**Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 74–77**
**Transactions of the Karelian Research Centre RAS. 2025. No. 4. P. 74–77**
**DOI: 10.17076/mat2042**

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ
Original articles

*УДК 519.21*

# МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ БИНОМИАЛЬНОГО И ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**А. Н. Чупрунов, К. Н. Яковлев***

*Факультет прикладной математики, физики и информационных технологий, Чувашский государственный университет (ул. Университетская, 38, Чебоксары, Чувашская Республика, Россия, 428034), *ktq0x@yandex.ru*

Пусть случайная величина $\xi(\beta)$, $0 < \beta < R$, имеет распределение степенного ряда, $m(\beta)$ – ее математическое ожидание, $\sigma^2(\beta)$ – ее дисперсия. Здесь $R$ – радиус сходимости ряда, определяющего распределение случайной величины $\xi(\beta)$. Показано, что случайная величина $\xi(\beta)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n$, $\frac{\beta}{1+\beta}$ тогда и только тогда, когда $\sigma^2(\beta) = \frac{1}{1+\beta}m(\beta)$, $0 < \beta < R$, и $\lim\limits_{\beta\to 0+0} \frac{m(\beta)}{\beta} = n$, случайная величина $\xi(\beta)$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r$, $\beta$ тогда и только тогда, когда $\sigma^2(\beta) = \frac{1}{1-\beta}m(\beta)$, $0 < \beta < 1$, и $\lim\limits_{\beta\to 0+0} \frac{m(\beta)}{\beta} = r$.

Ключевые слова: распределение степенного ряда; биномиальное распределение; отрицательное биномиальное распределение; математическое ожидание; дисперсия

Для цитирования: Чупрунов А. Н., Яковлев К. Н. Моментные характеризации биномиального и отрицательного биномиального распределения // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 74–77. doi: 10.17076/mat2042

Финансирование. Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания Чувашского государственного университета.

**A. N. Chuprunov, K. N. Iakovlev*. MOMENT CHARACTERIZATIONS OF BINOMIAL AND NEGATIVE BINOMIAL DISTRIBUTION**

*Faculty of Applied Mathematics, Physics and Information Technologies, Chuvash State University (38 Universitetskaya St., 428034 Cheboksary, Chuvash Republic, Russia), *ktq0x@yandex.ru*

Let $\xi(\beta)$, $0 < \beta < R$, be a random variable with a power series distribution. Here, $R$ is the radius of convergence of the series that determines the distribution of the random variable $\xi(\beta)$. We will denote by $m(\beta)$ and $\sigma^2(\beta)$ the expectation and the variance of $\xi(\beta)$. It is proved that $\xi(\beta)$ has a binomial distribution with the parameters $n$ and $\frac{\beta}{1+\beta}$ if and only if $\sigma^2(\beta) = \frac{1}{1+\beta}m(\beta)$, $0 < \beta < R$, while $\lim\limits_{\beta\to 0+0} \frac{m(\beta)}{\beta} = n$, $\xi(\beta)$ has a negative binomial distribution with the parameters $r$, $\beta$ if and only if $\sigma^2(\beta) = \frac{1}{1-\beta}m(\beta)$, $0 < \beta < 1$, and $\lim\limits_{\beta\to 0+0} \frac{m(\beta)}{\beta} = r$.

Keywords: power series distribution; binomial distribution; negative binomial distribution; expectation; variance

For citation: Chuprunov A. N., Iakovlev K. N. Moment characterizations of binomial and negative binomial distribution. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS.* 2025. No. 4. P. 74–77. doi: 10.17076/mat2042

Funding. The studies were funded from the federal budget through state assignment to the Chuvash State University.

## Введение

Напомним понятие случайной величины с распределением степенного ряда. Пусть ряд $B(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!}\beta^k$ такой, что $b_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, хотя бы одно из чисел $b_k$ положительно и ряд имеет положительный радиус сходимости $R$. Случайная величина $\xi = \xi(\beta)$ имеет распределение степенного ряда, если ее распределение имеет вид

$$p_k = p_k(\beta) = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{b_k\beta^k}{k!B(\beta)},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где число $0 < \beta < R$.

**Замечание.** Пусть случайная величина $\xi(\beta)$ имеет распределение степенного ряда, определенное функцией $B(\beta)$, случайная величина $\xi'(\beta)$ имеет распределение степенного ряда, определенное функцией $CB(\beta)$, где $C > 0$ – некоторая константа. Тогда распределения случайных величин $\xi(\beta)$ и $\xi'(\beta)$ совпадают.

В [2] изучалась сходимость сумм независимых случайных величин, имеющих распределение степенного ряда. Распределениями степенного ряда являются пуассоновское распределение, биномиальное распределение, отрицательное биномиальное распределение, логарифмическое распределение и ряд других распределений, которые используются в дискретной теории вероятностей. Многие схемы дискретной теории вероятностей определяются случайными величинами, имеющими распределение степенного ряда [3]. В [4] получены некоторые аналоги принципа инвариантности для сумм независимых случайных величин, имеющих распределение степенного ряда.

В этой статье дано описание биномиального и отрицательного биномиального распределений в классе распределений степенного ряда.

## Основные результаты

Мы будем рассматривать случайные величины $\xi(\beta)$, имеющие распределения степенного ряда с одними и теми же числами $b_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2 \ldots$. Тогда их математические ожидания $m(\beta)$, дисперсии $\sigma^2(\beta)$, а также факториальные моменты

$$m_{(r)}(\beta) = \mathbf{E}\xi(\beta)(\xi(\beta)-1)\ldots(\xi(\beta)-r+1)$$

являются непрерывными неотрицательными функциями, определенными на отрезке $(0, R)$. Заметим, что $m(\beta) = m_{(1)}(\beta)$.

Факториальные моменты случайной величины, имеющей распределение степенного ряда, имеют вид (см. [2])

$$m_{(r)}(\beta) = \frac{\beta^r B^{(r)}(\beta)}{B(\beta)}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что

$$m(\beta) = \frac{\beta B'(\beta)}{B(\beta)},$$

$$\sigma^2(\beta) = \frac{\beta^2 B''(\beta)}{B(\beta)} + \frac{\beta B'(\beta)}{B(\beta)} - \left(\frac{\beta B'(\beta)}{B(\beta)}\right)^2.$$

Поэтому

$$m'(\beta) = \frac{\sigma^2(\beta)}{\beta}. \quad (2)$$

Пусть случайная величина $\xi$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n$, $p$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$$
$$= C_n^k \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k\beta^k}{(1+\beta)^n},$$

$0 \leqslant k \leqslant n$, где $\beta$ такое, что $p = \frac{\beta}{1+\beta}$, при этом $q = 1 - p = \frac{1}{1+\beta}$. Поэтому случайная величина $\xi$ имеет распределение степенного ряда, определенное функцией $B(\beta) = (1+\beta)^n$. Ее математическое ожидание и дисперсия:

$$m(\beta) = \frac{n\beta}{1+\beta}, \quad \sigma^2(\beta) = \frac{n\beta}{(1+\beta)^2}, \quad 0 < \beta.$$

Следовательно, ее математическое ожидание и дисперсия связаны соотношением

$$\sigma^2(\beta) = \frac{1}{1+\beta} m(\beta), \tag{3}$$

и

$$\lim_{\beta \to 0+0} \frac{m(\beta)}{\beta} = n. \tag{4}$$

**Теорема 1.** *Если случайная величина $\xi$ с распределением степенного ряда удовлетворяет условиям (3), (4), то она имеет биномиальное распределение с параметрами $n$, $p = \frac{\beta}{1+\beta}$.*

Пусть случайная величина $\xi$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r$, $\beta$. Тогда $\xi$ имеет распределение степенного ряда, определенное функцией $B(\beta) = \frac{1}{(1-\beta)^r}$, $0 < \beta < 1$. Ее математическое ожидание и дисперсия равны [1]:

$$m(\beta) = \frac{r\beta}{1-\beta}, \quad \sigma^2(\beta) = \frac{r\beta}{(1-\beta)^2}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{5}$$

Из (5) следует, что ее дисперсия и математическое ожидание связаны соотношением

$$\sigma^2(\beta) = \frac{1}{1-\beta} m(\beta), \quad 0 < \beta < 1, \tag{6}$$

и

$$\lim_{\beta \to 0+0} \frac{m(\beta)}{\beta} = r. \tag{7}$$

**Теорема 2.** *Если случайная величина $\xi$ с распределением степенного ряда удовлетворяет условиям (6), (7), то она имеет отрицательное биномиальное распределение с параметром $r$, $\beta$.*

*Доказательство теоремы 1.* Используя (3) и (2), составляем дифференциальное уравнение

$$m'(\beta) = \frac{1}{\beta(1+\beta)} m(\beta).$$

Поэтому

$$\ln'(m(\beta)) = \ln' \left( \frac{\beta}{1+\beta} \right)$$

и

$$m(\beta) = \frac{C\beta}{1+\beta}$$

для некоторого $C > 0$. Из (4) следует, что $C = n$. Но тогда

$$\frac{\beta B'(\beta)}{B(\beta)} = \frac{n\beta}{1+\beta},$$

$$\ln'(B(\beta)) = n \ln'(1+\beta)$$

и

$$B(\beta) = C_1 (1+\beta)^n$$

для некоторого $C_1 > 0$. С учетом замечания это влечет теорему. □

*Доказательство теоремы 2.* Используя (6) и (2), составляем дифференциальное уравнение

$$m'(\beta) = \frac{1}{\beta(1-\beta)} m(\beta).$$

Поэтому

$$\ln'(m(\beta)) = \ln' \left( \frac{\beta}{1-\beta} \right)$$

и

$$m(\beta) = \frac{C\beta}{1-\beta}$$

для некоторого $C > 0$. Из (7) следует, что $C = r$. Но тогда

$$\frac{\beta B'(\beta)}{B(\beta)} = \frac{r\beta}{1-\beta},$$

$$\ln'(B(\beta)) = -r \ln'(1-\beta)$$

и

$$B(\beta) = \frac{C_1}{(1-\beta)^r}$$

для некоторого $C_1 > 0$. С учетом замечания это влечет теорему. □

## Литература


1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Дискретные распределения. Вероятностно-статистический справочник. Одномерные распределения. М.: Ленанд, 2015. 256 с.

2. *Колчин А. В.* Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2003. Т. 18, вып. 4. С. 148–157.

3. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

4. *Чупрунов А. Н., Фазекаш И.* Принцип инвариантности для чисел частиц в ячейках обобщенной схемы размещения // Дискретная математика. 2023. Т. 35, вып. 3. С. 81–99. doi: 10.4213/dm1738

## References

1. *Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I.* Discrete distributions. Probability-statistical handbook. Univariate distributions. Moscow: Lenand; 2015. 256 p. (In Russ.)

2. *Kolchin A. V.* On limit theorems for the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications.* 2003;13(6):627–636. doi: 10.1515/156939203322733336

3. *Kolchin V. F.* Random Graphs. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342

4. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* Invariance principle for numbers of particles in cells of a general allocation scheme. *Diskretnaya matematika = Discrete Mathematics and Applications.* 2023;35(3):81–99. doi: 10.4213/dm1738 (In Russ.)



*Поступила в редакцию / received: 23.12.2024; принята к публикации / accepted: 04.04.2025.*
*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflict of interest.*



## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

**Чупрунов Алексей Николаевич**
д-р физ.-мат. наук, профессор

*e-mail: achuprunov@mail.ru*

**Яковлев Кирилл Николаевич**
студент

*e-mail: ktq0x@yandex.ru*

## CONTRIBUTORS:

**Chuprunov, Alexey**
Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor

**Iakovlev, Kirill**
Student