

УДК 519.115:519.2

ОБРАТНАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В СХЕМЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ КОМПЛЕКТАМИ

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458)*

Рассматриваются схемы размещения частиц по ячейкам неразличимыми (схема *A*) и различимыми (схема *B*) комплектами с достижением заданного минимального уровня заполнения ячеек в их исходах. Анализ схем проводится перечислительным методом на основе построения итерационного случайного процесса прямого неповторного нумерованного перечисления их исходов в доасимптотической области изменения параметров по следующим направлениям: перечисления исходов и нахождения их числа, решения задачи нумерации в прямой и обратной постановках, состоящих в установлении взаимно-однозначного соответствия между номерами и видами исходов схемы, определения вероятностного распределения на множестве исходов по введенным вероятностям итерационных переходов процесса их перечисления и разработки процедуры их моделирования.

Ключевые слова: размещение частиц; минимальный уровень заполнения ячеек; задача нумерации; моделирование

Для цитирования: Энатская Н. Ю. Обратная экстремальная задача в схеме размещения частиц комплектами // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 97–106. doi: 10.17076/mat2045

N. Yu. Enatskaya. AN INVERSE EXTREME PROBLEM IN PARTICLE GROUP ALLOCATION SCHEME

*National Research University Higher School of Economics, Moscow Institute of
Electronics and Mathematics (34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia)*

The article studies the schemes of particle allocation to cells in indistinguishable (scheme *A*) and distinguishable (scheme *B*) groups with the outcomes of achieving a given minimum cell filling level. The schemes are analyzed by the enumerative method based on the construction of an iterative random process of direct non-repetitive numbered enumeration of their outcomes in the pre-asymptotic region of parameter change along the following lines: enumeration of outcomes and finding their number, solving the enumeration problem in direct and inverse formulations to establish one-to-one correspondence between the numbers and types of outcomes of the scheme, determining the probability distribution on the set of outcomes based on given probabilities of iterative transitions of the process of their enumeration, and developing a procedure for their modeling.

Keywords: particle allocation; minimum cell filling level; numbering problem; modeling

For citation: Enatskaya N. Yu. An inverse extreme problem in particle group allocation scheme. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2025. No. 4. P. 97–106. doi: 10.17076/mat2045

ВВЕДЕНИЕ

Обратная экстремальная задача о размещении частиц комплектами по ячейкам состоит в представлении всех исходов схемы (с достижением заданного минимального значения уровня заполнения (т. е. числа частиц) хотя бы в одной ячейке каждого исхода) и исследовании их свойств. Направления анализа исходов схемы определяются перечислительным методом (ПМ).

В научной литературе широко представлены результаты асимптотического анализа классической схемы размещения по ячейкам частиц комплектами (см., например, [1]).

Здесь авторским ПМ по расширенным направлениям: перечисления исходов и нахождения их числа, решения задачи нумерации, определения вероятностного распределения на множестве исходов по введенным вероятностям итерационных переходов процесса их перечисления и разработки процедуры их моделирования проводится доасимптотический анализ схем размещения по ячейкам частиц различными и неразличимыми комплектами.

Размещение по ячейкам частиц комплектами означает, что частицы каждого комплекта размещаются по разным ячейкам.

Введем параметры схем $A = A(n, r, m)$, $B = B(n, r, m)$: n – число ячеек, m – число комплектов частиц, r – размер комплекта, k – заданный минимальный уровень заполнения каждой ячейки в результате размещения m комплектов частиц по n ячейкам.

В схемах ячейки различимы, частицы комплекта неразличимы, но в схеме A комплекты неразличимы, а в схеме B – различимы, т. е., например, разных цветов, определяемых их номерами для составляющих их частиц.

Исходы схемы A представляют все составы уровней заполнения ячеек с данным минимальным значением в порядке ячеек.

Исходы схемы B представляют все составы номеров частиц в ячейках с данным минимальным значением их уровней заполнения в порядке ячеек.

Постановка задачи – провести доасимптотический анализ схем A и B по указанным в аннотации направлениям.

Основные обозначения, определения и понятия

ПМ – перечислительный метод исследования моделей по приведенным в аннотации направлениям;

МГ – представление случайного процесса перечисления исходов схемы в виде вероятностного графа;

итерация – шаг перехода в графе перечисления исходов схемы к следующему этапу (шагу) их перечисления;

траектория исхода – последовательность исходов итераций, ведущая к нему в графе от начала их перечисления;

бесповторное перечисление исходов схемы – единственность траекторий для каждого ее исхода;

пучок в графе процесса – совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;

размер пучка на каждой итерации – число переходов из каждого исхода итерации, т. е. число исходов из него на следующей итерации;

пучковая структура графа – перечисление размеров пучков всех итераций;

ЗН – задача нумерации – установление взаимно-однозначного соответствия между всеми номерами и видами исходов схемы;

ПЗН – прямая задача нумерации – нахождение вида исхода схемы по его номеру;

ОЗН – обратная задача нумерации – нахождение номера исхода схемы по его виду;

СУ – система уравнений для взаимного пересчета вероятностей исходов схемы и вероятностей итерационных переходов в графе процесса их перечисления;

УМ – универсальный (единый) метод моделирования исходов схемы с их вероятностным распределением.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь представим основные методы исследования, основные используемые далее конструкции схем и соотношения между параметрами изучаемых схем. Для остальных упоминаемых здесь ранее полученных результатов ограничимся ссылками на источники, а новые вспомогательные результаты докажем.

1.1. Перечислительный метод

В основе доасимптотического анализа рассматриваемых схем лежит ПМ (см. [2]), суть которого состоит в организации получения *качественной* информации об исходах схемы и переводе ее в *количественную* – результатов ее анализа в доасимптотической области значений параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ) (см. [2, п. 1.1]), состоящий в графическом представлении процедуры итерационного процесса перечисления исходов схемы, задача нумерации (ЗН) (см. [2, п. 1.1]), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между их номерами и видами исходов (соответственно ПЗН – прямая и ОЗН – обратная задача нумерации), СУ для взаимного пересчета вероятностей процесса перечисления исходов схемы с их итоговыми вероятностями и универсальное моделирование (УМ) (см. [2, п. 1.1 и Приложение А]) исходов, дающее его единый прием, состоящее в разыгрывании номеров исходов, виды которых определяются по решению задачи нумерации, учитывающему специфику схемы. Целью применения ПМ является изучение схем по указанным в аннотации направлениям.

1.2. Схема последовательных действий

В [2, п. 1.8] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы последовательных действий (ПД).

Схема ПД возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) одинаковы, т. е. зависят только от характера действия. Результатом этого являются одинаковые размеры пучков внутри итерации в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему, т. е. числа исходов из каждого состояния на следующей итерации.

Анализ схемы ПД приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

Пусть i -е действие ($i = \overline{1, K}$) совершается n_i числом способов.

Общее число N исходов схемы известно и задано формулой

$$N = \prod_{i=1}^K n_i.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij_i} , где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения, а конкретный вид R_{ij_i} определяется характером действия. Исход в результате совершения i действий ($i \leq K$) обозначен в виде $R^{(i)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{ij_i}\}$. Тогда окончательный исход схемы получен при $i = K$ в виде $R^{(K)} = \{R_{1j_1}, R_{2j_2}, \dots, R_{Kj_K}\}$.

Для явного перечисления исходов схемы по МГ строится случайный процесс пошагового последовательного поединичного добавления действий к исходам всех предшествующих действий, изображаемого графом.

Нумерация исходов на каждом шаге проведена в порядке роста номеров упорядоченных в схеме действий и в порядке роста номеров исходов, заданных по каждому действию, который при конкретизации действий известен.

При решении ЗН запись вида исхода на каждом шаге представляет собой траекторию переходов процесса из состояния в состояние, т. к. первый индекс каждой компоненты указывает номер шага (действия), а второй – номер исхода в пучке этого шага. Считаем решенными ЗН для схем всех действий.

Прямая задача нумерации

Теорема 1. Пусть в схеме с параметрами $n_1, \dots, n_K$ дан номер $N^{(K)}$ ее исхода. Тогда вид исхода $R^{(K)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{Kj_K}\}$, определяемый номерами $(j_1, \dots, j_K)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1, K}$ находится по формуле

$$j_i = t_i + I(t_i)n_i,$$

где $t_i = N^{(i)} \bmod n_i$; $I(Z) = 0$ при $Z \neq 0$ и $I(Z) = 1$ при $Z = 0$;

$$N^{(i-1)} = \left[\frac{N^{(i)} + n_i - 1}{n_i} \right],$$

где $[Z]$ – целая часть числа Z и $i = K, K-1, \dots, 1$; $N^{(0)} = 1$.

Обратная задача нумерации

Теорема 2. Пусть в схеме с параметрами $n_1, \dots, n_K$ дан вид ее исхода $R^{(K)} = \{R_{1j_1}, \dots, R_{Kj_K}\}$, определяющий номера $(j_1, \dots, j_K)$ исходов его компонент в пучках графа перечисления исходов схемы, при $i = \overline{1, K}$. Тогда его номер вычисляется по формуле

$$N^{(K)} = \sum_{l=1}^{K-1} (j_l - 1) \prod_{i=l+1}^K n_i + j_K.$$

1.3. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД)

Эта схема является основной структурой, дающей общее описание процесса формирования и перечисления исходов комбинаторных схем. Исследование свойств этих исходов создает основу доасимптотического анализа комбинаторных схем по направлениям ПМ, где действиями представлены последовательные итерации случайного процесса их формирования. (Схема ПД является частным случаем схемы ОПД.)

В [2, п. 1.9] приводятся результаты комбинаторного анализа схемы ОПД.

Схема ОПД с результатом анализа в [2, п. 1.9] возникает, когда каждому следующему действию подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов на каждом следующем шаге (действии) неодинаковы, т. е. зависят от характера действия и вида предыдущего исхода. Результатом этого являются разные размеры пучков внутри итерации в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему, т. е. числа исходов из каждого состояния на следующей итерации.

Анализ схемы ОПД приводит к конкретным результатам только по результатам подобных исследований комбинаторных схем действий.

В схеме проводится K последовательных действий, i -е из которых ($i = \overline{1, K}$) на i -м шаге совершается $N^{(i)}$ способами. Тогда число исходов этих K действий складывается из $N^{(K-1)}$ пучков размерами $\vec{d}^{(K)} = (d_1^{(K)}, d_2^{(K)}, \dots, d_{N^{(K-1)}}^{(K)})$, т. е. общее число $N = N^{(K)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = K$ и $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий, которые будем соответственно обозначать через R_{ij_i} , где i – номер действия, а j_i – номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из K действий и известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы, т. е. с известными числами исходов (размерами пучков) при каждом действии на каждой итерации.

Прямая и обратная задачи нумерации решены следующими теоремами.

Теорема 3. Пусть совершается K действий и задан номер исхода $N_*^{(K)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории T в содержащих их пучках $\{j_i\}$ от первой до K -й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для j_i ($i = \overline{1, K}$)

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)},$$

где все пучковые структуры действий $\vec{d}^{(i)}$ заданы и

$$N_*^{(K-1)} = \delta + \max t : \left(\sum_{l=1}^t d_l^{(K)} = A_K \leq N_*^{(K)} \right),$$

где $\delta = 0$ при $A_K = N_*^{(K)}$ и $\delta = 1$ при $A_K < N_*^{(K)}$. Заменяя K на i , доходим по рекурренте до первого шага.

По решенной ЗН для всех действий находим из $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(K)}$.

Теорема 4. Пусть совершается K действий и задан вид исхода $R_*^{(K)} = \{j_1, \dots, j_K\}$. Тогда его номер $N_*^{(K)}$ определяется по рекуррентной формуле при $i = K$, $i = \overline{1, K}$

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.

1.4. Перечисление и число N исходов в схеме размещения r неразличимых частиц по n различным ячейкам не более чем по k в каждой ячейке

Эта процедура рассмотрена в [2, п. 2.13.2], и аналитический результат фактически получен, но не представлен в виде теоремы. Поэтому для его дальнейшего использования он будет приведен здесь как утверждение теоремы с доказательством.

Процесс бесповторного перечисления исходов схемы составляет последовательную расстановку $(n-1)$ внутренних границ ячеек между лежащими в ряд r неразличимыми частицами среди $M = (n+r-1)$ мест для этих пергородок $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{n-1})$ с ограничением для последовательных расстояний между ними $\leq (k+1)$ путем выбора диапазонов варьирования их мест. Тогда составы $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_n)$ уровней заполнения ячеек будут определяться по формуле $\eta_i = t_i - t_{i-1} - 1$, $i = \overline{1, n}$, $t_0 = 0$, $t_n = n$.

Теорема 5. Допустимые значения $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{n-1})$ при $i = \overline{1, n}$, $t_0 = 0$, $t_n = M + 1$ определяются по рекуррентной формуле

$$l_i = \max(t_{i-1} + 1, r + i - k(n - i)) \\ \leq t_i \leq \min(t_{i-1} + k + 1, r + i) = L_i.$$

Число $N(r, n, k)$ исходов схемы равно сумме размеров пучков предпоследней итерации в графе перечисления исходов:

$$N(r, n, k) = \sum_j d_j,$$

где d_j – размер j -го пучка предпоследней $(n-1)$ -й итерации.

Доказательство. Для обеспечения возможности реализации схемы введем дополнительные ограничения на все упорядоченные по возрастанию элементы (места границ из $M = (n+r-1)$ между r неразличимыми частицами) $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{n-1})$, обеспечивающие ограничение уровня заполнения всех ячеек со следующим смыслом всех дополнительных условий для диапазонов их изменения при $i = \overline{1, n-1}$, $t_0 = 0$:

- 1) расстояние от предыдущего элемента не более $k+1$, откуда

$$t_i \leq t_{i-1} + k + 1; \quad (1)$$

- 2) правее значения t_i среди m мест поместятся остальные $n-1-i$ границ, откуда

$$t_i \leq M - (n - 1 - i) = r + i; \quad (2)$$

- 3) значение следующего элемента больше предыдущего, откуда

$$t_i \geq t_{i-1} + 1; \quad (3)$$

- 4) правее значения t_i среди m мест окажется мест не более, чем для $n-1-i$ остальных границ и $k(n-i)$ максимально допустимого в остальных ячейках схемы A числа частиц, откуда

$$t_i \geq M - (n - 1 - i) - k(n - i) \\ = r + i - k(n - i). \quad (4)$$

Теперь, объединяя соотношения (1) и (2) в верхнюю границу для t_i , а (3) и (4) – в нижнюю границу для t_i , получаем следующий диапазон изменения значений для t_i и, в частности, для t_1 и t_{n-1} рекурренты:

$$l_i = \max(t_{i-1} + 1, r + i - k(n - i)) \\ \leq t_i \leq \min(t_{i-1} + k + 1, r + i) = L_i. \quad (5)$$

Тогда

$$l_{n-1} = \max(t_{n-2} + 1, n + r - 1 - k) \leq t_{n-1} \\ \leq \min(t_{n-2} + k + 1, r + n - 1) = L_{n-1}. \quad (6)$$

Теперь перечисление всех исходов схемы через $\bar{t}$ будем производить последовательными действиями поединичного варьирования значений по возрастанию элементов $t_1, \dots, t_{n-1}$ в порядке роста индексов t_i в указанных в (5) и (6) зависимых по шагам перечисления исходов диапазонах. Поэтому анализ схемы будет следовать из результатов анализа обобщенной схемы последовательных действий в п. 1.3 (или [2, п. 1.9]), для которого остается указать пучковую структуру, т. е. размеры пучков в графе перечисления исходов на i -м шаге, равные $(L_i - l_i + 1)$ при поединичном варьировании значений t_{i-1} в возрастающем порядке. Таким образом, задача анализа схемы сводится к указанию пошаговой пучковой структуры графа перечисления ее исходов. Тогда число N исходов схемы равно сумме размеров пучков последнего шага графа. Число шагов равно $(n-1)$. $\square$

Перевод видов исходов схемы в терминах $\bar{t}$ в более наглядный – перечисления уровней заполнения ячеек в их порядке $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ производится по формуле $\eta_j = t_j - t_{j-1} - 1$, где $j = \overline{1, n}$, $t_0 = 0$, $t_n = m + 1$.

Поясним порядок описанного прямого перечисления исходов схемы на примере.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $r = 5$, $k = 3$. Отсюда $S = 4$, $m = 7$. Перечислим все исходы схемы, вычисляя пределы варьирования их элементов в указанных в (5) и (6) диапазонах и размеры пучков по шагам перечисления исходов:

1-й шаг:

$l_1 = \max(1, 0) \leq t_1 \leq \min(4, 6)$, откуда $1 \leq t_1 \leq 4$, размер пучка равен 4;

2-й шаг:

$l_2 = \max(t_1 + 1, 4) \leq t_2 \leq \min(t_1 + 4, 6)$, откуда при

$t_1 = 1$ получаем $4 \leq t_2 \leq 5$, размер 1-го пучка равен 2;

$t_1 = 2$ получаем $4 \leq t_2 \leq 6$, размер 2-го пучка равен 3;

$t_1 = 3$ получаем $4 \leq t_2 \leq 7$, размер 3-го пучка равен 4;

$t_1 = 4$ получаем $5 \leq t_2 \leq 7$, размер 4-го пучка равен 3.

Отсюда число исходов схемы $N = 2 + 3 + 4 + 3 = 12$.

1.5. Метод сопровождающих схем

Определим понятие сопровождающей схемы (СС) для данной, как схемы, частью исходов которой являются исходы данной схемы.

Метод сопровождающих схем (МСС) состоит в приеме пересчета отдельных результатов анализа СС по ПМ для данной схемы. Применение МСС рационально, когда эти результаты для СС или известны, или получаются проще, чем непосредственно для данной схемы.

Для пересчета результатов введем обозначения: S , S^* – соответственно сопровождающая и данная схемы, числа исходов в них – N_S и N_{S^*} , а Q – признак, выделяющий исходы схемы S^* из исходов схемы S .

Будем считать известным перечисление исходов, результаты решения ЗН и вероятности итоговых исходов в схеме S .

Перечисление исходов данной схемы производится отбраковкой исходов СС по отсутствию признака, выделяющего исходы данной схемы из ее исходов.

Решение ЗН исходов данной схемы по МСС

ПЗН. Пусть дан номер N_{S^*} исхода схемы S^* . Требуется найти его вид R_{S^*} .

Решение. В порядке перечисления исходов схемы S будем проверять для ее исходов наличие признака Q до его N_{S^*} -го выполнения. Тогда известный по ПЗН в схеме S его вид и будет искомым видом R_{S^*} .

ОЗН. Пусть дан вид R_{S^*} исхода схемы S^* . Требуется найти его номер N_{S^*} .

Решение. В порядке перечисления видов исходов схемы S будем проверять для них выполнение признака Q и после этого сравнивать их виды с данным видом ее исхода R_{S^*} схемы S^* до совпадения с ним. Тогда порядковый номер последнего такого совпадения даст искомым номер N_{S^*} .

Пересчет вероятностей итоговых исходов данной схемы по МСС

Пусть заданы вероятности исходов схемы S . Для нахождения вероятностей исходов схемы A изобразим граф бесповторного перечисления исходов схемы S с удалением всех траекторий графа, не ведущих к исходам схемы A . Тогда вероятности оставшихся траекторий, т. е. всех исходов схемы A (в графе их бесповторного перечисления), будем вычислять произведениями вероятностей составляющих их итерационных переходов. В свою очередь, эти вероятности итерационных переходов итерационно пересчитываются по пучкам их исходного графа схемы S для оставшихся после отбраковки переходов делением их вероятности в схеме S на сумму вероятностей оставшихся в пучке итерационных переходов.

1.6. Соотношения между параметрами изучаемых схем

Предполагается, что $r \leq n$, $rm \geq kn$, откуда (и из условия размещения частиц комплектами) следует, что $k \leq m$.

При заданных основных параметрах схем n , m , r для диапазонов возможных значений k и чисел i ячеек их достижений приведем леммы.

Лемма 1. $0 \leq k \leq [rm/n]$.

Доказательство очевидно по характеру схемы, т. к. $kn \leq rm$.

Лемма 2.

$$l = \max(1, n(k+1) - rm) \leq i \leq \min(n, [m(n-r)/(m-k)]) = L,$$

где i – число ячеек в исходах схемы с заданным минимальным уровнем k заполнения ячеек.

Доказательство утверждения проведем отдельно для l и L из следующих соображений:

$(rm - kn)$ частиц должно хватить (хотя бы по одной) на размещение в $(n - i)$ ячейках, откуда $rm - kn \geq (n - i)$, или $i \geq n - rm + kn$, кроме этого, по условию обязательного достижения заданного значения k хотя бы в одной ячейке, $i \geq 1$; окончательно получаем: $l = \max(1, n(k+1) - rm) \leq i$, что и утверждается;

$(rm - kn)$ частиц должны поместиться в $(n - i)$ ячейках не более чем по $m - k$ в каждой ячейке, откуда $rm - kn \leq (n - i)(m - k)$, или $i \leq m(n - r)/(m - k)$, кроме этого, $i \leq n$; окончательно получаем: $i \leq \min(n, [m(n - r)/(m - k)]) = L$, где $[Z]$ – целая часть числа Z , что и утверждается.

2. АНАЛИЗ СХЕМЫ A

2.1. Бесповторное перечисление и число исходов схемы A

В [2, п. 2.22] доказано, что исходы схемы A без нижнего ограничения на уровни заполнения ячеек совпадают с исходами схемы $A^* = A^*(n, rm, m)$ с параметрами (n, rm, m) – размещения по n различным ячейкам неразличимых rm частиц с не более чем по m частиц в каждой ячейке. Тогда исходы схемы A представляют собой часть исходов схемы $A^* = A^*(n, rm, m)$ со спецификой размещения частиц комплектами в схеме A (частицы каждого комплекта размещаются по разным ячейкам, а значит, число непустых ячеек каждого исхода $\geq r$) и требованием схемы A минимального уровня k заполнения ячеек с его достижением хотя бы в одной ячейке каждого ее исхода.

Исходы схемы A представляют собой все допустимые в ней составы уровней заполнения ячеек в порядке ячеек с данным минимальным значением k .

Процедура перечисления исходов схемы A^* известна (см. п. 1.4) и проводится по схеме ОПД п. 1.3 (или подробнее см. [2, п. 1.9]), где действиями являются последовательные варьирования диапазонов допустимых уровней заполнения ячеек, полученных из теоремы 5.

Предложим два способа бесповторного перечисления исходов схемы A .

Первый способ

Бесповторное перечисление N_A исходов схемы A будем производить этапами – последовательными действиями по АЛГОРИТМУ 1 по шагам:

1) варьруем числа $i \in (l, L)$ ячеек с уровнем заполнения, равным k по Лемме 2 п. 1.6, и перечисляем (по схеме сочетаний) i ячеек, помещая в них ровно по k частиц, а в остальные ячейки – по $k + 1$ частиц (числом способов C_n^i);

2) перечисляем (по теореме 5) уровни заполнения ячеек $\bar{n}$ (при размещении $(rm - kn - n + i)$ частиц по $(n - i)$ ячейкам с $\leq (m - k - 1)$ частицами в каждой ячейке) (числом способов $N(rm - nk - n + i, n - i, m - k - 1)$) и добавляем в них размещенные по ячейкам частицы в шаге 1).

Тогда число N_A вычисляется в соответствии с этой процедурой перечисления исходов по формуле:

$$N_A = \sum_{i=l}^L C_n^i N(rm - nk - n + i, n - i, m - k - 1), \quad (7)$$

где число $N(r, n, k)$ определено теоремой 5.

Обоснование АЛГОРИТМА 1.

Шаг 1) перебирает наборы ячеек с достижением уровня заполнения k во всех допустимых количествах i , помещая в них по k частиц, а в остальные $n - i$ ячейках по $k + 1$ частице;

шаг 2) перечисляет все исходы схемы A^* с минимальным уровнем заполнения ячеек равным k , т. е. – все исходы схемы A .

Второй способ

Для другого способа бесповторного перечисления N_A исходов схемы A предложим АЛГОРИТМ 2 по шагам:

1) считая, что в ячейках лежат по k частиц, для остальных $rm - nk$ частиц перечислим все исходы схемы $A^*(k, rm - nk, m - k)$ с известным числом N_{A^*} способов из теоремы 5, добавляя к каждому уровню в исходах по k – получаем множество исходов C_1 ;

2) считая, что в ячейках лежат по k частиц, для остальных $rm - n(k + 1)$ частиц перечислим все исходы схемы $A^*(k, rm - n(k + 1), m - k - 1)$ с известным числом N_{A^*} способов из теоремы 5, добавляя к каждому уровню в исходах по $k + 1$ – получаем множество исходов C_2 ;

3) находим искомое перечисление исходов схемы A из разности множеств $C_1 - C_2$.

Обоснование АЛГОРИТМА 2.

Шаг 1) перечисляет все исходы схемы A^* с минимальным уровнем заполнения ячеек $\geq k$;

шаг 2) перечисляет все исходы схемы A^* с минимальным уровнем заполнения ячеек $\geq k + 1$;

шаг 3) перечисляет все исходы схемы A^* с минимальным уровнем заполнения ячеек равным k , т. е. – все исходы схемы A .

Тогда число N_A вычисляется в соответствии с этой процедурой перечисления исходов по формуле:

$$N_A = C_n^k (N(k, rm - nk, m - k) - N(k, rm - n(k + 1), m - k - 1)), \quad (8)$$

где число $N(r, n, k)$ определено теоремой 5.

Таким образом, порядок нумерации бесповторного перечисления исходов схемы A производится в порядке варьирования уровней заполнения ячеек по теореме 5.

Приведем числовой пример вычисления числа исходов схемы.

Пример 2. Пусть $n = 4$, $r = 2$, $m = 6$, $k = 2$. Опишем перечисление исходов и найдем их число двумя способами – по (7) и (8).

Первый способ

Найдем диапазон значений i чисел ячеек с уровнем заполнения k по Лемме 2:

$$\begin{aligned} & \max(1, 4(2 + 1) - 12) \\ & \leq i \leq \min(4, [6(4 - 2)/(6 - 2)]), \end{aligned}$$

откуда получаем $1 \leq i \leq 3$.

При $i = 1$ имеем $C_4^1 = 4$ варианта места для единственной выделенной ячейки с двумя частицами, а в остальные три добавляем по одной частице; после этого остается $12 - 11 = 1$ частица, которую размещаем по трем невыделенным ячейкам по схеме сочетаний с повторением (без результата теоремы 3, т. к. уровни заполнения ячеек после этого не могут превышать допустимого, равного 6) $C_{3+1-1}^1 = C_3^1 = 3$ способами – получаем с $i = 1$ всего $4 \cdot 3 = 12$ исходов схемы.

При $i = 2$ имеем $C_4^2 = 6$ вариантов двух мест для двух выделенных ячеек с двумя частицами, а в остальные две добавляем по одной частице; после этого остается $12 - 10 = 2$ частицы, которые размещаем по двум невыделенным ячейкам по схеме сочетаний с повторением (без результата теоремы 3, т. к. уровни заполнения ячеек после этого не могут превышать допустимого, равного 6) $C_{2+2-1}^2 = C_3^2 = 3$ способами – получаем с $i = 2$ всего $6 \cdot 3 = 18$ исходов схемы.

При $i = 3$ имеем $C_4^3 = 4$ варианта трех мест для трех выделенных ячеек с двумя частицами, а в оставшуюся одну добавляем одну частицу; после этого остается $12 - 9 = 3$ частицы, которые размещаем в одну невыделенную ячейку по схеме сочетаний с повторением (без результата теоремы 3, т. к. уровни заполнения ячеек после этого не могут превышать допустимого, равного 6) $C_{1+1-1}^2 = C_1^1 = 1$ способом – получаем с $i = 3$ всего $4 \cdot 1 = 4$ исхода схемы.

Окончательно по (7) получаем $N_A = 12 + 18 + 4 = 34$.

Второй способ

После размещения во все четыре ячейки по две частицы остается $12 - 8 = 4$ частицы, которые будем размещать по четырем ячейкам по схеме сочетаний с повторением (без результата теоремы 3, т. к. уровни заполнения ячеек после

этого не могут превышать допустимого, равного 6) $C_{4+4-1}^4 = C_7^4 = 35$ способами – получаем 35 исходов схемы с уровнями заполнения ячеек ≥ 2 .

После размещения во все четыре ячейки по три частицы остается $12 - 12 = 0$ частиц, на этом процесс формирования исхода с уровнями заполнения ячеек ≥ 3 завершен одним способом.

Окончательно по (8) получаем $N_A = 35 - 1 = 34$, что совпадает с результатом по формуле (7).

По описанным процедурам обоих способов вычисления числа N_A здесь, в примере, легко получить перечисление всех 34 исходов схемы.

2.2. ЗН для исходов схемы A

При решенной ЗН для схемы A^* , являющейся сопровождающей схемой для схемы A , ЗН для исходов схемы A решается по МСС (см. п. 1.5).

2.3. Вероятностное распределение исходов схемы A

а) При заданном вероятностном распределении исходов СС A^* по описанной процедуре МСС находятся вероятности исходов схемы A ;

б) при заданных итерационных переходных вероятностях процесса размещения частиц комплектами по ячейкам в схеме A вероятностное распределение ее итоговых исходов находится как вероятности их траекторий.

2.4. Моделирование исходов схемы A

Его предлагается проводить по УМ с полученным по п. 2.3 вероятностным распределением ее исходов путем разыгрывания их случайных номеров, по которым из результатов решения ПЗН для исходов схемы A определяются их виды.

АНАЛИЗ СХЕМЫ B

3.1. Бесповторное перечисление исходов схемы B

Отличие схемы B от схемы A состоит в различимости комплектов. Будем обозначать все неразличимые частицы каждого комплекта номерами своих комплектов (от 1 до m). Исходы схемы представляют собой наборы частиц в ячейках в порядке ячеек с допустимыми уровнями заполнения ячеек по условию схемы, т. е. $\geq k$. Все бесповторные составы этих уровней определены в схеме A . Для бесповторного перечисления исходов схемы B строится граф итерационным случайным процессом для схемы ПД, где действиями – итерациями будут последовательные по-

единичные добавления независимых равновероятных размещений следующих комплектов частиц по ячейкам в соответствии с условиями схемы – по схеме сочетаний до последнего m -го комплекта. Получение результатов решения ЗН требует определения пучковой структуры графа данного процесса перечисления ее исходов. Она для данного перечисления исходов схемы определяется пучковой структурой i -й итерации ($i = \overline{1, m}$) с одинаковыми размерами пучков по C_n^r по всем итерациям.

При этом неповторность исходов каждой (а значит, и итоговой) итерации такого перечисления обеспечивается неизменяемыми далее, заложенными в процессе перечисления исходов отличиями:

по пучкам – в разных добавленных исходах схемы сочетаний последней размещенной на выполняемой итерации частицы,

а в пучках одной итерации – в разных наборах заполнений ячеек при размещении предшествующих комплектов.

Исходы итераций будем записывать в виде последовательностей составов частиц в ячейках в порядке нумерации ячеек через запятую, заключая в круглые скобки составы ячеек и перечисляя их через запятую в ячейке в порядке размещения комплектов.

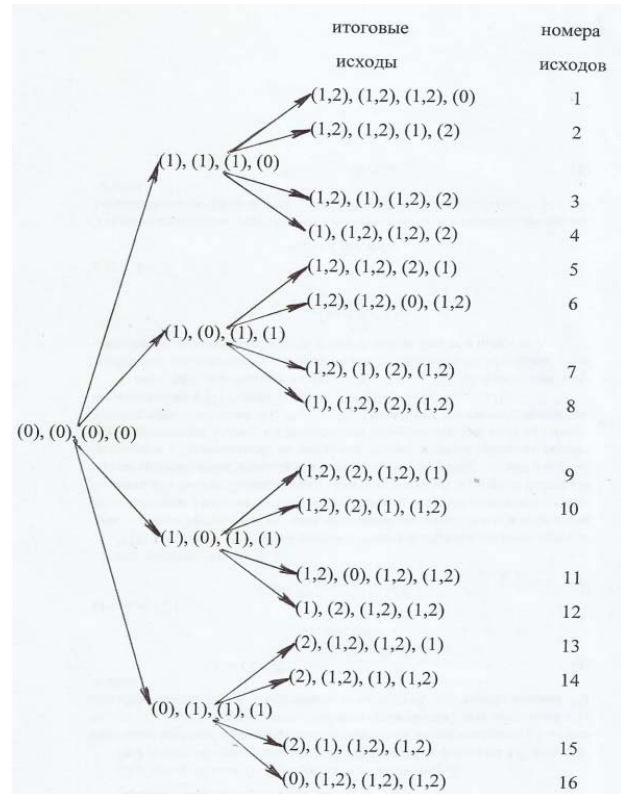
Для отражения различимости комплектов частиц при неразличимости частиц внутри каждого комплекта для описания результата исхода любой итерации перечислительного процесса исходов схемы будем далее обозначать все частицы i -го комплекта через i , где $i = \overline{1, m}$.

Таким образом, нумерация неповторного перечисления исходов схемы B производится в порядке их формирования последовательными действиями по заданной процедуре.

Приведем числовой пример наглядного графического представления и записи неповторного формирования с итогом перечисления всех разных исходов схемы.

Пример 3. Пусть $n = 4$, $r = 3$, $m = 2$. Тогда число размещений одного комплекта $C_4^3 = 4$, и они (в обозначениях наборов номеров непустых ячеек в порядке нумерации ячеек каждый и в порядке перечисления по методу графов [2]) представляют собой следующие 123, 124, 134, 234, что для i -го комплекта ($i = \overline{1, 2}$) в терминах п. 3.1 при перечислении заполнений $n = 4$ ячеек после его размещения соответствует исходам видов: $(i, i, i, 0)$, $(i, i, 0, i)$, $(i, 0, i, i)$, $(0, i, i, i)$ в данном здесь порядке. Приведенный ниже граф перечисления последовательных исходов итераций схемы размещения частиц комплектами с заданными параметра-

ми с учетом их суммирования по результатам размещения со всеми предшествующими комплектами представлен на следующем рисунке.



Граф перечисления исходов схемы
The graph of outcomes enumeration of the scheme

Здесь число N исходов схемы по рисунку совпадает с его теоретическим значением $N = (C_4^3)^2 = 16$.

3.2. Решение ЗН для исходов схемы B

Будем решать ЗН в схеме $B - S^*$ по МСС, где в качестве схемы S предлагается схема независимого последовательного m -итерационного размещения различных комплектов частиц по ячейкам без нижнего ограничения на уровни заполнения ячеек. Тогда исходы нашей схемы S^* составляют часть исходов схемы S при выполнении ограничений на уровни заполнения ячеек $\geq k$.

Эта схема S соответствует схеме ПД с действиями – итерациями последовательного поединичного добавления результатов размещения по схеме сочетаний (см. [2, п. 1.3]) комплектов частиц по ячейкам, и в общем виде решена в п. 1.2.

Схема S – это частный случай схемы ПД с совпадающими размерами по C_n^r всех пучков на всех итерациях в графе процесса перечисления ее исходов.

Приведем числовой пример решения ЗН в схеме S в условиях примера 2 с наглядной проверкой по рисунку, считая решенной ЗН для действий – схем сочетания размещения каждого комплекта (см. п. 1.2).

Пример 4. Пусть $n = 4$, $r = 3$, $m = 2$. Тогда размеры всех пучков в графе перечисления исходов схемы равны $C_4^3 = 4$.

Прямая ЗН. Пусть дан номер исхода схемы $N^* = N^{(2)} = 14$. Найти его вид $R^* = R^{(2)}$.

Граф перечисления исходов схемы S в условиях примера приведен на рисунке.

Шаги решения:

1) по данному $N^{(2)} = 14$ находим по п. 1.3 номер искомого исхода схемы в пучке 2-й итерации $j_2 = 14 \bmod 4 = 2$, чему соответствует добавляемый результат размещения второго комплекта по ячейкам вида $R^{(2)} = ((2), (2), (0), (2))$;

2) по данному $N^{(2)} = 14$ находим по п. 1.3 номер предшествующего ему исхода на первой итерации $N^{(1)} = [(14 + 4 - 1)/4] = 4$, откуда его номер в пучке первой итерации $j_1 = 4 \bmod 4 + 4 = 4$, чему соответствует его вид $R^{(1)} = ((0), (1), (1), (1))$;

3) тогда, суммируя результаты независимых размещений двух комплектов, получаем итоговый искомый вид исхода схемы $R^* = ((2), (1, 2), (1), (1, 2))$, что совпадает с результатом по рисунку.

Обратная ЗН. Пусть дан вид исхода схемы $R^* = R^{(2)} = ((2), (1, 2), (1), (1, 2))$. Найти его номер $N^* = N^{(2)}$.

Шаги решения:

1) по данному $R^{(2)} = ((2), (1, 2), (1), (1, 2))$ находим $R^{(1)} = ((0), (1), (1), (1))$, а размещение второго комплекта по ячейкам имеет вид: $((2), (2), (0), (2))$, откуда $j_1 = 4$, $j_2 = 2$;

2) по п. 1.3 получаем $N^* = N^{(2)} = (4 - 1)4 + 2 = 14$, что совпадает с результатом по рисунку.

Таким образом, ЗН в СС для схемы B решена. Пересчет ее результатов в схеме B производится по МСС.

3.3. Распределение вероятностей на множестве исходов схемы B

а) При заданном вероятностном распределении исходов СС для схемы B (размещения частиц комплектами с тем же качеством ее элементов, что и в схеме B без нижнего ограничения на уровни заполнения ячеек) по описанной процедуре МСС находятся вероятности исходов схемы B ;

б) при заданных итерационных переходных вероятностей процесса размещения частиц комплектами по ячейкам в схеме B вероятностное распределение ее итоговых исходов находится как вероятности их траекторий.

3.4. Моделирование исхода схемы B

Моделирование исхода схемы B предлагается проводить приемом УМ (см. [2]) путем разыгрывания его номера одним случайным числом с установленным вероятностным распределением и по нему и по результату решения ЗН находить вид смоделированного исхода схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 223 с.
2. Энатская Н. Ю. Доасимптотический анализ комбинаторных схем. М.: URSS, 2023. 536 с.

REFERENCES

1. Kolchin V. F., Sevastyanov B. A., Chistyakov V. P. Random allocations. Moscow: Nauka; 1976. 223 p. (In Russ.)
2. Enatskaya N. Yu. Pre-asymptotic analysis of combinatorial schemes. Moscow: URSS; 2023. 536 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию / received: 22.12.2024; принята к публикации / accepted: 10.04.2025.
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна

канд. физ.-мат. наук, доцент Департамента прикладной математики

e-mail: nat1943@mail.ru

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia

Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor