

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ ИСХОДОВ СХЕМЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО ЯЧЕЙКАМ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)*

Рассматривается схема C размещения $r = r(k)$ неразличимых частиц по n различимым ячейкам до момента наступления события A_k , когда впервые оказывается k ($k \leq r$) непустых ячеек. Доасимптотический анализ схемы проводится авторским перечислительным методом (ПМ) по следующим направлениям: бесповторное перечисление и определение числа ее исходов, решение задачи нумерации, состоящей в установлении взаимно-однозначного соответствия между номерами и видами исходов схемы, определение вероятностного распределения на множестве ее исходов, и предлагается процедура их моделирования. Для всех других парных качеств по их различимостям составляющих схему элементов (ячеек и частиц) предлагается методика пересчета начальных результатов рассматриваемой здесь схемы C по перечислению их исходов, дающих возможность проведения для них алгоритмических исследований остальных направлений по ПМ.

Ключевые слова: обратная задача размещения; перечислительный метод; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ исходов схемы в обратной задаче размещения частиц по ячейкам // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 89–96. doi: 10.17076/mat2047

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS OF THE OUTCOMES OF THE SCHEME IN THE INVERSE PROBLEM OF ALLOCATING PARTICLES TO CELLS

National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)

We consider a scheme C of allocating $r = r(k)$ indistinguishable particles to n distinguishable cells until the occurrence of the event A_k , when for the first time there are k ($k \leq r$) non-empty cells. The pre-asymptotic analysis of the scheme is carried out by an original enumerative method (EM) along the following lines: non-repetitive enumeration and determination of the number of its outcomes, solutions to the numbering problem offinding one-to-one correspondence between the numbers and types of the scheme's outcomes, determining the probability distribution on the set of its outcomes, and a procedure for their modeling is proposed. For all other

paired qualities according to distinguishability of the elements (cells and particles) that make up the scheme, a method is proposed for recalculating the initial results of the C scheme.

Key words: inverse allocation problem; enumeration method; numbering problem; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of the outcomes of the scheme in the inverse problem of allocating particles to cells. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2025. No. 4. P. 89–96. doi: 10.17076/mat2047

ВВЕДЕНИЕ

Обратная задача о размещении частиц по ячейкам состоит в определении времени ожидания, т. е. числа r размещенных частиц, до момента выполнения определенного условия, связанного с заполнением ячеек.

В литературе широко представлены асимптотические исследования различных схем размещения частиц по ячейкам при неограниченном росте числа частиц в прямой и обратной постановках (см., например, [1–4]).

В представляемой здесь схеме размещения r частиц по ячейкам (без ограничения уровней их заполнения) анализируются все ее возможные исходы, приводящие к событию A_k , когда впервые оказывается заданное число k непустых ячеек.

Эта схема размещения r частиц по n ячейкам рассматривается во всех вариантах их парных качеств по различимости с обозначениями:

схема A – частицы и ячейки различимы;

схема B – частицы различимы, ячейки неразличимы;

схема C – частицы неразличимы, ячейки различимы;

схема D – частицы неразличимы, ячейки неразличимы.

Анализ схем проводим начиная с условий схемы C с приведением методики дальнейшего пересчета результатов для остальных схем.

Постановка задачи – изучить свойства исходов схемы C по всем направлениям пересчетного метода (ПМ) с пересчетом результатов для исходов других указанных выше схем: бесповторного их перечисления, определения их числа, решения задачи нумерации, определения их вероятностного распределения и построения процедуры их моделирования.

Основные обозначения, определения и понятия

ПМ – перечислительный метод исследования моделей по приведенным в аннотации направлениям;

МГ – представление случайного процесса перечисления исходов схемы в виде вероятностного графа;

итерация – шаг перехода в графе перечисления исходов схемы к следующему этапу (шагу) их перечисления;

траектория исхода – последовательность исходов итераций, ведущая к нему в графе от начала их перечисления;

бесповторное перечисление исходов схемы – единственность траекторий для каждого ее исхода;

пучок в графе процесса – совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;

размер пучка на каждой итерации – число переходов из каждого исхода итерации, т. е. число исходов из него на следующей итерации;

пучковая структура графа – перечисление размеров пучков всех итераций;

ЗН – задача нумерации – установление взаимно-однозначного соответствия между всеми номерами и видами исходов схемы;

ПЗН – прямая задача нумерации – нахождение вида исхода схемы по его номеру;

ОЗН – обратная задача нумерации – нахождение номера исхода схемы по его виду;

УМ – универсальный метод моделирования исходов схемы с их вероятностным распределением;

уровень заполнения ячейки – число частиц в ней.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем кратко результаты анализа основных используемых здесь схем в принятых для них обозначениях в указанных публикациях.

1.1. Перечислительный метод

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ (см. [5]). ПМ расширяет направления исследования комбинаторных схем и предлагает приемы их реализации. Его суть состоит в организации

получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области изменения параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем.

Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ) (см. [5, п. 1.1]), состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН) (см. [5, п. 1.1]), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между их номерами и видами исходов (соответственно ПЗН – прямая и ОЗН – обратная задача нумерации), и универсальное моделирование (УМ) (см. [5, п. 1.1 и Приложение А]) исходов, дающее его единый АЛГОРИТМ 1, состоящее в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению задачи нумерации, учитывающей специфику схемы.

Одним из важных приемов ПМ для получения новых результатов доасимптотического анализа комбинаторных схем является операция по перечислению (ОПП), введение которой дает возможность вычисления характеристик схем, зависящих от видов предсостояний исходов при их формировании итерационным случайным процессом как функций от них по перечислению исходов итерации получения этих предсостояний.

Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям.

1.2. Схема последовательных действий (ПД) (с числом действий k)

Схема ПД с результатом анализа в [5, п. 1.8] (с обозначением в этом пункте через k числа действий) возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Если i -е действие ($i = \overline{1, k}$) совершается d_i числом способов, то число исходов схемы $N = \prod_{i=1}^k d_i$.

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые соответственно обозначаются через R_{ij_i} , где i – номер действия, j_i – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид R_{ij_i}

определяется характером действия. Исход совершения r действий ($r \leq k$) обозначен в виде $R^{(r)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{rj_r}\}$. Тогда окончательный исход схемы получен при $r = k$.

Теорема 1. Прямая ЗН. Пусть в схеме с параметрами $d_1, \dots, d_k$ дан номер $N^{(k)}$ ее исхода. Тогда вид исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$, определяемый номерами $(j_1, \dots, j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1, k}$ находится по формуле

$$j_i = t_i + I(t_i)d_i,$$

где $t_i = N^{(i)} \bmod d_i$; $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$ и $I(Z) = 1$ при $Z = 0$;

$$N^{(i-1)} = \left\lfloor \frac{N^{(i)} + d_i - 1}{d_i} \right\rfloor,$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z и $i = k, k-1, \dots, 1$; $N^{(0)} = 1$.

Теорема 2. Обратная ЗН. Пусть в схеме с параметрами $d_1, \dots, d_k$ дан вид ее исхода $R^{(k)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{kj_k}\}$, определяющий номера $(j_1, \dots, j_k)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1, k}$. Тогда его номер вычисляется по формуле

$$N^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^k d_i + j_k.$$

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в [5, п. 1.8].

1.3. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД) (с числом действий k)

Эта схема является основной структурой, дающей общее описание процесса формирования и перечисления исходов комбинаторных схем. Исследование свойств этих исходов создает основу доасимптотического анализа комбинаторных схем по направлениям ПМ, где действиями представлены последовательные итерации случайного процесса их формирования. (Схема ПД является частным случаем схемы ОПД.)

В [5, п. 1.9] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы ОПД (с обозначением в этом пункте через k числа действий).

Схема ОПД с результатом анализа в [5, п. 1.9] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) неодинаковы, т. е. зависят от характера действия и вида предыдущего исхода. Результатом этого являются разные размеры пучков внутри итерации в графе

перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему, т. е. числа исходов из каждого состояния на следующей итерации.

Анализ схемы ОПД приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится k последовательных действий, i -е из которых ($i = \overline{1, k}$) на i -м шаге совершается $N^{(i)}$ способами. Тогда число исходов этих k действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\bar{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_{N^{(k-1)}}^{(k)})$, т. е. общее число $N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij_i} , где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из k действий и известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы, т. е. с известными числами исходов (размерами пучков) при каждом действии на каждой итерации. Под траекторией T исхода схемы понимается последовательность исходов, ведущая в графе их перечисления от начала к исследуемому на последней итерации.

Прямая и обратная задачи нумерации решены следующими теоремами.

Теорема 3. Пусть совершается k действий и задан номер исхода $N_*^{(k)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории T в содержащих их пучках $\{j_i\}$ от первой до k -й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для j_i ($i = \overline{1, k}$)

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)},$$

где все пучковые структуры действий $\bar{d}^{(i)}$ заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t : \left(\sum_{l=1}^t d_l^{(k)} = G_k \leq N_*^{(k)} \right),$$

где $\delta = 0$ при $G_k = N_*^{(k)}$ и $\delta = 1$ при $G_k < N_*^{(k)}$. Заменяя k на i , доходим по рекурренте до первого шага.

По решенной ЗН для всех действий находим из $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомым вид исхода $R_*^{(k)}$.

Теорема 4. Пусть совершается k действий и задан вид исхода $R_*^{(k)}$, где $\{j_1, \dots, j_k\}$ известные (из решенной ЗН для действий) номера исходов ПД, реализующих последовательные состояния траектории, ведущей к изучаемому исходу. Тогда его номер $N_*^{(k)}$ среди итоговых исходов схемы определяется по рекуррентной формуле при $i = k, i = \overline{1, k}$:

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.

Доказательства теорем 3 и 4 приведены в [5, п. 1.9].

2. АНАЛИЗ СХЕМЫ C

2.1. Перечисление и число $N(C)$ исходов схемы C

В схеме размещения неразличимых частиц по различным ячейкам все исходы имеют вид наборов составов уровней заполнения ячеек в порядке ячеек. Соответственно, в рассматриваемой схеме C при появлении впервые ровно k непустых ячеек после размещения r -й частицы исходы представляют определенную часть исходов общей схемы и имеют тот же вид наборов составов уровней заполнения ячеек в порядке ячеек $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$, но со следующей очевидной спецификой в составах уровней заполнения ячеек для события A_k :

а) наличия ровно k ненулевых уровней заполнения в n ячейках;

б) присутствия хотя бы одной ячейки с единичным уровнем заполнения, любую из которых (из-за неразличимости частиц) можно считать результатом размещения k -й частицы.

В связи с этой спецификой предлагается следующий АЛГОРИТМ бесповторного прямого перечисления исходов схемы C двумя этапами:

1) выбора всеми C_n^k способами k непустых ячеек из n ячеек в порядке нумерации исходов схемы сочетаний по МГ (см. [5, п. 1.1.1.1]);

2) при каждом результате этапа 1 нахождения всех исходов схемы как разности множеств исходов размещения r частиц по k ячейкам без пустых ячеек и с не менее чем двумя частицами в каждой ячейке при нулевых уровнях заполнения остальных ячеек.

Первый этап, очевидно, следует из смысла схемы C , а второй – из специфики ее исходов. Уменьшаемое в разности дает в k фиксированных ячейках все составы ненулевых уровней заполнения, а вычитаемое – исключает из них исходы, не содержащие единичных уровней.

Нумерация исходов схемы производится в порядке их формирования в схеме ПД – последовательной реализации двух представленных выше этапов их перечисления.

Пучковая структура графа перечисления исходов схемы C представляет собой последовательности размеров пучков этапов перечисления: одним пучком размера (C_n^k) первого этапа и (C_n^k) пучков второго этапа одинакового размера, не зависящего от конкретного исхода первого этапа (выбора k непустых ячеек из n), размерами каждый по $N(C)/C_n^k$, где $N(C)$ – число исходов схемы C .

Теорема 5. Число $N(C)$ исходов схемы C определяется по формуле

$$N(C) = C_n^k (C_{r-1}^{k-1} - C_{r-k-1}^{k-1}). \quad (1)$$

Доказательство. Число N исходов схемы будем находить в соответствии с процедурой перечисления исходов схемы, где сомножители в (1) являются числами исходов двух описанных выше этапов этой процедуры. Первый сомножитель не требует пояснения, а во втором сомножителе (при каждом фиксированном наборе k непустых ячеек) объясним виды численностей в уменьшаемом и вычитаемом. В уменьшаемом – числе размещений без пустых ячеек r частиц по k ячейкам в схеме сочетаний с повторением принудительно помещаем в каждую из k ячеек по одной частице, а остальные $r - k$ частиц размещаем по k ячейкам по схеме сочетаний с повторением числом способов $C_{k+r-k-1}^{r-k} = C_{r-k-1}^{k-1}$. А в вычитаемом – числе размещений с не менее чем двумя частицами в каждой ячейке – принудительно помещаем в каждую из k ячеек по две частицы, а остальные $r - 2k$ частиц размещаем по k по схеме сочетаний с повторением числом способов $C_{k+r-2k-1}^{r-2k} = C_{r-k-1}^{k-1}$. В связи с тем, что доказательство вида второго сомножителя проведено при любой фиксации k непустых ячеек, отсюда следует формула (1). $\square$

Замечание. Для вычисления числа $N = N(C)$ исходов схемы C при известных для k непустых ячеек составах их уровней заполнения – множества $\{D\}$ (как наиболее просто визуально перечисляемых исходов в схеме D с их маркировками по совпадению этих уровней $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)$) (с использованием известного

числа исходов схемы перестановок с повторением) получаем формулу для числа $N = N(C)$ исходов схемы C :

$$N = N(C) = C_n^k \sum_{\{D\}} k! / \prod_{j=1}^k \mu_j!,$$

где суммирование проводится в ПМ по ОПП (по операции сложения по перечислению) маркировок уровней заполнения ячеек по совпадению уровней во всех исходах $\{D\}$ схемы D .

Приведем числовой пример перечисления и нахождения чисел исходов схемы.

Пример 1. Пусть $n = 5$, $k = 3$, $r = 6$. По АЛГОРИТМУ перечислить исходы схемы C по шагам:

1) этот шаг совпадает с первым этапом перечисления исходов и по [5, п. 1.3] дает следующие $C_5^3 = 10$ исходов схемы сочетаний в виде номеров $k = 3$ непустых ячеек:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5),
(1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5);

2) найдем уменьшаемое второго этапа по схеме сочетаний с повторением без пустых ячеек, числом способов $C_{r-1}^{k-1} = C_5^2 = 10$ как места $(k - 1) = 2$ внутренней перегородки между $k = 3$ ячейками среди всех мест для них и $r = 6$ лежащими в ряд частицами:

(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 6),
(4, 7), (5, 7);

3) найдем вычитаемое второго этапа по схеме сочетаний с повторением, в каждой ячейке ≥ 2 частиц, числом способов $C_{r-2k+1}^{k-1} = C_2^2 = 1$ как места $(k - 1) = 2$ внутренней перегородки между $k = 3$ ячейками среди всех двух мест для них, где в каждую из $k = 3$ ячеек уже лежат по 2 частицы: (3, 6).

Результат второго этапа, т. е. все исходы схемы в $k = 3$ фиксированных непустых ячейках, дают наборы уровней заполнения ячеек в результате расстановок внутренних перегородок между непустыми ячейками по вариантам разности множеств шагов 2 и 3:

(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 6), (4, 7),
(5, 7), которые соответственно приводят к наборам уровней заполнения $k = 3$ непустых ячеек в порядке ячеек по числам мест из

$(k + r - 1) = 8$ между местами перегородок, а именно 9 исходов:

(1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 3, 1),
(3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 1).

Окончательно все исходы схемы появления события A_k получаются в виде наборов найденных выше уровней заполнения $k = 3$ непустых ячеек (в порядке ячеек) на местах этих

непустых $k = 3$ ячеек, определенных на первом этапе с расстановкой нулевых уровней на остальных $n - k = 5 - 3 = 2$ местах. Например, при уровнях заполнения $(1, 1, 4)$ $k = 3$ непустых ячеек (в порядке ячеек) на местах $(1, 2, 3)$ исход схемы имеет вид $(1, 1, 4, 0, 0)$, а на местах $(1, 2, 4) - (1, 1, 0, 4, 0)$.

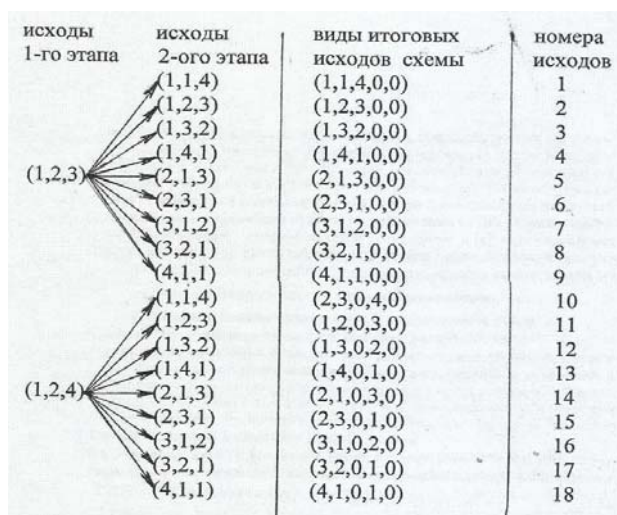
Пучковая структура графа перечисления исходов схемы в примере 1 есть: $(10), (9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9)$.

Найдем число исходов схемы по (1) и по процедуре перечисления исходов схемы.

По (1) $N = C_5^3(C_{6-1}^{3-1} - C_{6-3-1}^{3-1}) = C_5^3(C_5^3 - C_5^3) = 10 \cdot 9 = 90$.

При таком большом объеме исходов схемы C приведем фрагмент графа перечисления ее исходов для первых двух фиксаций мест непустых ячеек на рисунке.

По процедуре перечисления и по рисунку число исходов схемы N получается при каждой из 10 фиксаций мест непустых ячеек по 9 в каждом, откуда $N = 90$, что совпадает с полученным выше по (1) результатом.



Фрагмент графа перечисления исходов схемы в примере 1

A fragment of the graph of outcomes enumeration of the scheme in example 1

2.2. Решение задачи нумерации для исходов схемы C

Схема C представляет собой схему ПД (см. п. 1.2 или подробнее [5, п. 1.8]), и при изученных схеме сочетаний ([5, п. 1.3]) и известной из п. 2.1 пучковой структуре графа перечисления исходов схемы решается по теоремам 1 и 2 соответственно в прямой и обратной постановках. Проиллюстрируем решение ЗН на числовом примере.

Пример 2. Решаем ЗН в условиях примера 1 $n = 5, k = 3, r = 6$.

ПЗН. Дан номер исхода $N_* = 15$, найти вид исхода схемы R_* .

Решение. По теореме 1 из $N_* = N^{(2)} = 15$ находим

$$N^{(1)} = \left\lfloor \frac{N^{(2)} + 9 - 1}{9} \right\rfloor = 2,$$

$$j_1 = 2 \bmod 9 + 0 = 2, \quad j_2 = 15 \bmod 9 + 0 = 6.$$

Для перечисления исходов первого этапа второй исход – это $(1, 2, 4)$, а 6-й исход второго этапа – это $(2, 3, 1)$, откуда получаем искомым вид исхода $R_* = (2, 3, 0, 1, 0)$, что совпадает с результатом по рисунку.

ОЗН. Дан вид исхода $R_* = (2, 3, 0, 1, 0)$, найти номер исхода схемы $N_* = N^{(2)}$.

Решение. По теореме 2 из $R_* = (2, 3, 0, 1, 0)$ находим $j_1 = 2, j_2 = 6$, отсюда получаем $N_* = N^{(2)} = (2 - 1)9 + 6 = 15$, что совпадает с результатом по рисунку.

2.3. Установление вероятностей для исходов схемы C

При равновероятных исходах используемой здесь схемы сочетаний вероятность $P(C)$ появления исхода схемы C среди всех C_{n+r-1}^r исходов схемы размещения r неразличимых частиц по n различным ячейкам определяется отношением чисел их исходов:

$$P(C) = C_n^k(C_{r-1}^{k-1} - C_{r-k-1}^{k-1}) / C_{n+r-1}^r.$$

Организация перечисления исходов при равновероятности исходов схемы сочетаний приводит к допустимым и равновероятным исходам (см. рисунок) с вероятностями каждого, равными обратному числу их исходов. Так, в примере 1 вероятности исходов схемы C получаются равными по $1/90$.

2.4. Моделирование исходов схемы C

Его предлагается проводить УМ по шагам:

1) разыгрывание случайного номера исхода схемы C с установленным в п. 2.3 вероятностным распределением;

2) получение в качестве смоделированного исхода схемы C по результату решения ПЗН его вида по разыгранному номеру шага 1.

3. МЕТОДИКА ПЕРЕСЧЕТА ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ИСХОДОВ СХЕМ A, B, D

Полученный результат перечисления исходов схемы C в п. 2.1 дает начальную информацию для остальных схем A, B, D вида составов уровней заполнения ячеек в порядке ячеек в условиях неразличимости частиц и различимости ячеек. Учитывая отличие качеств по

различимости составляющих схему ячеек и частиц в исследуемых схемах от схем с ранее изученным перечислением исходов, предложим алгоритмические преобразования их перечислений для перечисления ее исходов. Далее при различных частицах номера частиц называем частицами.

3.1. Перечисление исходов схемы A из схемы C

В схеме A частицы и ячейки различимы. Вид исхода схемы A – составы частиц в ячейках в порядке ячеек.

Отличие схемы A от схемы C – в различимости частиц. Поэтому для перечисления исходов схемы A в схеме в графе перечисления исходов схемы C добавляется итерация деления по k ячейкам r частиц на составы ячеек численностями уровней их заполнений в заданном в схеме C порядке (число таких делений известно как число исходов схемы перестановок с повторением). Для дальнейшего анализа исходов схемы A отметим, что она представляет собой схему ОПД (см. [5, п. 1.9], или по решению ЗН см. п. 1.3)

В схеме D частицы и ячейки неразличимы. Вид исхода схемы D – составы уровней заполнения ячеек в заранее определенном порядке, например, в порядке роста уровней заполнения.

3.2. Перечисление исходов схемы B из схемы A

В схеме B частицы различимы, ячейки неразличимы. Вид исхода схемы B – составы частиц в ячейках в заранее определенном порядке, например, в порядке роста минимальной частицы в ячейке.

Отличие схемы B от схемы A – в неразличимости ячеек. Поэтому для перечисления исходов схемы B во всех исходах схемы A среди непустых ячеек упорядочивают их составы, например, по возрастанию номеров содержащихся в ячейках частиц с отбраковкой повторов в исходах.

3.3. Перечисление исходов схемы D из схемы C

В схеме D частицы и ячейки неразличимы. Вид исхода схемы D – составы уровней заполнения ячеек в заранее определенном порядке, например, в порядке роста уровней заполнения среди непустых ячеек.

Отличие схемы D от схемы C – в неразличимости ячеек. Поэтому для перечисления исходов схемы D во всех исходах схемы C среди непустых ячеек упорядочивают их составы, например, по возрастанию уровней заполнения ячеек с отбраковкой повторов в исходах.

Более подробно о пересчете результатов ПМ в схемах размещения частиц по ячейкам см. в [5, п. 2.21].

Приведем примеры таких пересчетов перечислений исходов схем A , B , D из перечисления исходов начальной схемы C .

Пример 3. Пусть в схеме C , как в примере 1, $n = 5$, $k = 3$, $r = 6$.

Предлагается производить последовательные пересчеты перечисления исходов схем следующими парами с одним отличием качества составляющих их элементов – ячеек и частиц: 1) из схемы C для схемы A , 2) из схемы A для схемы B , 3) из схемы C для схемы D .

Построим соответствующие данным исходам схемы C фрагменты перечислений исходов схем A , B , D .

1) Пересчет исходов из схемы C для схемы A

Из исхода схемы C (1,4,1,0,0) по схеме перестановок с повторением можно получить $6!/1!4!1!0!0! = 30$ исходов. Рассмотрим, например, 5 из них:

((1), (2, 3, 4, 5), (6)), ((2), (3, 4, 5, 6), (1)),
((3), (1, 2, 4, 5), (6)), ((6), (2, 3, 4, 5), (1)),
((6), (1, 2, 4, 5), (3)).

2) Пересчет исходов из схемы A для схемы B

Из исхода схемы A в 1) получим после отбраковки повторов 3 исхода схемы B :

((1),(2,3,4,5),(6)), ((1),(2),(3,4,5,6)),
((1,2,4,5),(3),(6)).

3) Пересчет исходов из схемы C для схемы D

Из 9 исходов схемы C :

(1,1,4,0,0),(1,2,3,0,0),(1,3,2,0,0),(1,4,1,0,0),
(2,1,3,0,0),(2,3,1,0,0),(3,1,2,0,0),(3,2,1,0,0),
(4,1,1,0,0)

получим после отбраковки повторов 2 исхода схемы D : (1,1,4), (1,2,3).

По очевидным исходам схемы D из замечания можно получить из них при маркировках по совпадениям уровней соответственно (2,1) и (1,1,1) число всех исходов схемы C в условиях примера:

$$N = N(k)$$

$$= C_5^3(3!/2!1! + 3!/1!1!1!) = 10(3 + 6) = 90,$$

что совпадает с ранее полученным результатом.

Выводы

1. Для изучения схемы C применен авторский перечислительный метод и получены новые результаты по всем его направлениям с добавлением новых приемов, отражающих специфику ее исходов.

2. Выведена явная аналитическая формула для числа исходов схемы C .

3. Получено вероятностное распределение исходов при фиксированном времени ожидания в схеме C .

4. Приведена методика пересчета начальных результатов анализа в виде перечисления исходов схемы C для схем A , B , D с другими парными качествами по различимости ячеек и частиц, дающая возможность проведения для них алгоритмических исследований остальных направлений по ПМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. А. Предельные теоремы в схеме размещения со случайными уровнями // Математические заметки. 1982. Т. 31, вып. 4. С. 619–631.
2. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.
3. Севастьянов Б. А. Предельные теоремы в одной схеме размещения частиц по ячейкам // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11, № 4. С. 696–700.

4. Хакимуллин Е. Р., Энатская Н. Ю. Предельные теоремы для числа пустых ячеек // Дискретная математика. 1997. Т. 9, № 2. С. 120–130.

5. Энатская Н. Ю. Доасимптотический анализ комбинаторных схем. М.: URSS, 2023. 536 с.

REFERENCES

1. Ivanov V. A. Limit theorems in an allocation scheme with random levels. *Mathematical Notes*. 1982;31(4):619–631. (In Russ.)
2. Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P. Random allocations. Moscow: Nauka; 1976. 223 p. (In Russ.)
3. Sevastyanov B. A. Limit theorems in one scheme of particles placement in cells. *Probability Theory and its Applications*. 1966;11(4):696–700. (In Russ.)
4. Khakimullin E. R., Enatskaya N. Yu. Limit theorems for the number of empty cells. *Discrete Mathematics*. 1997;9(2):120–130. (In Russ.)
5. Enatskaya N. Yu. Pre-asymptotic analysis of combinatorial schemes. Moscow: URSS; 2023. 536 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 22.12.2024; принята к публикации / accepted: 10.04.2025.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталья Юрьевна

канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента
прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor