Engineering Sciences*. 2014;8(145.1):115–118. (In Russ.)
12. Khvorostyanskaya E. V. Limit theorems for the maximal tree size of a Galton–Watson forest in the critical case. *Discrete Mathematics and Applications*. 2023;33(4):205–217. doi: 10.1515/dma-2023-0019
13. Khvorostyanskaya E. V. Limit theorems for the number of trees of a given size in a Galton–Watson forest with a bounded number of vertices. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications*. 2025;37(2):120–136. (In Russ.). doi: 10.4213/dm1855
14. Khvorostyanskaya E. V. On the number of trees of a given size in a Galton–Watson forest in the critical case. *Theory of Probability and its Applications*. 2023;68(1):62–76. doi: 10.1137/S0040585X97T991283
15. Chuprunov A. N., Fasekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum dell load. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012;22(3):307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020
16. Chuprunov A. N., Fasekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012;22(1):101–422. doi: 10.1515/dma-2012-008
17. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
18. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press; 2024. 498 p. doi: 10.1017/9781316795552

Поступила в редакцию / received: 29.04.2025; принята к публикации / accepted: 02.06.2025.
 Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Хворостянская Елена Владимировна
 канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник
e-mail: cher@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Khvorostyanskaya, Elena
 Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher