

УДК 517.9

О ЧИСЛЕ ОШИБОК В ФАЙЛЕ ПРИ КОДИРОВАНИИ С КОНТРОЛЬНОЙ СУММОЙ

А. Н. Чупрунов, К. Н. Яковлев*

*Факультет прикладной математики, физики и информационных технологий,
Чувашский государственный университет (ул. Университетская, 38,
Чебоксары, Чувашская Республика, Россия, 428034), *ktq0x@yandex.ru*

Пусть случайная величина $\mu_0(2n, K, N)$ есть число пустых ячеек среди первых K ячеек в схеме размещения $2n$ различных частиц по N различным ячейкам с четным числом частиц в каждой ячейке. Показано, что если $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$, $2Ke^{-\frac{2n}{N}} \rightarrow \lambda$, где $0 < \lambda < \infty$, то случайная величина $\mu_0(2n, K, N)$ сходится к пуассоновской случайной величине с параметром λ , если $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$, $Ke^{-\frac{2n}{N}} \rightarrow \infty$, то центрированная и нормированная случайная величина $\mu_0(2n, K, N)$ сходится к гауссовской случайной величине с нулевым средним и единичной дисперсией. Даны приложения этих результатов к изучению ошибок первого и второго рода в критерии проверки гипотезы о вероятности пустой ячейки. Обсуждается использование этого критерия для проверки гипотезы о количестве ошибок в файле при кодировании с контрольной суммой.

Ключевые слова: схема размещения различных частиц по различным ячейкам; обобщенная схема размещения; гауссовская случайная величина; пуассоновская случайная величина; предельная теорема

Для цитирования: Чупрунов А. Н., Яковлев К. Н. О числе ошибок в файле при кодировании с контрольной суммой // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 78–88. doi: 10.17076/mat2050

Финансирование. Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания Чувашского государственного университета.

A. N. Chuprunov, K. N. Iakovlev*. ON THE NUMBER OF ERRORS IN A FILE WITH CHECKSUM CODING

*Faculty of Applied Mathematics, Physics and Information Technologies, Chuvash State University (38 Universitetskaya St., 428034 Cheboksary, Chuvash Republic, Russia), *ktq0x@yandex.ru*

Let the random variable $\mu_0(2n, K, N)$ be the number of empty cells from the first K cells in a scheme of allocating $2n$ distinguishable particles to N different cells with an even number of particles in each cell. It is proved that if $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$ and $2Ke^{-\frac{2n}{N}} \rightarrow \lambda$, where $0 < \lambda < \infty$, then $\mu_0(2n, K, N)$ converge to a Poisson random variable with the parameter λ , if $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$ and $Ke^{-\frac{2n}{N}} \rightarrow \infty$, then the centered and normed random variables $\mu_0(2n, K, N)$ converge to a Gaussian random variable

with the expectation 0 and the variance 1. We suggest applications for these results in the study of first- and second-order errors in the empty cell probability hypothesis test. We discuss using this test to verify the hypothesis about the number of errors in a file with checksum coding.

Keywords: allocation scheme of distinguishable particles in different cells; generalized allocation scheme; Gaussian random variable; Poisson random variable; limit theorem

For citation: Chuprunov A. N., Iakovlev K. N. On the number of errors in a file with checksum coding. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2025. No. 4. P. 78–88. doi: 10.17076/mat2050

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Chuvash State University.

ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В. Ф. Колчин в [1] ввел понятие обобщенной схемы размещения. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ – независимые неотрицательные целочисленные одинаково распределенные случайные величины. Случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ называются обобщенной схемой размещения n частиц по N ячейкам, если их совместное распределение имеет вид

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\},$$

где $k_1, k_2, \dots, k_N$ – такие неотрицательные целые числа, что $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$.

Различные схемы дискретной теории вероятностей, такие как случайные леса, случайные перестановки, случайные размещения, урновые схемы, являются частными случаями обобщенной схемы размещения [2]. Большое количество статей посвящено доказательству предельных теорем для случайных величин, связанных с обобщенной схемой размещения (см. монографии [2, 4, 5]).

Случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ называются схемой размещения n различных частиц по N различным ячейкам, если их совместное распределение имеет вид

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_N!} \frac{1}{N^n},$$

где $k_1, k_2, \dots, k_N$ такие неотрицательные целые числа, что $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$. В [3] собраны предельные теоремы для схемы размещения различных частиц по различным ячейкам. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ – независимые пуассоновские одинаково распределенные случайные величины, имеющие произвольный параметр

β , то обобщенная схема размещения является схемой размещения различных частиц по различным ячейкам [2].

Пусть r – неотрицательное целое число, K – натуральное число такое, что $0 < K \leq N$. Тогда случайная величина

$$\mu_r(n, K, N) = \sum_{i=1}^K I_{\{\eta_i=r\}}$$

является количеством ячеек среди первых K ячеек, которые содержат r частиц в обобщенной схеме размещения $\eta_1, \dots, \eta_N$.

При $K = N$ случайную величину $\mu_r(n, K, N)$ обозначают через $\mu_r(n, N)$. Предельным теоремам для случайных величин $\mu_r(n, N)$ в различных схемах размещения посвящено большое количество исследований (см. цитируемые выше монографии). Пуассоновские и гауссовские предельные теоремы для случайных величин $\mu_r(n, K, N)$ в различных схемах размещения имеются в работах [6, 9, 11, 12].

Пусть $\eta_1, \dots, \eta_N$ – схема размещения $2n$ различных частиц по N различным ячейкам, $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ – схема $\eta_1, \dots, \eta_N$ при условии: в каждой ячейке содержится четное количество частиц. То есть схема $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ имеет распределение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta'_1 = 2k_1, \dots, \eta'_N = 2k_N\} \\ = \mathbf{P}\{\eta_1 = 2k_1, \dots, \eta_N = 2k_N \mid \eta_i \in A_2, 1 \leq i \leq N\}, \end{aligned}$$

где $k_1, k_2, \dots, k_N$ такие неотрицательные целые числа, что $2k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_N = 2n$, $A_2 = \{2k : k = 0, 1, 2, \dots\}$ – множество неотрицательных четных чисел.

Обозначим $ch(\beta) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}$, $sh(\beta) = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$, $th(\beta) = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}}$, $\beta \in \mathbf{R}$, гиперболический косинус, гиперболический синус, гиперболический тангенс соответственно.

Теорема 1. Схема $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ является обобщенной схемой размещения $2n$ частиц по N ячейкам со случайными величинами $\xi'_1, \dots, \xi'_N$, имеющими распределение

$$\mathbf{P}\{\xi'_i = 2k\} = \frac{\beta^{2k}}{(2k)!ch(\beta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ 1 \leq i \leq N,$$

при любом $\beta > 0$.

Теорема 1 доказана в [7]. В этой работе мы будем изучать случайную величину

$$\mu_0(2n, K, N) = \sum_{i=1}^K I_{\{\eta'_i=0\}}$$

– количество пустых ячеек среди первых K ячеек в схеме $\eta'_1, \dots, \eta'_N$.

Мы будем рассматривать суммы случайных величин

$$S_{KN} = \sum_{i=1}^K \xi_i^{\{0\}} + \sum_{i=K+1}^N \xi_i^*, \quad S_N = \sum_{i=1}^N \xi_i^*,$$

где $\xi_1^{\{0\}}, \dots, \xi_K^{\{0\}}, \xi_{K+1}^*, \dots, \xi_N^*$ и $\xi_1^*, \dots, \xi_N^*$ – последовательности независимых случайных величин, имеющих распределения

$$\mathbf{P}\{\xi_i^* = k\} = \frac{\beta^{2k}}{(2k)!ch(\beta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ 1 \leq i \leq N,$$

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{\{0\}} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i^* = k \mid \xi_i^* > 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_i^* = k\}}{1 - p_0},$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad \mathbf{P}\{\xi_i^{\{0\}} = 0\} = 0, \quad 1 \leq i \leq K,$$

и

$$p_0 = p_0(\beta) = \mathbf{P}\{\xi_i^* = 0\} = (ch(\beta))^{-1}.$$

Заметим, что $\xi'_i(\beta) = 2\xi_i^*(\beta)$ и $\mathbf{E}\xi'_i(\beta) = 2\mathbf{E}\xi_i^*(\beta)$.

При изучении случайной величины $\mu_0(2n, K, N)$ мы будем использовать следующую лемму. Ее доказательство в идейном плане близко к доказательству леммы 1.2.1 из [2].

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_0(2n, K, N) = k\} \\ = C_K^k p_0^k (1 - p_0)^{K-k} \frac{\mathbf{P}\{S_{(K-k)(N-k)} = n\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}}, \quad (1) \\ k = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Доказательство. Обозначим множество $J_K = \{1, 2, \dots, K\}$, суммы случайных величин

$$S'_{KN} = \sum_{i=1}^K \xi_i^{\{00\}} + \sum_{i=K+1}^N \xi'_i, \quad S'_N = \sum_{i=1}^N \xi'_i,$$

где $\{\xi_1^{\{00\}}, \dots, \xi_K^{\{00\}}, \xi'_1, \dots, \xi'_N\}$ – семейство независимых случайных величин, случайные величины $\xi_i^{\{00\}}, 1 \leq i \leq K$, имеют распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{\{00\}} = 2k\} = \frac{\beta^{2k}}{(2k)!ch(\beta)(1 - p_0)},$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad \mathbf{P}\{\xi_i^{\{00\}} = 0\} = 0,$$

события

$$A_J = \{\xi'_i = 0, i \in J, \xi'_i > 0, i \in J_K \setminus J, S'_N = 2n\},$$

$$J \in \mathbf{J}_k,$$

где $\mathbf{J}_k$ – класс всех подмножеств множества J_K , состоящих из k элементов. Имеем

$$\mathbf{P}(\mu_0(2n, K, N) = k) = \frac{\sum_{J \in \mathbf{J}_k} \mathbf{P}\{A_J\}}{\mathbf{P}\{S'_N = 2n\}} \\ = \frac{\sum_{J \in \mathbf{J}_k} \mathbf{P}\{\xi'_i = 0, i \in J, \xi'_i > 0, i \in J_K \setminus J\} \mathbf{P}\{S'_N = 2n \mid \xi'_i = 0, i \in J, \xi'_i > 0, i \in J_K \setminus J\}}{\mathbf{P}\{S'_N = 2n\}} \\ = C_K^k p_0^k (1 - p_0)^{K-k} \frac{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi'_i = 2n \mid \xi'_i = 0, i \in J, \xi'_i > 0, i \in J_K \setminus J\right\}}{\mathbf{P}\{S'_N = 2n\}} \\ = C_K^k p_0^k (1 - p_0)^{K-k} \frac{\mathbf{P}\{S'_{(K-k)(N-k)} = 2n\}}{\mathbf{P}\{S'_N = 2n\}} = C_K^k p_0^k (1 - p_0)^{K-k} \frac{\mathbf{P}\{S_{(K-k)(N-k)} = n\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}}.$$

□

Заметим, что

$$p_0 = 2e^{-\beta} (1 + e^{-2\beta})^{-1}.$$

Поэтому $p_0 = 2e^{-\beta}(1 + o(1))$ при $\beta \rightarrow \infty$. Рассмотрим случайную величину $\xi^*(\beta)$, $\beta > 0$, с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi^*(\beta) = k\} = \frac{\beta^{2k}}{(2k)!ch(\beta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Математическое ожидание, дисперсия, четвертый центрированный момент случайной величины $\xi^*(\beta)$ соответственно равны [7]:

$$\begin{aligned} m(\beta) &= \frac{\beta}{2}th(\beta) = \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{2e^{-2\beta}}{1 + e^{-2\beta}}\right) \\ &= \frac{\beta}{2} (1 + O(e^{-2\beta})), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\beta) &= \frac{\beta}{4} \left(1 + (4\beta - 2) \frac{e^{-2\beta}}{1 + e^{-2\beta}} - \frac{4\beta e^{-4\beta}}{(1 + e^{-2\beta})^2}\right) \\ &= \frac{\beta}{4} (1 + O(\beta e^{-2\beta})), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi^*(\beta) - \mathbf{E}\xi^*(\beta))^4 &= \frac{3}{16}\beta(1 + o(1)) \\ \text{при } \beta &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, математическое ожидание и дисперсия случайной величины $S_N = \sum_{i=1}^N \xi_i^*$ соответственно равны:

$$m_N = m_N(\beta) = \frac{1}{2}N\beta th(\beta),$$

$$\sigma_N^2 = \sigma_N^2(\beta) = \frac{1}{4}N\beta (1 + O(\beta e^{-2\beta})).$$

Так как функция $m(\beta)$ непрерывна и возрастает, $m(\beta) \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$, $m(\beta) \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow \infty$, то уравнение

$$m(\beta) = \frac{n}{N} \quad (5)$$

имеет решение $\beta = \beta(\frac{n}{N})$. Это решение единственно и положительно. Схема размещения различных частиц по различным ячейкам с четным числом частиц в каждой ячейке не зависит от β , и мы будем считать, что β удовлетворяет (5).

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $n, K, N \rightarrow \infty$ и $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$.

1) Предположим, что $2Ke^{-\frac{2n}{N}} \rightarrow \lambda$, где $0 < \lambda < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_0(2n, K, N) = k\} &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (1 + o(1)), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

2) Предположим, что $Ke^{-\frac{2n}{N}} \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_0(2n, K, N) = k\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi K p_0 (1 - p_0)}} e^{-\frac{(k - K p_0)^2}{2K p_0 (1 - p_0)}} (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (7)$$

равномерно при $\left| \frac{k - K p_0}{\sqrt{K p_0 (1 - p_0)}} \right| < C$, где $C > 0$ произвольно.

Доказательство теоремы 2 основано на оценке числителя и знаменателя дроби, присутствующей в (1). То есть на новых локальных предельных теоремах (лемме 2 и лемме 6).

Будем обозначать через Φ функцию распределения гауссовской случайной величины, имеющей нулевое среднее и единичную дисперсию. Теорема 2 влечет

Следствие. Пусть $n, K, N \rightarrow \infty$ так, что $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$ и $Ke^{-\frac{2n}{N}} \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\mu_0(2n, K, N) - K p_0}{\sqrt{K p_0 (1 - p_0)}} < t \right\} \rightarrow \Phi(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Приложение к математической статистике

Величина $\frac{\mu_0(2n, K, N)}{K}$ является несмещенной оценкой вероятности p_0 , и в условиях следствия она асимптотически нормальна. Используем это утверждение для изучения вероятностей ошибок первого и второго рода в тесте о вероятности пустой ячейки.

Мы наблюдаем количество частиц в первых K ячейках в схеме размещения $2n$ различных частиц по N различным ячейкам с четным числом частиц в каждой ячейке, где число n неизвестно. Предположим, что среди первых K ячеек оказалось k пустых ячеек. Для проверки гипотезы $H_0 : p_0 = ch^{-1}(\beta_0)$ при альтернативной гипотезе $H_1 : p_0 = ch^{-1}(\beta_1)$ мы предлагаем следующий критерий. Пусть $0 < \alpha < 1$ и число u_α такое, что $\Phi(u_\alpha) = \alpha$. Обозначим

$$p_{00} = ch^{-1}(\beta_0), \quad p_{01} = ch^{-1}(\beta_1),$$

$$C_0 = K p_{00} + u_\alpha \sqrt{K p_{00} (1 - p_{00})},$$

$$C_1 = K p_{01} + u_\alpha \sqrt{K p_{01} (1 - p_{01})}.$$

Мы предполагаем, что $\beta_0 = \beta_0(n_0, N)$ – решение уравнения $m(\beta_0) = \frac{n_0}{N}$, $\beta_1 = \beta_1(n_1, N)$ –

решение уравнения $m(\beta_1) = \frac{n_1}{N}$ и $n_0 > n_1$. Тогда $\beta_0 > \beta_1$ и $C_0 < C_1$ для больших K . Гипотеза H_0 принимается, если $k < C_0$, гипотеза H_1 принимается, если $k > C_1$. Тогда вероятность ошибки первого рода

$$\alpha(n_0, K, N) = \mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_0(2n_0, K, N) - Kp_{00}}{\sqrt{Kp_{00}(1-p_{00})}} > u_\alpha \right\},$$

и по следствию при $n_0, K, N \rightarrow \infty$ таких, что $Ke^{-\frac{2n_0}{N}} \rightarrow \infty$, $\frac{n_0}{N} \rightarrow \infty$, имеем

$$\alpha(n_0, K, N) \rightarrow 1 - \alpha.$$

Вероятность ошибки второго рода

$$\begin{aligned} \beta(n_1, K, N) &= \mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_0(2n_1, K, N) - Kp_{00}}{\sqrt{Kp_{00}(1-p_{00})}} < u_\alpha \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_0(2n_1, K, N) - Kp_{01}}{\sqrt{Kp_{01}(1-p_{01})}} < \frac{\sqrt{K}(p_{00} - p_{01})}{\sqrt{p_{01}(1-p_{01})}} \right. \\ &\quad \left. + u_\alpha \sqrt{\frac{p_{00}(1-p_{00})}{p_{01}(1-p_{01})}} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_0(2n_1, K, N) - Kp_{01}}{\sqrt{Kp_{01}(1-p_{01})}} < \frac{\sqrt{Kp_{01}} \left(\frac{p_{00}}{p_{01}} - 1 \right)}{\sqrt{p_{01}(1-p_{01})}} \right. \\ &\quad \left. + u_\alpha \sqrt{\frac{p_{00}(1-p_{00})}{p_{01}(1-p_{01})}} \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{p_{00}}{p_{01}} = \exp \left(2 \frac{n_1 - n_0}{N} \right) (1 + o(1))$$

$$\text{при } \frac{n_1}{N} \rightarrow \infty,$$

то по следствию

$$\beta(n_1, K, N) \rightarrow 0$$

при $n_1, n_0, K, N \rightarrow \infty$ так, что $Ke^{-\frac{2n_1}{N}} \rightarrow \infty$, $\frac{n_1}{N} \rightarrow \infty$ и

$$\frac{n_0 - n_1}{N} > \delta$$

для некоторого $\delta > 0$. Заметим, что этот тест можно рассматривать как тест на проверку гипотезы $H_0 : n = n_0$ при альтернативной гипотезе $H_1 : n = n_1$.

Приложение к кодированию с контрольной суммой

Рассмотрим файл, состоящий из N блоков с информацией, закодированной с использованием контрольных сумм. Блоком является последовательность $i_1, i_2, \dots, i_m$, где $i_j = 1$ или

$i_j = 0$, $1 \leq j \leq m$, и $i_m = \left(\sum_{j=1}^{m-1} i_j \right) \bmod 2$, а m – фиксированное число. То есть каждый блок содержит четное количество единиц. Число i_m называется контрольной суммой. Предположим, что при передаче файла по каналу связи произошли ошибки: некоторые единицы заменились нулями и некоторые нули заменились единицами. Кодирование с контрольными суммами позволяет идентифицировать блоки с нечетным количеством ошибок: если в блоке $i_1, i_2, \dots, i_m$ выполняется равенство $1 = \left(\sum_{j=1}^m i_j \right) \bmod 2$, то блок $i_1, i_2, \dots, i_m$ имеет нечетное количество ошибок. Пусть случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ – количества ошибок в блоках файла, полученного по каналу связи. Мы предполагаем, что выполнены следующие условия:

1) общее количество ошибок в файле равно $2n$ ($\eta'_1 + \dots + \eta'_N = 2n$);

2) ошибки распределяются по блокам равномерно и независимо;

3) метод контрольных сумм не обнаружил блоки с ошибками, т. е. все блоки содержат четное количество ошибок и случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ принимают только четные значения.

Тогда случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ являются схемой размещения $2n$ различных частиц по N различным ячейкам при условии: в каждой ячейке содержится четное количество частиц, и мы можем применить рассмотренный выше критерий для проверки гипотезы о количестве ошибок в файле.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Лемма 5 из работы [10] влечет следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $C > 0$. Предположим, что $N \rightarrow \infty$ и $\beta \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sigma_N \mathbf{P}\{S_N = n\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(n - m_N)^2}{2\sigma_N^2} \right) (1 + o(1)) \end{aligned}$$

равномерно по n таким, что $\frac{|n - m_N|}{\sigma_N} < C$.

Рассмотрим случайную величину $\xi^{\{0\}}(\beta)$, $\beta > 0$, с распределением

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi^{\{0\}}(\beta) = k\} &= \mathbf{P}\{\xi^*(\beta) = k \mid \xi^*(\beta) > 0\} \\ &= \frac{\beta^{2k}}{(1 - p_0)(2k)!ch(\beta)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим через $m_0 = m_0(\beta)$ и $\sigma_0^2 = \sigma_0^2(\beta)$ ее математическое ожидание и дисперсию.

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$m_0(\beta) = \frac{\beta}{2(1-p_0)} th(\beta) = \frac{\beta}{2}(1 + O(e^{-\beta})), \quad (9)$$

$$\sigma_0^2(\beta) = \frac{\beta}{4} \left(1 + O(\beta e^{-\beta})\right) \quad (10)$$

и

$$\mathbf{E}(\xi^{\{0\}}(\beta) - \mathbf{E}\xi^{\{0\}}(\beta))^4 = \frac{3}{16}\beta(1 + o(1)) \quad (11)$$

при $\beta \rightarrow \infty$.

Доказательство. Равенство (8) влечет

$$\mathbf{E}(\xi^{\{0\}}(\beta))^k = \frac{\mathbf{E}(\xi^*(\beta))^k}{1-p_0} \quad \text{и} \quad (12)$$

$$p_0 = 2e^{-\beta}(1 + O(e^{-2\beta})) \quad \text{при} \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Следовательно, (2) влечет (9). Из (12), (2) и (3) следует

$$\sigma_0^2(\beta) = \frac{\mathbf{E}(\xi^*(\beta))^2}{1-p_0} - \left(\frac{\mathbf{E}\xi^*(\beta)}{1-p_0}\right)^2$$

$$= \sigma^2(\beta)(1 + O(e^{-\beta})) \quad \text{при} \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Поэтому справедливо (10). Также, используя (12), получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\xi^{\{0\}}(\beta) - \mathbf{E}\xi^{\{0\}}(\beta))^4 \\ &= \sum_{k=0}^4 C_4^k \mathbf{E}(\xi^{\{0\}}(\beta))^k \left(-\frac{\mathbf{E}\xi^*(\beta)}{1-p_0}\right)^{4-k} \\ &= \left(\sum_{k=0}^4 C_4^k \mathbf{E}(\xi^*(\beta))^k (-\mathbf{E}\xi^*(\beta))^{4-k}\right) \\ &\times (1 + O(e^{-\beta})) = \mathbf{E}(\xi^*(\beta) - \mathbf{E}\xi^*(\beta))^4 (1 + O(e^{-\beta})) \\ &\text{при} \quad \beta \rightarrow \infty. \text{ Итак, формула (11) вытекает из} \\ &\text{формулы (4).} \quad \square \end{aligned}$$

Следующая лемма получена в [8] (см. Theorem A).

Лемма 4. *Пусть ξ'_i – независимые случайные величины с дисперсиями σ_i^2 , $1 \leq i \leq N$, и $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$. Тогда*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N (\xi'_i - \mathbf{E}\xi'_i) < t \right\} - \Phi(t) \right| \\ & < 2c \left(\frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{E}(\xi'_i - \mathbf{E}\xi'_i)^4}{\sigma^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где c – константа в неравенстве Берри – Эссеена.

Заметим, что

$$m_{KN} = m_{KN}(\beta) = Km_0(\beta) + (N-K)m(\beta)$$

и

$$\sigma_{KN}^2 = \sigma_{KN}^2(\beta) = K\sigma_0^2(\beta) + (N-K)\sigma^2(\beta)$$

– математическое ожидание и дисперсия суммы S_{KN} .

Используя лемму 3 и лемму 4, получаем следующую лемму.

Лемма 5. *Справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{S_{KN} - m_{KN}}{\sigma_{KN}} < t \right\} - \Phi(t) \right| \\ & < 2c \left(\frac{3(1 + o(1))}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

и

$$\sigma_{KN}^2 = \frac{N\beta}{4}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad \beta \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Доказательство. Равенство (14) вытекает из (3) и (10). Используя (14), (4) и (11) для оценки правой части неравенства из леммы 4, получаем (13). $\square$

Обозначим:

$$\varphi(t) = \frac{ch(\beta e^{i\frac{t}{2}})}{ch(\beta)} = \frac{e^{\beta e^{i\frac{t}{2}}} + e^{-\beta e^{i\frac{t}{2}}}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}$$

– характеристическая функция случайной величины $\xi^*(\beta)$,

$$\varphi_0(t) = \frac{e^{\beta e^{i\frac{t}{2}}} + e^{-\beta e^{i\frac{t}{2}}} - 2}{e^{\beta} + e^{-\beta} - 2} = \left(\frac{e^{\frac{\beta}{2} e^{i\frac{t}{2}}} - e^{-\frac{\beta}{2} e^{i\frac{t}{2}}}}{e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}} \right)^2$$

– характеристическая функция случайной величины $\xi^{\{0\}}(\beta)$, $\varphi^c(t) = \varphi(t)e^{-itm(\beta)}$, $\varphi_0^c(t) = \varphi_0(t)e^{-itm_0(\beta)}$, $1 \leq i \leq N$, $\varphi_{KN}^c(t)$ – характеристическая функция случайной величины $S_{KN} - m_{KN}$ и $\varphi_{KN}(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\frac{S_{KN} - m_{KN}}{\sigma_{KN}}$.

Лемма 6. *Пусть $N, \beta \rightarrow \infty$. Тогда*

$$\begin{aligned} & \sigma_{KN} \mathbf{P}\{S_{KN} = n\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(n - m_{KN})^2}{2\sigma_{KN}^2} \right) (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (15)$$

равномерно по n таким, что $\frac{|n - m_{KN}|}{\sigma_{KN}} < C_1$, где $C_1 > 0$ – произвольное фиксированное число.

Доказательство. Обозначим

$$z = \frac{n - m_{KN}}{\sigma_{KN}}.$$

Так же, как в теореме Гнеденко, мы представим вероятность $\mathbf{P}\{S_{KN} = n\}$ в виде интеграла

$$\mathbf{P}\{S_{KN} = n\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it\sigma_{KN}z} \varphi_{KN}^c(t) dt.$$

После замены переменных $x = t\sigma_{KN}$ мы получаем

$$\begin{aligned} & \sigma_{KN} \mathbf{P}\{S_{KN} = n\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sigma_{KN}}^{\pi\sigma_{KN}} e^{-ixz} \left(\varphi_0^c \left(\frac{x}{\sigma_{KN}} \right) \right)^K \\ & \quad \times \left(\varphi^c \left(\frac{x}{\sigma_{KN}} \right) \right)^{N-K} dx. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $B > 0$. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

мы представляем разность в виде суммы четырех интегралов:

$$\begin{aligned} R_N &= 2\pi \left(\sigma_{KN} \mathbf{P}\{S_{KN} = n\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$I_1 = \int_{|x| < B} e^{-ixz} \varphi_{KN}(x) dx - \int_{|x| < B} e^{-ixz} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$I_2 = - \int_{|x| > B} e^{-ixz} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{B < |x| \leq \varepsilon \sigma_{KN}} e^{-ixz} \left(\varphi_0^c \left(\frac{x}{\sigma_{KN}} \right) \right)^K \\ & \quad \times \left(\varphi^c \left(\frac{x}{\sigma_{KN}} \right) \right)^{N-K} dx \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\varepsilon \sigma_{KN} < |x| \leq \pi \sigma_{KN}} e^{-ixz} \left(\varphi_0^c \left(\frac{x}{\sigma_{KN}} \right) \right)^K \\ & \quad \times \left(\varphi^c \left(\frac{x}{\sigma_{KN}} \right) \right)^{N-K} dx. \end{aligned}$$

Так как

$$I_1 = \int_{|x| < B} e^{-ixz} \left(\varphi_{KN}(x) - e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx,$$

лемма 5 влечет

$$I_1 \rightarrow 0 \quad (17)$$

для любого фиксированного $B > 0$. Так как

$$|I_2| < \int_{|x| > B} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

то

$$I_2 \rightarrow 0, \quad \text{при } B \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{B < |t| \leq \varepsilon \sigma_{KN}} \left| e^{-itz} \left(\varphi_0^c \left(\frac{t}{\sigma_{KN}} \right) \right)^K \right. \\ & \quad \times \left. \left(\varphi^c \left(\frac{t}{\sigma_{KN}} \right) \right)^{N-K} \right| dt \\ &= \int_{B < |t| \leq \varepsilon \sigma_{KN}} \left| e^{\beta \left(e^{\frac{it}{2\sigma_{KN}}} - 1 \right)} \right|^N \end{aligned} \quad (19)$$

$$\times \left| \frac{1 - e^{-\beta e^{\frac{it}{2\sigma_{KN}}}}}{1 - e^{-\beta}} \right|^{2K} \left| \frac{1 + e^{-2\beta e^{\frac{it}{2\sigma_{KN}}}}}{1 + e^{-2\beta}} \right|^{N-K} dt.$$

Так как

$$\cos(t) - 1 \leq -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \leq -\frac{11t^2}{24},$$

$$|t| \leq 1, \quad e^t - 1 \leq te^t, \quad t \geq 0,$$

то

$$\begin{aligned} \left| e^{\beta \left(e^{\frac{it}{2\sigma_{KN}}} - 1 \right)} \right|^N &\leq e^{-N\beta \frac{11t^2}{24 \cdot 4\sigma_{KN}^2}} \\ &= e^{-\frac{11t^2(1+o(1))}{24}}, \quad B < |t| \leq \varepsilon \sigma_{KN} \end{aligned} \quad (20)$$

при $\beta \rightarrow \infty$. Поскольку

$$1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad 1 + t < e^t, \quad t > 0,$$

$$\exp \left(-2\beta \cos \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = o(1),$$

$$\beta \exp \left(-2\beta \cos \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = o(1),$$

имеем

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1 + e^{-2\beta e^{i\frac{t}{2\sigma_{KN}}}}}{1 + e^{-2\beta}} \right| &\leq \left| \frac{1 + e^{-2\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)}}{1 + e^{-2\beta}} \right| = \left| 1 + \frac{e^{-2\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} - e^{-2\beta}}{1 + e^{-2\beta}} \right| \\
&= \left| 1 + e^{-2\beta} \frac{e^{2\beta\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)} - 1}{1 + e^{-2\beta}} \right| \\
&\leq \left| 1 + e^{-2\beta} \frac{2\beta\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right) \exp\left(2\beta\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)\right)}{1 + e^{-2\beta}} \right| \\
&\leq \left| 1 + e^{-2\beta} \frac{2\beta\left(\frac{t^2}{8\sigma_{KN}^2}\right) \exp\left(2\beta\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)\right)}{1 + e^{-2\beta}} \right| \\
&\leq \left| 1 + \frac{2\beta\left(\frac{t^2}{8\sigma_{KN}^2}\right) \exp\left(2\beta\left(-\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right)}{1 + e^{-2\beta}} \right| \\
&\leq \exp\left(2\beta\left(\frac{t^2}{8\frac{N\beta}{4}(1+o(1))}\right) \exp\left(-2\beta\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{t^2}{N}o(1)\right)
\end{aligned} \tag{21}$$

и

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1 - e^{-\beta e^{i\frac{t}{2\sigma_N}}}}{1 - e^{-\beta}} \right|^2 \\
&= \frac{\left| 1 - e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \cos\left(-\beta \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right) - i e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \sin\left(-\beta \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right) \right|^2}{(1 - e^{-\beta})^2} \\
&= \frac{\left(1 - e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \cos\left(\beta \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)\right)^2 + \left(e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \sin\left(\beta \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)\right)^2}{(1 - e^{-\beta})^2} \\
&= \frac{1 - 2e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \cos\left(\beta \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right) + e^{-2\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)}}{(1 - e^{-\beta})^2} \\
&= \frac{\left(1 - e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)}\right)^2 + 2e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \left(1 - \cos\left(\beta \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)\right)}{(1 - e^{-\beta})^2} \\
&\leq 1 + \frac{2e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \left(2 \sin^2\left(\beta \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)\right)}{(1 - e^{-\beta})^2} \\
&\leq \exp\left(\frac{2e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \left(2 \sin^2\left(\beta \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)\right)}{(1 - e^{-\beta})^2}\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{2e^{-\beta \cos\left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)} \left(2 \left(\beta \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2\sigma_{KN}}\right)\right)^2\right)}{(1 - e^{-\beta})^2}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{4} \frac{e^{-\beta \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \frac{\beta^2 t^2 (1+o(1))}{N\beta}}{(1 - e^{-\beta})^2}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{N}o(1)\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

Используя (20), (21) и (22) для оценки правой части неравенства (19), получаем

$$|I_3| \leq 2 \int_B^\infty \exp\left(-\frac{11x^2(1+o(1))}{24}\right) dx. \quad (23)$$

Неравенство (23) влечет

$$|I_3| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad B \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \left| \frac{e^{\beta e^{i\frac{\pi}{2}}} + e^{-\beta e^{i\frac{\pi}{2}}}}{e^\beta + e^{-\beta}} \right| \\ &\leq \frac{e^{\beta \cos(\frac{\pi}{2})} + e^{-\beta \cos(\frac{\pi}{2})}}{e^\beta + e^{-\beta}} \leq \frac{e^{\beta \cos(\varepsilon/2)} + e^{-\beta \cos(\varepsilon/2)}}{e^\beta + e^{-\beta}} \\ &= \frac{ch(\beta \cos(\varepsilon/2))}{ch(\beta)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x)| &= \left(\frac{|e^{\beta e^{i\frac{\pi}{2}}/2} - e^{-\beta e^{i\frac{\pi}{2}}/2}|}{e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{e^{\beta \cos(\frac{\pi}{2})/2} + e^{-\beta \cos(\frac{\pi}{2})/2}}{e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{e^{\beta \cos(\varepsilon/2)/2} + e^{-\beta \cos(\varepsilon/2)/2}}{e^{\beta/2} - e^{-\beta/2}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{ch(\beta \cos(\varepsilon/2)/2)}{sh(\beta/2)} \right)^2, \end{aligned}$$

$\varepsilon < |x| \leq \pi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq 2\pi\sigma_{KN} \left(\frac{ch(\beta \cos(\varepsilon/2))}{ch(\beta)} \right)^{N-K} \\ &\quad \times \left(\frac{ch(\beta \cos(\varepsilon/2)/2)}{sh(\beta/2)} \right)^{2K} \\ &\leq 2\pi\sigma_{KN} \left(e^{-(1-\cos(\varepsilon/2))\beta} \frac{1+e^{-2\beta \cos(\varepsilon/2)}}{1+e^{-2\beta}} \right)^{N-K} \\ &\quad \times \left(e^{-(1-\cos(\varepsilon/2))\beta/2} \frac{1+e^{-\beta \cos(\varepsilon/2)}}{1-e^{-\beta}} \right)^{2K}. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1+e^{-2\beta \cos(\varepsilon/2)}}{1+e^{-2\beta}} \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \frac{1+e^{-\beta \cos(\varepsilon/2)}}{1-e^{-\beta}} \rightarrow 1$$

при $\beta \rightarrow \infty$, существует $\beta_0 > 0$ такое, что

$$\frac{1+e^{-2\beta \cos(\varepsilon/2)}}{1+e^{-2\beta}} < e^{\frac{1}{2}(1-\cos(\varepsilon/2))\beta}$$

и

$$\left(\frac{1+e^{-\beta \cos(\varepsilon/2)}}{1-e^{-\beta}} \right)^2 < e^{\frac{1}{2}(1-\cos(\varepsilon/2))\beta}$$

при $\beta > \beta_0$. Тогда

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq 2\pi\sigma_{KN} e^{-\frac{1}{2}(1-\cos(\varepsilon/2))\beta N} \\ &\leq 2\pi\sqrt{\beta N} e^{-\frac{1}{2}(1-\cos(\varepsilon/2))\beta N} (1+o(1)) \end{aligned}$$

при $\beta > \beta_0$. Поэтому

$$I_4 \rightarrow 0. \quad (25)$$

Используя (17), (18), (24) и (25) для оценки правой части равенства (16), получаем (15). $\square$

Заметим, что при $K = N$ лемма 6 влечет лемму 2.

Доказательство теоремы 2. Условия (2), (5) влекут $\frac{\beta}{2} > \frac{n}{N}$, т. е. $\beta > \frac{2n}{N}$. Поэтому $\beta \rightarrow \infty$ и

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{2}n(1+o(1)),$$

$$\sigma_{(K-k)(N-k)}^2 = \frac{1}{2} \frac{N-k}{N} n(1+o(1)),$$

$$\beta = \frac{2n}{N}(1+o(1)),$$

$$p_0 = (ch(\beta))^{-1} = 2e^{-\frac{2n}{N}}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$\frac{(n-m_N)^2}{\sigma_N^2} = 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_N}{\sigma_{(N-k)(K-k)}} &= \sqrt{\frac{N\beta(1+o(1))}{(N-k)\beta}} \\ &= \sqrt{\frac{N(1+o(1))}{N-k}} \end{aligned} \quad (27)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{(n-m_{(K-k)(N-k)})^2}{\sigma_{(K-k)(N-k)}^2} &= 2 \frac{N-k}{N} \\ &\times \frac{\left(n - \frac{(K-k)n}{1-p_0} - (N-K)\frac{n}{N} \right)^2}{n(1+o(1))} \\ &= 2 \frac{N-k}{N} \frac{\left(K\frac{n}{N} - \frac{(K-k)n}{N(1-p_0)} \right)^2}{n(1+o(1))} \\ &= 2 \frac{N-k}{N} \frac{n}{N^2} \left(K - \frac{K-k}{1-p_0} \right)^2 (1+o(1)) \\ &= 2 \frac{N-k}{N} \frac{n}{N^2} \left(\frac{k-Kp_0}{1-p_0} \right)^2 (1+o(1)). \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть выполнены условия п. 1, число k фиксировано. Тогда

$$\ln(\lambda + o(1)) = \ln 2 + \ln K - 2\frac{n}{N}$$

и

$$2\frac{n}{N^2} = -\frac{\ln(\lambda + o(1))}{N} + \frac{\ln 2}{N} + \frac{\ln K}{N}.$$

Поэтому

$$\frac{n}{N^2} \rightarrow 0$$

и из (28) вытекает

$$\frac{(n - m_{(K-k)(N-k)})^2}{\sigma_{(K-k)(N-k)}^2} = o(1). \quad (29)$$

Кроме того,

$$Kp_0 = 2Ke^{-\frac{2n}{N}} + o(1) = \lambda + o(1).$$

Используя лемму 2, лемму 6 и оценку (26), (27), (29), заключаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}\{S_{(K-k)(N-k)} = n\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}} &= \frac{\sigma_N}{\sigma_{(K-k)(N-k)}} \\ &\times \frac{\exp\left(-\frac{(n - m_{(K-k)(N-k)})^2}{2\sigma_{(K-k)(N-k)}^2}\right)(1 + o(1))}{\exp\left(-\frac{(n - m_N)^2}{2\sigma_N^2}\right)(1 + o(1))} \\ &= 1 + o(1). \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (30) для оценки дроби в (1) и пуассоновскую предельную теорему, получаем (6). П. 1 доказан.

Пусть выполнены условия п. 2. Так как $p_0 \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_N^2}{\sigma_{(K-k)(N-k)}^2(\beta)} &= \frac{N}{N-k}(1 + o(1)) \\ &= \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{-1}(1 + o(1)) \\ &= \left(1 - \frac{k - Kp_0}{N} + \frac{Kp_0}{N}\right)^{-1}(1 + o(1)) \\ &= \left(1 - \frac{k - Kp_0}{\sqrt{Kp_0(1-p_0)}} \frac{\sqrt{Kp_0(1-p_0)}}{N} + \frac{Kp_0}{N}\right)^{-1} \\ &\quad \times (1 + o(1)) = 1 + o(1). \end{aligned} \quad (31)$$

Так как $\beta > 2\frac{n}{N}$, то $p_0 < 2e^{-\frac{n}{N}}$. Используя условия п. 2 для оценки сомножителей в (28), заключаем

$$\frac{(n - m_{(K-k)(N-k)})^2}{\sigma_{(K-k)(N-k)}^2}$$

$$\begin{aligned} &= 2\frac{N-k}{N} \frac{nKp_0}{N^2(1-p_0)} \frac{(k - Kp_0)^2}{Kp_0(1-p_0)}(1 + o(1)) \\ &< \frac{2C^2}{1-p_0} \frac{n}{N} e^{-2\frac{n}{N}}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{(n - m_{(K-k)(N-k)})^2}{\sigma_{(K-k)(N-k)}^2} = o(1). \quad (32)$$

Используя лемму 2, лемму 6 и оценки (26), (31), (32), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}\{S_{(K-k)(N-k)} = n\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}} &= \frac{\sigma_N}{\sigma_{(K-k)(N-k)}} \\ &\times \frac{\exp\left(-\frac{(n - m_{(K-k)(N-k)})^2}{2\sigma_{(K-k)(N-k)}^2}\right)(1 + o(1))}{\exp\left(-\frac{(n - m_N)^2}{2\sigma_N^2}\right)(1 + o(1))} = 1 + o(1). \end{aligned} \quad (33)$$

Оценка (33) дроби в (1) и локальная теорема Муавра–Лапласа влекут (7). $\square$

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Один класс предельных теорем для условных распределений // Литовский математический сборник. 1968. Т. 8, вып. 1. С. 53–63. doi: 10.15388/LMJ.1968.20181
2. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
3. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Физматлит, 1976. 224 с.
4. Павлов Ю. Л. Случайные леса. Петрозаводск: Карел. науч. центр РАН, 1996. 259 с.
5. Тимашев А. Н. Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике. М.: ТВП; Ред. «ОПиПМ», 2011. 256 с.
6. Хакимуллин Е. Р., Энатская Н. Ю. Предельные теоремы для числа пустых ячеек // Дискретная математика. 1997. Т. 9, вып. 2. С. 120–130. doi: 10.4213/dm468
7. Abdushukurov F. A., Chuprunov A. N. On the number of empty cells in a non-homogenous allocation scheme // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, iss. 2. P. 269–279. doi: 10.1134/S1995080221020025
8. Chickrin D. E., Chuprunov A. N., Kokunin P. A. Gaussian limit theorems for the number of given value cells in the non-homogeneous generalized allocation scheme // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 246, iss. 4. P. 476–487. doi: 10.1007/s10958-020-04753-w

9. Chickrin D. E., Chuprunov A. N., Kokunin P. A. Limit theorems for a number of particles from a fixed set of cells // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40, iss. 5. P. 624–629. doi: 10.1134/S1995080219050044

10. Chuprunov A. N., Fazekas I. On numbers of particles in cells in an allocation scheme having even number of particles in each cell // *MDPI, Mathematics*. 2022. Vol. 10, iss. 7. P. 1–22. doi: 10.3390/math10071099

11. Chuprunov A. N., Fazekas I. On the number of empty cells in the allocation scheme of indistinguishable particles // *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska*. 2020. Vol. 74, iss. 1. P. 15–29. doi: 10.17951/a.2020.74.1.15-29

12. Chuprunov A. N., Fazekas I. Poisson limit theorems for the generalized allocation scheme // *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* 2019. Vol. 49. P. 77–96.

REFERENCES

1. Kolchin V. F. A certain class of limit theorems for conditional distributions. *Litovskii matematicheskii sbornik = Lithuanian Mathematical Journal*. 1968;8(1):53–63. (In Russ.). doi: 10.15388/LMJ.1968.20181

2. Kolchin V. F. *Random Graphs*. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

3. Kolchin V. F., Sevastianov B. A., Chistiaikov V. P. *Random allocations*. Washington: V. H. Winston; 1978. 262 p.

4. Pavlov Yu. L. *Random Forests*. Utrecht: VSP; 2000. 122 p. doi: 10.1515/9783110941975

5. Timashev A. N. *Asymptotic expansions in probabilistic combinatorics*. Moscow: TVP; OPiPM; 2011. 256 p. (In Russ.)

6. Khakimullin E. R., Enatskaya N. Yu. Limit theorems for the number of empty cells. *Discrete Math. Appl.* 1997;7(2):209–219. doi: 10.4213/dm468

7. Abdushukurov F. A., Chuprunov A. N. On the number of empty cells in a non-homogeneous allocation scheme. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(2):269–279. doi: 10.1134/S1995080221020025

8. Chickrin D. E., Chuprunov A. N., Kokunin P. A. Gaussian limit theorems for the number of given value cells in the non-homogeneous generalized allocation scheme. *J. Math. Sci.* 2020;246(4):476–487. doi: 10.1007/s10958-020-04753-w

9. Chickrin D. E., Chuprunov A. N., Kokunin P. A. Limit theorems for a number of particles from a fixed set of cells. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(5):624–629. doi: 10.1134/S1995080219050044

10. Chuprunov A. N., Fazekas I. On numbers of particles in cells in an allocation scheme having even number of particles in each cell. *MDPI, Mathematics*. 2022;10(7):1–22. doi: 10.3390/math10071099

11. Chuprunov A. N., Fazekas I. On the number of empty cells in the allocation scheme of indistinguishable particles. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska*. 2020;74(1):15–29. doi: 10.17951/a.2020.74.1.15-29

12. Chuprunov A. N., Fazekas I. Poisson limit theorems for the generalized allocation scheme. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* 2019;49:77–96.

Поступила в редакцию / received: 28.12.2024; принята к публикации / accepted: 12.05.2025.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

Чупрунов Алексей Николаевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

e-mail: achuprunov@mail.ru

Яковлев Кирилл Николаевич

студент

e-mail: ktq0x@yandex.ru

CONTRIBUTORS:

Chuprunov, Alexey

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor

Iakovlev, Kirill

Student