УДК 519.212.2+519.175.4

О СТРУКТУРЕ УСЛОВНЫХ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ГРАФОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

Ю. Л. Павлов

*Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН» (ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск,
Республика Карелия, Россия, 185910)*

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами при условии, что сумма степеней вершин ограничена сверху числом n . Степени вершин независимы и одинаково распределены по неизвестному закону, зависящему от медленно меняющейся функции и имеющему конечные математическое ожидание и дисперсию. Такие модели могут использоваться для описания различных сетей коммуникаций и топологии Интернета. В статье при $N, n \rightarrow \infty$ найдены предельные распределения максимальной степени вершины и числа вершин заданной степени.

Ключевые слова: конфигурационный граф; степень вершины; предельные распределения

Для цитирования: Павлов Ю. Л. О структуре условных конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Труды Карельского научного центра РАН. 2025. № 4. С. 54–59. doi: 10.17076/mat2041

Финансирование. Финансовое обеспечение исследований осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Yu. L. Pavlov. ON THE STRUCTURE OF CONDITIONAL CONFIGURATION GRAPHS WITH A BOUNDED NUMBER OF EDGES

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences (11 Pushkinskaya St., 185910 Petrozavodsk, Karelia, Russia)

We consider configuration graphs with N vertices under the condition that the sum of vertex degrees is bounded from above by n . The degrees of vertices are independent and identically distributed according to an unknown distribution law which depends on a slowly varying function and has finite expectation and variance. Such models can be used to describe various communication networks and Internet topology. The paper finds the limit distributions of the maximum vertex degree and the number of vertices with a given degree as $N, n \rightarrow \infty$.

Key words: configuration graph; vertex degree; limit distributions

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к исследованию случайных графов постоянно возрастает в связи с их использованием в качестве моделей сложных сетей коммуникаций (см., например, [10]). Наблюдения за реальными сетями показали, что их топология может быть описана случайными графами с независимыми одинаково распределенными степенями вершин. Более того, было замечено, что число вершин степени k при достаточно больших k пропорционально $k^{-\tau}$, где $\tau > 1$. Это значит, что распределение случайной величины ξ , равной степени произвольной вершины графа, можно представить в виде

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{h(k)}{k^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $h(k)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. Одним из наиболее подходящих для моделирования сетей графов является так называемый конфигурационный граф [9]. Случайная величина ξ в таком графе равна числу полуребер вершины, т. е. числу инцидентных ей ребер, для которых смежные вершины еще не определены. Все полуребра занумерованы в произвольном порядке. Сумма степеней вершин любого графа должна быть четной, поэтому, если она нечетна, можно добавить вспомогательную вершину единичной степени. Построение графа завершается путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом для образования ребер. В [12] отмечается, что появление вспомогательной вершины вместе с инцидентным ей ребром не влияет на асимптотическое поведение графа при стремлении числа вершин к бесконечности. Нетрудно видеть также, что такие графы могут содержать петли и кратные ребра.

В статье [5] рассматривались условные конфигурационные графы при условии, что число ребер известно. В этой работе распределение степеней вершин имело вид

$$p_k = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau > 0.$$

Такое же распределение степеней вершин рассматривалось [3] при более естественном усло-

вии, что число ребер графа неизвестно, но ограничено сверху. В статьях [2, 4] предполагалось, что при $k \rightarrow \infty$

$$p_k \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h},$$

где $d > 0$, $g > 1$, $h \geq 0$.

В этой статье мы рассматриваем конфигурационные графы, содержащие N вершин, в которых случайная величина ξ имеет распределение (1), где $\tau > 3$. Обозначим $\xi_1, \dots, \xi_N$ степени вершин $1, \dots, N$ соответственно. Эти случайные величины независимы и распределены так же, как и ξ . Такой случайный граф естественным образом индуцирует вероятностную меру на подмножестве реализаций, в которых $\xi_1 + \dots + \xi_N \leq n$. Далее мы рассматриваем условные конфигурационные графы с указанным выше ограниченным числом ребер. Обозначим $\eta_1, \dots, \eta_N$ случайные величины, равные числу степеней вершин $1, \dots, N$ в таком условном случайном графе. Понятно, что распределения этих случайных величин отличаются от распределения ξ из-за введенного ограничения, и они зависимы.

Одно из хорошо известных элементарных свойств медленно меняющихся функций состоит в том, что при $x \rightarrow \infty$ и любом $\delta > 0$

$$x^{-\delta} < h(x) < x^\delta. \quad (2)$$

Из (1), (2) получаем, что случайная величина ξ имеет конечные математическое ожидание $m = \mathbf{E}\xi$ и дисперсию $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$:

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^{\tau-1}}, \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^{\tau-2}} - m^2. \quad (3)$$

Обозначим $\eta_{(N)}$ и μ_r максимальную степень вершины и число вершин степени r соответственно. В [11] были доказаны предельные теоремы для этих случайных величин в случае, когда $h(x)$ в (1) является медленно меняющейся функцией с остаточным членом. В настоящей статье аналогичные результаты получены при условии, что если $x \rightarrow \infty$, то функция $h(x)$ не возрастает. Заметим, что в частном случае

$$h(x) = \frac{d}{\ln^\alpha x},$$

где $d > 0$, $\alpha \geq 0$, предельные распределения числа вершин заданной степени найдены в [4], а максимальной степени – в [6].

Статья организована следующим образом. Главные результаты (теоремы 1–3) формулируются в следующем разделе. В третьем разделе обсуждается связь рассматриваемой задачи с обобщенной схемой размещения частиц по ячейкам. Четвертый раздел содержит вспомогательные результаты, которые используются в последнем разделе для доказательства теорем 1–3.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$, так, что

$$\frac{n - Nm}{\sqrt{N}} \geq C > -\infty, \quad (4)$$

а $r = r(N, n)$ выбраны так, что

$$\frac{Nh(r)}{(\tau - 1)r^{\tau-1}} \rightarrow \gamma, \quad (5)$$

где γ – положительная константа. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$, $Np_r(1 - p_r) \rightarrow \infty$ и

$$\frac{n - Nm}{\sqrt{N}} \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1 - p_r)}} e^{-u_r^2/2}$$

равномерно по k таким, что $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Теорема 3. Пусть $N, n, r \rightarrow \infty$ и выполнено условие (5). Тогда для неотрицательных целых k

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1))$$

равномерно по $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом фиксированном конечном интервале.

СВЯЗЬ С ОБОБЩЕННОЙ СХЕМОЙ РАЗМЕЩЕНИЯ

Техника доказательств теорем 1–3 основана на использовании обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [1]. Нетрудно видеть, что если $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$, то

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\}$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}.$$

Это равенство означает, что выполнены условия обобщенной схемы размещения. Легко видеть также, что для нашего условного конфигурационного графа

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\}$$

$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N \leq n\}. \quad (7)$$

В статьях [7, 8] пара множеств случайных величин $(\eta_1, \dots, \eta_N)$, $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, удовлетворяющих равенству (7), названа аналогом обобщенной схемы размещения.

Введем вспомогательные случайные величины $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \leq r\}, \quad (8)$$

где $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, r$. Пусть $\tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ – случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k | \xi_i \neq r\}, \quad (9)$$

$i = 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots$. Пусть

$$\zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)},$$

$$\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \dots + \tilde{\xi}_N^{(r)} \quad (10)$$

и

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi > r\}. \quad (11)$$

В [7, 8] показано, что из (7) вытекают следующие утверждения.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} \leq n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}}.$$

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k}$$

$$\times \frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} \leq n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}}.$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для того чтобы оценить поведение $(1 - P_r)^N$ в лемме 1, рассмотрим асимптотику NP_r .

Лемма 3. В условиях теоремы 1 $NP_r \rightarrow \gamma$.

Доказательство. Из (1) и (11) следует

$$P_r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(r+i)}{(r+i)^\tau}. \quad (12)$$

Тогда

$$P_r = h(r) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(r+i)}{h(r)(r+i)^\tau}. \quad (13)$$

Очевидно, что $r \rightarrow \infty$ (см. (5)). Легко видеть, что если $i < Ar$, где $A > 0$ – константа, то равномерно по i

$$\frac{h(r+i)}{h(r)} \rightarrow 1.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(r+i)}{h(r)(r+i)^\tau} &= \sum_{i=1}^{[Ar]} \frac{1+o(1)}{(r+i)^\tau} \\ &+ \sum_{i=[Ar]+1}^{\infty} \frac{h(r+i)}{h(r)(r+i)^\tau}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при достаточно больших A сумма

$$\sum_{i=1}^{[Ar]} \frac{1}{(r+i)^\tau}$$

сколь угодно мало отличается от $(\tau-1)r^{1-\tau}$. Кроме того, поскольку $h(x)$ не возрастает,

$$\sum_{i=[Ar]+1}^{\infty} \frac{h(r+i)}{h(r)(r+i)^\tau} \leq \sum_{i=[Ar]+1}^{\infty} \frac{1}{(r+i)^\tau},$$

а последняя величина тем меньше $r^{1-\tau}$, чем больше A . Суммируя сказанное и (12), (13), приходим к выводу, что

$$P_r \sim \frac{h(r)}{(\tau-1)r^{\tau-1}}, \quad (14)$$

откуда и вытекает утверждение леммы 3. $\square$

Пусть

$$\begin{aligned} m_r &= \mathbf{E}\xi_1^{(r)}, & \tilde{m}_r &= \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)}, \\ \sigma_r^2 &= \mathbf{D}\xi_1^{(r)}, & \tilde{\sigma}_r^2 &= \mathbf{D}\tilde{\xi}_1^{(r)}. \end{aligned}$$

Из (1), (7), (8) находим

$$m_r = \frac{m - \sum_{k>r} kp_k}{1 - P_r},$$

$$\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2 + m^2 - \sum_{k>r} k^2 p_k}{1 - P_r} - m_r^2,$$

$$\tilde{m}_r = \frac{m - rp_r}{1 - p_r},$$

$$\tilde{\sigma}_r^2 = \frac{\sigma^2}{(1-p_r)^2} \left(1 - p_r - \frac{(m-r)^2}{\sigma^2} p_r \right). \quad (15)$$

Используя условие $\tau > 3$ и (1)–(3), (15), видим, что первые два момента распределений (1), (8), (9) конечны. Тогда к суммам (10) можно применить центральную предельную теорему и установить справедливость следующих утверждений.

Лемма 4. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда распределения $(\zeta_N - Nm)/(\sigma\sqrt{N})$ слабо сходятся к стандартному нормальному закону.

Лемма 5. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда распределения $(\zeta_N^{(r)} - Nm_r)/(\sigma_r\sqrt{N})$ слабо сходятся к стандартному нормальному закону.

Лемма 6. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда распределения $(\tilde{\zeta}_N - N\tilde{m}_r)/(\tilde{\sigma}_r\sqrt{N})$ слабо сходятся к стандартному нормальному закону.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1–3

Очевидно, что в условиях теоремы 1 справедливо соотношение $r \rightarrow \infty$. По аналогии с (14) нетрудно видеть, что

$$\sum_{k>r} kp_k = O\left(\frac{h(r)}{r^{\tau-2}}\right). \quad (16)$$

Из (5)

$$\frac{h(r)}{r^{\tau-2}} \sim \frac{\gamma(\tau-1)r}{N}. \quad (17)$$

и

$$r = O(N^{1/(\tau-1)}).$$

Поскольку $\tau > 3$, имеем $r = o(\sqrt{N})$. Таким образом, из (16), (17)

$$\sum_{k>r} kp_k = o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (18)$$

Следовательно, из (15) и леммы 3 находим, что

$$m_r = m(1 + o(N^{-1/2})). \quad (19)$$

Из (1) и (2)

$$r^2 p_r \rightarrow 0. \quad (20)$$

Положим

$$z_N(n) = \frac{n - Nm}{\sigma\sqrt{N}}, \quad z_N^{(r)}(n) = \frac{n - Nm_r}{\sigma_r\sqrt{N}},$$

$$\tilde{z}_N^{(r)}(n) = \frac{n - N\tilde{m}_r}{\tilde{\sigma}_r\sqrt{N}}. \quad (21)$$

Соотношение (20) вместе с (4), (15), (18), (19), (21) показывает, что в условиях теоремы 1 величины $z_N(n)$ и $z_N^{(r)}(n)$ асимптотически эквивалентны. Следовательно, из лемм 4, 5 находим, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} \leq n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}} = 1 + o(1).$$

Теперь утверждение теоремы 1 легко следует из лемм 1, 3.

В условиях теоремы 2 $k = Np_r + u_r\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ и из (23)

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{N-k}^{(r)}(n - kr) &= \frac{n - kr - (N - k)\tilde{m}_r}{\tilde{\sigma}_r\sqrt{N}} \\ &= \frac{n - Nm}{\tilde{\sigma}_r\sqrt{N}} - \frac{u_r(r - \tilde{m}_r)\sqrt{p_r(1-p_r)}}{\tilde{\sigma}_r}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (1), (2), (21) и (22) выводим, что

$$\tilde{z}_{N-k}^{(r)}(n - kr) = z_N(n)\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}_r} + O(1).$$

Следовательно, используя (6), видим, что $z_N(n)$ и $z_{N-k}^{(r)}(n - kr)$ стремятся к бесконечности одновременно и из лемм 4, 6

$$\frac{\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_{N-k}^{(r)} \leq n - kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \leq n\}} \rightarrow 1. \quad (23)$$

Используя нормальное приближение биномиального распределения при $Np_r(1-p_r) \rightarrow \infty$:

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} e^{-u_r^2/2}, \quad (24)$$

находим, что теорема 2 следует из (23), (24) и леммы 2.

Теорема 3 доказывается аналогично. Ясно, что $p_r \rightarrow 0$. Заметим, что (22) остается справедливым для рассматриваемых в теореме 3 значений k , если мы заменим u_r на $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$. Учитывая (4), (15), (20), (21), получаем

$$\tilde{z}_{n-k}^{(r)}(n - kr) \sim z_N(n).$$

Отсюда и из лемм 4, 6 опять приходим к (23). Теорема 3 следует из (23) и леммы 2, если мы используем пуассоновское приближение биномиального распределения, справедливое при $p_r \rightarrow 0$:

$$\binom{N}{k} p_r^k (1-p_r)^{N-k} \sim \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r}.$$

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за важные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматгиз, 2000. 256 с.

2. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 2. С. 120–137. doi: 10.4213/sm8832

3. Павлов Ю. Л., Хворостянская Е. В. О предельных распределениях степеней вершин конфигурационных графов с ограниченным числом ребер // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 93–110. doi: 10.4213/sm8512

4. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Предельные распределения числа вершин заданной степени конфигурационного графа с ограниченным числом ребер // Теория вероятностей и ее применения. 2021. Т. 66, вып. 3. С. 468–486. doi: 10.4213/tvp5332

5. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. doi: 10.4213/dm1008

6. Чеплюкова И. А. О максимальной степени вершины в условном конфигурационном графе // Труды Карельского научного центра РАН. 2020. № 7. С. 98–109. doi: 10.17076/mat1200

7. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122–129. doi: 10.4213/dm1203

8. Чупрунов А. Н., Фазекаш И. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 140–158. doi: 10.4213/dm1178

9. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs // Eur. J. Comb. 1980. Vol. 1, iss. 4. P. 311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8

10. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422

11. Pavlov Yu. Asymptotics of the structure of conditional configuration graphs with bounded number of links // Stochastic modeling and applied research of technology. Proceedings of the Third International Workshop SMARTY'22. 2023. Vol. 3. P. 22–29. doi: 10.57753/SMARTY.2023.49.82.003

12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol. 55, iss. 1–2. P. 3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

REFERENCES

1. Kolchin V. F. Random graphs. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 252 p. doi: 10.1017/CBO9780511721342
2. Pavlov Yu. L. Conditional configuration graphs with discrete power-law distribution of vertex degrees. *Sbornik: Mathematics*. 2018;209(2):258–275. doi: 10.1070/SM8832
3. Pavlov Yu. L., Khvorostyanskaya E. V. On the limit distributions of the degrees of vertices in configuration graphs with a bounded number of edges. *Sbornik: Mathematics*. 2016;207(3):400–417. doi: 10.1070/SM8512
4. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Limit distributions of the number of vertices of a given degree in a configuration graph with bounded number of edges. *Theory Probab. Appl.* 2021;66(3):376–390. doi: 10.1137/S0040585X97T990460
5. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*. 2008;18(5):447–463. doi: 10.1515/DMA.2008.033
6. Cheplyukova I. A. On the maximum vertex degree in a conditional configuration graph. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN = Transactions of the Karelian Research Centre RAS*. 2020;7:98–110. (In Russ.). doi: 10.17076/mat1200
7. Chuprunov A. N., Fasekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the maximum dell load. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012;22(3):307–314. doi: 10.1515/dma-2012-020
8. Chuprunov A. N., Fasekas I. An analogue of the generalised allocation scheme: limit theorems for the number of cells containing a given number of particles. *Discrete Mathematics and Applications*. 2012;22(1):101–422. doi: 10.1515/dma-2012-008
9. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *Eur. J. Comb.* 1980;1(4):311–316. doi: 10.1016/S0195-6698(80)80030-8
10. Hofstad R. Random graphs and complex networks. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press; 2017. 337 p. doi: 10.1017/9781316779422
11. Pavlov Yu. Asymptotics of the structure of conditional configuration graphs with bounded number of links. *Stochastic modeling and applied research of tecnology. Proceedings of the Third International Workshop SMARTY'22*. 2023;3:22–29. doi: 10.57753/SMARTY.2023.49.82.003
12. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks. *Perform. Eval.* 2004;55(1-2):3–23. doi: 10.1016/S0166-5316(03)00097-X

Поступила в редакцию / received: 21.12.2024; принята к публикации / accepted: 10.04.2025.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflict of interest.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Павлов Юрий Леонидович

д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник

e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

CONTRIBUTOR:

Pavlov, Yury

Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher