

УДК 519.837

СТРАТЕГИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ В ИГРЕ НА РАЗОРЕНИЕ С ЗАТРАТАМИ НА КАЖДОМ ШАГЕ

А. А. Ивашко

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассмотрена многошаговая игра двух лиц с конечным горизонтом, связанная с задачей о разорении. На каждом из n шагов два игрока, имеющие разный начальный капитал, разыгрывают единицу стоимости. Предполагается, что игроки несимметричны и имеют неодинаковые шансы на победу на каждом шаге. Игрок выигрывает в данной игре, если капитал его противника закончился, то есть произошло его разорение. Выигрыши игроков определяются в конце игры. При этом в выигрыше игрока учитываются затраты размером s , которые игрок понес на каждом шаге игры. Если противник разорился на шаге τ , то игрок получает выигрыш $1 - s\tau$. Если в течение промежутка времени n игра не закончилась, то выигрыш равен $-sn$. Рассмотрены различные варианты задачи: с неограниченным капиталом у одного из игроков и неограниченным капиталом у обоих игроков. Стратегией игрока является момент остановки игры для максимизации своего ожидаемого выигрыша. Для вычисления вероятности разорения и ожидаемых выигрышей игроков используются свойства несимметричного случайного блуждания, описывающего процесс данной игры. Найдены оптимальные стратегии остановки и ожидаемые выигрыши игроков с помощью метода динамического программирования. Проведено сравнение выигрышей в задаче без возможности остановиться до конечного момента времени n и с использованием стратегии оптимальной остановки. В задаче с неограниченным капиталом у обоих игроков оптимальные стратегии остановки были найдены с помощью процедуры наилучших ответов. Проведено численное моделирование полученных результатов для различных значений параметров задачи.

Ключевые слова: задача о разорении; случайное блуждание; оптимальная стратегия; метод наилучших ответов; игра двух лиц

Для цитирования: Ивашко А. А. Стратегии оптимальной остановки в игре на разорение с затратами на каждом шаге // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 17–23. doi: 10.17076/mat2090

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

A. A. Ivashko. OPTIMAL STOPPING STRATEGIES IN GAMBLER'S RUIN GAME WITH COSTS AT EACH STEP

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We consider a two-person multi-stage finite-horizon game related to the ruin problem. At each of the n stages, two players with different initial capitals play one unit of capital. It is assumed that the players are asymmetric and have unequal chances of winning at each stage. A player wins if their opponent runs out of capital, i.e. is ruined. The players' payoffs are determined at the end of the game taking into account the costs c that the player incurred at each stage of the game. If the opponent goes broke at stage τ , then the player receives a payoff of $1 - c\tau$. If the game has not ended within the n interval, the players' payoffs are $-cn$. Various scenarios are examined: with one player having unlimited capital while the other has limited capital, and with both players having unlimited capital. The player's strategy is to stop the game so as to maximize their expected payoff. The ruin probability and the players' optimal stopping strategies are calculated using the properties of an asymmetric random walk describing the process of the game. Optimal stopping strategies and expected payoffs of the players were found using the dynamic programming method. Payoffs were compared in the problem without the option of stopping before the final time n and using the optimal stopping strategy. In the problem with both players having unlimited capital, optimal stopping strategies were found using the best response procedure. Numerical simulations of the obtained results are presented for different values of the problem parameters.

Key words: gambler's ruin game; random walk; optimal stopping; best response algorithm; two-person game

For citation: Ivashko A. A. Optimal stopping strategies in gambler's ruin game with costs at each step. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2025. No. 4. P. 17–23. doi: 10.17076/mat2090

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Karelian Research Centre RAS (Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre RAS).

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается многошаговая игра двух лиц в дискретном времени и с конечным горизонтом n , связанная с задачей о разорении [3, 9]. Пусть у каждого из двух игроков (I и II) имеется некоторое количество капитала. Игроки на каждом шаге игры разыгрывают единицу капитала. Предполагается, что у игрока I вероятность выиграть равна p , а у игрока II — $q = 1 - p$. Соответственно, на каждом шаге капитал игрока либо увеличивается на единицу, либо уменьшается. Игра длится до тех пор, пока не закончится капитал у одного из игроков либо пока время игры не истечет. Выигрыши игроков определяются в конце игры следующим образом. Если капитал какого-то игрока закончился в момент времени τ , то есть произошло его разорение, другой игрок получает выигрыш, равный $1 - c\tau$, где c — затраты игрока на каждом шаге игры, $0 \leq c < 1$. Если в течение промежутка времени n игра не закончилась, то выигрыш равен $-cn$. В данной задаче необходимо найти оптимальные страте-

гии остановки для максимизации ожидаемых выигрышей игроков.

Задача о разорении игрока широко известна в литературе (см. обзор [1, 10]). Исследованы различные постановки, для которых найдены вероятности разорения игрока и ожидаемое время до окончания игры. Задачи с двумя игроками рассмотрены в работах [2, 4]. Постановки, в которых несколько игроков играют до разорения одного из них, исследованы в [5, 8].

Варианты задачи о разорении, в которых вероятность победы игрока на каждом следующем шаге зависит от соотношения побед и поражений на предыдущих шагах, были рассмотрены в работах [6, 7].

В данной работе исследованы две постановки задачи: а) у одного из игроков начальный капитал конечный, а у другого бесконечный; б) у обоих игроков капитал бесконечный. Были найдены границы оптимальной остановки и выигрыши игроков для обоих случаев. Проведено численное моделирование оптимальных стратегий и выигрышей игроков для различных значений параметров задачи.

ЗАДАЧА О РАЗОРЕНИИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ КАПИТАЛОМ У ОДНОГО ИЗ ИГРОКОВ

Рассматривается задача о разорении следующего вида. В начале игры задан интервал времени n . Имеются два игрока I и II, которые на каждом шаге игры разыгрывают единицу капитала. У одного из игроков (II) имеется начальный капитал, равный $a, a \geq 0$. У другого игрока (I) капитал не ограничен. На каждом шаге игроки играют друг с другом, при этом игрок I может выиграть с вероятностью p и проиграть с вероятностью $q = 1 - p$. Если капитал игрока II исчерпан в момент времени τ , то есть произошло его разорение, игра прекращается и игрок I получает выигрыш, равный $1 - c\tau$, где c – затраты игрока на каждом шаге игры. Если в течение промежутка времени n игра не закончилась, то игрок I получает $-nc$.

Для описания задачи о разорении и нахождения ее решения удобно использовать случайные блуждания. Случайное блуждание по целочисленной строке начинается с 0 и на каждом шаге $i, (i = 1, 2, \dots, n)$ перемещается на $+1$ вправо или на -1 влево. При этом игрок может выиграть с вероятностью p и проиграть с вероятностью $q = 1 - p$.

Обозначим $X_1, \dots, X_n$ последовательность случайных величин, принимающих значения $+1$ или -1 , соответствующих рассмотренному выше случайному блужданию. Тогда $S_i = \sum_{j=1}^i X_j, i = 1, 2, \dots, n, S_0 = 0$ – разность между числом $+1$ и -1 в течение i шагов. Для рассматриваемой задачи S_i представляет собой капитал, полученный игроком I за первые i шагов. Последовательность значений $X_1, \dots, X_n$ формирует некоторую траекторию на плоскости. Эта траектория описывает изменение капитала игрока I за i шагов и заканчивается в точке с координатами (i, S_i) .

Рассмотрим сначала задачу о разорении, в которой оба игрока играют до того момента, когда либо капитал игрока II закончится, либо закончится время игры.

Предположим, что a и n одной четности, так что траектория может закончиться в точке (n, a) .

Игра продолжается до тех пор, пока не закончится ресурс у игрока II либо пока время игры не истечет. На рис. 1 изображено возможное изменение капитала игрока I на каждом из n шагов. Значение капитала игрока II на шаге i соответствует расстоянию от точки (i, S_i) до уровня a .

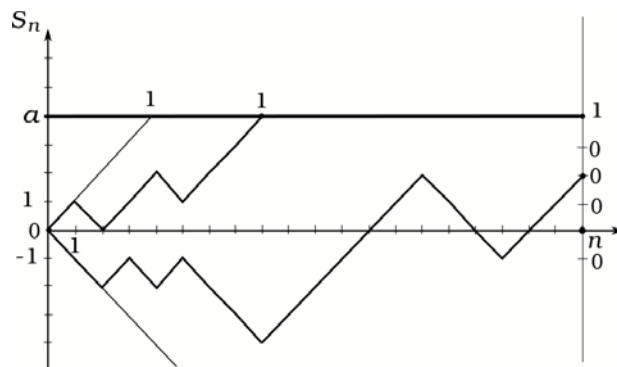


Рис. 1. Игра на разорение с неограниченным капиталом у одного из игроков

Fig. 1. Gambler's ruin problem where one of the players has infinite capital

Обозначим $V_n(a)$ выигрыш игрока I в данной задаче и найдем его значение.

Вероятность попасть из точки $(0, 0)$ в точку (n, j) , где $n + j$ четное и $-n \leq j \leq n$, по любой траектории, для несимметричного случайного блуждания не зависит от пути и равна

$$P(n, j) = p^k (1-p)^{n-k} = (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p} \right)^k, \quad (1)$$

где $k = \frac{n+j}{2}, n-k = \frac{n-j}{2}$.

Число всех траекторий из точки $(0, 0)$ в точку (n, j) равно $N_{n,j} = \binom{n}{k}, k = \frac{n+j}{2}$.

Если до момента времени n блуждание не достигнет значения a , то на последнем шаге игрок получит 0 в качестве выигрыша, затратив при этом $-cn$. Чтобы это произошло, траектория должна, не задев a , закончиться в точке $(n, a-2), (n, a-4), \dots, (n, -n)$. Согласно принципу отражения, число траекторий, заканчивающихся в точке $(n, a-2s)$ и не пересекающих a , где $s = 1, \dots, \frac{n-a}{2}$, равно

$$N_{n,a-2s} - N_{n,a+2s} = \binom{n}{\frac{n+a}{2}-s} - \binom{n}{\frac{n+a}{2}+s}.$$

Число траекторий, заканчивающихся в точке $(n, a-2s)$, где $s = \frac{n-a}{2} + 1, \dots, \frac{n+a}{2}$, равно

$$N_{n,a-2s} = \binom{n}{\frac{n+a}{2}-s}.$$

Таким образом, в случае недостижения случайным блужданием уровня a вклад $U_n(a)$

в выигрыш игрока I, с учетом (1), равен

$$\begin{aligned}
U_n(a) &= -cn \left[\sum_{s=1}^{\frac{n-a}{2}} \left(\binom{n}{\frac{n+a}{2}-s} - \binom{n}{\frac{n+a}{2}+s} \right) \right. \\
&\quad \times P(n, a-2s) + \sum_{s=\frac{n-a}{2}+1}^{\frac{n+a}{2}} \binom{n}{\frac{n+a}{2}-s} P(n, a-2s) \Big] \\
&= -cn \left[\sum_{s=0}^{\frac{n+a}{2}-1} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{p}{1-p} \right)^a \sum_{s=0}^{\frac{n-a}{2}-1} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \right].
\end{aligned}$$

Теперь вычислим вклад $W_n(a)$ в выигрыш игрока I в случае достижения уровня a .

Первый раз траектория достигает уровня a в точке (a, a) . Игрок I получает выигрыш $1 - ac$. Вероятность такого выигрыша равна $P(a, a) = p^a$.

Далее блуждание может достичь уровня a в точке $(a+2, a)$. Таких траекторий будет $N_{a+1, a-1} - N_{a+1, a+1}$. Игрок I получит выигрыш $1 - (a+2)c$. Вероятность такого выигрыша равна $(N_{a-1, a-1} - N_{a-1, a+1})P(a+2, a) = (N_{a-1, a-1} - N_{a-1, a+1})p^{a+1}(1-p)$.

Рассуждая подобным образом, находим выигрыш игрока I при выходе траектории блуждания на уровень a :

$$\begin{aligned}
W_n(a) &= \sum_{i=0}^{\frac{n-a}{2}} (1 - (a+2i)c) \left(N_{a+2i-1, a-1} \right. \\
&\quad \left. - N_{a+2i-1, a+1} \right) P(a+2i, a) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n-a}{2}} \binom{a+2i}{i} \frac{a(1 - (a+2i)c)}{a+2i} p^{a+i} (1-p)^i.
\end{aligned}$$

Объединяя выигрыши, окончательно получаем следующее утверждение.

Утверждение. *Выигрыш игрока I в игре, связанной с разорением игрока, имеет вид*

$$\begin{aligned}
V_n(a) &= \sum_{i=0}^{\frac{n-a}{2}} \binom{a+2i}{i} \frac{a(1 - (a+2i)c)}{a+2i} p^{a+i} (1-p)^i \\
&\quad - c \cdot n \left[\sum_{s=0}^{\frac{n+a}{2}-1} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{p}{1-p} \right)^a \sum_{s=0}^{\frac{n-a}{2}-1} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \right].
\end{aligned}$$

Замечание. Вероятность разорения игрока II вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
P_{ruin}(a) &= 1 - \left[\sum_{s=0}^{\frac{n+a}{2}-1} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{p}{1-p} \right)^a \sum_{s=0}^{\frac{n-a}{2}-1} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \right].
\end{aligned}$$

Для больших значений n получим приближение для вероятности разорения:

$$P_{ruin}(a) \approx \begin{cases} \left(\frac{p}{1-p} \right)^a, & p < \frac{1}{2}, \\ 1, & p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдем выражение для выигрыша $V_n(a)$ для больших значений n .

Положим, $V(x, y)$ – выигрыш игрока I начиная с шага x . Здесь $x = k + m$ и $y = k - m$, где k – количество побед, а m – количество поражений.

Функция выигрыша игрока I примет вид

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= pV(x+1, y+1) \\
&+ (1-p)V(x+1, y-1) - c,
\end{aligned} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}
V(x, a) &= 1, \quad 0 \leq x \leq n, \\
V(n, y) &= 0, \quad -n \leq y < a.
\end{aligned}$$

При достаточно больших n значение выигрыша $V(x, y)$ близко к $V(y)$ – решению уравнения

$$V(y) = pV(y+1) + (1-p)V(y-1) - c \tag{3}$$

при начальных условиях

$$V(a) = 1; \quad V(-n) = 0.$$

Здесь $y = k - m$, где k – количество побед, а m – количество поражений.

Решая уравнение (3), получим, что при больших значениях n и $p > 1/2$

$$V(y) = 1 - \frac{c(a-y)}{2p-1}.$$

Тогда выигрыш в начале игры равен

$$V(0) = 1 - \frac{ac}{2p-1}.$$

В случае, если $p \leq 1/2$, $V(y) \rightarrow -\infty$.

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА В ИГРЕ, СВЯЗАННОЙ С РАЗОРЕНИЕМ

В данном разделе рассматривается вариант игры на разорение, в котором игрок I, имеющий бесконечный капитал, может остановить игру в любой момент времени $\tau \leq n$ для максимизации своего ожидаемого выигрыша. Если в момент времени $\tau \leq n$ игрок II разорится, то игрок I получит выигрыш $1 - c\tau$. В этом случае игрок I на каждом шаге продолжает игру, только если его ожидаемый выигрыш неотрицателен. Таким образом, оптимальная стратегия игрока I представляет собой множество состояний, в которых нужно останавливать или продолжать игру. Граница оптимальной остановки определяется кривой, ниже которой следует прекратить игру.

Найдем выигрыш игрока I, используя метод динамического программирования.

Заметим, что в выражении (2) при некоторых значениях (x, y) выигрыш игрока I $V(x, y) \leq 0$. В этих состояниях игроку I невыгодно продолжать игру и следует остановиться. Таким образом, приходим к задаче оптимальной остановки с уравнением оптимальности для выигрыша $V^*(x, y)$ вида

$$V^*(x, y) = \max \left\{ 0, pV^*(x+1, y+1) + (1-p)V^*(x+1, y-1) - c \right\}, \quad (4)$$

с граничными условиями

$$V^*(x, a) = 1, \text{ если } 0 \leq x \leq n,$$

$$V^*(n, y) = 0, \text{ если } -n \leq y < a.$$

Оптимальная граница остановки $s(i)$, $i = 1, \dots, n$ находится последовательно, начиная с конца, из уравнения (4).

На рис. 2 изображена граница оптимальной остановки игрока I для $n = 50$, $c = 0,01$ и начального капитала $a = 2$ у игрока II.

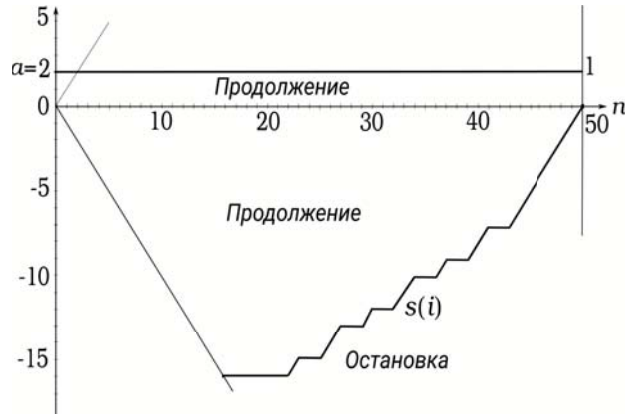


Рис. 2. Граница оптимальной остановки игрока I для $n = 50$, $c = 0,01$ и капиталом игрока II $a = 2$
Fig. 2. Optimal stopping boundary for player I for $n = 50$, $c = 0.01$ and the player II's capital $a = 2$

В таблице приведены оптимальные выигрыши $V^*(0, 0)$ игрока I и $V_n(a)$ (в круглых скобках) для различных значений n и a при $c = 0$ и $c = 0,01$. Для случая $c = 0$ значения оптимальных выигрышей $V^*(0, 0)$ и $V_n(a)$ одинаковы.

Из таблицы видно, что выигрыши растут с ростом n и уменьшаются с ростом начального капитала a у игрока II. Также отметим, что выигрыши уменьшаются с увеличением затрат c и $V^*(0, 0) \geq V_n(a)$. То есть выигрыш игрока I при использовании оптимальной стратегии остановки больше, чем в задаче о разорении.

Оптимальные выигрыши $V^*(0, 0)$ игрока I и $V_n(a)$ (в скобках) для различных значений n , a и $p = 2/3$

Optimal payoffs $V^*(0, 0)$ of player I and $V_n(a)$ (in parentheses) for different values of n , a and $p = 2/3$

	$c = 0$					$c = 0,01$				
a	2	4	6	8	10	2	4	6	8	10
$n = 10$	0,866	0,614	0,322	0,108	0,017	0,821 (0,819)	0,544 (0,535)	0,250 (0,228)	0,054 (0,009)	0 (-0,083)
$n = 50$	0,997	0,991	0,977	0,950	0,906	0,938 (0,938)	0,873 (0,872)	0,801 (0,780)	0,720 (0,717)	0,626 (0,620)
$n = 100$	0,9999	0,9998	0,9994	0,999	0,997	0,940 (0,940)	0,880 (0,880)	0,820 (0,820)	0,759 (0,759)	0,698 (0,697)

ИГРА НА РАЗОРЕНИЕ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ КАПИТАЛОМ У ОБОИХ ИГРОКОВ

Рассмотрим игру, в которой у обоих игроков капитал не ограничен. Пусть каждый игрок может остановить игру в любой момент времени $\tau \leq n$. Если какой-то из участников останавливается и выходит из игры, игра прекращается и оставшийся в игре игрок получает выигрыш, равный $1 - c\tau$, где c – затраты игрока на каждом шаге игры. Если в течение промежутка времени n игра не закончилась, игрок получает выигрыш $-nc$. Цель каждого игрока максимизировать свой ожидаемый выигрыш в такой игре.

В такой постановке данная игра является игрой с оптимальной остановкой для двух игроков. Стратегией игрока l , $l = 1, 2$ является определение границы $s_l(i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ области его остановки. Если случайное блуждание опускается ниже этой границы, то игрок останавливает игру.

Найдем оптимальные стратегии игроков в данной игре, используя последовательность наилучших ответов игроков на стратегии друг друга. На каждой итерации k алгоритма наилучших ответов игрок l , зная границы оста-

новки $s_{-l}^{(k)}(i)$ противника, может найти свою наилучшую стратегию $s_l^{(k)}(i) = BR(s_{-l}^{(k)}(i))$ (наилучший ответ), $i = 1, \dots, n$. Процесс останавливается, когда стратегии игроков не меняются.

На рис. 3 представлен результат применения алгоритма наилучших ответов игроков для $n = 50$, $c = 0,01$ и $p = 0,51$. Предположим, что игроки используют стратегии следующего вида. На первом этапе игрок II останавливается, если траектория достигла уровня $a = 2$. Зная это, игрок I находит свою наилучшую стратегию. Эта игра эквивалентна игре, рассмотренной в предыдущем разделе. На рис. 3, (а) изображена граница $s_1^{(1)}(i)$ оптимальной остановки игрока I.

Затем на втором этапе игрок II находит свой наилучший ответ $s_2^{(2)}(i)$ на стратегию игрока I. Повторяя данную процедуру несколько раз, получим оптимальные стратегии обоих игроков (рис. 3, (б)).

В результате при использовании оптимальных стратегий игрок I получит выигрыш 0,338, а игрок II – 0,153.

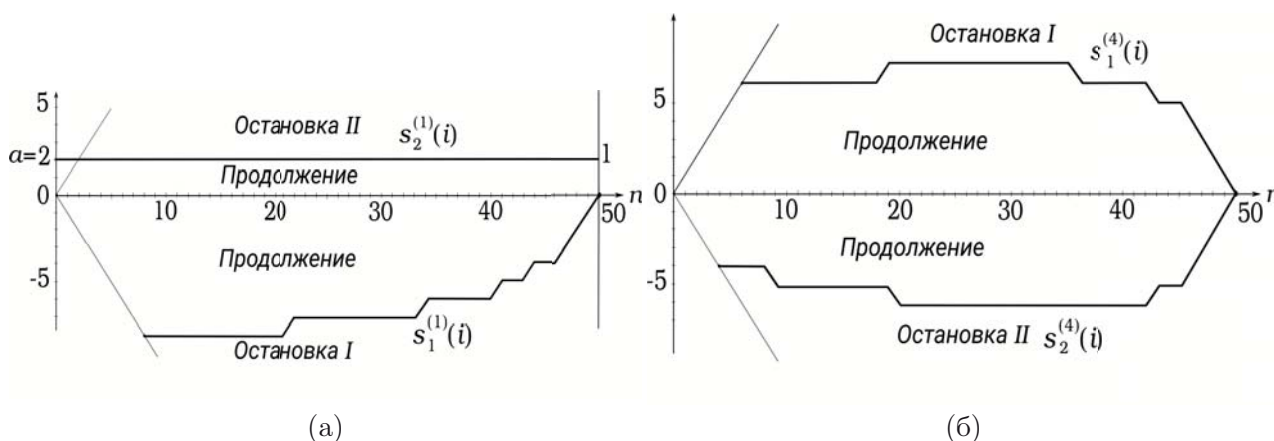


Рис. 3. Стратегии игроков в игре на разорение для $n = 50$, $c = 0,01$ и $p = 0,51$

Fig. 3. Players' strategies in the gambler's ruin problem for $n = 50$, $c = 0.01$ and $p = 0.51$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована многошаговая игра двух лиц, связанная с игрой на разорение в течение заданного промежутка времени n . На каждом шаге один из игроков может выиграть с вероятностью p и проиграть с вероятностью $q = 1 - p$. Рассмотрено два варианта игры: с ограниченным капиталом у одного из игроков и неограниченным капиталом у обоих игроков. Предполагается, что выигрыши игроков определяются в конце игры и учитывают затраты c на каждом шаге игры.

Найдены выигрыши игроков в данной задаче для различных значений продолжительности игры и различных значений c . Для задачи с ограниченным капиталом у одного из игроков проведено численное моделирование оптимальной стратегии остановки и выигрышей игрока, имеющего неограниченный капитал. В задаче с неограниченным капиталом у обоих игроков оптимальные их стратегии найдены с использованием метода наилучших ответов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Asmussen S., Albrecher H. Ruin Probabilities. Singapore: World Scientific, 2010. 621 p. doi: 10.1142/9789814282536
2. Blass A., Braun G. Random orders and gambler's ruin // Electron. J. Comb. 2005. Vol. 12. Art. R23. doi: 10.37236/1920
3. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1968. 526 p.
4. Harper J. D., Ross K. A. Stopping strategies and gambler's ruin // Mathematics Magazine. 2005. Vol. 78, iss. 4. P. 255–268. doi: 10.1080/0025570X.2005.11953340
5. Hussain A., Hanif M., Naseer M. Three-player gambler's ruin problem: Some extensions // Sci. Inquiry Rev. 2021. Vol. 5, no. 3. P. 1–11. doi: 10.32350/sir/53.01
6. Mazalov V. V., Ivashko A. A. Harmonic numbers in gambler's ruin problem // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2023). Lecture Notes in Computer Science. 2023. Vol. 13930. P. 278–287. doi: 10.1007/978-3-031-35305-5_19
7. Mazalov V., Ivashko A. Optimal stopping strategies in gambler's ruin game // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends (MOTOR 2024). Communications in Computer and Information Science. 2024. Vol. 2239. P. 237–249. doi: 10.1007/978-3-031-73365-9_16
8. Rocha A. L., Stern F. The gambler's ruin problem with n players and asymmetric play // Stat. Probab. Lett. 1999. Vol. 44, iss. 1. P. 87–95. doi: 10.1016/s0167-7152(98)00295-8
9. Shiryaev A. Probability-1. NY: Springer New York, 2016. 486 p.
10. Song S., Song J. A note on the history of the gambler's ruin problem // Communications for Statistical Applications and Methods. The Korean Statistical Society. 2013. Vol. 20, iss. 2. P. 157–168. doi: 10.5351/csam.2013.20.2.157

Поступила в редакцию / received: 16.04.2025; принята к публикации / accepted: 21.05.2025.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Ивашко Анна Антоновна

канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

e-mail: aivashko@krc.karelia.ru

REFERENCES

1. Asmussen S., Albrecher H. Ruin probabilities. Singapore: World Scientific; 2010. 621 p. doi: 10.1142/9789814282536
2. Blass A., Braun G. Random orders and gambler's ruin. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2005;12:R 23. doi: 10.37236/1920
3. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc.; 1968. 526 p.
4. Harper J. D., Ross K. A. Stopping strategies and gambler's ruin. *Mathematics Magazine*. 2005; 78(4):255–268. doi: 10.1080/0025570X.2005.11953340
5. Hussain A., Hanif M., Naseer M. Three-player gambler's ruin problem: Some extensions. *Sci. Inquiry Rev*. 2021;5(3):1–11. doi: 10.32350/sir/53.01
6. Mazalov V. V., Ivashko A. A. Harmonic numbers in gambler's ruin problem. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2023. Lecture Notes in Computer Science*. 2023;13930:278–287. doi: 10.1007/978-3-031-35305-5_19
7. Mazalov V., Ivashko A. Optimal stopping strategies in gambler's ruin game *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2024. Communications in Computer and Information Science*. 2024;2239:237–249. doi: 10.1007/978-3-031-73365-9_16
8. Rocha A. L., Stern F. The gambler's ruin problem with n players and asymmetric play. *Statistics and Probability Letters*. 1999;44(1):87–95. doi: 10.1016/s0167-7152(98)00295-8
9. Shiryaev A. Probability-1. NY: Springer New York; 2016. 486 p.
10. Song S., Song J. A Note on the history of the gambler's ruin problem. *Communications for Statistical Applications and Methods. The Korean Statistical Society*. 2013;20(2):157–168. doi: 10.5351/csam.2013.20.2.157

CONTRIBUTOR:

Ivashko, Anna

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher